ISSN 1694-7452

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ

ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН

ЖАРЧЫСЫ

Илимий журнал

№1, 2022

ВЕСТНИК

ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал

Министерство Юстиции Кыргызской Республики
Свидетельство о регистрации: серия ГР № 003782
регистрационный номер 84 от 25 августа 2014 г.

BULLETEN

Osh State University

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА» МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА

Илимий журнал Кыргыз мамлекеттик китеп палатасынан
2000-жылдын 28-декабрынан каттоодон өткөн.
Жарыяланган макалалар тууралуу маалымат №564-10/2016 келишими боюнча
Россиялык илимий цитата берүү индекси менен индекстелет (РИНЦ) жана DOI
№DOI-1243/2021 келишим түзүлгөн
Жыйнактын электрондук версиясын www.oshsu.kg, elibrary.ru
сайттары аркылуу эркин кирип көрүүгө болот.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА

ТЕХНИКА

Математика, физика, техника. 2022, №1

МАТЕМАТИКА

УДК 517. 928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_5

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

Абдилазизова Акбермет Абдижалиловна.

abdilazizovaa@mail.ru.

Ош мамлекеттик университети.

Ош, Кыргызстан.

Аннотация: *Бул жумушта сингулярдык козголгон сызыктуу дифференциалдык теңдеме каралган. Туруктуулук шарты бузулган учурдагы теңдемелерди изилдөө боюнча жүргүзүлгөн дээрлик бардык эмгектерде аралыктын учтарын туташтырган деңгээл сызыктын бутактары (кесилишүүчү) жашаган учурлар каралган. Бул учурларда чексиз областтарда кароонун зарылдыгы болгон эмес. Каралып жаткан кесиндинин оң жак учун туташтыруучу деңгээл сызыктар чексиз алыстатылган чекитте кесилишет, бул чекит чексиз тартиптеги ашуу чекити болот. Чечимге кесиндинин оң жак учуна жакын чекиттерде асимптотикалык баалоону алуу үчүн чексиз областтарды кароого туура келет. Маселе интегралдык теңдемеге келтирип, удаалаш жакындашуулар методунун жардамында чыгарылган.*

Ачкыч сөздөр: *теңдеме, чектелбеген аймак, баштапкы шарт, , ашуу чекити, чечим, асимптотикалык баа.*

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Абдилазизова Акбермет Абдижалиловна.

abdilazizovaa@mail.ru.

Ошский государственный университет.

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В этой работе рассматривается сингулярно возмущенное линейное уравнение. Во всех работах посвященных исследованию уравнений, где нарушается условие устойчивости, рассмотрен случай, когда существуют ветви (пересекающие) линии уровня соединяющие концы отрезка. В этих случаях не было необходимости расматривать бесконечную область. Линии уровня соединяющие концы рассматриваемых отрезков пересекаются в бесконечно удаленной точке, которая является точкой перевала бесконечного порядка. Для получения асимптотической оценки вблизи на правых концах отрезка приходится рассмотреть бесконечную область. Задача приводится к интегральному уравнению, решается с помощью метода последовательных приближений.*

Ключевые слова: *уравнение, бесконечную область, начальное условие, точка перевала, решение, асимптотическая оценка.*

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED FIRST ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Abdilazizova Akbermet Abdijalilovna.
abdilazizovaa@mail.ru.
Osh state university
Osh, Kyrgyzstan.

Abstract: *In this paper, we consider a singularly perturbed linear equation. In all works devoted to the study of equations where the stability condition is violated, the case is considered when there are branches (intersecting) level lines connecting the ends of the segment. In these cases, it was not necessary to consider an infinite region. Level lines connecting the ends of the segments under consideration intersect at an infinitely distant point, which is a pass point of infinite order. To obtain an asymptotic estimate near at the right ends of the segment, one has to consider an infinite domain. The problem is reduced to an integral equation and solved using the method of successive approximations.*

Keywords*: equation, infinite domain, initial condition, saddle point, solution, asymptotic estimate.*

Киришүү. Ашуу чекитинин тартиби чектүү тартипте болгон учурлар жана чектелген аймакта изилдөө [1-5] эмгектерде каралган. Бул учурларда чексиз аймактарда кароонун зарылдыгы болгон эмес. Бул жумушта чектелбеген аймакта изилдөө жүргүзүлөт.

Маселенин коюлушу. Төмөндөгү сингулярдык козголгон сызыктуу теңдемени карайбыз:

$$\varepsilon x'(t) = a(t)x(t) + \varepsilon h(t), \qquad (1)$$

теңдеме

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0(\varepsilon), \qquad (2)$$

баштапкы шарты менен берилсин, мында $x(t,\varepsilon) -$ белгисиз функция.

(1)-(2) маселе

$$H_0 = \{t \in C,\, t_0 \le t_1 \le T_0,\, -\infty < t_2 < +\infty\},$$

аймагында изилденет.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

Ш 1. $\{t_0 \le t_1 < a_0 \wedge -\infty < t_2 < +\infty\}$ тилкеде $\mathrm{Re}\,a(t) < 0$,

$\{t_1 = a_0 \wedge -\infty < t_2 < +\infty\}$ түз сызыгында $\mathrm{Re}\,a(t) = 0$,

$\{a_0 < t_1 \le T_0 \wedge -\infty < t_2 < +\infty\}$ тилкеде $\mathrm{Re}\,a(t) > 0$ болсун.

Ш 2. $\forall t_0 \in H,\, a(t), h(t) \in \Phi(H_0) \wedge \mathrm{Im}\,a(t) > 0.$

Ш 3. $t \to \infty$ болгондо $h(t) = \frac{1}{|t|^k}, k > 1.$

(1)-(2) маселенин чечиминин асимптотикалык өзгөрүшүн H_0 аймагында изилдөө маселесин карайлы.

$t = t_1 + it_2$ болгон учурда $\int_{t_0}^{t} a(s)ds$ функциясынын чыныгы бөлүгүн

$$u(t_1, t_2) = \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t} a(s)ds,$$

түрдө белгилейбиз.

Төмөнкүдөй аныктамаларды келтиребиз:

1-аныктама. $f(t)$ функциясы үчүн t_0 чекитиндеги функциянын туундулары $f'(t_0) = 0, f''(t_0) = 0, ..., f^{(n)}(t_0) = 0, f^{(n+1)}(t_0) \ne 0$ болсо, анда t_0 чекити *n*-тартиптеги ашуу чекити деп аталат.

2-аныктама. Эгерде ∞ чекитте $\operatorname{Re}F(t)$ жана функциянын чексиз сандагы деңгээл сызыктары кесилишсе, анда бул чекит чексиз тартиптеги ашуу чекити деп аталат.

Каралып жаткан теңдеменин чектелбеген аймакта кароо зарылчылыгын мисалдар аркылуу беребиз.

1-мисал. (1) теңдемеде $a(t)=2(t+i), t\in C$ болсун.

$A(t)$ функциясын төмөндөгүдөй аныктайбыз:

$$A(t)=2\int_{-i}^{t}(\tau+i)d\tau=\left(t+i\right)^2.$$

$\operatorname{Re}A(t)=t_1^2-\left(t_2+1\right)^2=c$ деңгээл сызыктарды алалы. $\operatorname{Re}A(t)=0$ деңгээл сызык $\left(0,-1\right)$ чекитинде бутактанат жана тегиздикти төрт бөлүккө бөлөт. Бул учурда $(-1,0),(1,0)$ чекиттерин туташтырган бир гана деңгээл сызыктын бутактары (0, -1) чекитинен өтүшү маанилүү жана чексиз аймакты кароонун зарылчылыгы жок. Чокулары (-1, 0), (1,0), (0, -1) болгон үч бурчтукту кароо жетиштүү.

Бул мисалда $t=-i$ чекити экинчи тартиптеги ашуу чекити болот.

2-мисал. (1) теңдемеде $a(t)$ функциясы $a\left(t\right)=-e^{-it}$ түрүндө берилсин. $a\left(t\right)=-\cos t+i\sin t,\ 0\le t\le\pi$ аралыкты карайлы.

(1) теңдеменин тең салмактуулук абалынын туруктуулук шарты $\left[0,\pi\right]$ аралыгында өзгөрөт:

$$0\le t<\frac{\pi}{2}:\operatorname{Re}a(t)<0,\quad t=\frac{\pi}{2}:\operatorname{Re}a(t)=0,\quad \frac{\pi}{2}\le t<\pi:\operatorname{Re}a(t)>0.$$

Бул учурда $A(t)=-\int_0^t e^{-i\tau}d\tau=\frac{1}{i}\left(e^{-it}+1\right)$ түрүндө аныкталат. Мындан $t=t_1+it_2$ болгондо $\operatorname{Re}A(t)=-e^{-t_2}\,\mathrm{s}int_1=u(t_1,t_2)$.

$u(t_1,t_2)=\mathrm{Re}A(t)$ функциясынын деңгээл сызыктарын колдонуу менен изилдөөлөрдү жүргүзүү үчүн, $H_0=\{t\in C,\, 0<t_1<\pi,\, -\infty<t_2<+\infty\}$ чексиз тилкесинде кароого туура келет.

3-мисал. (1) теңдемеде $a(t)$ функциясы $a(t)=-e^{it}$ болсун. Анда $a(t)=-\cos t-i\sin t$ ээ болобуз. $0\le t\le\pi$ аралыгында $\mathrm{Re}a(t)$ өз белгисин терстен оңго өзгөртөт жана $\mathrm{Re}a\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

$u(t_1,t_2)=-e^{-t_2}\,\mathrm{s}int_1$ болот.

4-мисал. (1) теңдемеде $a(t)$ функциясы $a(t)=e^{it}$ болсун. $a(t)=\cos t+i\sin t$ болгондуктан, t нын чыныгы маанилери $[\pi,2\pi]$ аралыгында $\mathrm{Re}a(t)$ өз белгисин өзгөртөт.

Биз жогоруда караган 2-4 мисалдарда туруктуулук шарт аткарылбаган кесиндинин учтары аркылуу өткөн деңгээл сызыктын бутактары чексиздикте кесилишет жана бул чекит $u(t_1,t_2)$ функциясы үчүн чексиз тартиптеги ашуу чекити (точка перевала) болот.

Чечим үчүн кесиндинин оң жак учуна жакын чекиттерде асимптотикалык баалоону алуу үчүн чексиз областарды кароого туура келет.

(1)-(2) маселе төмөнкү интегралдык теңдеме менен тең күчтүү болот:

$$x(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)x_0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau\,, \tag{3}$$

мында $E(t,t_0,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)$, $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)$.

$t_2=\phi(t_1)$ функциясы $u(t_1,t_2)=at_1+b$ теңдеменин чечими катары аныкталат, мында $a=\frac{c_1-c_2}{t_{01}-T_1},\, b=\frac{c_2t_{01}-c_1T_1}{t_{01}-T_1}$ ([2] эмгектин 4-леммасы).

$t_2 = \phi(t_1)$ функциясы менен аныкталган ийрини K деп белгилейбиз.

K ийриси $c_1 = \varepsilon \ln \varepsilon, c_2 = 2\varepsilon \ln \varepsilon$ болгон деңгээл сызыктар менен аныкталган аймакты $H_1 \subset H_0$ деп белгилейли. H_1 чектелбеген аймак болот.

$c_1 = -\frac{1}{2}\delta, c_2 = -\delta,$ мында $\delta - const,$ $0 < \delta << 1$ болсун. Бул учурда аймакты $H_2 \subset H_0$ деп кабыл алабыз. H_2 аймагы да чектелбеген болот.

Турактуулар $c_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon, c_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^p$ болсун, мында $0 < p < 1$. Аймакты $H_3 \in H_0$ түрүндө белгилеп алабыз. H_3 аймагы да чектелбеген болот.

$\tilde{K} = \Delta \cup K$ болсун, мында $\Delta = \{(t_1, t_2) : t_0 \le t_1 \le t_{01}, t_2 = 0\}$.

Эгерде $(t_1, t_2) \in \Delta\ (t = t_1, t_2 = 0)$ болсо, анда l жолу $(t_0, 0)$, $(t_1, 0)$ $(t_0 \le t_1 \le t_{01})$ чекиттерин туташтырган сызык болот. Бул учурда $\mathrm{Re}\, a(t) \le -a_1,\ a_1 > 0 - const$.

(t_1, t_2) чекиттери K ийрисинде жатканда интегралдоо жолун төмөндөгүдөй аныктайбыз: $l = \bigcup_{k=1}^{3} l_k$, мында $l_1 - (t_0, 0)$, $(t_{01}, 0)$ чекиттерин туташтырган кесинди болот,

$l_2 -$ $(t_{01}, 0)$, $\left(t_1, t_2^* = \tilde{\phi}(t_1)\right)$ чекиттер аркылуу өтүүчү сызык,

$l_3 -$ $\left(t_1, t_2^*\right)$ жана (t_1, t_2) чекиттерин туташтырат. Бул жерде $(t_1, t_2) \in K$ болсо, t_1 үчүн $\left(t_1, t_2^* = \phi(t_1)\right)$ болгон жалгыз гана чекит жашайт.

(3) теңдеменин чечимине баалоолорду Ш 2-Ш 3 шарттарды эске алуу менен жүргүзөбүз.

Эсептөөлөрдүн негизинде төмөндөгүдөй теоремалар далилденет:

1-теорема. Ш 1-Ш.3 шарттары аткарылсын, анда $\tilde{K} = \Delta \cup H_1$ аймагында (1) - (2) маселенин жалгыз чечими жашайт жана

$$\left| x(t,\varepsilon) \right| \le c\omega(\varepsilon)\frac{1}{1 - c\delta_0(\varepsilon)},$$

баалоосу орун алат, мында $\delta_0(\varepsilon) = \dfrac{1}{\left|\ln\varepsilon\right|}$, $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\,, c - const$.

2-теорема. Ш 1-Ш 3 шарттар аткарылсын, анда $\tilde{K} = \Delta \cup H_2$ аймагында (1) - (2) маселенин жалгыз чечими жашайт жана $\left| x(t,\varepsilon) \right| \le c\omega(\varepsilon)$ баалоосу орун алат.

3-теорема. Ш 1-Ш 3 шарттар аткарылса, анда $\tilde{K} = \Delta \cup H_3$ аймагында (1) - (2) маселенин жалгыз чечими жашайт жана $\left| x(t,\varepsilon) \right| \le c\varepsilon^{1-p}$ баалоосу орун алат.

Корутунду. Чектелбеген аймакта козголгон жана козголбогон тендеменин чечиминин асимптотикалык жакындыгы көрсөтүлдү.

Литература

1. Акматов, А.А. Исследование решений синглярно возмущенной задачи [Текст] / А.А. Акматов - Вестник ОшГУ. Ош,2021. С 21-27.
2. Алыбаев, К.С. Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости[Текст] / К.С. Алыбаев - Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. - Бишкек, 2001. – 204 с.
3. Каримов, С.К. Равномерное приближение решения сингулярно возмущенной задачи в особо критическом случае[Текст] / С.К. Каримов - Ош, 2019, – 203с.
4. Каримов, С. Асимптотические оценки решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае[Текст] / С. Каримов, А.А. Абдилазизова.// Наука и новые технологии. Бишкек, 2019, № 6. С. 9-16.
5. Каримов, С. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости[Текст] / С. Каримов, А.А. Абдилазизова.// Москва, 2007. №4. С. 13-16.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517. 956

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_12

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Абдумиталип уулу Кубатбек, преподаватель
kuba@oshsu.kg
Асылбеков Таалайбек Дүкөнбаевич, к. ф.- м. н., доцент
atd5929@mail.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Доказаны существование и единственность решения краевой задачи в прямогульнике для параболического уравнения четвертого порядка с переменным коэффициентом при младшом члене. Прямая y=const является четырехкратной характеристикой заданного уравнения. Методом понижения порядка уравнения, рассматриваемая задача сводится к первой краевой задаче для уравнения теплопроводности и краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. С помощью функции Грина получены представления решения рассматриваемых задач. Для доказательства единственности решения второй краевой задачи использован метод интегралов эн ергии. Приведен пример, в котором указана явный вид построенной функции Грина.*

Ключевые слова: *краевые задачи, существование, единственность, функция Грина, параболическое уравнение, уравнение четвертого порядка.*

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ПАРАБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕ

Абдумиталип уулу Кубатбек, окутуучу
kuba@oshsu.kg
Асылбеков Таалайбек Дүкөнбаевич, доцент, ф.-м.и. к.,
atd5929@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Өзгөрмөлүү кенже мүчөсү бар төртүнчү тартиптеги параболалык теңдеме үчүн тик бурчтукта чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген. y=const түз сызыгы берилген теңдеменин төрт эселүү характеристикасы болот. Теңдеменин даражасын төмөндөтүү методу менен каралып жаткан маселе жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси үчүн биринчи чек аралык маселеге жана кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн чек аралык маселеге келтирилген. Гриндин функциясы методун колдонуу менен каралуучу маселелердин чечимдеринин көрүнүштөрү алынган. Экинчи маселенин чечиминин жалгыздыгын далилдөөдө* *интегралдар энергиясы методу колдонулган. Гриндин функциясынын айкын түрдөгү көрүнүшү так аныкталган мисал келтирилген.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, жашашы, жалгыздыгы, Грин функциясы, параболалык теңдеме, төртүнчү даражадагы теңдеме.*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A FOURTH ORDER PARABOLIC TYPE EQUATION

Abdumitalip uulu Kubatbek, lecturer
kuba@oshsu.kg
Asylbekov Taalaibek Dukonbaevich, Ph.D., Associate Professor
atd5929@mail.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem in a rectangle for a fourth-order parabolic equation with a variable coefficient at the lowest term are proved. The straight line y=const is a quadruple characteristic of the given equation. By the method of lowering the order of the equation, the problem under consideration is reduced to the first boundary value problem for the heat equation and the boundary value problem for the second order ordinary differential equation. With the help of the Green's function, representations of the solution of the problems under consideration are obtained. To prove the uniqueness of the solution of the second boundary value problem, the method of energy integrals is used. An example is given in which the explicit form of the constructed Green's function is indicated.*

Keywords: *Boundary value problems, existence, uniqueness, Green's function, parabolic equation, fourth order equation.*

В области $D_1 = \{(x,y): 0 < x < \ell,\ 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$L_1 L_2 u = 0, \qquad (1)$$

где

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c(x,y),$$

а $c(x,y)$ - заданная функция.

Уравнение (1) по классификации работы [1] называется уравнением параболического типа, так как уравнение характеристик $(dy)^4 = 0$ имеет четырех кратный действительный корень и характеристика которого является прямая $y = const.$

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y) \in C^{2+0}\left(\overline{D_1}\right) \cap C^{2+1}\left(D_1\right) \cap$, $\cap C^{4+0}\left(D_1\right)$ удовлетворяющее в области D_1 уравнению (1), краевым условиям

$$u(0,y) = \tau(y),\ u(\ell,y) = \varphi_1(y),\ 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,y) = \mu(y),\ u_{xx}(\ell,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \tag{3}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{4}$$

Причем выполняются следующие условия гладкости

$$\begin{aligned} &\tau(y),\ \mu(y),\ \varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C\left[0,h\right], \\ &c(x,y) \in C\left(D_1\right),\ \psi\left(x\right) \in C^2\left[0,\ell\right] \end{aligned} \tag{5}$$

и условия согласования

$$\tau(0) = \psi(0),\ \varphi_1(0) = \psi(\ell),\ \mu(0) = \psi''(0),\ \varphi_2(0) = \psi''(\ell). \tag{6}$$

Краевые задачи для уравнения $L_2 L_1 u = 0$ в прямоугольнике D_1 изучены в работах [2, 3].

Введем новую неизвестную функцию $\vartheta(x,y)$ следующим образом:

$$L_3 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\left(x,y\right)u = \vartheta(x,y),\ (x,y) \in D_1. \tag{7}$$

Тогда для $\vartheta(x,y)$ получаем первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0,\ (x,y) \in D_1, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\vartheta(0,y) = \chi_1(y),\ \vartheta(\ell,y) = \chi_2(y), 0 \le y \le h, \\ &\vartheta(x,0) = \psi_1(x),\ 0 \le x \le \ell, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\chi_1(y)=\mu(y)+c(0,y)\tau(y),\ \chi_2(y)=\varphi_2(y)+c(\ell,y)\varphi_1(y),$$
$$\psi_1(x)=\psi''(x)+c(x,0)\psi(x).$$

Отметим также, что из (6) вытекает следующие условия согласования:

$$\chi_1(0)=\psi_1(0),\ \chi_2(0)=\psi_1(\ell).$$

Решение задачи (8), (9) известно, и представимо в виде [4]

$$\vartheta(x,y)=\int\limits_0^y G_\xi\left(x,y;0,\eta\right)\chi_1\left(\eta\right)d\eta-\int\limits_0^y G_\xi\left(x,y;\ell,\eta\right)\chi_2\left(\eta\right)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^\ell G_\xi\left(x,y;\xi,0\right)\psi_1\left(\xi\right)d\xi, \qquad (10)$$

где $G\left(x,y;\xi,\eta\right)$ - функция Грина, которая имеет вид

$$G\left(x,y;\xi,\eta\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\left(y-\eta\right)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left(-\frac{\left(x-\xi+2n\ell\right)^2}{4\left(y-\eta\right)}\right)-\exp\left(-\frac{\left(x+\xi+2n\ell\right)^2}{4\left(y-\eta\right)}\right)\right]$$

После определения $\vartheta(x,y)$, задача 1 сводится к решению следующей задаче.

Задача 2. Найти решение уравнения (7), удовлетворяющее краевым условиям (2).

Сначала докажем единственность решения задачи 2. Имеет место теорема.

Теорема 1. Если

$$\forall(x,y)\in\overline{D_1}: c(x,y)\le 0, \qquad (11)$$

тогда решение задачи 2 единственно.

Для доказательство теоремы 1, рассмотрим однородную задачу:

$$L_3 u=0,\ \left(x,y\right)\in D_1, \qquad (12)$$

$$u(0,y)=0,\ u(\ell,y)=0,\ 0\le y\le h. \qquad (13)$$

Умножая уравнение (12) на $u(x,y)$ и проинтегрируя полученное равенство по x в пределах от 0 до ℓ имеем

$$\int_0^\ell uL_3u\,d\xi \equiv \int_0^\ell \left[u_x^2(x,y)-c(x,y)u^2(x,y)\right]dx \equiv 0\,. \tag{14}$$

При выполнении условия (11) из тождества (14) заключаем, что $u(x,y)=A(y)$, где $A(y)$ - произвольная функция. Отсюда заключаем, что для выполнения условия (13), должно быть $\forall y\in[0,h]:A(y)\equiv 0.$ Следовательно $\forall(x,y)\in\overline{D_1}:u(x,y)\equiv 0.$ Теорема доказана.

Для доказательства существования решения задачи 2 введем новую неизвестную функцию $w(x,y)$, следующим образом:

$$w(x,y)=u(x,y)-u_0(x,y), \tag{15}$$

где

$$u_0(x,y)=\frac{\ell-x}{\ell}\tau(y)+\frac{x}{\ell}\varphi_1(y).$$

Нетрудно заметить, что $u_0(x,y)$ является решением уравнения (12), удовлетворяющее краевым условиям (2).

Тогда для определения $w(x,y)$ получаем следующую задачу

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}+c(x,y)w(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in D_1$$

(16)

$$w(0,y)=0,\ w(\ell,y)=0,\ 0\le y\le h, \tag{17}$$

где

$$f(x,y)=\vartheta(x,y)-c(x,y)u_0(x,y).$$

Решение задачи (16), (17) представим в виде

$$w(x,y)=\int_0^\ell G_1(x,\xi,y)f(\xi,y)d\xi, \tag{18}$$

где $G_1(x,\xi,y)$ - функция Грина [5], удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\forall\xi\in(0,\ell):G_1(x,\xi,y)$ удовлетворяет уравнению

$L_{3x}G_1(x,\xi,y)=0, 0<x<\ell;$

2) $G_1(x,\xi,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$G_1(0,\xi,y)=0,\ G_1(\ell,\xi,y)=0,\quad \forall\xi\in[0,\ell],\forall y\in[0,h];$

3) $G_1(x,\xi,y)$ непрерывна в области $[0,\ell]\times[0,\ell]\times[0,h],$ а

производная по x терпит разрыв при $x=\xi$:

$$\begin{gathered}G_1(\xi+0,\xi,y)=G_1(\xi-0,\xi,y),\\ G_{1x}(\xi+0,\xi,y)-G_{1x}(\xi-0,\xi,y)=1.\end{gathered}$$

Функция Грина представимо в виде [4]

$$G_1(x,\xi,y)=\begin{cases}\dfrac{y_1(x,y)\cdot y_2(\xi,y)}{\omega(\xi,y)},\ 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{y_1(\xi,y)\cdot y_2(x,y)}{\omega(\xi,y)},\ \xi\le x\le\ell,\end{cases}$$

где $y_1(x,y)$ и $y_2(x,y)$ - линейно независимые решения однородного уравнения (16), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered}y_1(0,y)=0, y_1(\ell,y)\ne 0,\\ y_2(0,y)\ne 0, y_2(\ell,y)=0,\end{gathered}$$

а $W(\xi,y)-$ определитель Вронского:

$$W(\xi,y)=y_1(\xi,y)y_2'(\xi,y)-y_1'(\xi,y)y_2(\xi,y)\ne 0.$$

Тогда решение задачи 1 имеет вид

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int_0^\ell G_1(x,\xi,y)f(\xi,y)d\xi. \tag{19}$$

Теорема 2. Если выполняются условия (5), (6) и (11), тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Пример 1. Пусть $c(x,y)=-\lambda^2(y+1)^2, \lambda\ne 0.$ Тогда условие (11) выполняется. Функцию Грина будем искать в виде

$$G_2\left(x,\xi,y\right)=\begin{cases}A_1\,y_1(x,y),\ 0\le x\le\xi,\\ A_2\,y_2(x,y),\ \xi\le x\le\ell,\end{cases}$$

где $y_1(x,y)=sh\left[\lambda\left(y+1\right)x\right],\ y_2(x,y)=sh\left[\lambda\left(y+1\right)\left(x-\ell\right)\right],$ а A_1,A_2 – произвольные константы. Так как

$$y'_{1x}(x,y)=\lambda\left(y+1\right)ch\left[\lambda\left(y+1\right)x\right],$$
$$y'_{2x}(x,y)=\lambda\left(y+1\right)ch\left[\lambda\left(y+1\right)\left(x-\ell\right)\right],$$

то определитель Вронского имеет вид

$$\forall y\in[0,h]:W(y)=\lambda\left(y+1\right)sh\left[\lambda\left(y+1\right)\ell\right]\ne 0.$$

Следовательно, функция Грина представимо в виде

$$G_2\left(x,\xi,y\right)=\begin{cases}\dfrac{sh\left[\lambda\left(y+1\right)x\right]sh\left[\lambda\left(y+1\right)\left(\xi-\ell\right)\right]}{\lambda\left(y+1\right)sh\left[\lambda\left(y+1\right)\ell\right]},\ 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{sh\left[\lambda\left(y+1\right)\xi\right]sh\left[\lambda\left(y+1\right)\left(x-\ell\right)\right]}{\lambda\left(y+1\right)sh\left[\lambda\left(y+1\right)\ell\right]},\ \xi\le x\le\ell.\end{cases}$$

Тогда решение задачи 1, согласно формуле (19), имеет вид

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int_0^\ell G_2(x,\xi,y)f(\xi,y)\,d\xi,$$

где $u_0(x,y)=\dfrac{\ell-x}{\ell}\tau(y)+\dfrac{x}{\ell}\varphi_1(y),\quad f(x,y)=\vartheta(x,y)-\lambda^2\left(y+1\right)^2u_0(x,y)$,

$$\vartheta(x,y)=\int_0^y G_\xi\left(x,y;0,\eta\right)\chi_1\left(\eta\right)d\eta-\int_0^y G_\xi\left(x,y;\ell,\eta\right)\chi_2\left(\eta\right)d\eta+$$

$$+\int_0^\ell G_\xi\left(x,y;\xi,0\right)\psi_1\left(\xi\right)d\xi,\quad \psi_1(x)=\psi''(x)-\lambda^2\psi(x$$

$$\chi_1(y)=\mu(y)-\lambda^2\left(y+1\right)^2\tau(y),\quad \chi_2(y)=\varphi_2(y)-\lambda^2\left(y+1\right)^2\varphi_1(y).$$

Литература

1. Джураев, Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

2. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев - Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.

3. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов - Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
4. Полянин, А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д. Полянин – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. -576 с.
5. Денисов, А.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / А.М. Денисов, А.В Разгулин – М.: МГУ, 2009. -114 с.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.956.6

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_20

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

Абдумиталип уулу Кубатбек, преподаватель
kuba@oshsu.kg
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Доказаны существование и единственность решения краевой задачи на плоскости для уравнения четвертого порядка, содержащий произведение смешанного параболо-гиперболический оператора второго порядка и обыкновенного дифференциального оператора первого порядка по x с линией изменения типо y=0. Граничные данные задаются на линиях x=0, x=l и x=-y. Методом понижения порядка уравнения рассматриваемая задача при y>0 сводится к решению первой краевой задачи в прямоугольнике для уравнения теплопроводности, а при y<0 в характеристическом треугольнике к задаче для уравнения колебания струны. В прямоугольнике методом функции Грина получена представление решения задачи в явном виде. Применяя метод общих решений уравнения колебания струны найдена явный вид решение задачи при y<0.*

Ключевые слова: *краевые задачи, параболо-гиперболический оператор, единственность, существование, функция Грина, уравнение четвертого порядка.*

ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛАЛЫК ОПЕРАТОРДУ КАМТЫГАН ТӨРТҮНЧҮ ДАРАЖАДАГЫ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

Абдумиталип уулу Кубатбек, окутуучу
kuba@oshsu.kg
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Тегиздикте өзгөрүү сызыгы y=0 болгон экинчи тартиптеги аралаш параболалык-гиперболалык оператор менен биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык оператордун көбөйтүндүсүнөн турган төртүнчү тартиптеги теңдеме үчүн чекаралык маселенин чечүминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген. Чекаралык шарттары x=0, x=l жана x=-y сызыктарында берилген. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү методун колдонуу менен y>0 үчүн каралып жаткан маселе жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси үчүн тик бурчтуктагы биринчи чек аралык маселени чечүүгө, ал эми y<0 болгондо характеристикалык үч бурчтуктагы маселеге келтирилет. Грин функциясы методу менен тик бурчтукта маселенин чечиминин айкын түрдөгү формасы табылган. Кылдын термелүү теңдемесинин жалпы* *чечимдеринин ыкмасын колдонуу менен y<0 үчүн маселенин чыгарылышынын айкын формасы табылган.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, парабола-гиперболалык оператор, жашашы, жалгыздыгы, Грин функциясы, төртүнчү даражадагы теңдеме.*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A FOURTH-ORDER EQUATION CONTAINING A PARABOLIC-HYPERBOLIC OPERATOR

Abdumitalip uulu Kubatbek, lecturer
kuba@oshsu.kg
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem on the plane for a fourth-order equation containing the product of a mixed second-order parabolic-hyperbolic operator and a first-order ordinary differential operator in x with a variation line like y=0 are proved. Boundary data is set on the x=0, x=l and x=-y lines. Using the method of lowering the order of the equation, the problem under consideration for y>0 is reduced to solving the first boundary value problem in a rectangle for the heat equation, and for y<0 in the characteristic triangle, to the problem for the string vibration equation. In a rectangle, the Green's function method is used to obtain a representation of the solution of the problem in an explicit form. Applying the method of general solutions to the equation of string vibrations, an explicit form of the solution of the problem for y<0 is found.*

Keywords: *boundary value problems, parabolic-hyperbolic operator, uniqueness, existence, Green's function, fourth-order equation.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим в области D, ограниченная отрезками линий $AC: x+y=0, CB: x-y=\ell\,(\ell>0), BB_0: x=\ell,$ $B_0A_0: y=h\,(h>0), A_0A: x=0$ (Рисунок 1) уравнение

$$L_1 L_2 u = 0, \tag{1}$$

где

$$L_1 \equiv \begin{cases} L_{11} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}, y > 0, \\ L_{12} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, y < 0, \end{cases}, \quad L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Пусть $D_1 = D \cap (y > 0), D_2 = D \cap (y < 0).$ C^{n+m} означает класс функции, имеющие непрерывные все производные

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}\left(r = 0,1,...,n; s = 0,1,...,m\right)[1].$$

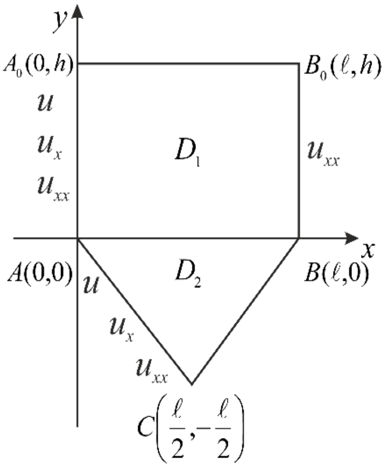


Рисунок 1. Область D.

Отметим что уравнение

$$L_{11}L_2 u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, (x, y) \in D_1 \tag{2}$$

имеет четырехкратную действительную характеристику $y = const,$ а уравнение

$$L_{12}L_2 u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, (x, y) \in D_2 \tag{3}$$

имеет двукратную характеристику $y = const$ и две а уравнение характеристику $x + y = const, x - y = const[2].$

Для уравнения (1) в области D рассматривается следующая

Задача 1. Требуется найти в области $D \setminus (y = 0)$ решение уравнения (1), удовлетворяющая условиям:

1) $u, u_x, u_{xx} \in C\left(\overline{D}\right) \cap C_1\left(D\right) \cap \left[C^{2+1}\left(D_1\right) \cup C^{2+2}\left(D_2\right)\right];$

2) $u\big|_{x=0} = \varphi_1(y), u_x\big|_{x=0} = \varphi_2(y), 0 \le y \le h,$ (4)

$$u_{xx}\big|_{x=0} = \varphi_3(y), u_{xx}\big|_{x=\ell} = \varphi_4(y), 0 \le y \le h, \tag{5}$$

$$u\big|_{x=-y} = \psi_1(y), -\frac{\ell}{2} \le y \le 0, \tag{6}$$

$$u_x\big|_{x=-y}=\psi_2(y),\ -\frac{\ell}{2}\le y\le 0, \tag{7}$$

$$u_{xx}\big|_{x=-y}=\psi_3(y),\ -\frac{\ell}{2}\le y\le 0, \tag{8}$$

где $\varphi_i(y)(i=\overline{1,4}),\psi_i(y)(j=\overline{1,3})$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{gathered}\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C^2[0,h],\varphi_3(y),\varphi_4(y)\in C[0,h],\\ \psi_i(y)\in C^2\left[-\frac{\ell}{2},0\right](i=1,2),\psi_3(y)\in C^4\left[-\frac{\ell}{2},0\right];\end{gathered} \tag{9}$$

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \varphi_2(0)=\psi_2(0),\varphi_3(0)=\psi_3(0). \tag{10}$$

Краевые задачи для уравнения

$$L_2L_1u=0$$

изучены в работах [3, 4].

Из постановки задачи 1 вытекает следующие условия склеивания:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),0\le x\le\ell, \tag{11}$$

$$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\nu(x),0\le x\le\ell, \tag{12}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Для решения задачи 1, рассмотрим следующие вспомогательные задачи 2 и 3.

Задача 2. Требуется найти в области D_1 решение уравнения (2), удовлетворяющая условиям (4), (5) и (11), причем

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau'(0)=\varphi_2(0),\tau''(0)=\varphi_3(0). \tag{13}$$

Задача 3. Требуется найти в области D_2 решение уравнения (3), удовлетворяющая условиям (6) – (8) и (11), причем

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau'(0)=\varphi_2(0), \tag{14}$$

$$\tau''(0)=\varphi_3(0),\tau''(\ell)=\varphi_4(0). \tag{15}$$

2. Решение задачи 3. Введем обозначение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \vartheta(x,y),\ (x,y)\in D_2, \tag{16}$$

где $\vartheta(x,y)$ – новая неизвестная функция. Тогда из (3), (8) и (11) для определения $\vartheta(x,y)$ придем к следующей задаче:

$$\vartheta_{xx} - \vartheta_{yy} = 0,\ (x,y)\in D_2, \tag{17}$$

$$\vartheta(x,0) = \tau''(x), 0 \le x \le \ell, \tag{18}$$

$$\vartheta(-y,y) = \psi_3(y), -\frac{\ell}{2} \le y \le 0. \tag{19}$$

Из общего решения

$$\vartheta(x,y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) \tag{20}$$

Уравнения (17), где F_1, F_2 – произвольные функции из класса C^2, с учетом условий (18) и (19), имеем

$$\begin{aligned} &F_1(x) + F_2(x) = \tau''(x), 0 \le x \le \ell, \\ &F_1(0) + F_2(-2y) = \psi_3(y), -\frac{\ell}{2} \le y \le 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Пологая $-2y = t,$ из второго уравнения (21) имеем

$$F_2(t) = \psi_3\left(-\frac{t}{2}\right) - F_1(0).$$

Тогда из первого уравнения (21) имеем

$$F_1(x) = \tau''(x) - \psi_3\left(-\frac{x}{2}\right) + F_1(0).$$

Следовательно, из (20) получаем решение задачи (17)—(19), в виде

$$\vartheta(x,y) = \tau''(x+y) - \psi_3\left(-\frac{x+y}{2}\right) + \psi_3\left(\frac{y-x}{2}\right). \tag{22}$$

Интегрируя дважды по x в пределах от $-y$ до $x,$ учитывая при этом граничные условия (6)—(7) из (22) получаем решение задачи 3 в виде:

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & \tau(x+y) + (x+y)\left[\psi_2(y) - \psi_2(0)\right] + \psi_1(y) - \psi_1(0) + \\ & + \int_{-y}^{x} (x-\xi)\left[\psi_3\left(\frac{y-\xi}{2}\right) - \psi_3\left(-\frac{y+\xi}{2}\right)\right] d\xi. \end{aligned} \tag{23}$$

Про дифференцируя (23) по y и пологая $y=0$ получаем соотношение из области D_2:

$$\nu(x)=\tau'(x)+\psi(x), 0\le x\le \ell, \tag{24}$$

где

$$\psi(x)=x\varphi_2'(0)+\psi_1'(0)+\int_0^x (x-\xi)\psi_3'\left(-\frac{\xi}{2}\right)d\xi.$$

3. Соотношение, полученное из области D_1. Переходя к пределу при $y\to+0$ из уравнения (1) имеем соотношение из области D_1 в виде

$$\tau^{IV}(x)-\nu''(x)=0, 0\le x\le \ell. \tag{25}$$

Исключая $\nu(x)$ из (24) и (25), получим уравнение

$$\tau^{IV}(x)-\tau'''(x)=0, 0\le x\le \ell. \tag{26}$$

Пологая

$$\tau''(x)=z(x) \tag{27}$$

Из (26) имеем

$$z''(x)-z'(x)=\psi''(x), 0\le x\le \ell, \tag{28}$$

из (15) получим краевые условия для $z(x)$:

$$z(0)=\varphi_3(0), z(\ell)=\varphi_4(0). \tag{29}$$

Введем новую функцию $\theta(x)$ следующим образом:

$$z(x)=\varphi_3(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_4(\ell)-\psi_3(0)\right]+\theta(x). \tag{30}$$

Тогда из (28) и (29) придем к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned}&\theta''(x)-\theta'(x)=g(x),\\&\theta(0)=0, \theta(\ell)=0,\end{aligned} \tag{31}$$

где

$$g(x)=\psi''(0)+\frac{1}{\ell}\left[\varphi_4(0)-\varphi_3(0)\right].$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\theta''(x)-\theta'(x)=0, \qquad (32)$$

общее решение которого имеет вид

$$\theta(x)=c_1+c_2e^x, \qquad (33)$$

где c_1, c_2 – произвольные действительные числа.

Согласно общей теории [5] из (33) выберем решения, удовлетворяющие условиям

$$\theta_1(0)=0, \theta_1'(0)\neq 0; \theta_2(\ell)=0, \theta_2'(\ell)\neq 0,$$

следующим образом

$$\theta_1(x)=c_1\left(1-e^x\right), \theta_2(x)=c_2\left(e^x-e^\ell\right).$$

Тогда функцию Грина можно представить в виде

$$G_1(x,\xi)=\begin{cases} c_1\left(1-e^x\right), 0\leq x\leq\xi, \\ c_2\left(e^x-e^\ell\right), \xi\leq x\leq\ell. \end{cases} \qquad (34)$$

По определению функция Грина должно быть выполнено следующие условия

$$\begin{aligned} &G_1(\xi+0,\xi)-G_1(\xi-0,\xi)=0, \\ &G_{1x}(\xi+0,\xi)-G_{1x}(\xi-0,\xi)=1. \end{aligned} \qquad (35)$$

Тогда из (35) для определения c_1 и c_2 приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \left(1-e^x\right)c_1-\left(e^x-e^\ell\right)c_2=0, \\ e^xc_1+e^xc_2. \end{cases} \qquad (36)$$

Определитель системы (36) $\Delta=e^\xi(1-e^\ell)\neq 0,$ так как $\ell>0.$ Методом определителей из (36) находим c_1 и c_2:

$$c_1=\frac{1}{\Delta}\left(e^{\xi}-e^{\ell}\right),c_2=\frac{1}{\Delta}\left(1-e^{\xi}\right).$$

Следовательно, функцию Грина можно представить в виде

$$G_1\left(x,\xi\right)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}\left(e^{\xi}-e^{\ell}\right)\left(1-e^{x}\right),0\le x\le\xi,\\ \frac{1}{\Delta}\left(1-e^{\xi}\right)\left(e^{x}-e^{\ell}\right),\xi\le x\le\ell.\end{cases}$$

Тогда решение задачи (31) представимо в виде

$$\theta\left(x\right)=\int\limits_0^{\ell}G_1\left(x,\xi\right)g\left(\xi\right)d\xi. \tag{37}$$

По формуле (30) определяем $z\left(x\right)$. Тогда интегрируя равенства (27) по x дважды в пределах от 0 до x, имеем

$$\tau\left(x\right)=\varphi_1\left(0\right)+\varphi_2\left(0\right)x+\int\limits_0^{x}\left(x-t\right)z\left(t\right)dt,0\le x\le\ell. \tag{38}$$

4. Решение задачи 2. Введя обозначение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=w\left(x,y\right),\,\left(x,y\right)\in D_1, \tag{39}$$

из уравнения (3) имеем

$$w_{xx}-w_{yy}=0,\,\left(x,y\right)\in D_1, \tag{40}$$

К уравнению (40) присоединяем следующие условия:

$$\begin{aligned}&w(0,y)=\varphi_3(y),w(\ell,y)=\varphi_4(y),0\le y\le h,\\&w(x,0)=\varphi_3(y),\,0\le x\le\ell.\end{aligned} \tag{41}$$

Решение задачи (40), (41) представимо в виде [6]

$$\begin{aligned}&w(x,y)=\int\limits_0^{y}G_{\xi}\left(x,y;0,\eta\right)\varphi_3(\eta)d\eta-\int\limits_0^{y}G_{\xi}\left(x,y;\ell,\eta\right)\varphi_4(\eta)d\eta+\\&+\int\limits_0^{\ell}G\left(x,y;\xi,0\right)\tau''(\xi)d\xi,\end{aligned} \tag{42}$$

где

$$G_1\left(x,\xi;\xi,\eta\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\left(y-\eta\right)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left(-\frac{\left(x-\xi+2n\ell\right)^2}{4\left(y-\eta\right)}\right)-\exp\left(-\frac{\left(x+\xi+2n\ell\right)^2}{4\left(y-\eta\right)}\right)\right]-$$

функция Грина.

Далее, интегрируя по x дважды равенство (39) в пределах от 0 до x и учитывая при этом условия (4), получаем решение задачи 2 в виде

$$u(x,y)=\varphi_1(y)+x\varphi_2(y)+\int_0^x(x-\xi)w(\xi,y)d\xi,(x,y)\in D_1. \qquad (43)$$

Таким образом доказона.

Теорема. Пусть выполняются условия (9), (10).

Тогда решение задачи 1 существует, единственно и представимо по формулам (23) и (43).

Литература

1. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка [Текст] / В.И. Жегалов, Е.А. Уткина // Изв. вузов. Математика. – 1999. №10, с.73-76.
2. Джураев, Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
3. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев - Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
4. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов - Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
5. Денисов, А.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / А.М. Денисов, А.В Разгулин – М.: МГУ, 2009. -114 с.
6. Полянин, А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д. Полянин – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. -576 с.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.95

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_29

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
ablabekov_63@mail.ru
Жуман кызы Айнура, аспирант
Кыргызский национальный университет имени Жусуп Баласагына,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *При исследовании обратных задач математической физики важную роль играет знание решений соответствующей прямой (в данном случае первой начально- краевой) задачи. В настоящей работе исследуется существование и единственность классического решения первой начально-краевой задачи для одномерного неоднородного псевдопараболического уравнения с дробными по времени производной Капуто в замкнутом прямоугольнике с однородными краевыми условиями. Доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Для доказательства существования и единственности решения поставленной задачи применяется метод Фурье. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций. Получено явное классическое решение исследуемой задачи.*

Ключевые слова: *псевдопараболическое уравнение, краевые задачи, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто, дробный интеграл Римана-Лиувилля, метод Фурье, функция Миттаг-Леффлера.*

БИР ӨЛЧӨМДҮҮ БӨЛЧӨКТҮҮ ТУУНДУЛУУ ПСЕВДОПАРАБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ БАШТАПЧЫ-ЧЕК МАСЕЛЕНИН ЧЕЧИМДҮҮЛҮГҮ ЖӨНҮНДӨ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, ф.-м.илим.докт., профессор,
ablabekov_63@mail.ru

Жуман кызы Айнура, аспирант
Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *Математикалык физиканын тескери маселелерин изилдөөдө тиешелүү түз (бул учурда биринчи баштапкы чектик) маселенин чечимдерин билүү маанилүү роль ойнойт. Бул эмгекте биз бир тектүү чек ара шарты бар жабык тик бурчтукта убакыт боюнча бөлчөктүү Капуто туундулары менен бир өлчөмдүү бир тектүү эмес псевдопараболикалык теңдеме үчүн биринчи түрдөгү баштапкы- чектик маселенин классикалык чечиминин бар экендигин жана жалгыздыгын изилдейбиз. Каралып жаткан маселени чечүү үчүн бар жана кайталангыстык теоремасы далилденген. Коюлган маселенин чечиминин бар экендигин жана жалгыздыгын далилдөө үчүн Фурье ыкмасы колдонулат. Үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функциялар классында каралып жаткан маселенин бир маанилүү чечилиши үчүн жетиштүү шарттар алынган. Изилдеп жаткан маселенин ачык-айкын классикалык чыгарылышы алынган.*

Ачкыч сөздөр: *псевдопараболикалык теңдеме, чектик маселелер, бөлчөк тартиптеги дифференциалдык теңдеме, Капутонун бөлчөк туундусу, Риман-Лиувилл бөлчөк интегралы, Фурье ыкмасы, Миттаг-Леффлер функциясы.*

ON THE SOLVABILITY OF THE FIRST INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

Ablabekov Baktybai Saparbekovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor,
ablabekov_63@mail.ru
Juman kyzy Ainura, graduate student
Kyrgyz National University Jusup Balasagyna,
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract: *In the study of inverse problems of mathematical physics, knowledge of the solutions of the corresponding direct (in this case, the first initial boundary value) problem plays an important role. In this paper, we study the existence and uniqueness of the classical solution of the first initial-boundary value problem for a one-dimensional inhomogeneous pseudoparabolic equation with time-fractional Caputo derivatives in a closed rectangle with homogeneous boundary conditions. The existence and uniqueness theorem for the solution of the problem under consideration is proved. The Fourier method is used to prove the existence and uniqueness of a solution to the problem posed. Sufficient conditions are established for the* *unique solvability of the problem under consideration in the class of continuously differentiable functions. An explicit classical solution of the problem under study is obtained.*

Keywords: *pseudoparabolic equation, boundary value problems, fractional order differential equation, Caputo fractional derivative, Riemann-Liouville fractional integral, Fourier method, Mittag-Leffler function.*

Введение

Дифференциальные уравнения с дробными производными естественным образом возникают в ряде областей науки, таких как физика, инженерия, биофизика, явления кровотока, аэродинамика, электронно-аналитическая химия, биология, теория управления и т. д. Более подробную информацию о таких уравнений можно найти в работах [1-4].

Псевдопараболические уравнения с дробными производными возникают при описании процессов фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде, фильтрации жидкости в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин, переноса почвенной влаги в зоне с учетом ее движения против потенциала влажности [4-7]. В связи с этим возникает необходимость исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными и разработки методов их решений.

Задача Коши, начально-краевые задачи для псевдопараболического уравнения, в том числе для уравнения Аллера с дробными производными Римана-Лиувилля были изучены в работах [8-11].

В данной работе изучается первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения уравнения с дробными производными Капуто.

1. Определение дробных проиводных и интегралов.

Введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего исследования.

Определение 1. Дробным дифференциальным оператором Капуто D_t^α порядка $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ для дифференцируемой функции f называется оператор, определенная выражением [3,4]:

$$D_t^{\alpha}\left[f\right](t)=I\left[f^{'}(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t f^{'}(\tau)(t-\tau)^{-\alpha}d\tau,\ 0<\alpha<1,\\ f^{'}(t), \qquad\qquad \alpha=1,\end{cases} \tag{1.1}$$

где $\Gamma(z)-$ гамма функция.

Определение 2. Дробным интегральным оператором Римана-Лиувилля $D_{0t}^{-\alpha}$ порядка $\alpha, 0<\alpha\le 1$ для интегрируемой функции f называется оператор, определенная выражением [3,4]:

$$D_{0t}^{-\alpha}f(t)=I^{\alpha}\left[f(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau,\ 0<\alpha<1,\\ \int\limits_0^t f(\tau)d\tau, \qquad\qquad \alpha=1.\end{cases} \tag{1.2}$$

Определение 3. Дву параметрическая функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ определяемое формулой [3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},\ (\alpha>0,\quad \beta>0) \tag{1.3}$$

называется функцией Миттаг-Леффлера.

Приведем некоторые соотношения, приведенные в [3]:

$$E_{1,1}(z)=e^z, \qquad E_{1,1}(z)=\frac{e^z-1}{z}, \tag{1.4}$$

$$E_{2,1}(z)=ch\sqrt{z},\ E_{2,1}(z)=\frac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \tag{1.5}$$

$$E_{1/2,1}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z}erfc(-\sqrt{z}), \tag{1.6}$$

При $\beta=1$ получим одно параметрическую функцию Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\equiv E_{\alpha}(z). \tag{1.7}$$

Обобщение формулы Ньютона-Лейбница, при $\alpha, \quad (0<\alpha\leq 1)$

$$D_{0t}^{-\alpha} D_t^{\alpha} z(t) = z(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z^{(\alpha-1)}(0). \tag{1.8}$$

2. Постановка и основной результат

В области $\Omega_T = \{(x,t): 0<x<l, 0<t\leq T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha} u - D_t^{\alpha} u_{xx} - u_{xx} = 0, 0<x<l, 0<t\leq T\,. \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leq x\leq l, \tag{2.2}$$

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad 0\leq t\leq T. \tag{2.3}$$

где $\varphi(x)$, $f(x,t)-$ заданные функции.

Здесь D_t^{α} −дробная производная Капуто порядка $\alpha\,(0<\alpha\leq 1)$.

Определение 1. Классическим решением задачи (2.1) - (2.3) в области Ω_T назовем функцию $u=u(x,t)$ из класса $D_t^{\alpha} u(x,t)\in C(\Omega_T)$, $u_{xx}(x,t)\in C(\Omega_T)$, $D_t^{\alpha} u_{xx}(x,t)\in C(\Omega_T)$, которая уравнению (2.1) при всех $(x,t)\in\Omega_T$, начальному условию (2.2) при всех $x\in[0,l]$, и краевым условиям (2.3) при всех $t\in[0,T]$.

ТЕОРЕМА. Если $u_0(x)\in C^2\left[0,l\right]$, $u_0'''(x)\in L_1(0,l)$ и $u_0(0)=u_0(l)=0$, $u_0''(0)=u_0''(l)=0$. то решение задачи (1) -(3) существует и единственно. Это решение представимо в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2}t^{\alpha}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{2.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи (2.1) ,(2.3) ищем в виде

$$u(x,t)=X(x)Y(t). \tag{2.5}$$

Подставляя значения $u(x,t)$ из (2.4) в (2.1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{D_t^\alpha y}{D_t^\alpha y + y} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Отсюда, предполагая, что $D_t^\alpha y + y \neq 0$, и учитывая условие (2.3), получим следующие уравнения относительно функций X, Y:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \tag{2.6}$$

$$D_t^\alpha y + \frac{\lambda}{1+\lambda} y = 0 \tag{2.7}$$

Известно, что задача Штурма-Лиувилля (2.6) имеет следующий вид собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{k\pi}{l} x$$

и образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,l)$.

Дифференциальное уравнение дробного порядка (2.7) при $\lambda = \lambda_n, n = 1, 2, \ldots$ имеет вид

$$Y_n(t) = C_n E_\alpha\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2 + (n\pi)^2} t^\alpha\right), \tag{2.8}$$

где $E_{\alpha,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$ – функция Миттаг-Леффлера.

Таким образом, все функции

$$u_k(x,t) = C_n E_\alpha\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2 + (n\pi)^2} t^\alpha\right) \sin\frac{n\pi}{l} x$$

удовлетворяют уравнению (2.1) и граничным условиям (2.3).

Воспользовавшись обобщенным принципом суперпозиции, запишем решение задачи (2.1), (2.3) в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n E_\alpha\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2 + (n\pi)^2} t^\alpha\right) \sin\frac{n\pi}{l} x. \tag{2.9}$$

Для нахождения неизвестных постоянных C_n, воспользуемся начальным условием (2.2). Тогда из (2.9) имеем

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (2.10)$$

Рассматривая это равенство как разложение $\varphi(x)$ в ряд Фурье, найдем коэффициенты Фурье

$$\varphi_n=C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi. \qquad 2.11)$$

Подставив найденные C_n в (2.9), получим формальное решение задачи (2.1)-(2.3):

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n E_\alpha\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2}t^\alpha\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (2.12)$$

Теперь покажем, что найденная функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи (2.1)-(2.3).Сначала покажем непрерывность функции $u(x,t)$ в области Ω_T. Из условий, наложенных на функции $\varphi(x)$, следует, что

$$|\varphi_n|\le\frac{const}{n^2}. \qquad (2.13)$$

Отсюда следует, что ряд (2.12) с коэффициентами C_n, определяемым по формулам (2.12), равномерно и абсолютно сходится к функции $\varphi(x)$.

Далее покажем, что формально построенное решение (2.4) является классическим, т.е. регулярным при $0<x<l,\ 0<t<T,$ непрерывным по x при $0\le x\le l$ и удовлетворяет дополнительным условиям (2.1), (2.3).

Используя неравенство (2.13) и то, что

$$E_\alpha(-z)\le\frac{M}{1+z}\le M,\quad z\ge 0,\quad 0<\alpha<1,$$

из формулы (2.11) , имеем

$$|u(x,t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|\left|E_\alpha\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2}t^\alpha\right)\right|\left|\sin\frac{n\pi}{l}x\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}<+\infty. \qquad (2.14)$$

Поэтому функция $u(x,t)$, определяемая рядом (2.12), непрерывна в области $\overline{\Omega}_T$ и удовлетворяет начальному условию (2.2) и граничным условиям (2.3).

Остается показать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) в области Ω_T . Для этого достаточно показать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_t^{\alpha} u_n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2},\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 D_t^{\alpha} u_n}{\partial x^2}.$$

Формально дифференцируя ряд (2.12), находим

$$D_t^{\alpha} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n D_t^{\alpha} E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right) \sin\frac{n\pi}{l} x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} \varphi_n E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right) \sin\frac{n\pi}{l} x,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \varphi_n E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right) \sin\frac{n\pi}{l} x,$$

$$\frac{\partial^2 D_t^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 D_t^{\alpha} u_k}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \varphi_n E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right) \sin\frac{n\pi}{l} x.$$

Поскольку

$$\left|\varphi_n\right| \le \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \left|\varphi_n^{''}\right|,$$

то

$$\left|D_t^{\alpha} u(x,t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2}\right| \left|\varphi_n\right| \left|E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} < +\infty,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \varphi_n E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right) \sin\frac{n\pi}{l} x\right| \le \\ \le M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n^{''}\right| < +\infty. \tag{2.15}$$

$$\left|\frac{\partial^2 D_t^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right| \left|\varphi_n\right| \left|E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n^{''}\right| < +\infty.$$

Из оценок (2.15) заключаем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} D_t^{\alpha} u_n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2},\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 D_t^{\alpha} u_n}{\partial x^2}.$

сходятся равномерно к $D_t^{\alpha}u(x,t)$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 D_t^{\alpha}u(x,t)}{\partial x^2}$ соответственно. Теорема доказана.

Литература

1. Kilbas, A. A. “Theory and Applications of Fractional Differential Equations” [Текст] / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo // *North-Holland Mathematics Studies,* Vol. 204, 2006.

2. Miller, K. S. “An Introduction to the Frac- tional Calculus and Fractional Differential Equations,” [Текст] / K. S. Miller, B. Ross // John Wiley, New York, 1993.

3. Podlubny, I. “Fractional Differential Equations,” [Текст] / I. Podlubny // Aca- demic Press, San Diego, New York, London, 1999.

4. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения [Текст] / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

5. Джарбашян, М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области [Текст] / М.М. Джарбашян - М., 1966.-672с.

6. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение [Текст] / А.М.Нахушев - М.: Физматлит, 2003. 272 с.

7. Учайкин, В.В. Метод дробных производных [Текст] / В.В. Учайкин - Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

8. Псху, А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка [Текст] / А.В. Псху - М.: Наука. 2005. 199 с.

9. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Б.С. Аблабеков - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.

10. Аблабеков, Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи [Текст] / Б.С. Аблабеков // Наука и новые технологии. –1999.- №4. – С. 12– 19.

11. Макаова, Р.Х. Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера [Текст] / Р.Х. Макаова // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1 (16). С. 45–49.

12. Макаова, Р.Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана-Лиувилля [Текст] / Р.Х. Макаова // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 3. С. 35–38.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.956

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_38

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ БИР ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕДЕГИ БУЛАК ФУНКЦИЯСЫН АНЫКТОО ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, ф.-м.илим.докт., профессор,
ablabekov_63@mail.ru
Жороев Автандил Кемелович, аспирант
joroev1962@mail.ru
Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада үчүнчү даражадагы сызыктуу гиперболалык теңдеме үчүн чыгарылышты жана убакытка көз каранды болгон белгисиз булак функциясын аныктоо тескери маселесин изилдейбиз. Тескери маселелерде баштапкы шарттар менен бирге (биздин учурда) кошумча маалымат берилет. Тескери маселени чечүү үчүн кошумча маалымат катары ички чекиттеги маселенин чыгарылышынын мааниси берилген. Дифференциалдык теңдеменин оң тарабын аныктоо тескери маселелери кээ бир физикалык процесстерди математикалык моделдөөдө сырткы булактардын аракетин калыбына келтирүүнү талап кылынган учурда келип чыгат. Тескери маселени чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы тууралуу теорема далилденген. Далилдөө маселени экинчи түрдөгү Вольтерра тибиндеги сызыктуу интегралдык теңдемелер системасына келтирүү жана анын бир маанилүү чыгарымдуулугун далилдөөгө негизделген.*

Ачкыч сөздөр: *гиперболалык теңдеме, тескери маселе, жалгыздык жана жашоо теоремасы, Вольтерра теңдемеси, кыймылсыз чекит теоремасы.*

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА В ОДНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
ablabekov_63@mail.ru
Жороев Автандил Кемелович, аспирант

joroev1962@mail.ru
Кыргызский национальный университет имени Жусуп Баласагына
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *В данной работе исследуется обратная задача определения решения и неизвестного источника, зависящей от времени для линейного гиперболического уравнения третьего порядка. В обратных задачах вместе с начальными данными (в нашем случае) задается дополнительная информация. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи задаются значения решения задачи во внутренней точке. Обратные задачи определения правой части дифференциального уравнения возникают при математическом моделировании некоторых физических процессов, в случае когда требуется восстановить действие внешних источников. Доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи. Доказательство основано на выводе линейной системы интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода и доказательстве его разрешимости.*

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, обратная задача, единственность, существование, уравнение Вольтерра, теорема о неподвижной точке.*

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE SOURCE IN ONE HYPERBOLIC EQUATION THIRD ORDER

Ablabekov Baktybai Saparbekovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor,
ablabekov_63@mail.ru
Zhoroev Avtandil Kemelovich, postgraduate student
joroev1962@mail.ru
Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyna
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract: *In this paper, we study the time-dependent inverse problem of determining a solution and an unknown source for a third-order linear hyperbolic equation. In inverse problems, along with the initial data (in our case), additional information is given. As additional information for solving the inverse problem, the values of the solution of the problem at the interior point are given. Inverse problems of determining the right side of a differential equation arise in the mathematical modeling of some physical processes, in the case when it is required to restore the action of external sources. An existence and uniqueness theorem for the solution of the inverse problem is proved. The proof is based on the* *derivation of a linear system of integral equations of the Volterra type of the second kind and the proof of its solvability.*

Keywords: *hyperbolic equation, inverse problem, uniqueness, existence, Volterra equation, fixed point theorem.*

Введение

В работе рассматривается обратная задача нахождения неизвестного источника в гиперболическом уравнении третьего порядка. Такого рода обратные задачи возникают в геофизике, теории фильтрации. Доказываются теоремы о существовании и единственности решения обратной задачи на основе ее редукции системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Обратные задачи для гиперболических уравнений второго порядка изучались в работах М. М. Лаврентьева, В.Г.Романова, С. И. Кабанихина и других. Например, в монографиях В. Г. Романова [1; 2], С. И. Кабанихина [3; 4] исследовались коэффициентные обратные задачи для гиперболических уравнений, в которых неизвестный коэффициент является функцией от пространственных переменных.

Обратные задачи для псевдопараболических, псевдогиперболических уравнений третьего порядка изучены в работах [5, 6].

Для гиперболических уравнений третьего порядка известны некоторые результаты. Например, обратная задача определения неизвестного коэффициента зависящего от времени для гиперболического уравнения третьего порядка исследована в работе [7], а в работе [8] изучена обратная задача определения источника, зависящего от времени.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}= f(t)h(x),\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ u_t(x,0)=\varphi_1(x),\ u_{tt}(x,0)=\varphi_2(x), x\in\mathbb{R}, \qquad (2)$$

где функции $\varphi_i(x), i=0,1,2$ заданные функции, $\alpha>0-$ заданное число. Обозначим через $\Delta_T=\{(x,t):-(T-t)\le x\le(T-t), 0<t\le T\}$.

2. Свойства решения задачи Коши (1), (2)

В этом разделе мы рассмотрим некоторые свойства решения задачи (1)-(2). Начнем с доказательства леммы 1, которое устанавливает однозначную разрешимость задачи (1)-(2). В процессе доказательства будут выведены интегральные уравнения, которые будут использованы в дальнейшем

Лемма 1. Пусть $\varphi_i(x)\in C^{(3-i)}[-T,T]$, $i=0,1,2$, $f(t)\in C[0,T]$, $h(x)\in C[-T,T]$. Тогда существует единственное классическое решение задачи (1), (2), принадлежащее классу $u(x,t)\in C^{(3)}(\Delta_T)$. Кроме того, это решение непрерывно, зависит от начальных данных $u_i(x)$, $i=0,1,2$ и их производных до второго порядка включительно.

Доказательство. Уравнение (1) перепишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+(1-\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(t)h(x),(x,t)\in\Delta_T. \tag{3}$$

Из (4), обращая оператор $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\right)$ и учитывая, то, что

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x,0)=\varphi_2(x)-\varphi_0''(x),$$

имеем

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)u(x,t)=\left[\varphi_2(x)-\varphi_0''(x)\right]e^{-\alpha t}-\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\left[(1-\alpha)u_{\tau\tau}-f(\tau)h(x)\right]d\tau. \tag{4}$$

Проинтегрировав два раза по частям интеграл стоящей в правой части (4), получим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)u(x,t)=v_0(x,t)-(1-\alpha)\left[u_t(x,t)-\alpha u(x,t)\right]-\\&-(1-\alpha)\alpha^2\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}u(x,\tau)d\tau,\end{aligned}\tag{5}$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\, u_t(x,0)=\varphi_1(x),\tag{6}$$

где

$$v_0(x,t)=\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)h(x)d\tau+\left[\varphi_2(x)-\varphi_0''(x)\right]e^{-\alpha t}+(1-\alpha)\left[\varphi_1(x)+\alpha\varphi_0(x)\right]e^{-\alpha t}.$$

Из задачи (5), (6), после применения формулы Даламбера, получим

$$\begin{aligned}&u(x,t)=v_1(x,t)-(1-\alpha)\int\limits_0^t\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left[u_\tau(\xi,\tau)-\alpha u(\xi,\tau)\right]d\xi d\tau-\\&-(1-\alpha)\alpha^2\int\limits_0^t\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\int\limits_0^\tau e^{-\alpha(\tau-\tau_1)}u(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1 d\tau,\end{aligned}\tag{7}$$

где

$$v_1(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x+t)+\varphi_0(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\varphi_1(\xi)d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}v_0(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

В равенство (7) входит неивестная функция $u_t(x,t)$. Продифференцировав (7) по переменной t, получим

$$\begin{aligned}&u_t(x,t)=v_{1t}(x,t)-(1-\alpha)\int\limits_0^t\left[(u_\tau-\alpha u)(x+t-\tau,\tau)+\right.\\&\left.+(u_\tau-\alpha u)(x-t+\tau,\tau)\right]d\xi d\tau-\\&-(1-\alpha)\alpha^2\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{-\alpha(\tau-\tau_1)}\left[u(x+(t-\tau),\tau_1)+u(x-(t-\tau),\tau_1)\right]d\tau_1 d\tau.\end{aligned}\tag{8}$$

Таким образом, относительно функций $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ получили линейную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными ядрами и правых частей. Эта система имеет единственное непрерывное в области Δ_T решение, которое можно найти методом последовательных приближений.

Следовательно, если функция $u(x,t)$ является решением задачи (1) -(2), то функции $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ удовлетворяет систему линейных интегральных уравнений (7), (8).

Справедливо и обратное утверждение. Пусть функции $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ являются непрерывным решением системы уравнений (7), (8). Тогда из этой ситемы уравнений и условий леммы 1 следует, что что эти функции имеют в Δ_T непрерывные производные до третьего порядка и это решение является классическим решением задачи (1), (2). Единственность непрерывного решения системы уравнений (7), (8) следует из леммы Гронуолла-Беллмана.Лемма 1 доказана

3. Существование решения обратной задачи.

Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть функции $\varphi_i(x)$, $i=0,1,2$, $h(x)$ и постоянная $\alpha>0$ заданы, а функция $f(t)$ неизвестна. Требуется найти пару функций (u,f) из условий (1)-(2) по дополнительной информации

$$u(0,t)=g(t), \qquad 0\le t\le T. \tag{9}$$

Определение. Решением обратной задачи (1)-(2),(8) называется пара функций $(u,f)\in C^{(3)}(\Delta_T)\times C([0,T])$, удовлетворящее условиям (1)-(2), (9).

Для обратной задачи (1) -(2), (9) справедлива

ТЕОРЕМА 1. Если $\varphi_i(x)\in C^{(3-i)}[-T,T]$, $i=0,1,2$, $h(x)\in C^{(2)}[-T,T]$, $h(0)\neq 0$, $g(t)\in C^{(3)}[0,T]$, и выполнены условия согласования $\varphi_i(0)=g^{(i)}(0)$, $i=0,1,2$, то в области Δ_T существует единственное решение обратной задачи (1)-(2), (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f(t)$ является решением обратной задачи (3), (2), (9).

Обращая оператор $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, из задачи (3), (2) имеем,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\right)u(x,t)=u_0(x,t)-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}u_{\tau\tau}(s,\tau)dsd\tau+\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}f(\tau)h(s)dsd\tau,\quad (x,t)\in\Delta(0,T).\end{aligned}\tag{10}$$

где $u_0(x,t)-$ решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=0,\ u_0(x,0)=\varphi_1(x)+\alpha\varphi_0(x),\ u_{0t}(x,0)=\varphi_2(x)+\alpha\varphi_1(x).$$

Дифференцируя (10) по переменной t, имеем

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=u_{0t}(x,t)-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_0^t\left[u_{\tau\tau}(x+t-\tau,\tau)+u_{\tau\tau}(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau+\\&+\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[h(x+t-\tau)+h(x-t+\tau)\right]d\tau,\quad (x,t)\in\Delta(0,T).\end{aligned}\tag{11}$$

Положим в формуле (11) $x=0$ и воспользуемся данными (9). При этом получим равенства

$$\begin{aligned}&g''(t)+\alpha g'(t)=u_{0t}(0,t)-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_0^t\left[u_{\tau\tau}(t-\tau,\tau)+u_{\tau\tau}(-t+\tau,\tau)\right]d\tau+\\&+\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[h(t-\tau)+h(-t+\tau)\right]d\tau.\end{aligned}\tag{12}$$

Еще раз дифференцируя уравнение (12), имеем

$$\begin{aligned}&g'''(t)+\alpha g''(t)=u_{0tt}(0,t)-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_0^t\left[u_{\xi\tau\tau}(t-\tau,\tau)-u_{\xi\tau\tau}(-t+\tau,\tau)\right]d\tau+\\&-(1-\alpha)g''(t)+h(0)f(t)+\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[h'(t-\tau)-h'(-t+\tau)\right]d\tau\end{aligned}$$

или

$$\begin{gathered} f(t)+\frac{1}{2h(0)}\int_0^t f(\tau)\left[h^{'}(t-\tau)-h^{'}(-t+\tau)\right]d\tau- \\ -\frac{(1-\alpha)}{2h(0)}\int_0^t\left[u_{\xi\tau\tau}(t-\tau,\tau)-u_{\xi\tau\tau}(-t+\tau,\tau)\right]d\tau=\psi(t), \end{gathered} \qquad (13)$$

где

$$\psi(t)=\left[g^{'''}(t)+g^{''}(t)-u_{0tt}(0,t)\right]/\,h(0).$$

Чтобы получить замкнутую систем уравнений продифференцируем уравнение (7) по переменной x:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)u_x(x,t)=u_{0tx}(x,t)-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_0^t\left[u_{\tau\tau x}(x+t-\tau,\tau)+u_{\tau\tau x}(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau+ \\ +\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[h^{'}(x+t-\tau)+h^{'}(x-t+\tau)\right]d\tau, \quad (x,t)\in\Delta(0,T). \end{gathered} \qquad (14)$$

Таким образом, получили замкнутую систему интегральных $u(x,t)$, уравнений (7), (13), (14) типа Вольтерра относительно функций $u_{ttx}(x,t)$, $f(t)$. Следовательно, эта система имеет единственное решение. Теорема 1 доказана.

Литература

1. Романов, В.Г. Обратные задачи математической физики [Текст] / В.Г. Романов - М.: Наука, 1984. -254с.1

2. Романов, В.Г. Устойчивость в обратных задачах [Текст] / В.Г. Романов - М.: Научный Мир, 2005. -295с.

3. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи: Учебник для студентов высших учебных заведений [Текст] / С. И. Кабанихин - Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008.

4. Кабанихин, С.И., Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений [Текст] / С.И. Кабанихин, К.Т. Искаков // Казахский нац. педгог.ун-т им. Абая, Алматы, 2007. – 330 с.

5. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Б.С. Аблабеков - Бишкек., Илим, 2001. 183 с.

6. Аблабеков, Б.С., Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А.Р. Асанов, А.К. Курманбаева - Бишкек: Илим, 2011. – 156 с.

7. Аблабеков, Б.С., О разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Евразийское Научное Объединение. 2019.Т. 1. № 5 (51).

8. Аблабеков, Б.С. Об определении источника зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Евразийское Научное Объединение. 2021. Т. 1. №7 (77), С.1-3.

9. Аблабеков, Б.С. Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев //Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 34. № 1. С. 9-18.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_47

СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛУУГА ЭЭ БОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМИН ИЗИЛДӨӨДӨ ЧЕГЕРИШТЕРДИН ТААСИРИ

Акматов Абдилазиз Алиевич, *улук окутуучу*

abdilaziz_akmatov@mail.ru

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Жумушта сингулярдуу козголууга ээ болгон маселенин бир тектүү эмес бөлүгү* k_1 *эселүү полюска ээ болгон учур каралат. Маселенин өзгөчөлүгү болуп, теңдеменин бир тектүү эмес бөлүгүнүн бөлүмү нөлгө ээ болуусу эсептелет. Козголгон жана ага дал келүүчү козголбогон маселелердин чечимдерин изилдөөдө чегериштерди колдономун. Абалкы жумуштарда мындай учур каралган эмес. Жыйынтыгында баалоолор алынып, козголгон жана козголбогон маселелердин чечимдеринин асимптотикалык жакындыгы далилденген.*

Сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдеменин чечиминин козголууга ээ болбогон теңдеменин чечимине умтулуусунун ылдамдыгына матрица функциянын өздүк маанилеринин өзгөчө чекиттери түздөн түз таасир этет. Мына ошол себептүү чегериштерди эсептөө зарылдыгы келип чыгат.

Ачкыч сөздөр: *уюлдар, дифференциалдык теңдеме, чегериш, өзгөчө чекит, бисингулярдык козголуу, асимптотика, туруктуулук, Коши маселеси.*

ВЛИЯНИЕ ВЫЧЕТЫ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Акматов Абдилазиз Алиевич, *старший преподователь*

abdilaziz_akmatov@mail.ru

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В работе рассматривается задача когда неоднородная часть сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения имели* k_1 *кратные полюсы. Особенностью данной задачи является наличие нулей при знаменателя неоднородной части уравнения. В этом случае применим вычеты для решения возмущенной и невозмущенной задачи. В ранее рассматриваемые работы не рассмотрено этот случай. Получена оценка и доказана асимптотические близость решений возмущенной и невозмущенной задачи.*

Близость решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и невозмущенных уравнений зависеть от особых точек собственных значений матрицы функций. Поэтому появиться необходимости вычисления вычеты собственных значений матрицы функций.

Ключевые слова: *Полюсы, дифференциальные уравнения, вычеты, особые точки, бисингулярные возмущения, асимптотика, устойчивость, задача Коши.*

INFLUENCE OF RESIDUES IN THE STUDY OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Akmatov Abdilaziz Alievich, senior lecturer
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The paper considers the problem when the inhomogeneous part of the singularly perturbed differential equations* k_1 *are multiple poles. A feature of this problem is the presence of the inhomogeneous part of the equation. In this case, we apply the residues for solving the perturbed and unperturbed problems. This case was not considered in the previously considered works. An estimate is obtained and the asymptotic closeness of solutions to the perturbed and unperturbed problems is proved.*

The proximity of solutions to singularly perturbed differential equations and unperturbed equations depends on the singular points of the eigenvalues of the matrix of functions. Therefore, it becomes necessary to deduct the values of function parameters.

Keywords: *poles, differential equations, deductions, special points, bisingular perturbations, asymptotic, stability, Cauchy problem.*

Киришүү. Белгилүү болгондой сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин баалоосуна биртектүү эмес бөлүктүн таасири бар экендиги белгилүү. Ушул багыттагы жумушта [12] бир тектүү эмес бөлүгү k эселүү нөлдөргө ээ болгон учурда изилдөө жүргүзүлүп баалоолор алынган. Ошодой эле [6, 7, 9, 10, 12] жумуштарда да аналогиялуу учурлар каралып, бирок ал жерде бир тектүү эмес бөлүккө абсалюттук чоңдуу боюнча кандайдыр бир турактуудан кичине болуу шартын коюшкан. Бул шарт өз учурунда каралуучу маселенин чечимин баалоону жеңилдетет. Абалкы каралган жумуштардын баарында $D(t) \neq 0$ шарты алынган. Бул жумушта болсо, $D(t) = 0$, болгон учурду карайбыз. Ошону менен бирге чегериштерди [3] колдонуу менен баалоо алабыз. Мындай учур өзгөчө, себеби [4] белгилүү болгондой козголбогон маселенин чечиминин бөлүмү нөлгө теңделиши жалпыланган функцияларга келип калат. Жумушта $D(t)$ матрица-функциясы эки эселүү өздүк маанилерге ээ болгон учур каралып, чечим комплекстик аймакта изилденет. Жумушта баалоону чыныгы аймакта жүргүзүү мүмкүн эмес. Эгерде маселени мейкиндиктин формасын өзгөртүү менен карасак, анда чыныгы аймакта регуляризациялоо усулун[4] колдонуу менен алууга болор эле.

Маселенин коюлушу. Төмөнкүдөй маселени карайлы

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = D(t)y(t,\varepsilon) + \left[f(t) + \varepsilon B(t)y(t,\varepsilon) \right], \qquad (1)$$

$$y(t_0,\varepsilon) = y^0, \qquad (2)$$

мында $D(t) = diag(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t))$, матрицанын өздүк маанилери

$\lambda_1(t) = \lambda_3(t) = (t+i)^{k_2}$, $\lambda_2(t) = \lambda_4(t) = (t-i)^{k_2}$,

$y(t,\varepsilon) = colon(y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon), y_3(t,\varepsilon), y_4(t,\varepsilon))$, $t \in \Omega \subset C$, $0 < \varepsilon$ - кичине параметр,

$f(t) = colon\left((t+i)^{k_1}, (t-i)^{k_2}, (t+i)^{k_1}, (t-i)^{k_2}\right)$, $k_1, k_2 \in N$, $k_1 + k_2 = k$, $k \in N$, $k_1 > 1$,

$[t_0, T]$ - чыныгы октогу кесинди, $t_0 < T$, $B(t) = (b_{mj}(t))_1^4$, $m, j = \overline{1,4}$, y^0 – турактуу сан, $Q(\Omega)$ - аналитикалык функциялардын мейкиндиги, мында C - комплекстик тегиздик.

Эгерде формалдуу түрдө $\varepsilon = 0$ деп алсак:

$$D(t)\tilde{y}(t,0) = f(t). \qquad (3)$$

Анда $t = \pm i$ чекиттериндеги чечими

$$\tilde{y}(t) = 0 \,. \tag{4}$$

Төмөнкү теоремага ээ болобуз.

Теорема 1. Козголбогон (3) маселе $t = \pm i$, чекиттеринде (4) көрүнүштөгү чечимге ээ болот.

Далилдөө. Каралуучу (1), (2) маселедеги $D(t)$ матрица функциясы $\lambda_1(t) = \lambda_3(t) = (t+i)^{k_2}$, $\lambda_2(t) = \lambda_4(t) = (t-i)^{k_2}$ жана бир тектүү эмес бөлүгү болгон $f(t)$ $f_1(t) = f_3(t) = \dfrac{1}{(t+i)^{k_1}}$, $f_2(t) = f_4(t) = \dfrac{1}{(t-i)^{k_1}}$. Мындан көрүнгөндөй козголбогон маселенин вектордук формада жазылган чечими, $\tilde{y}(t) = \dfrac{f(t)}{D(t)} = \dfrac{1}{(t \pm i)^k}$, $k = k_1 + k_2$. Чечим $t = \pm i$ чекиттеринде k - эселүү уюлга ээ болот. Козголбогон (3) системаны скалярдык көрүнүштө жазалы

$$\begin{cases} (t+i)^{k_2}\,\tilde{y}_1(t) - \dfrac{1}{(t+i)^{k_1}} = 0, \\ (t-i)^{k_2}\,\tilde{y}_2(t) - \dfrac{1}{(t-i)^{k_1}} = 0, \\ (t+i)^{k_2}\,\tilde{y}_3(t) - \dfrac{1}{(t+i)^{k_1}} = 0, \\ (t-i)^{k_2}\,\tilde{y}_3(t) - \dfrac{1}{(t-i)^{k_1}} = 0. \end{cases} \,. \tag{5}$$

Акыркы (5) системанын чечими $\tilde{y}_1(t) = \tilde{y}_3(t) = (t+i)^{-k}$, $\tilde{y}_2(t) = \tilde{y}(t) = (t-i)^{-k}$. Аныкталган (5) системанын $t = \pm i$ чекиттериндеги чечимдери k эселүү нөлгө ээ болот. Ал чекиттердеги $\tilde{y}_1(t)$, $\tilde{y}_2(t)$, $\tilde{y}_3(t)$, $\tilde{y}_4(t)$ функцияларынын чегериштерин эсептейли. Анда $\tilde{y}_1(t) = \tilde{y}_3(t)$, жана $\tilde{y}_2(t) = \tilde{y}_4(t)$ экендигин эске алуу менен

$$\operatorname*{Res}_{t=-i} \tilde{y}_1(t) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{t \to -i} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left[\frac{1}{(t+i)^k} \times (t+i)^k \right] = 0 \,, \tag{6}$$

$$\operatorname*{Res}_{t=i} \tilde{y}_2(t) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{t \to i} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left[\frac{1}{(t-i)^k} \times (t-i)^k \right] = 0 \,. \tag{7}$$

Демек, (6), (7) барабардыктар (4) көрүнүштөгү чечимдин жашоосун далилдейт. Теорема далилденди.

Мейли төмөнкү шарттар аткарылсын:

$$\begin{aligned}&\lambda_1(t)\in Q(\Omega),\ \lambda_2(t)\in Q(\Omega),\ \forall t\in\Omega\left(\lambda_m(t)\neq 0,\ m=1,2\right),\\&f(t)=colon((t+i)^{k_1},(t-i)^{k_2}).\end{aligned} \tag{8}$$

Белгилөөлөрдү кийирели:

$$\Omega=\left\{(t_1,t_2):u_m(t_1,t_2)\leq 0,\ m=1,2\right\}. \tag{9}$$

мында $u_m(t_1,t_2)=\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds$, $(m=1,2)$, $t_1,t_2\in R$, $\Omega\subset C$ -комплекстик тегиздик.

Теорема орун алат.

Теорема 2. Мейли (8) шарт аткарылсын. Анда (1), (2) маселе жалгыз чечимге ээ болуп, ал чечим үчүн

$$\|y(t,\varepsilon)\|\leq\tilde{C}\delta(\varepsilon) \tag{10}$$

баалоосу орун алат. Мында $\delta(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0$, $t\in C$, $\tilde{C}$ - турактуу сан.

Далилдөө. Каралуучу (1), (2) маселени ага тең күчтүү болгон маселеге алмаштыралы:

$$y(t,\varepsilon)=y^0E(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)\left[\frac{1}{\varepsilon}f(\tau)+B(t)y(\tau,\varepsilon)\right]d\tau, \tag{11}$$

мында $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds\right)$.

Алынган (11) теңдемеге удаалаш жакындашуу усулун колдонобуз:

$$\begin{aligned}&y^{(0)}(t,\varepsilon)\equiv 0,\\&y^{(1))}(t,\varepsilon)=y^0E(t,t_0,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau,\\&y^{(n)}(t,\varepsilon)=y^{(1)}(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)y^{(n-1)}(\tau,\varepsilon)d\tau.\end{aligned} \tag{12}$$

бул жерде $E(t,t_0,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}D(s)ds\right)$, $n\in N$.

Каалаган n жакындашуу үчүн $(t_0,0)$ чекитин $(t_1;t_2)$ чекити менен туташтыруучу l_n, $\tilde{l}_n$, $(n\in N)$, интегралдоо жолдорун тандап алабыз. Ар бир жакындашууда интегралдоо жолдору $l_n = l_n^j, \left(j=\overline{1,n}\right)$ кесиндилеринен турат. Ошондой эле $\tilde{l}_n$ интегралдоо жолу l_n интегралдоо жолуна симметриялуу тандалат.

Демек, [11] белгилүү болгондой $h_1(\tau)$ функциясы Ω аймагында $\tau=-i$ чекитинен башка бардык чекиттеринде, ошондой эле аналитикалык болбогон чекитти курчап турган l - чек арасында да аналитикалык болот. Оң багыт боюнча ориентирленген туюк интеграл $\oint_l h_1(\tau)d\tau = 2\pi i\,\underset{\tau=-i}{\mathrm{Re\,s}}\,h_1(\tau)$, $h_1(\tau)=E(t,\tau,\varepsilon)\times f_1(\tau)$. Калган $h_2(\tau)$, $h_3(\tau)$, $h_4(\tau)$ функциялары үчүн да бул туюк интеграл орун алат.

Интегралдоо жолдорун эске алуу менен удаалаш жакындашууларды баалайлы. Биринчи жакындашуу $y^{(1)}(t,\varepsilon)=y^0E(t,t_0,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{l_1}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau$.

Каралуучу (1), (2) маселенин чечиминин баалоосу $\left\|y^{(1)}(t,\varepsilon)\right\|\le\tilde{C}\delta(\varepsilon)$, мында $\tilde{C}$ -кандайдыр бир турактуу сан. Экинчи жакындашуу үчүн баалоо $\left\|y^{(2)}(t,\varepsilon)\right\|\le\tilde{C}\delta(\varepsilon)+\left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^2$ мында $\tilde{C}$-кандайдыр бир турактуу сан. Каалаган жакындашуу үчүн баалоонунун тууралыгын божомолдойлу $\left\|y^{(n)}(t,\varepsilon)\right\|\le\tilde{C}\delta(\varepsilon)+(\tilde{C}\delta(\varepsilon))^2+\ldots+(\tilde{C}\delta(\varepsilon))^n$, $\tilde{C}$ - кандайдыр бир турактуу сан, $n\in N$. Демек, (10) баалоонун тууралыгы далилденди.

Кийинки кадамда удаалаш жакындашуулардын жыйналуучулугун далилдейли. Анда $\left\|y^{(1)}(t,\varepsilon)\right\|\le\tilde{C}\delta(\varepsilon)<1$, $\left\|y^{(2)}(t,\varepsilon)-y^{(1)}(t,\varepsilon)\right\|\le\left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^2<1$. Демек, мындан $\left\|y^{(n-1)}(t,\varepsilon)-y^{(n-2)}(t,\varepsilon)\right\|\le\left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^{n-1}<1$ барабарсыздыгынын аткарылышын божомолдойлу. Айырма катары жазылган

$\left\|y^{(n)}(t,\varepsilon)-y^{(n-1)}(t,\varepsilon)\right\|$ баалоонун тууралыгын далилдейли. Бул жерде $\left\|y^{(n)}(t,\varepsilon)-y^{(n-1)}(t,\varepsilon)\right\| \le \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^n < 1$. Катар түзөлү

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(y^{(k)}(t,\varepsilon)-y^{(k-1)}(t,\varepsilon)\right). \tag{13}$$

Эгерде (13) катар бир калыпта жыйналса, анда $\left\{y^{(n)}(t,\varepsilon)\right\}$ удаалаштыгы да бир калыпта жыйналат.

Акыркы (13) катардын бир калыпта жыйналуучулугун далилдейли. Анда

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left(y^{(k)}(t,\varepsilon)-y^{(k-1)}(t,\varepsilon)\right)\right\| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left\|y^{(k)}(t,\varepsilon)-y^{(k-1)}(t,\varepsilon)\right\| = \left\|y^{(1)}(t,\varepsilon)-y^{(0)}(t,\varepsilon)\right\| +$$
$$+\left\|y^{(2)}(t,\varepsilon)-y^{(1)}(t,\varepsilon)\right\| + \ldots + \left\|y^{(n)}(t,\varepsilon)-y^{(n-1)}(t,\varepsilon)\right\| + \ldots = \tilde{C}\delta(\varepsilon) + \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^2 +$$
$$+\ldots+\left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^n + \ldots = \tilde{C}\delta(\varepsilon)\times\left(\frac{1-\left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^{n+1}}{1-\left(C\delta(\varepsilon)\right)}\right).$$

Каралуучу аймакта $\left\|y^{(n)}(t,\varepsilon)\right\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon)\times\left(\frac{1-\left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^{n+1}}{1-\tilde{C}\delta(\varepsilon)}\right)$ болуп, жана $n \to \infty$ умтулганда $\left\|y(t,\varepsilon)\right\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon)$ алабыз. Теорема далилденди.

Корутунду. Жыйынтыгында $\left\{y^{(n)}(t,\varepsilon)\right\}$ удаалаштыгы кандайдыр бир (1), (2) маселенин чечими болуп саналган $y(t,\varepsilon)$ функциясына бир калыпта жыйналат деп айта алабыз. Козголбогон маселенин чечими нөлгө барабар болгон учур мурда каралган, бирок ал жумуштарда $D(t) \ne 0$ шарты бар болчу. Бул учурда $D(t) = 0$ болуп, чегериштердин тийгизген таасиринин негизинде козголбогон маселенин чечими нөлгө барабар болуп калды. Ал учур далилденген теорема 1 ден көрүнүп турат. Изилдөөдөн көрүнгөндөй эгерде аналитикалык функцияга кичине параметр катышпаса, анда ал функциянын мааниси анын өзгөчө чекиттеринин таасиринде гана аныкталат. Тактап айтканда аналитикалык функциянынын чыныгы бөлүгү терс же оң болуусу мааниге ээ эмес. Кичине параметр катышса анда терс болгон бөлүгү чечимдин асимптотикасын аныктап калат. Чыныгы бөлүктүн теңдеш нөлгө барабар болуусу өзгөчө учур катары сыпатталат.

Бирок [1, 2] жумуштарда комплекстик тегиздикке көчүү менен бул учурда да баалоо алуу мүмкүнчүлүгү келип чыккан. Өздүк маанилер жалан гана жорума бөлүктөн турса, анда ал прикладдык [5, 8] мааниге ээ болот. Чегериштердин тийгизген таасири астында (1), (2) жана (3) маселелердин чечимдеринин асимптотикалык жакындыгы бир байламталуу комплекстик Ω аймагында далилденген.

Адабияттар

1. Акматов, А.А. Асимптотическое представление интегралов Френеля в комплексной плоскости [Текст] / А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. – Ош. 2021. – С. 21-27.

2. Акматов, А.А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи [Текст] / А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. - Ош. 2021. – С. 28-35.

3. Акматов, А.А. Применение вычеты при исследовании решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [Текст] / А.А. Акматов // Журнал Евразийское научное объединение. №1. - Москва. 2022. – С. 1-3.

4. Акматов, А.А. Метод регуляризации решений бисингулярно возмущенной задачи в пространстве обобщенных функций [Текст] / А.А. Акматов // Журнал Бюллетень науки и практики. №2. - Москва. 2022. – С. 10-17. https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01

5. Акматов, А.А., , Применение метода возмущений в теории оптики [Текст] / А.А. Акматов, Н. Замирбек кызы, К.К. Шакиров // Вестник Жалал-Абадского государственного университета 2021. №3 (48). - С. 205-210.

6. Алыбаев, К.С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст] / К.С. Алыбаев // Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.02.02. – Жалал-Абад. 2001. - 376 с.

7. Каримов, С. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений имеющих условную устойчивость [Текст] / С. Каримов, А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. – Ош. 2021. – С. 61-69.

8. Мурзабаева, А.Б. Исследование диффракции света в ближной зоне с помощью математического моделирование [Текст] / А.Б. Мурзабаева, А.А. Акматов // Вестник Жалал-Абадского государственного университета 2021. №2 (47). - С. 35-43.

9. Каримов, С. Более точные оценки решения сингулярно возмущенной задачи [Текст] / С. Каримов, Г.М. Анарбаева, А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. - Ош. 2015. – С. 133-138.

10. Каримов, С. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости [Текст] / С. Каримов, А.А. Акматов // II. Естественные и технические науки №2. Москва. 2006. – С. 14-18.

11. Маркушевич, А.И. Введение в теорию аналитических функций [Текст] / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич // Просвещение. – Москва. 1977. – С. 202-211.

12. Турсунов, Т.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений [Текст] / Т.А. Турсунов // Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ош. 2013. – С. 9-92.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_56

ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЛИНИИ УРОВНЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЬЯХ

Алыбаев Курманбек Сарманович, д. ф-м.н., профессор,
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Жалал-Абадский государственный университет
Жалал-Абад, Кыргызстан
Матанов Шерали Маматжанович, преподователь
sheralimatanov@yahoo.com
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Исследование ассимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями в комплексных областьях сводятся к исследованию некоторых специальных функций с малым параметром (наподобие интегралов содержащих большой параметр). Исследование таких функций затрудняется тем, что надо выделить из заданной области некоторую часть и выбрать пути интегрирования, которые обеспечивают ограниченность рассматриваемых функций по малому параметру.*

В данной работе разработан метод основанный на линиях уровней гармонических функций, построения области. Затем доказана достаточные условия ограниченности специальных функций по малому параметру.

Все построения сопровождены соответствующими рисунками. В дальнейшем результаты данной работы можно использовать для теории сингулярно возмущенных уравнений в комплекной области.

Ключевые слова: *Сингулярное возмущение, асимптотическое поведение, геометрический подход, линия уровня, аналитические и гармонические функции, деление области, монотонность, путь интегрирование, ограниченность.*

КОМПЛЕКСТИК ОБЛАСТТАРДАГЫ ГАРМОНИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН ДЕҢГЭЭЛ СЫЗЫКТАРЫН КОЛДОНУУ МЕНЕН АЙМАКТАДЫ АНЫКТОО

Алыбаев Курманбек Сарманович, ф-м.и.д., профессор,
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Жалал-Абад мамлекеттик университети,
Жалал-Абад, Кыргызстан,
Матанов Шерали Маматжанович, окутуучу,
sheralimatanov@yahoo.com
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Комлекстик областтардагы аналитикалык функциялары бар сингулярдуу козголгон теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык өзгөрүшүн изилдөө кээ бир кичинекей параметри бар (чоң параметрди камтыган интегралдар сыяктуу) атайын функцияларды изилдөөгө келтирилет. Мындай функцияларды изилдөөгө белгилүү бир аймактын белгилүү бир бөлүгүн тандап алуу жана каралып жаткан функциялардын кичинекей параметрге карата чектелгендигин камсыздоочу интеграциялык жолдорду тандап алуу кыйынчылык жаратат.Бул макалада биз гармониялык функциялардын деңгээл сызыктарына негизделген ыкманы иштеп чыктык, аймакты аныктадык. Андан кийин кичинекей параметрге карата атайын функциялардын чектелген-дигинин жетиштүү шарттары далилденди. Бардык өзгөртүп түзүүлөр тиешелүү сүрөттөр менен коштолду. Келечекте бул иштин натыйжалары комплекстик областагы сингулярдык козголгон теңдемелердин теориясын өнүктүрүүдө колдонсо болот.*

Ачкыч сөздөр: *Сингулярдык козголуу, асимптотикалык жүрүм-турум, геометриялык ыкма, деңгээл сызыгы, аналитикалык жана гармоникалык функциялар, аймактын бөлүнүшү, монотондуулук, интегрдоо жолу, чектүүлүк.*

CONSTRUCTION OF AREAS USING THE LINE OF LEVEL OF HARMONIC FUNCTIONS IN COMPLEX AREAS

Alybaev Kurmanbek Sarmanovich, doctor of ph. and mathematical sciences, professor,
alybaevkurmanbek@rambler.ru,
Jalal-Abad State University,
Jalal-Abad, Kyrgyzstan,
Matanov Sherali Mamatzhanovich, lecturer,

sheralimatanov@yahoo.com,
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The study of the asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed equations with analytic functions in complex domains is reduced to the study of some special functions with a small parameter (like integrals containing a large parameter). The study of such functions is hampered by the fact that it is necessary to select a certain part from a given region and choose integration paths that ensure that the functions under consideration are bounded with respect to a small parameter.*

In this paper, we have developed a method based on the lines of levels of harmonic functions, constructing an area. Then, sufficient conditions for boundedness of special functions with respect to a small parameter are proved. All constructions are accompanied by corresponding figures. In the future, the results of this work can be used for the theory of singularly perturbed equations in the complex domain.

Keywords: *Singular perturbation, asymptotic behavior, geometric approach, level line, analytic and harmonic functions, domain division, monotonicity, integration path, boundedness.*

Введение. В данной работе предлагается геометрический подход построения областей с применением линии уровней гармонических функций пораждаемых аналитическими функциями $F(t)$.

Исследование асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями в комплексных областьях [1-5] сводятся к исследованию специальных функций вида

$$\mathcal{J}_0(t,\varepsilon) = exp\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon}, \qquad (1)$$

$$\mathcal{J}_1(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) exp\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon} d\tau, \qquad (2)$$

в некоторых комплексных областей при $\varepsilon \to 0$ ($0 < \varepsilon$ – малый параметр).

Трудность асимтотического исследования функций заключается, в том что из заданной области надо выбрать некоторую часть, и пути интегрирования где $\mathcal{J}_0(t,\varepsilon)$ $\mathcal{J}_1(t,\varepsilon)$, будут ограниченными при $\varepsilon \to 0$.

При исследовании функции (1)–(2) оснавная роль принадлежит функции $F(t)$, в предположении, что $\varphi(\tau)$ в рассматриваемой области аналитично и её изменение существенно не влияет на асимптотическое поведение $\mathcal{J}_1(t,\varepsilon)$.

Следовательно далее будем рассматривать только функции $F(t)$.

Пусть задана система функций

$$(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$$

и выполнены условия:

УС1. $\forall\, \lambda_j(t) \in Q(\mathcal{D}) -$ пространство аналитических функций в $\mathcal{D}$.

УС2. $\forall t \in \mathcal{D} \ \ \big(Im\lambda_j(t) > 0, j = 1, \dots, n\big)$.

Введем в рассмотрение функции

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau) d\tau, j = 1, \dots, n.$$

Поставим задачу: Построить область, $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, где выполняются соотношения:

$\forall t \in \mathcal{D}_0 \big(ReF_j(t) \leq 0, j = 1, \dots, n\big)$

$\forall t \in \mathcal{D}_0$ существуют пути по которым $Re(F(t) - F(\tau)) \leq 0$.

Согласно УС1 решение задачи $F_j(t) \in Q(\mathcal{D})$. Функции $F_j(t)$ порождают гармонические функции $ReF_j(t)$, $ImF_j(t)$.

Определение. Множество $\big(p_j\big) = \{t \in \mathcal{D}, ReF_j(t)\}$ назовём линией уровня функции $ReF_j(t)$.

Линия уровня $ImF_j(t)$ определяется аналогично, и обозначается $\big(q_j\big)$. Заметим, согласно УС2 через любую точку области $\mathcal{D}$ проходит единственная линия уровня функций $ReF_j(t)$, $ImF_j(t)$. Из множества $\big\{p_j\big\}$(j - фиксированное) возьмём линию $\big(p_{0j}\big) = \big\{t \in \mathcal{D}, ReF_j(t) = 0\big\}$.

По определению функции $F_j(t)$, линия (p_{0j}) проходит через точку t_0 и область $\mathcal{D}$ делит (не ограничивая общности можно считать так) на части $\mathcal{D}_{1j}, \mathcal{D}_{2j}$ (Рис. 1).

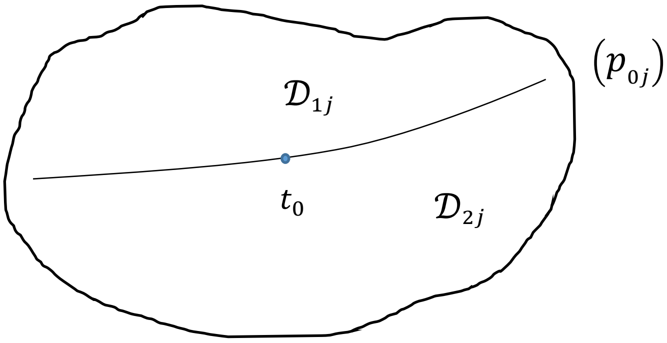


Рисунок 1. Деление области $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}_{1j}$ и $\mathcal{D}_{2j}$.

На линии (p_{0j}) возьмем произвольную точку $\tilde{t} = \tilde{t}_1 + i\tilde{t}_2$ и рассмотрим прямую $(\tilde{q}_j) = \{t \in \mathcal{D},\ t_1 = \tilde{t}_1 - const, -\infty < t_2 < \infty\}$.

Прямая $(\tilde{q}_j)$ проходит через точку $\tilde{t}$.

Лемма 1. Пусть выполняются условия УС1 и УС2. Тогда вдоль прямой $(\tilde{q}_j)$ функция $ReF_j(t)$ строго убывает.

Доказательство. Обозначим $ReF_j(t) = F_{1j}(t_1, t_2)$. Рассматривая функцию $F_{1j}(t_1, t_2)$ вдоль прямой $(\tilde{q}_j)$ имеем $F_{1j}(\tilde{t}_1, t_2)$.

Тогда $\left(F_{1j}(\tilde{t}_1, t_2)\right)'_{t_2} = -Im\lambda_j(\tilde{t}_1 + it_2) < 0$ (согласно УС2).

Отсюда следует справедливость леммы1.

Следствие 1. Согласно $F_{1j}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) = 0$ и Леммы 1 следует справедливость следующего утверждения

$$\forall t \in \mathcal{D}_{1j}\left(ReF_j(t) \le 0\right) \wedge \forall t \in \mathcal{D}_{2j}\left(ReF_j(t) \ge 0\right). \qquad (3)$$

При этом в (3), равенство выполняется только для $t \in (p_{0j})$.

Область $\mathcal{D}_{1j}$ определена рассмотрением только функции $ReF_j(t)$ при фиксированным j. Если рассмотреть систему функций $\{ReF_j(t),\ j = 1, \dots, n\}$ и линий уровня $\{(p_{0j}), j = 1, \dots, n\}$, то получим систему областей $\{\mathcal{D}_{1j},\ j = 1, \dots, n\}$. Возникает вопрос: каково взаимосвязь областей $\mathcal{D}_{1j}$.

Для ответа на этот вопрос рассмотрим систему линии уровней $\{(p_{0j}), j = 1, \dots, n\}$. По определению эта система привязана к точке t_0, то есть все линии $(p_{0j}), j = 1, \dots, n$ проходят через точку t_0. Других сведений относительно этой системы не имеется. Не исключено что линии (p_{0j}) могут взаимно пересекатся в нескольких точках (коме точки t_0). В общем случае определить такие точки практически невозможно и каждый конкретный случай придется рассмотреть отдельно.

В цельях упорядоочения расположения системы $\{(p_{0j}), j = 1, \dots, n\}$ потребуем выполнимость условия:

УС3. Пусть в система $\{(p_{0j}), j = 1, \dots, n\}$ две произвольные линии в области $\mathcal{D}$ не имеют общих точек, кроме t_0.

Через точку $t_0 = t_{10} + it_{20}$ проведем прямую

$(q_0) = \{t \in \mathcal{D},\ t_1 = t_{10}, -\infty < t_2 < \infty\}$.

Прямая (q_0) делит область $\mathcal{D}$ на части Π_1 и Π_2 . Возьмем произвольную линию (p_{0j}) (j-фиксированное). Это линия прямую (q_0) пересекает только в одной точке t_0. Дейстаительно, пусть (p_{0j}) пересекает (q_0) ещё в точке t_0'. Возьмём отрезок (q_0) соединяющий точки t_0 и t_0'.

Согласно УС2, функция $ReF_j(t)$ убывает или возрастает на этом отрезке. С другой стороны $ReF_j(t) = 0,\ ReF_j(t_0') = 0$, что противоречит УС2.

Таким образом одна ветвь (p_{0j}) находится в Π_1, а другая в Π_2. Если учесть УС3, то в Π_1 и Π_2 ветви линии уровней системы $\{(p_{0j}), j = 1, \dots, n\}$ распологаются в определенном порядке(не обязательно в порядковом номере) (Рис. 2).

Лемма 2. Пусть выполняются условия УС1, УС2, УС3. Тогда существует $\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{D}_{1j} = \mathcal{D}_{10}$ и $\forall t \in \mathcal{D}_{10} \left(ReF_j(t) \leq 0, j = 1, \dots, n\right)$.

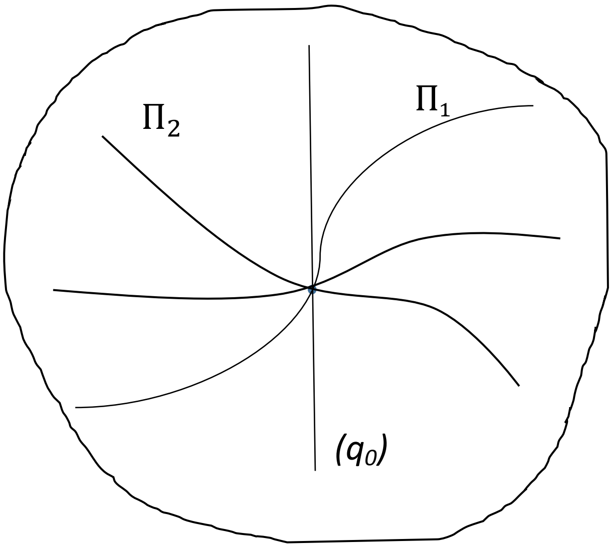


Рисунок 2. Расположение линий системы $\{(p_{0j})\}$.

Доказательство. При выполнении условии УС1, УС2, УС3 в частях Π_1, Π_2 ветви линий системы $\{(p_{0j}), j = 1, \dots, n\}$ упорядочены. Пусть в Π_1 "вверху" (по направлению прямой (q_0)) находится ветвь линий (p_{01}), а в Π_2 ветвь линии $(p_{0k})(1 \leq k \leq n)$. Введем в рассмотрение область $\mathcal{D}_{10}$ ограниченный ветвьями (p_{01}) и (p_{0k}) (Рис. 3).

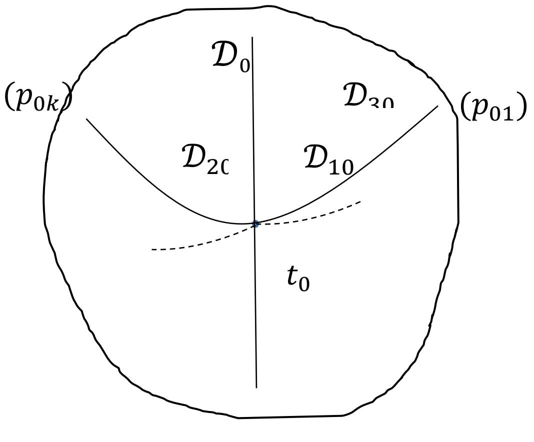


Рисунок 3. Определение области $\mathcal{D}_{10}$

На линии $(p_{0k}) \cup (p_{01})$ возьмём произвольную точку $\tilde{\tilde{t}} = \tilde{\tilde{t}}_1 + \tilde{\tilde{t}}_2$ и проведем прямую $\left(\tilde{\tilde{q}}\right) = \left\{t \in \mathcal{D}, t_1 = \tilde{\tilde{t}}_1, -\infty < t_2 < +\infty\right\}$.

На основании УС2 все функции $ReF_j(t), (j = 1, \dots, n)$ убывают по прямой $\left(\tilde{\tilde{q}}\right)$ (Лемма 1). На ветви (p_{01}), только $ReF_1(t) = 0$, а $ReF_j(t) < 0$ $(j = 2, \dots, n)$, на ветви (p_{0k}) только $ReF_k(t) = 0$, $ReF_j(t) < 0$ $(j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$.

Тогда $\forall t \in \mathcal{D}_{10}\left(ReF_1(t) \le 0,\ ReF_k(t) \le 0, ReF_j(t) < 0, j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\right)$, причем $\mathcal{D}_{10} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{D}_{1j}$. Лемма доказана.

Примечание. Если рассмотреть только одну функцию $\lambda_1(t)$, то условия УС2, УС3 можно снять, а условие УС1 заменит на

УС1.1 $\lambda_1(t) \in Q(\mathcal{D}) \wedge \forall t \in \mathcal{D}(\lambda_1(t) \ne 0)$

Действительно, рассмотрим функции

$F_1(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_1(t) d\tau$ и $ReF_1(t), ImF_1(t)$.

Определим линии уровня

$(p) = \{t \in \mathcal{D}, ReF_1(t) = p - const\}$,

$(q) = \{t \in \mathcal{D}, ImF_1(t) = q - const\}$,

Согласно УС1.1 $(p), (q)$ не имеют точек ветвления в области $\mathcal{D}$.

$(p_0) = \{t \in \mathcal{D}, ReF_1(t) = 0\}$.

Как и в предыдущем случае (p_0) область $\mathcal{D}$ делит на части $\mathcal{D}_1$ и$\mathcal{D}_2$. На линии (p_0) возьмём произвольную точку $\tilde{t}$ и проведем линию

$(\tilde{q}) = \{t \in \mathcal{D}, ImF_1(t) = ImF_1(\tilde{t}) = \tilde{q}\}$.

Рассмотрим функцию $ReF_1(t)$ вдоль линии $(\tilde{q})$. Известно [6], вдоль линии $(\tilde{q})$ функция $ReF_1(t)$строго монотонна. Тогда выполняется только один из следующих соотношений

$$\forall t \in \mathcal{D}_1(ReF_1(t) \le 0) \wedge \forall t \in \mathcal{D}_2(ReF_1(t) \ge 0), \qquad (4)$$

или

$$\forall t \in \mathcal{D}_1(ReF_1(t) \ge 0) \wedge \forall t \in \mathcal{D}_2(ReF_1(t) \le 0), \qquad (5)$$

Так как соотношения (4) и (5) равноправны, то можно взять любую из них. Высказанное утвеждение доказано.

Рассмотрим неявные уравнения

$$ReF_1(t) = 0, \qquad ReF_k(t) = 0$$

Согласно условия УС2 из данных уравнений определяются функции

$$t_2 = \varphi_1(t_1), \quad t_{10} \le t_1 \le \alpha_1,$$

$$t_2 = \varphi_k(t_1), \quad \alpha_2 \le t_1 \le t_{10},$$

где $\alpha_1 \alpha_2 -$ некоторые постоянные.

Пусть выполнятся условия:

УС4. $\left[ReF_j\big(t_1 + i\varphi_1(t_1)\big)\right]'_{t_1} < 0,\ j = 2, \dots, n,$

$$\left[ReF_j\big(t_1 + i\varphi_k(t_1)\big)\right]'_{t_1} < 0,\ j = 1,2, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

Теперь решение поставленной задачи можно выразить следующей теоремой.

Теорема. Пусть выполняются условия УС1 – УС4. Тогда существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и выполняются соотношения:

$\forall t \in \mathcal{D}_0(ReF_j(t) \le 0 \wedge$ существуют пути $\gamma(t_0, t) -$ соединяющие точки t_0 и t по котором $Re(F(t) - F(\tau)) \le 0$, где $\tau -$ промежуточная переменная.

Доказательство. При выполнение условий УС1 – УС3, согласно Леммы 2 существует область $\mathcal{D}_0$ и $\forall t \in \mathcal{D}_0\big(ReF_j(t) \le 0\big)$.

Докажем вторую часть теоремы.

Пусть $t \in \mathcal{D}_0$. Область $\mathcal{D}_0$ прямой (q_0) разделяется на части $\mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{20}$ (Рис. 3) Если $t \in \mathcal{D}_{10}$, то путь $\gamma_1(t_0, t)$ состоит из части $(p_{01}) -$ соединящего точки t_0 и $\tilde{t} \in (p_{01})$ и прямолинейного отрезка соединящего точки $\tilde{t} = t_1 + i\tilde{t}_2,\ t = t_1 + it_2$.

Если $t \in \mathcal{D}_{20}$, то $\gamma_2(t_0, t)$ состоит из части $(p_{0k}) -$соединяющего точки t_0 и $\tilde{t} \in (p_{0k})$ и прямолинейного отрезка соединяющего точки $\tilde{t} = t_1 + i\tilde{t}_2,\ t = t_1 + it_2$.

Теперь согласно определения области и условия УС4 нетрудно проверить справедливость соотношения

$\forall t \in \mathcal{D}_0\big(ReF_j(t) - ReF_j(\tau) \le 0\big)$. Теорема доказана

Литература

1. Алыбаев, К.С. Метод погранслойных линий построения регулярно и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с

аналитическими функциями [Текст] / К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLVII международной научно-практической конференции. № 10 (45). Россия, Новосибирск: СиБАК, 2016. - С. 59-66.

2. Нарымбетов, Т.К. Асимптотический анализ решений слабо нелинейных сингулярно возмущенных уравнений первого порядка в комплексных областях [Текст] / К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов // Вестник Ошского государственного университета: Серия «Физика, математика, информационные технологии, экономика, технические науки». – Ош, 2020. – №1. – С. 96-103.

3. Нарымбетов, Т.К. Анализ исследований сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях [Текст] / Т.К. Нарымбетов // Вестник Ошского государственного университета. – Ош, 2021. – №1 (1). – С. 74-89.

4. Алыбаев, К.С. Геометрическая теория сингулярно возмущенного уравнения бернулли с точкой перевала [Текст] / К.С. Алыбаев, Ш.М. Матанов // Международный научный журнал «Наука. Образование. Техника. Ош: КУУ,2021.- №3 (72). Декабрь - С. 40-50.

5. Вазов, В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В. Вазов – М.: Мир, 1968. – 464 с.

6. Федорюк, М.В. Метод перевала [Текст] / М.В. Федорюк - М.: Наука, 1977. – 464 с.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.95

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_66

ХИМИЯЛЫК РЕАКЦИЯДАГЫ СЕКИРИК ЖӨНҮНДӨ

Алымкулов Келдибай, профессор, ф.-м.и.д.,КР УИАнын мүчө-корр.,
keldibay@mail.ru
Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, профессор, ф.-м.и.д.,
kudaiberdi.kozhobekov@mail.ru
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, ф.-м.и.д., профессор
dtursunov@oshsu.kg
Азимов Бектур Абдырахманович, доцент, ф.-м.и. к.,
azimov@oshsu.kg
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Макалада сызыктуу эмес биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Кошинин маселеси каралат. Каралып жаткан Коши маселесинин дагы бир өзгөчөлүгү бул теңдемеде кичи параметр катышат. Бизден ушул кичи параметр нөлгө умтулганда Коши маселесинин чыгарылышынын асимптотикасын тургузуу талап кылынат. Изилденип жаткан Коши маселеси химиялык реакциянын математикалык модели болот. Коши маселесинин чыгарылышы өзгөчө чекитке ээ, ушул чекитте чыгарылыш бир абалдан экинчи абалга секирип өтөт. Бирок каралып жаткан аралыкта чыгарылышы үзгүлтүксүз болот. Мурда биринчи абалдагы (зонадагы) асимптотикалык чыгарылышы тургузулган эле, азыр экинчи абалдагы (зонадагы) асимптотикалык чыгарылышты тургузабыз.*

Ачкыч сөздөр: *химиялык реакциянын моделдик теңдемеси, Коши маселеси, өзгөчө чекит, асимптотика.*

О ПРЫЖКЕ В ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Алымкулов Келдибай, профессор, д.ф.-м.н., член-корр. НАН КР,
keldibay@mail.ru
Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, профессор, ф.-м.и.д.,
kudaiberdi.kozhobekov@mail.ru
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д.ф.-м.н., профессор
dtursunov@oshsu.kg
Азимов Бектур Абдырахманович, к. ф.- м. н., доцент

azimov@oshsu.kg

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В статье рассматривается задача Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. Дополнительная особенность рассматриваемой задачи Коши состоит в том, что в это уравнение входит малый параметр. Требуется установить асимптотику решения задачи Коши при стремлении этого малого параметра к нулю. Исследуемая задача Коши представляет собой математическую модель химической реакции. Решение задачи Коши имеет особую точку, в которой решение быстро переходит из одного состояния в другое. Однако решение непрерывна в рассматриваемом промежутке. Раньше была построена асимптотическое решение в первой зоне, сейчас мы построим асимптотическое решение на второй зоне.*

Ключевые слова: *Модельное уравнение химической реакции, задача Коши, особая точка, асимптотика.*

ABOUT JUMPING IN A CHEMICAL REACTION

Alymkulov Keldibay professor, doctor of physical- math.sci.,member-corresp.of NAN KR
keldibay@mail.ru
Kozhobekov Kudaiberdi Gaparalievich.G., professor, doctor of physical- math.sci.,
kudaiberdi.kozhobekov@mail.ru
Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich, d. p.-m. s., professor
dtursunov@oshsu.kg
Azimov Bektur Abdyrahmanovich, Ph.D., Associate Professor
azimov@oshsu.kg
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The article considers the Cauchy problem for an ordinary nonlinear differential equation of the first order. An additional feature of the Cauchy problem under consideration is that this equation contains a small parameter. It is required to establish the asymptotics of the solution of the Cauchy problem as this small parameter tends to zero. The investigated Cauchy problem is a mathematical model of a chemical reaction. The solution of the Cauchy problem has a singular point at which the solution quickly passes from one state to another. However, the solution is continuous in the considered interval. Previously, an asymptotic solution was constructed in the first zone, now we will construct an asymptotic solution in the second zone.*

***Keywords**: The model equation of a chemical reaction, Cauchy problem, singular point, asymptotic.*

Төмөнкү сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме үчүн Кошинин маселесин изилдейбиз:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\varepsilon}{\beta}\left(1+\beta-T\right)e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}}\,,\ T(0)=1, \tag{1}$$

мында $0<\beta$ - const, $0<\varepsilon<<1$.

(1) - Кошинин маселеси [4]- жумушта изилденген, ал макалада Кошинин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы $t\in[0,1\text{-}\varepsilon)$ аралыкта тургузулган. Изилдөөнү улантып, бул макалада (1)- Кошинин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасын $t=1$ чекиттин чеке-белинде тургузабыз, б.а. $t\in[1\text{-}\varepsilon,\ 1\text{+}\varepsilon]$.

(1)- маселенин чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$T\left(t\right)=\varphi\left(\sigma\right), \tag{2}$$

мында φ жаңы изделүүчү функция, $\sigma=\varepsilon ln\frac{1}{1-t},\ 0\le\sigma<1.$

φ функциясын аныктайбыз, $1-t=e^{-\sigma/\varepsilon},0\le\sigma<1,dt=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\sigma/\varepsilon}d\sigma$ болгондуктан (1)- теңдеме төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varepsilon\frac{d\varphi}{d\sigma}e^{\sigma/\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{\beta}\left(1+\beta-\varphi\right)e^{\frac{\varphi-1}{\varepsilon\varphi}}\ \Rightarrow\frac{d\varphi}{d\sigma}=\frac{1}{\beta}\left(1+\beta-\varphi\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{1}{\varphi}-\sigma\right)}.$$

Айталы

$$\varphi=\frac{1}{1-\sigma}+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+... \tag{3}$$

болсун. Анда (3)тү (1) ге коюуп төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}+\varepsilon\varphi_1'+\varepsilon^2\varphi_2'+...=$$

$$=\frac{1}{\beta}\left(1+\beta-\frac{1}{1-\sigma}-\varepsilon\varphi_1-\varepsilon^2\varphi_2-...\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\sigma-\frac{1}{\frac{1}{1-\sigma}+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+...}\right)},$$

бул жерде

$$e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\sigma-\frac{1}{\frac{1}{1-\sigma}+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\dots}\right)}=e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}+e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}\left(1-\sigma\right)^2\left(\varphi_2-\varphi_1^2+\varphi_1^2\sigma\right)\varepsilon+$$

$$+\frac{1}{2}e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}(-12\varphi_1\varphi_2\sigma^2+4\varphi_1\varphi_2\sigma^3+20\varphi_2\varphi_1^2\sigma^3-10\sigma^4\varphi_2\varphi_1^2+2\sigma^5\varphi_2\varphi_1^2+$$

$$+10\sigma\varphi_2\varphi_1^2-4\varphi_2\varphi_1+12\sigma\varphi_2\varphi_1-20\sigma^2\varphi_2\varphi_1^2-4\sigma\varphi_3-8\sigma^3\varphi_1^3+2\sigma^2\varphi_3+$$

$$+2\sigma^4\varphi_1^3+6\sigma^2\varphi_2^2+15\sigma^4\varphi_1^4-4\sigma^3\varphi_2^2-6\sigma^5\varphi_1^4+\sigma^4\varphi_2^2+\sigma^6\varphi_1^4-8\sigma\varphi_1^3+12\sigma^2\varphi_1^3+$$

$$+\varphi_2^2-2\varphi_2\varphi_1^2-6\sigma\varphi_1^4+15\sigma^2\varphi_1^4-4\sigma\varphi_2^2-20\sigma^3\varphi_1^4+2\varphi_3+2\varphi_1^3+\varphi_1^4)\varepsilon^2+O\left(\varepsilon^3\right)$$

экендигин эске алып,

$$\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}+\varepsilon\varphi_1'+\varepsilon^2\varphi_2'+\ldots=\frac{1}{\beta}\left(1+\beta-\frac{1}{1-\sigma}-\varepsilon\varphi_1-\varepsilon^2\varphi_2-\ldots\right)\times$$

$$\times\left(e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}+e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}\left(1-\sigma\right)^2\left(\varphi_2-\varphi_1^2+\varphi_1^2\sigma\right)\varepsilon+\ldots\right),$$

акыркы барабардыктан, кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарлап, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}=\frac{1}{\beta}\left(1+\beta-\frac{1}{1-\sigma}\right)e^{(1-\sigma)^2\varphi_1},$$

мындан

$$\varphi_1=\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}ln\frac{\beta}{\left(1-\sigma\right)\left(\left(1+\beta\right)\left(1-\sigma\right)-1\right)}=-\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}ln\left(1-\sigma\right)\left(1-\frac{1+\beta}{\beta}\sigma\right)=$$

$$=-\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}ln\frac{1+\beta}{\beta}\left(1-\sigma\right)-\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}ln\left(\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma\right),\quad 0\le\sigma<\frac{\beta}{1+\beta},$$

Бул жерде $\varphi_1\left(0\right)=0$ жана

$$\varphi_1 \square -\left(\beta+1\right)^2 ln\left(\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma\right),\ \sigma\to\frac{\beta}{1+\beta}.$$

φ_2 үчүн төмөнкү теңдемени алабыз:

$$\varphi_1'=\frac{1}{\beta}\left(\left(1+\beta-\frac{1}{1-\sigma}\right)e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}\left(1-\sigma\right)^2\left(\varphi_2-\varphi_1^2+\varphi_1^2\sigma\right)-\varphi_1 e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}\right),$$

же

$$\varphi_1' = \left(\varphi_2 - \varphi_1^2 + \varphi_1^2\sigma\right) - \frac{\varphi_1}{(1-\sigma)\left((1+\beta)(1-\sigma)-1\right)},$$

мындан

$$\varphi_2 = \varphi_1' + \frac{\varphi_1}{(1-\sigma)\left((1+\beta)(1-\sigma)-1\right)} + \varphi_1^2(1-\sigma), \quad \varphi_2(0) = \frac{1-2\beta}{\beta}$$

демек,

$$\varphi_2 \sim (\beta+1)^2 \frac{1}{\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma}.$$

Аналогиялуу түрдө φ3 тү аныктайбыз:

$$\varphi_3 \sim \varphi_2^2 = \left((\beta+1)^2 \frac{1}{\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma}\right)^2.$$

Натыйжада төмөнкү катарды алабыз:

$$\varphi = \frac{1}{1-\sigma} + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots = \frac{1}{1-\sigma} - \varepsilon c_1 \, ln\left(\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma\right) +$$

$$+\varepsilon^2 \frac{c_2}{\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma} + \varepsilon^3 c_3 \left(\frac{1}{\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma}\right)^2 + \ldots, 0 \le \sigma < \frac{\beta}{1+\beta} < 1.$$

Ошентип, ажыралма төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{1-\sigma} - \varepsilon c_1 \, ln(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon^2 \frac{c_2}{\sigma_0 - \sigma} + \varepsilon^3 c_3 \left(\frac{1}{\sigma_0-\sigma}\right)^2 +$$

$$+\varepsilon^4 c_4 \left(\frac{1}{\sigma_0-\sigma}\right)^3 + \ldots\ldots, \tag{4}$$

мында $\sigma_0 = \frac{\beta}{1+\beta}$.

Теорема 1. (4)- катар $\sigma_0 - \sigma = \varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon \to 0,$болгондо асимптотикалык катар болот.

Эми (4)тө

$$\sigma = \xi + \varepsilon\sigma_1(\xi) + \varepsilon^2\sigma_2(\xi) + ... \qquad (5)$$

өзгөртүү жүргүзөбүз, мында $\sigma_i(\xi)$ - белгисиз функциялар.

Анда (4)төн төмөнкүнү алабыз:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{1-\xi} + \varepsilon\sigma_1(\xi) + \varepsilon(1+\beta)ln(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon\frac{c_2}{\xi}ln\rho + \varepsilon^3 c_3\frac{1}{\rho^2} + \\ +\varepsilon^4 c_4\left(\frac{1}{\rho}\right)^3 + ..., \rho = \sigma_0 - \xi, \sigma_2 = \rho^{-1} \qquad (6)$$

Эгерде $\sigma_1 = -(1+\beta)ln\rho$ десек, анда

$$\sigma = \xi - \varepsilon(1+\beta)ln\rho + \varepsilon c_2\frac{1}{\rho} + ... \qquad (7)$$

Эгерде (7)де $\sigma \to \sigma_0$, анда

$$\rho \sim \varepsilon(1+\beta)ln\rho \iff \rho = \varepsilon(1+\beta)ln\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon \to 0$$

$$\rho \sim \varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon \to 0$$

(5), (6) катарлар асимптотикалык болушат. Далилдөөсү мажорант методу менен жүргүзүлөт.

Натыйжада (1)- Кошинин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы t=1 чекиттин чеке-белинде тургузулду.

Адабияттар

1. Ashwani, K. Kapila Asymptotic Treatment of Chemically Reacting Systems [Text] / K. Ashwani, 1983.

2. Алымкулов, К. The method of uniformization and justification of Lighthill method (in Russian) [Text] / К. Алымкулов // Izvestia AN Kyrg. SSR, 1981, № 1. pp. 35-38.

3. Alymkulov, K. Perturbed Differential Equations with Singular Points in book “ Recent Studies in Perturbation Theory” [Text] / K. Alymkulov, D.A. Tursunov // Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov, Publisher InTech, 2017.

4. Алымкулов, К. Асимптотика решения задачи химической реакции со стационарной достижимостью [Текст] / К. Алымкулов, К.Г. Кожобеков // Вестник Жалал Абадского университета, 2019. – № 3 (42). – С. 128-133.

5. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе [Текст] / А.М. Ильин, А.Р. Данилин – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 248 с.

6. Коул, Дж. Методы возмущений в механике жидкости [Текст] / Дж. Коул – М.: Мир, 1972. – 276 с.

7. Carrier, C.F. Boundary lave problems in applied mathematics [Text] / C.F. Carrier // Comm. Appl. Math. – 1954. – V.7. – P.11-17.

8. Kevorkian, J. Perturbation methods in applied mathematics [Text] / J. Kevorkian, J.D Cole // Springer, (1985).

9. Де Брейп, Н. Г. Асимптотические методы в анализе [Текст] / Н.Г. Де Брейп – М.: ИЛ, 1961. 247 с.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.953.5

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_73

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ, МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Апаков Юсупжон Пулатович, докт. ф.-м. наук, профессор,
Академия наук Республики Узбекистан
имени В.И. Романовский институт математики
yusupjonapakov@gmail.com
Умаров Рахматилла Акрамович,
r.umarov1975@mail.ru,
Наманганский инженерно- строительний институт,
Наманган, Узбекистан

Аннотация: *В работе рассматривается первая краевая задача в прямоугольной области для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с постоянными коэффициентами при младших членах. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Используя метод разделения переменных решение задачи ищется в виде произведения двух функций X(x) и Y(y). Для определения X(x) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с тремя граничными условиями на границе сегмента [a, b], а для Y(y) – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными условиями на границе сегмента [c, d]. Методом функции Грина построены решения указанных задач. Получены оценки резольвенты и функции Грина. При обосновании равномерной сходимости решения используется отличность от нуля “малого знаменателя”.*

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, несимметричное условие, регулярное решение, единственность, существование, функция Грина.*

ГРИНДИН ФУНКЦИЯСЫН ТУРГУЗУУ МЕТОДУ МЕНЕН КИЧИНЕ МҮЧӨЛӨРҮ БАР ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН БИРИНЧИ ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕНИ ЧЕЧҮҮ

Апаков Юсупжон Пулатович, ф.-м.и. докт., профессор,
Өзбекстан Республикасынын илимдер Академиясынын
В.И. Романовский атындагы математика институту,
yusupjonapakov@gmail.com.
Умаров Рахматилла Акрамович,
r.umarov1975@mail.ru,
Наманган инженер-курулуш институту,
Наманган, Өзбекстан

Аннотация: *Иште кичине мүчөлөрүнүн коэффициенттери турактуу болгон бир тектүү эмес үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн тик бурчтуу аймакта биринчи чек аралык маселе каралат. Берилген маселенин чечиминин жалгыздыгы энергетикалык интегралдар методу менен далилденет. Өзгөрмөлөрдү ажыратуу методун колдонуу менен маселенин чечими эки X(x) жана Y(y) функцияларынын көбөйтүндүсү түрүндө изделет. X(x) функциясын аныктоо үчүн [a, b] сегментинде үч чек аралык шарттары бар үчүнчү тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемени алынат, ал эми Y(y) функциясы үчүн [c, d] сегментинде эки чек аралык шарты бар экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме алынат. Бул маселелердин чечимдери Грин функциясы методун колдонуу менен табылат. Резольвента жана Гриндин функциясы үчүн баа алынат. Чечимдин бир калыпта жыйналуучулугун негиздөөдө “кичине бөлүмдүн” нөлдөн айырмаланып турганы колдонулат.*

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдеме, үчүнчү ирет, көп мүнөздөмө, асимметриялык шарт, регулярдуу чечим, уникалдуулук, бар болуу, Грин функциясы.*

SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY PROBLEM FOR A THIRD ORDER EQUATION WITH MINOR TERMS, A METHOD FOR CONSTRUCTING THE GREEN'S FUNCTION

Apakov Yusupjon Pulatovich, Doctor of Physics and Maths sciences
V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
yusupjonapakov@gmail.com.
Umarov Rakhmatilla Akramovich,

r.umarov1975@mail.ru,
Namangan Civil Engineering Institute,
Namangan, Uzbekistan

Abstract: *The paper considers the first boundary value problem in a rectangular domain for an inhomogeneous partial differential equation of the third order with constant coefficients at lower terms. The uniqueness of the solution of the stated problem is proved by the method of energy integrals. Using the method of separation of variables, the solution of the problem is sought as a product of two functions X(x) and Y(y). To determine X(x), we obtain a third-order ordinary differential equation with three boundary conditions on the boundary of the segment [a, b], and for Y(y), we obtain a second-order ordinary differential equation with two boundary conditions on the boundary of the segment [c, d]. The Green's function method is used to construct solutions to these problems. Estimates for the resolvent and Green's function are obtained. When substantiating the uniform convergence of the solution, the non-zero "small denominator" is used.*

Keywords: *Differential equation, third order, multiple characteristics, asymmetric condition, regular solution, uniqueness, existence, Green's function.*

I. Введение.

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В совокупности, всех уравнений третьего порядка особое место по специфическому характеру занимают, уравнения с кратными характеристиками.

В работе [2], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = const.$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ описывает плоско-параллельный поток [3].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах H. Block [4], E. Del Vecehio[5].

L. Catabriga в работе [6] для уравнения $D_x^{2n+1}u-D_y^2u=0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала.

В работах [7]- [8] построены фундаментальные решения уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдена оценки при $|t|\to\infty$. В работах [9]- [14], рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, используя построенную функцию Грина. Также, отметим работы [15]- [23], в которых, рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка.

II. Постановка задачи.

В области $D=\{(x,y):\ 0<x<p,\ 0<y<q\}$ рассмотрим следующее уравнения третьего порядка вида

$$L(u)=U_{xxx}-U_{yy}+A_1U_{xx}+A_2U_x+A_3U_y+A_4U=g_1(x,y), \qquad (1)$$

где $A_i,\ p,\ q\in R,\quad i=1,2,3,4.$, $g(x,y)$ заданная, достаточно гладкая функция.

Заменой

$$U(x,y)=u(x,y)e^{-\frac{A_1}{3}x+\frac{A_3}{2}y},$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx}-u_{yy}+a_1u_x+a_2u=g(x,y), \qquad (2)$$

где $a_1=A_1-\dfrac{2A_1^2}{3}+A_2,\quad a_2=\dfrac{2A_1^3}{27}-\dfrac{A_3^2}{2}-\dfrac{A_1A_2}{3}+A_4,$

$g(x,y)=g_1(x,y)\cdot e^{-\frac{A_1}{3}x+\frac{A_3}{2}y}$

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D)\cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$u(x,0)=0,\quad u(x,q)=0,\quad 0\le x\le p, \qquad (3)$$

$$u(0,y)=\psi_1(y), \quad u(p,y)=\psi_2(y), \quad u_x(\mathrm{p},y)=\psi_3(y), \;\; 0\le y\le q, \tag{4}$$

где $\psi_i(y)\in C^3[0,q], i=\overline{1,3}$, $g(x,y)\in C^{0,1}_{x,y}[0,q]$ заданные функции, причем

$$\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0, \quad g(x,0)=g(x,q)=0,\; i=1,2,3. \tag{5}$$

Отметим, что в работе [9]- [14] рассмотрена случае $a_1=a_2=0$.

III. Единственность решения задачи A

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_2>0$ оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное. Пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в D.

В области D справедливо тождество

$$uL[u]=uu_{xxx}-uu_{yy}+a_1uu_x+a_2u^2=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}a_1u^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2+a_2u^2=0. \tag{6}$$

Интегрируя тождество (6) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q u_x^2(0,y)dy+\int_0^p\int_0^q u_y^2dxdy+a_2\int_0^p\int_0^q u^2dxdy=0. \tag{7}$$

отсюда $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\overline{D}$. Теорема 1доказана.

IV. Существование решения задачи A. Решение задачи A ищем в виде

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y), \tag{8}$$

где функция $v(x,y)$ решение задачи

$$\begin{cases} L[v]=v_{xxx}-v_{yy}+a_1v_x+a_2v=0 \\ v(x,0)=0, v(x,q)=0, 0\le x\le p, \\ v(0,y)=\psi_1(y), v(p,y)=\psi_2(y), v_x(\text{p},y)=\psi_3(y), 0\le y\le q, \end{cases} \tag{9}$$

а функция $w(x,y)$ решение задачи

$$\begin{cases} L[w]=w_{xxx}-w_{yy}+a_1w_x+a_2w=g(x,y) \\ w(x,0)=0, w(x,q)=0, 0\le x\le p, \\ w(0,y)=w(p,y)=w_x(\text{p},y)=0, 0\le y\le q, \end{cases} \tag{10}$$

Решение задачи (9) ищем в виде

$$v(x,y)=X(x)Y(y). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), разделяя переменные относительно $X(x)$, $Y(y)$ и учитывая граничных условий по переменной y, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda^3Y(y)=0 \\ Y(0)=Y(q)=0 \end{cases} \tag{14}$$

Известно [24], что нетривиальное решение задачи (14), существует только при

$$\lambda^3=\lambda_n^3=\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2, \ n=1,2,\dots .$$

Эти числа являются собственными значениями задачи (14) а соответствующие ими собственные функции имеют вид:

$$Y_n(y)=\frac{2}{q}\sin\frac{\pi n}{q}y, \ n=1,2,... \tag{15}$$

Подставляя (11) в (9), учитывая граничных условий по переменной x, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} X'''+a_1X'+a_2X+\lambda_n^3X=0 \\ X(0)=\psi_{1n}, X(p)=\psi_{2n}, X'(p)=\psi_{3n} \end{cases} \tag{16}$$

где $\psi_{in}=\frac{2}{q}\int_0^q\psi_i(\eta)\sin\frac{n\pi}{q}\eta d\eta, i=\overline{1,4}$.

Введем обозначение

$$V(x)=X(x)-\rho(x), \tag{17}$$

где

$$\rho_n(x)=\psi_{1n}+\left(\frac{2\psi_{2n}-2\psi_{1n}}{p}-\psi_{3n}\right)x+\left(\frac{\psi_{1n}-\psi_{2n}}{p^2}+\frac{\psi_{3n}}{p}\right)x^2. \tag{18}$$

Подставляя (17), (18) в (16) получим задачу

$$\begin{cases} V'''+\lambda_n^3 V=\lambda_n^3 f_n(x)-a_1 V'-a_2 V \\ V(0)=V(p)=V'(p)=0, \end{cases} \tag{19}$$

здесь

$$\begin{aligned} f_n(x)=&-\frac{a_2}{\lambda_n^3}\psi_{1n}-\frac{a_2}{\lambda_n^3}\left(\frac{2\psi_{2n}-2\psi_{1n}}{p}-\psi_{3n}\right)x-\frac{a_2}{\lambda_n^3}\left(\frac{\psi_{1n}-\psi_{2n}}{p^2}+\frac{\psi_{3n}}{p}\right)x^2- \\ &-\psi_{1n}-\left(\frac{2\psi_{2n}-2\psi_{1n}}{p}-\psi_{3n}\right)x-\left(\frac{\psi_{1n}-\psi_{2n}}{p^2}+\frac{\psi_{3n}}{p}\right)x^2- \\ &-\frac{a_1}{\lambda_n^3}\frac{2\psi_{2n}-2\psi_{1n}}{p}+\frac{a_1}{\lambda_n^3}\psi_{3n}-2\frac{a_1}{\lambda_n^3}\left(\frac{\psi_{1n}-\psi_{2n}}{p^2}+\frac{\psi_{3n}}{p}\right)x \end{aligned}$$

Согласно теореме Гильберта, решение задачи (19) ищем следующим образом:

$$\begin{aligned} V_n(x)=&\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi-a_1\int_0^p G_n(x,\xi)V_n'(\xi)d\xi- \\ &-a_2\int_0^p G_n(x,\xi)V_n(\xi)d\xi \end{aligned} . \tag{21}$$

где $G(x,\xi)$ функция Грина для задачи (19) и имеет вид [13]:

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases} G_{1n}(x,\xi), & 0\le x<\xi, \\ G_{2n}(x,\xi), & \xi<x\le p. \end{cases}$$

здесь

$$
\begin{gathered}
G_{1n}(x,\xi)=\frac{1}{\overline{\Delta}}\left\{2e^{-\lambda_n\left(\frac{3}{2}p+x-\xi\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p+\frac{\pi}{6}\right)-2e^{-\frac{\lambda_n}{2}(2x+\xi)}\cdot\right. \\
\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)-2e^{-\lambda_n\left(\frac{3}{2}p-\xi-\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(p-x)+\frac{\pi}{6}\right)+ \\
+2e^{-\frac{\lambda_n}{2}(\xi-x)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)+ \\
\left.+4e^{-\frac{\lambda_n}{2}(3p+\xi-x)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(p-\xi)\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n x\right\},\qquad 0\le x\le\xi, \\
G_{2n}(x,\xi)=\frac{1}{\overline{\Delta}}\left\{-2e^{-\frac{\lambda_n}{2}(2x+\xi)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)+e^{-\lambda_n(x-\xi)}-\right. \\
-2e^{-\lambda_n\left(\frac{3}{2}p-\xi-\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(p-x)+\frac{\pi}{6}\right)+ \\
\left.+4e^{-\frac{\lambda_n}{2}(3p+\xi-x)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(p-x)+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)\right\},\qquad \xi\le x\le p,
\end{gathered}
\tag{22}
$$

где

$$\overline{\Delta}=3\lambda_n^2\left(1-2e^{-\frac{3\lambda_n}{2}p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p+\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

(22) являются функции Грина задачи (19).

Интегрируя по частям второй интеграл в (21), имеем

$$V_n(x)=\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi+\int_0^p\left(a_1G_{n\xi}(x,\xi)-a_2G_n(x,\xi)\right)V_n(\xi)d\xi \tag{23}$$

Для удобство введем обозначения

$$V_{0n}(x)=\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi\,,$$

$$\overline{G}_n(x,\xi)=a_1G_{n\xi}(x,\xi)-a_2G_n(x,\xi),$$

тогда (23) имеет вид

$$V_n(x)=V_{0n}(x)+\int_0^p\overline{G}_n(x,\xi)V_n(\xi)d\xi \tag{24}$$

являющееся интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Запишем решение (24) с помощью резольвенты в виде

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x,\xi) V_{0n}(\xi)\, d\xi, \tag{25}$$

где

$$R_n(x,\xi) = \bar{G}_{1n}(x,\xi) + \sum_{m=2}^{\infty} \bar{G}_{mn}(x,\xi)$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi) = \int_0^p \bar{G}_{1n}(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)\,ds,\ m = 2,3,\dots.$$

По оценке $G_n(x,\xi)$ из работы [13] имеем

$$\left|G_n(x,\xi)\right| \le \begin{cases} \dfrac{10}{3}\dfrac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_n p}}{\lambda_n^2} + \dfrac{2}{3}\dfrac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_n \delta_1}}{\lambda_n^2},\ 0 \le x \le \xi,\ \ 0 < \delta_1 < \xi - x, \\ \dfrac{8}{3}\dfrac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_n p}}{\lambda_n^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_n \delta_2}}{\lambda_n^2},\ \xi \le x \le l,\ \ 0 < \delta_2 < x - \xi, \end{cases}$$

отсуда получим следующую оценку

$$\left|G_n(x,\xi)\right| \le \frac{4}{\lambda_n^2},$$

тогда

$$\left|G_{n\xi}(x,\xi)\right| \le \frac{4}{\lambda_n}.$$

Введем обозначие $N = \max\left\{|a_1|,|a_2|\right\}$, используя равенству

$$\bar{G}_n(x,\xi) = a_1 G_{n\xi}(x,\xi) - a_2 G_n(x,\xi)$$

имеем оценку $\bar{G}_n(x,\xi)$ в виде

$$\left|\bar{G}_n\right| \le |a_1|\left|G_{n\xi}\right| + |a_2|\left|G_n\right| \le \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2}\right)4N.$$

Оценим решение (25). Из

$$R_n(x,\xi) = \bar{G}_{1n}(x,\xi) + \bar{G}_{2n}(x,\xi) + \ldots + \bar{G}_{mn}(x,\xi) + \ldots$$

найдем оценку

$$\left|R_n(x,\xi)\right| \le \left|\bar{G}_{1n}(x,\xi)\right| + \left|\bar{G}_{2n}(x,\xi)\right| + \ldots + \left|\bar{G}_{mn}(x,\xi)\right| + \ldots$$

Для правой части этого неравенство составим мажорирующий ряд. Введя обозначение

$$J = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) 4N,$$

находим

$$\left| \bar{G}_{1n}(x,\xi) \right| \le \left| \bar{G}_n(x,\xi) \right| \le 4N \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \le J,$$

$$\left| \bar{G}_{2n}(x,\xi) \right| \le \int_0^p \left| \bar{G}_{1n}(x,s) \right| \left| \bar{G}_{1n}(s,\xi) \right| ds \le J^2 p,$$

$$\left| \bar{G}_{3n}(x,\xi) \right| \le \int_0^p \left| \bar{G}_{1n}(x,s) \right| \left| \bar{G}_{2n}(s,\xi) \right| ds \le J^3 p^2,$$

……………………………………………………………

$$\left| \bar{G}_{mn}(x,\xi) \right| \le \int_0^p \left| \bar{G}_{1n}(x,s) \right| \left| \bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi) \right| ds \le J^m p^{m-1},\ i = 2,3,...,$$

…………………………………………………

Тогда мажорирующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} (Jp)^m$$

Если справедливо неравенство $Jp < 1$, то этот ряд является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Тогда должно выполняться соотношение

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) 4N < \frac{1}{p}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 + 1} > 4Np.$$

После некоторых преобразований получим

$$\left(\frac{3\pi}{2q} \right)^2 > (4Np + 1)^3.$$

Существуют ряд значении числа p,q,N которые удовлетворяют этому неравенству. Например, если $p=1,q=1$, то имеем $N<0,19$.

В этом случае для резольвенты находим оценку

$$\left|R(x,\xi)\right|\le\frac{J}{1-Jp}. \tag{26}$$

Подставляя $G_n(x,\xi)=-\frac{1}{\lambda_n^3}G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi)$ в $V_{0n}(x)$ и интегрируя имеем

$$V_{0n}(x)=-f_n(x)+f_n(0)G_{2n\xi\xi}(x,0)-f_n(p)G_{1n\xi\xi}(x,p)+\int\limits_0^p G_{n\xi\xi}(x,\xi)\,f_n'(\xi)d\xi.$$

Учитывая условия (4), интегрируем по частям ψ_{in} три раза находим оценку

$$\psi_{in}\le\left(\frac{q}{\pi}\right)^3\frac{\left|\Psi_{in}\right|}{n^3},\ i=1,2,3,$$

где $\Psi_{in}=\frac{2}{q}\int\limits_0^q\psi_i'''(\eta)\cos\frac{n\pi}{q}\eta d\eta$.

Тогда имеем оценки

$$\left|f_n(x)\right|\le\frac{F_1}{n^3},\ \left|f_n(0)\right|\le\frac{F_2}{n^3},\ \left|f_n(p)\right|\le\frac{F_3}{n^3},\ \left|f_n'(x)\right|\le\frac{F_4}{n^3},\ \left|G_{2n\xi\xi}(x,0)\right|\le 4,$$

$$\left|G_{1n\xi\xi}(x,p)\right|\le 4,\ \left|G_{1n\xi\xi}(x,\xi)\right|\le 4.$$

Тогда имеем

$$\left|V_{0n}(x)\right|\le\frac{H_0}{n^3}. \tag{27}$$

Здесь $H_0=F_1+4\left(F_2+F_3+F_4\right)<\infty$,

$$F_1=\left(\frac{q}{\pi}\right)^3\left[\left(4+\frac{2N}{\lambda_n^3}+\frac{6N}{\lambda_n^3p}\right)\left|\Psi_{1n}\right|+\left(3+\frac{6N}{\lambda_n^3p}+\frac{N}{\lambda_n^3}\right)\left|\Psi_{2n}\right|+\right.$$

$$\left.+\left(2p+\frac{2pN+3N}{\lambda_n^3}\right)\left|\Psi_{3n}\right|\right]<\infty$$

$$F_2 = \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \left(\left(1 + \frac{4N + Np}{\lambda_n^3 p}\right) |\Psi_{1n}| + \frac{4N}{\lambda_n^3 p} |\Psi_{2n}| + \frac{N}{\lambda_n^3} |\Psi_{3n}| \right) < \infty$$

$$F_3 = \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \left(\left(\frac{N}{\lambda_n^3} + \frac{6N + Np}{\lambda_n^3 p}\right) |\Psi_{1n}| + \left(1 + \frac{6N + Np}{\lambda_n^3 p}\right) |\Psi_{2n}| + \frac{3N + 2Np}{\lambda_n^3} |\Psi_{3n}| \right) < \infty$$

$$F_4 = \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \left[\left(\frac{4}{p} + \frac{2N + 2Np}{\lambda_n^3 p^2}\right) |\Psi_{1n}| + \left(\frac{4}{p} + \frac{2N + 2Np}{\lambda_n^3 p^2}\right) |\Psi_{2n}| + \right.$$
$$\left. + \left(3 + \frac{2N + 3Np}{\lambda_n^3 p}\right) \right] < \infty.$$

Из (26) ва (27) получим оценку

$$|V_n(x)| \le |V_{0n}(x)| + \int_0^p |R(x,\xi)| |V_{0n}(\xi)| d\xi \le \frac{1}{n^3} \frac{H_0}{1 - Jp}.$$

В силу (11) и (17) решение задачи (9) имеет вид

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(V_n(x) + \rho_n(x)\right) \sin\frac{n\pi}{q} y.$$

Проверим это решение на сходимость.

$$|v(x,y)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(|V_n(x)| + |\rho_n(x)|\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{H_0}{1 - Jp} + T_0\right) < \infty.$$

Здесь

$$|\rho_n(x)| \le \frac{T_0}{n^3},\ T_0 = \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \left(3|\Psi_{1n}| + 3|\Psi_{2n}| + (1 + p)|\Psi_{3n}|\right) < \infty.$$

Легко можно показать сходимость $v_x(x,y)$ и $v_{xx}(x,y)$. Покажем сходимость $v_{xxx}(x,y)$. В

$$V_n'''(x) = V_{0n}'''(x) + \int_0^p R_{nxxx}(x,\xi) V_{0n}(\xi) d\xi$$

интегруя по частям $V_{0n}'''(x)$ и после некоторых упрошенный находим оценки

$$\left|V_{0n}'''(x)\right| \le \frac{\lambda_n^3}{n^3} H_0. \tag{28}$$

$$\left|R_{nxxx}(x,\xi)\right| \le \lambda_n^3\left(1+\frac{N}{\lambda_n^2}+\frac{N}{\lambda_n^3}\right)\frac{J}{1-Jp} \qquad (29)$$

В силу (27), (28) и (29) получим оценку

$$\left|V_n'''(x)\right| \le \left|V_{0n}'''(x)\right| + \int_0^p \left|R_{nxxx}(x,\xi)\right|\left|V_{0n}(\xi)\right|d\xi \le \frac{\lambda_n^3}{n^3}\left(H_0 + H_1\left(1+\frac{N}{\lambda_n^2}+\frac{N}{\lambda_n^3}\right)\frac{J}{1-Jp}\right)$$

А после подстановки значеня H_0 и H_1 имеем следующее неравенство,

$$\left|V'''(x)\right| \le \frac{1}{n}\left(M_1\left|\Psi_{1n}\right| + M_2\left|\Psi_{2n}\right| + M_3\left|\Psi_{3n}\right|\right),$$

где M_1, M_2, M_3 – известные числа.

А отсюда окончательно имеем

$$\left|v_{xxx}(x,y)\right| \le M_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{1n}\right|}{n} + M_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{2n}\right|}{n} + M_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{3n}\right|}{n}$$

Используя неравенства Коши-Буняковского и Бесселя:

$$\left|v_{xxx}(x,y)\right| \le M_1\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{1n}\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + M_2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{2n}\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + M_3\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{3n}\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \le$$

$$\le \left(M_1\left|\Psi_{1n}\right| + M_2\left|\Psi_{2n}\right| + M_3\left|\Psi_{3n}\right|\right)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty.$$

Здесь $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{in}\right|^2 \le \left\|\psi_i'''\right\|^2_{L_2(0,q)}$, $i = 1,2,3$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Учитывая неравенство

$$\left|v_{yy}(x,y)\right| \le \left|v_{xxx}(x,y)\right| + \left|a_1\right|\left|v_x(x,y)\right| + \left|a_2\right|\left|v(x,y)\right|$$

Можно заключить что и v_{yy} тоже сходится.

Теперь решение задачи (10) ищем в виде

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_n(x)\sin\frac{n\pi}{q}y\,. \qquad (30)$$

Разложим $g(x,y)$ в ряд Фурье по $\sin\frac{n\pi}{q}y$:

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)\sin\frac{n\pi}{q}y \qquad (31)$$

где $g_n(x)=\frac{2}{q}\int\limits_0^q f(x,\eta)\sin\frac{n\pi}{q}\eta d\eta$. Поставим найденные в (10) и имеем следующую задачу:

$$\begin{cases}\chi_n'''(x)+\lambda_n^3\chi_n(x)=g_n(x)-a_1\chi_n'(x)-a_2\chi_n(x)\\ \chi_n(0)=\chi_n(p)=\chi_n'(p)=0.\end{cases}$$

Напишем решение этой задачи в виде

$$\chi_n(x)=\int\limits_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)d\xi-\int\limits_0^p G_n(x,\xi)\Big(a_1\chi_n'(\xi)+a_2\chi_n(\xi)\Big)d\xi$$

Интегрируя по частям второй интеграл находим

$$\chi_n(x)=\int\limits_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)d\xi+\int\limits_0^p \chi_n(\xi)\big(a_1G_{n\xi}(x,\xi)-a_2G_n(x,\xi)\big)d\xi$$

Введя обозначения

$$\chi_{0n}(x)=\int\limits_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)d\xi,$$

$$\bar{G}_n(x,\xi)=a_1G_{n\xi}(x,\xi)-a_2G_n(x,\xi),$$

имеем уравнение

$$\chi_n(x)=\chi_{0n}(x)+\int\limits_0^p \bar{G}_n(x,\xi)\chi_n(\xi)d\xi\,. \quad (32)$$

Которое является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Напишем решение (32) в виде

$$\chi_n(x)=\chi_{0n}(x)+\int\limits_0^p R_n(x,\xi)\chi_{0n}(\xi)d\xi\,, \quad (33)$$

где

$$R_n(x,\xi)=\bar{G}_{1n}(x,\xi)+\sum_{m=2}^{\infty}\bar{G}_{mn}(x,\xi),$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi)=\int\limits_0^p \bar{G}_{1n}(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds,\ m=2,3,....$$

Учитывая условия (5), интегрируем по частям $g_n(x)$ имеем

$$g_n(x) = \frac{2}{n\pi}\int_0^q g_\eta(x,\eta)\cos\frac{n\pi}{q}\eta d\eta .$$

и в силу

$$G_n(x,\xi) = -\frac{G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi)}{\lambda_n^3},$$

находим

$$\chi_{0n}(x) = -\frac{1}{n\lambda_n^3}\int_0^p G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi) g_n(\xi) d\xi .$$

Интегрируя по частям и имея в виду $G_{1n\xi\xi}(x,x) - G_{2n\xi\xi}(x,x) = -1$ находим

$$\chi_{0n}(x) = \frac{1}{n\lambda_n^3}\left(-g_n(x) + g_n(0) G_{2n\xi\xi}(x,0) - g_n(p) G_{1n\xi\xi}(x,p) + \int_0^p G_{n\xi\xi}(x,\xi) g_n'(\xi) d\xi \right).$$

Тогда получим следующую оценку

$$\left|\chi_{0n}(x)\right| \le \frac{H_2}{\lambda_n^3 n} \tag{34}$$

где $H_2 = F_5 + 4(F_6 + F_7 + F_8 p)$.

$$F_5 = C\left|g_{n\eta}(x)\right|, F_6 = C\left|g_{n\eta}(0)\right|, \ F_7 = C\left|g_{n\eta}(p)\right|, \ F_8 = C\left|g_{n\eta}'(x)\right|.$$

В силу (27) и (34) окончательно получим оценку

$$\left|\chi_n(x)\right| \le \frac{1}{\lambda_n^3 n}\frac{H_2 J}{1 - Jp}$$

Решение задачи (10) имеет вид

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x) \sin\frac{n\pi}{q} y$$

Это решение сходится, потому что

$$\left|w(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\chi_n(x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^3 n}\frac{H_2 J}{1 - Jp} < \infty.$$

Покажем равномерную сходимость $w_x(x,y)$. После некоторых вычислений находим, что

$$\left|\chi_{0n}'(x)\right| \le \frac{H_3}{\lambda_n^2 n} \tag{35}$$

где $H_3 = 4(F_6 + F_7 + F_8 p)$.

Согласно (34) и (35) получим

$$\left|\chi_n'(x)\right| \le \left|\chi_{0n}'(x)\right| + \int_0^p \left|R_{nx}(x,\xi)\right|\left|\chi_{0n}(\xi)\right| d\xi \le \frac{1}{\lambda_n^2 n}\left(H_3 + \frac{JH_2}{1-Jp}\right).$$

Тогда имеем оценку

$$\left|w_x(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\chi_n'(x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2 n}\left(H_3 + \frac{JH_2}{1-Jp}\right) < \infty.$$

Также можно показать сходимость $w_{xx}(x,y)$.

Покажем равномерную сходимость $w_{xxx}(x,y)$. После некоторых вычислений находим оценку

$$\left|\chi_{0n}'''(x)\right| \le \frac{H_3}{n} \tag{36}$$

где $H_3 = 4\left(F_6 + F_7 + F_8 p\right) < \infty$.

Согласно (28), (29) и (36) получим оценку

$$\left|\chi_n'''(x)\right| \le \frac{1}{n}\left(H_3 + H_2\left(1 + \frac{J}{4\lambda_n}\right)\frac{Jp}{1-Jp}\right)$$

Тогда имеем

$$\left|w_{xxx}(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\chi_n'''(x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(H_3 + H_2\left(1 + \frac{J}{4\lambda_n}\right)\frac{Jp}{1-Jp}\right)$$

После некоторых упрошении получим следуюшее неравенство

$$\left|w_{xxx}(x,y)\right| \le L_4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g_{n\eta}(x)\right|}{n} + L_5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g_{n\eta}(0)\right|}{n} + L_6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g_{n\eta}(p)\right|}{n} + L_7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g_{n\eta}'(x)\right|}{n},$$

здесь L_4, L_5, L_6, L_7 - известные постоянная.

Для правой части этого неравенство, используем неравенства Коши-Буняковского и Бесселя

$$\left|w_{xxx}(x,y)\right| \le L_4\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|g_{n\eta}(x)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}+L_5\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|g_{n\eta}(0)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}+$$

$$+L_6\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|g_{n\eta}(p)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}+L_7\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|g_{n\eta}'(x)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\le$$

$$\le \pi\sqrt{\frac{1}{3q}}\left(L_4\left\|f_\eta(x)\right\|+L_5\left\|f_\eta(0)\right\|+L_6\left\|f_\eta(p)\right\|+L_7\left\|f_\eta'(x)\right\|\right)<\infty.$$

Здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{n\eta}(x)\right|^2 \le \frac{2}{q}\left\|f_\eta(x)\right\|^2_{L_2(0,q)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{n\eta}(0)\right|^2 \le \frac{2}{q}\left\|f_\eta(0)\right\|^2_{L_2(0,q)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{n\eta}(p)\right|^2 \le \frac{2}{q}\left\|f_\eta(p)\right\|^2_{L_2(0,q)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{n\eta}'(x)\right|^2 \le \frac{2}{q}\left\|f_\eta'(x)\right\|^2_{L_2(0,q)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая слудующего неравенство будет

$$\left|w_{yy}(x,y)\right| \le \left|w_{xxx}(x,y)\right|+\left|a_1\right|\left|w_x(x,y)\right|+\left|a_2\right|\left|w(x,y)\right|,$$

и заключаем,что и w_{yy} также сходится.

Из решении задач (11) и (12) получим решение задачи A в явном виде:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^p G_n(x,\xi)\left(\lambda_n^3 f_n(\xi)+g_n(\xi)\right)d\xi\sin\frac{n\pi}{q}y+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^p R_n(x,\xi)\int_0^p G_n(x,s)\left(\lambda_n^3 f_n(s)+g_n(s)\right)ds\,d\xi\right)\sin\frac{n\pi}{q}y+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{1n}+\left(\frac{2\psi_{2n}-2\psi_{1n}}{p}-\psi_{3n}\right)x+\left(\frac{\psi_{1n}-\psi_{2n}}{p^2}+\frac{\psi_{3n}}{p}\right)x^2\right)\sin\frac{n\pi}{q}y$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если выполняется следующие условия

1) $\psi_i(y)\in C^3[0,q], i=\overline{1,3}, g(x,y)\in C^{0,1}_{x,y}(\overline{\Omega})$,

2) $\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0,\quad i=\overline{1,3},\quad g(x,0)=g(x,q)=0,$

3) $N<\dfrac{\lambda_1^2}{4p(\lambda_1+1)}\left(1-2e^{-\frac{3\lambda_1}{2}p}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1 p+\dfrac{\pi}{6}\right)\right),$

то решение задачи *A* существует. Здесь $N=\max\left\{\left|a_1\right|,\left|a_2\right|\right\},\ \lambda_1=\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}$.

Литература

1. Юлдашев, Т.К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредголма в частных производных третьего порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - № 1(34). - С.56-65.

2. Рыжов, О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа [Текст] / О.С. Рыжов // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

3. Диесперов, В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения [Текст] / В.Н. Диесперов // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.

4. Block, H. Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples [Текст] / H. Block // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21),- pp. 1-30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.

5. Del Vicchio, E. Sulleequazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x,y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x,y) = 0$ [Текст] / E. Del Vicchio // Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.

6. Cattabriga, L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple [Текст] / L. Cattabriga // Rendiconti del seminario matimatico della univ. di Padava. - 1961, 31. - pp. 1-45.

7. Джураев, Т.Д, Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Т.Д. Джураев, Ю.П. Апаков // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007. - № 2(15). - С.18-26.

8. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени [Текст] / Т.Д. Джураев, Ю.П. Апаков // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, том 62. № 1.- С. 40-51.

9. Apakov, Yu. P. Construction of Green's Function for One Problem of Rectangular Region [Текст] / P. Yusufjon Apakov // Malaysian Journal of Mathematical Sciences, - Kuala-Lumpur, 2010. - Vol. 4(1). - № 1. - pp. 1-16.

10. Apakov, Yu. P. On a Method for Solving Boundary Problems for Third-order Equation with Multiple Characteristics [Текст] / P. Yusufjon Apakov // Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations. Operator Theory: Advances and Applications, Springer. -Basel, 2011. -Vol. 216, - P. 65-78.

11. Apakov, Yu.P. On Unique Solvability of Boundary-Value Problem for a Viscous Transonic Equation [Текст] / P. Yusufjon Apakov // Lobachevski Journal of Mathematics.2020 Vol, 41, № 9, -pp. 1754-1761.

12. Apakov, Yu.P., On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics Nonlinear Analysis: Modeling and Control. -Vilnius, 2011. - Vol. 16. -№ 3. - pp. 255-269.

13. Апаков, Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю.П. Апаков // Украинский математический журнал. -Киев. 2012. Т.64. № 1. С. 1-11.

14. Апаков, Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина [Текст] / Ю.П. Апаков, А.Х. Жураев // Узбекский математический журнал. 2011, №3, - С.36-42.

15. Apakov, Yu.P. Third boundary-value problem for a third-order diferential equation with multiple characteristics [Текст] / P. Yusufjon Apakov, A. Kh. Zhuraev. // Ukrainian Math-ematical Journal. Springer, New York, febuary, 2019 -Vol. 70, № 9. -P. 1467-1476.

16. Yuldashev, T.K. Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel [Текст] / T.K. Yuldashev, P. Yusufjon Apakov, A. Kh. Zhuraev. // Lobachevski Journal of Mathematics. 2021 Vol, 42, № 6, -pp. 1316-1326.

17. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений араболо - гиперболического типа [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов // Ташкент: ФАН, 1986. - 220 с.

18. Сабитов, К.Б. Задача Дирихле для уравнение смешанного типа третьего порядка [Текст] / К.Б. Сабитов //ДАН России. – Москва. 2009.-Т.427.-№5.-С.593-596.

19. Балкизов, Ж.А. О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ж.А. Балкизов, А.Х. Кадзаков // Известия Кабардино - Балкарского научного центра РАН. - Нальчик, 2010 . - № 4. - С. 64-69.

20. Лукина, Г.А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега - де Фриза [Текст] / Г.А. Лукина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Матем. модел. ипрограм. - Челябинск, 2011. - № 17 (234), - С. 52-61.

21. Шубин, В.В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрыв-ным коэффициентом [Текст] / В.В. Шубин // Вестник НГУ. Сер. Матем., мех., информ. - Новосибирск, 2012. -Т. 12. -№ 1. - С. 126-138.

22. Ashyraliev, A. Boundary value problem for a third order partal differential equation [Текст] / A. Ashyraliev, N. Aggez, F. Hezenci // First international conference on analysis and applied mathematics. ICAAM 2012. Gumshoe, Turkey. 18-21 October. 2012. - pp.130-133.

23. Кожанов, А.И. Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] / А.И. Кожанов, А.В. Дюжева // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.- мат. науки, 2020. Т. 24, № 4. С. 607–620.

24. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский - М.: «Наука». 1966 г. 724 стр.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.958
DOI: 10.52754/16947452_2022_1_93

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ПСЕВДО ПАРАБОЛАЛЫК ТEҢДЕМЕ ҮЧҮН ГУРСАНЫН МАСЕЛЕСИНИН САНДЫК ЧЕЧИМИ

Асылбеков Таалайбек Дүкөнбаевич, ф.-м.и.к, доцент,
atd5929@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Садалов Төлөнбай Ысманович, ф.-м.и.к., доцент,
saadtol_68@mail.ru,
Ош технологиялык университети,
Сыдыкова Бегимай Бактияровна, магистрант,
Bsydykovf748@gmail.com
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан
Мухамаджан кызы Чолпон, магистрант,
muhamadzankyzycolpon@gmail.com
Жалал-Абад мамлекеттик университети,
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада төртүнчү тартиптеги псевдо параболалык теңдеме үчүн Гурстун маселесинин сандык чечимин торчо усулунун жардамы менен чечүү каралган. Берилген теңдемедеги катышкан туундулар аппроксимацияланган. Аппроксимацияланган туундунун маанилерин теңдемедеги туундуну алмаштырып торчо теңдеси алынган. Аппроксимациялоо мегилинде аппросимациялоо кадамдарын тандоого да чоң көңүл бурулган. Макаланын негизги максаты торчо усулунун жардамында берилген маселени аппроксимациялоо жолу менен торчо теңдесине алып келүү жана чектүү айрымалардын схемасына башкача айканда сызыктуу алгебралык теңдемелер системасына алып келүү менен коюлган маселенин кррективдүүлүгүн же чечиминин жашашы жана жалгыздыгын далилдөөнү демонстрациялоо болуп саналат.*

Ачкыч сөздөр: *псевдо параболалык теңдеме, торчо усулу, аппроксимация, алгебралык теңдемелер системасы.*

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ПСЕВДО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Асылбеков Таалайбек Дуконбаевич, к.ф.-м.и.н., доцент,
atd5929@mail.ru
Ошский государственный университет,
Садалов Толонбай Ысманович, к.ф.-м.н., доцент,
saadtol_68@mail.ru
Ошский технологический университет,
Сыдыкова Бегимай Бактияровна, магистрант,
Bsydykovf748@gmail.com
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан
Мухамаджан кызы Чолпон, магистрант,
muhamadzankyzycolpon@gmail.com
Жалал-Абадский государственный университет,
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация: *В статье рассматриваются численного решения задачи Гурса для псевдо параболических уравнений четвертого порядка с двукратными характеристиками. С начало с помощью аппроксимации получены конечные разности производных и сеточное уравнение. Используя сеточное уравнение и налагаемых условий получено линейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функции в сетке. Использовано метода конечных разностей. Сущность этого наиболее универсального численного метода состоит в том, что за искомый набор чисел принимается таблица значений решения в точках некоторого множества, называемого обычно сеткой. Для вычисления искомой таблицы используются алгебраические уравнения, приближенно заменяющие дифференциальное.*

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, аппроксимация, метод сеток, система алгебраических уравнений.*

NUMERICAL SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM FOR A PSEUDOPARABOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Asylbekov Taalaybek Dukonbaevich, Ph.D., Associate Professor
atd5929@mail.ru,
Osh State University,
Sadalov Tolonbai Ysmanovich, Ph.D., Associate Professor

saadtol_68@mail.ru,
Osh Technological University,
Sydykova Begimai Bakhtiyarovna, master,
Bsydykovf748@gmail.com,
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan
Mukhamajon kyzy Cholpon, master,
muhamadzankyzycolpon@gmail.com,
Jalal-Abad State University,
Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Abstract: *The article considers numerical solutions of the Goursat problem for pseudo-parabolic equations of the fourth order with twofold characteristics. From the beginning, with the help of approximation, finite differences of derivatives and a grid equation are obtained. Using a grid equation and imposed conditions, a linear system of algebraic equations is obtained with respect to unknown values of the function in the grid. The finite difference method is used. The essence of this most universal numerical method is that the desired set of numbers is taken as a table of solution values at the points of a certain set, usually called a grid. To calculate the required table, algebraic equations are used, which approximately replace the differential equation.*

Keywords: *Pseudo-parabolic equations, approximation, grid method, system of algebraic equations.*

Введение. В связи с проблемами геофизики, океанологии, атмосферы, биофизики, изучением летательных систем, использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики различных неоднородных и в частности стратифицированных систем, которое приводят к различным начально-краевым и краевым задачам для уравнений с частными производными четвертого порядка [1-7]. Локальным и нелокальным краевым задачам для псевдо параболических уравнений четвертого порядка посвящено большое количество работ. Отметим здесь работы А. С. Сопуева [1] и их учеников.

Постановка задачи. В области $D = \{(x, y): 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$L(u) = u_{xxyy} + u_{yy} + cu = f(x, y), c = const. \qquad (1)$$

Уравнение (1) по классификации в работе [1] принадлежит псевдо параболическому типу. Прямые $x = const, y = const$ являются действительны-ми двукратными характеристиками.

Уравнение (1) будем изучать в классе функций

$$M_1 = \{u: u \in C^1(\overline{D}), u_{xy}, u_{xx}, u_{xxy}, u_{xyy} \in C(\overline{D}), u_{xxyy} \in C(D)\}.$$

Задача 1.(Дирихле). Требуется найти в области D функцию $u(x,y) \in M_1$, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u_x(0,y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq h, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \psi_1(x), u_y(x,0) = \psi_2(x), 0 \leq y \leq \ell, \tag{3}$$

где $\varphi_i(y), \psi_i(x), (i = 1,2)$ - заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \psi_1'(0) = \varphi_2(0), \varphi_2(0) = \psi_1'(0). \tag{4}$$

Разрешимость задачи доказана методом сеток[8,9]. Аппроксимируя краевые, начальные условия и уравнение (1), задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений. Искомая функция получена в табличном виде.

Аппроксимация. Покроем область D прямоугольной сеткой $x_i = ih_1$,

$y_i = ih_2, (i = 1,2, \dots, n, j = 1,2, \dots m)$ где $h_1 = {}^1/_n, h_2 = {}^1/_m, (n, m -$ целые).

Используя равенства

$$u_{xx}(x,y) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + O(h_1^2),$$

$$u_{yy}(x,y) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + O(h_2^2),$$

$$u_{xxyy}(x,y) = (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + 4u_{i+1,j} + 4u_{i,j} -$$

$$-2u_{i-1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1})/h_1^2h_2^2 + O(h_1^2 + h_2^2),$$

на сетке x_i, y_j приближенно заменим уравнение (1) следующим соответствующим конечно-разностными схемами [8]

$$u_{i+1,j+1} + (h_1^2 - 2)u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + (4 - 2h_1^2)u_{i,j} - 2u_{i-1,j} +$$

$$+u_{i+1,j-1} + (h_2^2 - 2)u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1} + h_1^2h_2^2cu_{i,j} = 0. \tag{5}$$

Для граничных условий имеем

$$u(0,y) = u_{0,j} = \varphi_{1,j}, u_x(0,y) = u_{1,j} - u_{0,j} = h_1\varphi_{2,j},$$

$$u(x,0) = u_{i,0} = \psi_{1,i}, u_y\big(0,y_j\big) \approx u_{i,1} - u_{i,0} = h_2\psi_{2,i}.$$

Из аппроксимации граничных условий видно, что значения искомой функции $u(x,y)$ в первых двух слоях по обоим направлениям известны. С другой стороны при $i = 1, j = 1$ из (5) имеем

$u_{2,2} = (2 - h_1^2)u_{1,2} - u_{0,2} + 2u_{2,1} + (2h_1^2 - 4)u_{1,1} + 2u_{0,1} - u_{2,0} +$

$+(2 - h_2^2)u_{1,0} - u_{0,0} - h_2^2 c u_{1,1},$

при $i = 1, j = 2$,

$u_{2,3} = (2 - h_1^2)u_{1,3} - u_{0,3} + 2u_{2,2} + (2h_1^2 - 4)u_{1,2} + 2u_{0,2} - u_{2,1} +$

$+(2 - h_2^2)u_{1,1} - u_{0,1} - h_2^2 c u_{1,2},$ (6)

$$u_{i+1,j+1} = (2 - h_1^2)u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} + 2u_{i+1,j} + (2h_1^2 - 4)u_{i,j} + 2u_{i-1,j} -$$

$$-u_{i+1,j-1} + (2-h_2^2)u_{i,j-1} - u_{i-1,j-1} - h_1^2 h_2^2 c u_{i,j}.$$

Система алгебраических уравнение (6) совместима и имеет единственное решение. Из (6) однозначно определяются неизвестные значения соответствующих узлов.

Известно что, если матрица СЛАУ (6) невырожденная, то СЛАУ имеет единственное решение. Из СЛАУ однозначна определяются значения функции соответствующих слоев.

Итак, доказана

Теорема 1. Если матрица системы линейных алгебраических уравнений (6) невырожденная матрица, то решение задачи 1 существует и единственно.

Для удобства рассмотрим пример для модельного уравнения четвертого порядка псевдо параболического типа задачу Гурса.

Пример. Рассмотрим задачу Гурса для модельного уравнения четвертого порядка с конкретными данными:

В области $D = \{(x,y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$L(u) = u_{xxyy} + u_{yy} = 0. \tag{7}$$

Задача 2. (Гурса). Найти в области D решение уравнения (7) удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y)=y^2, u_x(0,y)=\varphi_2(y)=y^3, 0\le y\le 1, \quad (8)$$

$$u(x,0)=\psi_1(x)=1-cosx,\ u_y(x,0)=\psi_2(x)=xsinx,\ 0\le y\le 1. \quad (9)$$

Методом сеток численное решение построим в квадрате

$$D=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$$

Покроем область D прямоугольной сеткой $x_i=ih_1, y_i=jh_2$,

$(i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}, h_1=1/n, h_2=1/m,$ (n,m-целые).

Используя аппроксимации на сетке x_i, y_j приближенно заменим уравнение (7) следующим соответствующим конечно-разностным уравнением [8, 9]

$$u_{i+1,j+1}+(h_1^2-2)u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}-2u_{i+1,j}+(4-2h_1^2)u_{i,j}-2u_{i-1,j}+$$

$$+u_{i+1,j-1}+(h_2^2-2)u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}=0. \quad (10)$$

Для граничных условий имеем

$$u(0,y)=u_{0,j}=\varphi_{1,j}=y_j^2, u_x(0,y)=u_{1,j}-u_{0,j}=h_1y_j^3,$$

$$u(x,0)=u_{i,0}=\psi_{1,i}=1-cosx_i,$$

$$u_y(0,y_j)\approx u_{i,1}-u_{i,0}=1-cosx_i+h_2x_isinx_i.$$

Из аппроксимации граничных условий видно, что значения искомой функции $u(x,y)$ в первых двух слоях по обоим направлениям известны. С другой стороны при $i=1, j=1$ из (10) имеем

$$u_{2,2}=(2-h_1^2)u_{1,2}-u_{0,2}+2u_{2,1}+(2h_1^2-4)u_{1,1}+2u_{0,1}-u_{2,0}+$$
$$+(2-h_2^2)u_{1,0}-u_{0,0},$$

при $i=1, j=2$,

$$u_{2,3}=(2-h_1^2)u_{1,3}-u_{0,3}+2u_{2,2}+(2h_1^2-4)u_{1,2}+2u_{0,2}-u_{2,1}+$$
$$+(2-h_2^2)u_{1,1}-u_{0,1}, \quad (11)$$

$$u_{i+1,j+1}=(2-h_1^2)u_{i,j+1}-u_{i-1,j+1}+2u_{i+1,j}+(2h_1^2-4)u_{i,j}+2u_{i-1,j}-$$

$$-u_{i+1,j-1}+(2-h_2^2)u_{i,j-1}-u_{i-1,j-1}.$$

Легко можно показать, что погрешность аппроксимации при этом не превышает $O(h_1^2 + h_2^2)$.

Составлена программа в среде VBA и получена график, таблица искомой функции в виде таблица 1.

Вывод. В статье рассмотрены задача Гурса для псевдо параболических уравнений четвертого порядка. Методом сеток доказаны существование и единственность решение задачи. Составлена программа в среде VBA и с помощью Maple 7 искомая функция получена в виде таблицы. Оценены погрешности аппроксимации и метода.

Таблица №1

x =	y =	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
0		0	0	0,0625	0,140625	0,25	0,390625	0,5625	0,765625	1
0,083333		0,00347	0,004337	0,063802	0,14502	0,260417	0,41097	0,597656	0,821452	1,083333
0,166667		0,013857	0,017313	0,075058	0,160532	0,282878	0,444042	0,645971	0,890611	1,179909
0,25		0,031088	0,038819	0,096153	0,187	0,317155	0,489521	0,707001	0,972497	1,288911
0,333333		0,055043	0,068676	0,126881	0,22415	0,362891	0,546943	0,780143	1,066331	1,409346
0,416667		0,085557	0,106636	0,166946	0,271601	0,419603	0,6157	0,86464	1,171172	1,540043
0,5		0,122417	0,152382	0,215965	0,328864	0,486685	0,695052	0,959589	1,285921	1,679673
0,583333		0,165369	0,205532	0,273468	0,39535	0,563416	0,784127	1,063946	1,409335	1,826755
0,666667		0,214113	0,265644	0,338908	0,470374	0,648965	0,881936	1,176541	1,540035	1,979673
0,75		0,268311	0,332215	0,411663	0,553162	0,742401	0,987377	1,296085	1,676523	2,136688
0,833333		0,327588	0,40469	0,491038	0,642857	0,8427	1,099247	1,421184	1,817194	2,295959
0,916667		0,391531	0,482462	0,576277	0,738529	0,948753	1,216258	1,550354	1,960351	2,455558
1		0,459698	0,564882	0,666568	0,839181	1,059382	1,337042	1,682032	2,104225	2,613491

Таблица №2

x =	y =	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
0		0	0,015625	0,0625	0,140625	0,25	0,390625	0,5625	0,765625	1

0,083333		0,00347	0,020071	0,068788	0,150598	0,266475	0,417396	0,604336	0,82827	1,090173
0,166667		0,013857	0,033045	0,084995	0,17165	0,294954	0,456852	0,659287	0,904203	1,193545
0,25		0,031088	0,054441	0,110973	0,203582	0,335167	0,508627	0,726863	0,992772	1,309255
0,333333		0,055043	0,08408	0,146482	0,246081	0,386714	0,572214	0,806415	1,093152	1,43626
0,416667		0,085557	0,121714	0,191191	0,29873	0,449073	0,646963	0,897143	1,204357	1,573346
0,5		0,122417	0,16703	0,244686	0,361002	0,521598	0,732091	0,9981	1,325243	1,719138
0,583333		0,165369	0,219649	0,306466	0,432275	0,60353	0,826687	1,1082	1,454525	1,872114
0,666667		0,214113	0,279131	0,375954	0,51183	0,694004	0,929723	1,226234	1,590783	2,030616
0,75		0,268311	0,344979	0,4525	0,598862	0,792053	1,040061	1,350874	1,732481	2,192868
0,833333		0,327588	0,416642	0,535382	0,692484	0,89662	1,156465	1,480692	1,877976	2,356991
0,916667		0,391531	0,493519	0,623822	0,791738	1,006569	1,277613	1,61417	2,025541	2,521024
1		0,459698	0,574967	0,716982	0,895604	1,120693	1,40211	1,749717	2,173374	2,682942

Графики численного и аналитического решений задачи Гурса

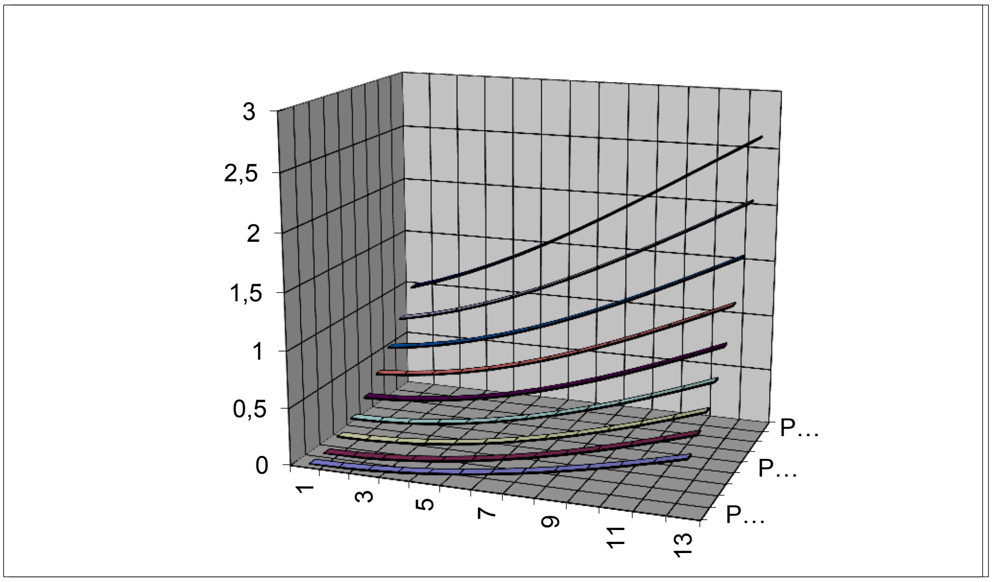


Рисунок 3. График численного решения (MS Excel 7.0)

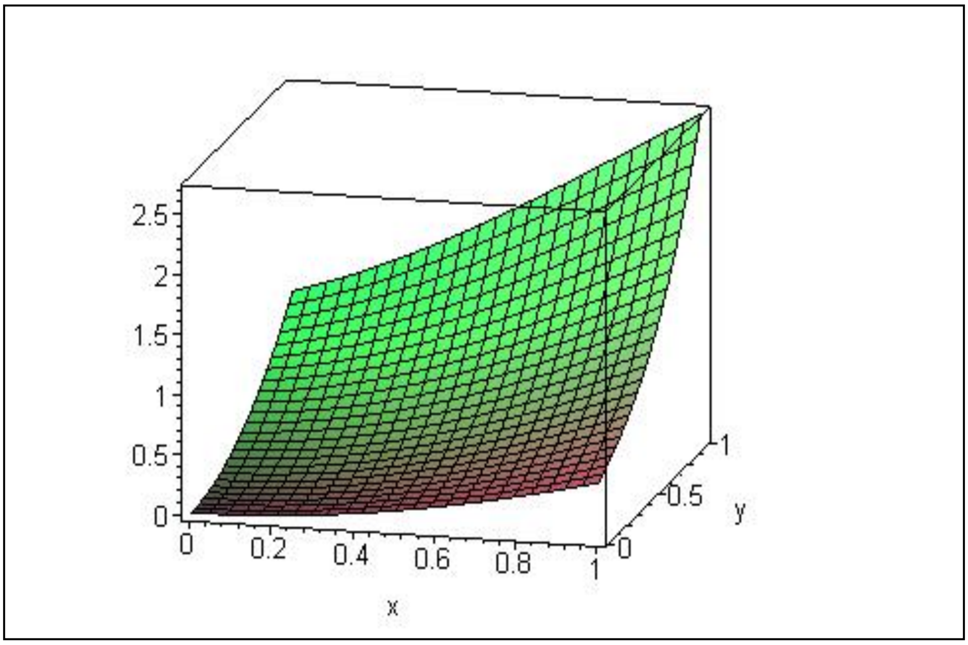


Рисунок 4. График аналитического решения (Maple 7)

Литература

1. Сопуев, А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: [Текст] / А. Сопуев // Дис. …докт. физ.–мат. наук: 01.01.02.-Бишкек, 1996.-249 с.

2. Асылбеков, Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: [Текст] / Т.Д. Асылбеков // Дис. …канд. физ. –мат. наук: 01.01.02.-Бишкек, 2003.-130 с.

3. Сопуев, А.С. Задача Дирихле для уравнения Буссинеска-Лява [Текст] / А. Сопуев, А.Б. Осмоналиев // Научные труды ОшГУ. Физико-математические науки.-Ош:ОшГУ,. № 5 . 2002.- С.105-110

4. Асылбеков, Т. Д. Задача Гурса для гиперболических уравнений четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Асылбеков // Тезисы докл. I региональной науч. конф. «Проблемы алгебры, геометрии и их приложений». –Ош: ОшГУ, 1996.-С.47-49.

5. Асылбеков, Т.Д. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами [Текст] / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Республиканский научно-теоретический журнал “Наука, новые техгологии и инновации Кыргызстана”, № 3 – Бишкек, 2019. №3. с. 11-17.

6. Асылбеков, Т.Д. Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для модельного гиперболического уравнения четвертого с трехкратными

характеристиками [Текст] / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Республиканский научно-теоретический журнал “Наука, новые техгологии и инновации Кыргызстана”, № 3 – Бишкек, 2019. №3. С. 22-29.

7. Асылбеков, Т.Д. “Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения четвертого с разрывными коэффициентами” [Текст] / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Наука. Образование. Техника.-Ош: КУУ, 2019.-№2.-С. 106-115.

8. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем [Текст] / А.А. Самарский. - 'М.: Наука, 1971. - 553 с.

9. Самарский, А.А. Введение в численные методы[Текст] / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1982. - 269 с.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_103

ҮЧ КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫН ЧЫГАРУУ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор,

aijarkyn.osh@mail.ru,

М.М. Адышев атындагы Ош технологиялык университети,

Садыкова Гульхан Курбанбековна, улук окутуучу,

gsadykova.osh@gmail.com,

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Азыркы учурда кошумча аргумент кийирүү усулу өнүгүп жатат, ал ар кандай түрдөгү сызыктуу эмес, жекече туундулуу теңдемелерди интегралдык теңдемелерге келтирүүнүн принципиалдуу мүмкүнчүлүктөрүн берет жана ошону менен бирге, динамикалык системалар теориясындагы маселелердин кеңири классынын чыгарылыштарынын жашоосун далилдейт, муну башка усулдар менен жасоо мүмкүн эмес. Үч көз карандысыз өзгөрмөлүү биринчи тартиптеги сызыктуу эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системасы каралат. Баштапкы маселенин жалгыз чечиминин бар экендиги кошумча аргумент кийирүү ыкмасы менен далилденет. Алынган жыйынтыктар боюнча айкын маселенин чечимин тургузууга болот. Ошондой эле башка жекече туундулуу дифференциалдык тендемелердин системасынын чечимдерин изилдөөдө колдонууга болот.*

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдемелер системасы, сызыктуу эмес, жекече туундулар, кошумча аргумент кийирүү ыкмасы, кысып чагылтуулар принциби.*

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д.,профессор,

aijarkyn.osh@mail.ru,

Ошский технологический университет имени М.М. Адышева,
Садыкова Гульхан Курбанбековна,старший преподаватель,
gsadykova.osh@gmail.com,
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В настоящее время развивается метод дополнительного аргумента, который дает принципиальную возможность сведения различных типов нелинейных уравнений с частными производными к интегральным уравнениям, и в то же время на основе этого метода доказывается существование решений широкого круга задач теории динамических систем. Рассмотрена система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с тремя независимыми переменными. Методом дополнительного аргумента доказано существование единственного решения начальной задачи. На основе полученных результатов можно построить решение конкретной проблемы. Данный метод также можно использовать для изучения решений других систем дифференциальных уравнений.*

Ключевые слова: *Система дифференциальных уравнений, нелинейное, частные производные, метод дополнительного аргумента, принцип сжатых отображений.*

SOLUTION OF A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES WITH THREE INDEPENDENT VARIABLES

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna, d.ph.-m.s. professor,
aijarkyn.osh@mail.ru,
Osh Technological University named after M.M. Adysheva,
Sadykova Gulkhan Kurbanbekovna, Senior Lecturer
gsadykova.osh@gmail.com,
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *At present time, the method of an additional argument is being developed, which makes it possible in principle to reduce various types of nonlinear partial differential equations to integral equations, and at the same time, on the basis of this method, the existence of solutions to a wide range of problems in the theory of dynamical systems is proved. There is considered a system of nonlinear partial differential equations of the first order with three independent variables. The existence of a unique solution to the initial problem is proved by the method of an additional argument. Based on the results obtained, it* *is possible to construct a solution to a specific problem. This method can also be used to study solutions to other systems of differential equations.*

Keywords: *System of differential equations, non-linear, partial derivatives, additional argument method, contraction mapping principle.*

Киришүү

Учурда кошумча аргумент кийирүү усулу өнүгүп жатат, ал ар кандай түрдөгү сызыктуу эмес, жекече туундулуу теңдемелерди интегралдык теңдемелерге келтирүүнүн принципиалдуу мүмкүнчүлүктөрүн берет жана ошону менен бирге, динамикалык системалар теориясындагы маселелердин кеңири классынын чыгарылыштарынын жашоосун далилдейт, муну башка усулдар менен жасоо мүмкүн эмес [1, 2].

Изилдөөнүн каражаттары жана ыкмалары.

Кошумча аргумент кийирүү усулу жана башка усулдар менен да изилденбеген, теориялык кызыгууну туудуруучу, жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системаларынын класстары бар. Кошумча аргумент кийирүү усулун жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системаларына жайылтуу жумуштун актуалдуулугун аныктайт.

Маселенин коюлушу.

Төмөнкүдөй сызыктуу эмес теңдемелер системасын карайбыз:

$$\begin{cases} D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2),a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]u_1(t,x,y)=\sum\limits_{k=1}^{2}a_{1k}(t,x,y,u_1,u_2)+f(t) \\ D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2),a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]u_2(t,x,y)=b(t,x,y,u_1,u_2), \end{cases} \tag{1}$$

мында

$$(t,x,y)\in G_3(T)=[0,T]\times R^2,$$

жана оператор:

$$D[\omega_1,\omega_2]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega_1\frac{\partial}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial}{\partial y}.$$

(1) системасын төмөнкүдөй баштапкы шарттары менен карайбыз:

$$\begin{aligned} &u_1(0,x,y)=x+y, \\ &u_2(0,x,y)=\varphi(x,y),\ (x,y)\in R^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Коюлган (1), (2) баштапкы маселени чыгаруу үчүн кошумча аргумент кийирүү усулун колдонобуз. (1). (2) маселесин интегралдык теңдемелер системасына келтиребиз. Ал эми интегралдык теңдемелер системасына кысуучу чагылтуулардын принцибин колдонуу менен чыгарылыштардын локалдык жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттарын алабыз.

Бул усулдун өнүгүшү жана колдонулушуна М.И. Иманалиевдин, П.С. Панковдун, А.Ж. Аширбаеванын бир топ эмгектери арналган [1-3].

Жыйынтыктар жана талкуулар.

[3] деги функциялардын класстарын колдонуу менен төмөнкү теореманы далилдейли.

Теорема. Эгерде $\varphi(x,y))\in C^{(1)}(R^2), a_{ij}(t,x,y,u_1,u_2)\in \overline{C}^{(1)}(G_3(T)\times R^2),$

, $b(t,x,y,u_1,u_2)\in \overline{C}^{(1)}(G_3(T)\times R^2), i,j=1{,}2.$

Анда $\left(\overline{C}^{(1)}(G_3(T_*))\right)^2$ мейкиндигинде (1)-(2) - маселе жалгыз чыгарылышка ээ боло тургандай, $0<T_*\le T$ саны жашайт.

Далилдөө.

Теореманы далилдөөдө кошумча аргумент кийирүү усулун колдонобуз. [4-6] эмгектеринде аталган усулду жекече туундулуу теңдемелер системасынын класстарына колдонуу каралган.

Адегенде (1) теңдемелер системасынын биринчи теңдемесин чыгарабыз. (1) теңдемесинин биринчи теңдемеси (2) шарты менен төмөнкү интегралдык тендемеге кошумча аргумент кийируу усулу менен келтирилет:

$$\begin{aligned}
u_1(t,x)&=x-\int_0^t a_{11}(v,p_1(v,t,x,y),p_2(v,t,x,y),u_1(v,p_1,p_2),u_n(v,p_1,p_2))dv+\\
&+y-\int_0^t a_{12}(v,p_1(v,t,x,y),p_2(v,t,x,y),u_1(v,p_1,p_2),u_n(v,p_1,p_2))dv+\\
&+\int_0^t a_{11}(v,p_1(v,t,x,y),p_2(v,t,x,y),u_1(v,p_1,p_2),u_n(v,p_1,p_2))dv+\\
&+\int_0^t a_{12}(v,p_1(v,t,x,y),p_2(v,t,x,y),u_1(v,p_1,p_2),u_n(v,p_1,p_2))dv+\int_0^t f(s)ds,
\end{aligned}\tag{3}$$

мындагы

$p_1(s,t,x,y)$, $p_2(s,t,x,y)$ - төмөнкү интегралдык теңдемелер системасынын чечими

$$\begin{cases} p_1(s,t,x,y) = x - \int\limits_s^t a_{11}(v, p_1(v,t,x,y), p_2(v,t,x,y), \\ u_1(v, p_1, p_2), u_2(v, p_1, p_2))dv, \\ p_2(s,t,x,y) = y - \int\limits_s^t a_{12}(v, p_1(v,t,x,y), p_2(v,t,x,y), \\ u_1(v, p_1, p_2), u_2(v, p_1, p_2))dv, \end{cases} \tag{4}$$

$(s,t,x,y) \in Q_2^2(T)$,

мында

$$Q_2^n(T) = \{(t_1, t_2, t_3, .., t_n, x, y) \Big| 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_n \le T, (x,y) \in R^2\}.$$

(3) теңдемесинен төмөнкүнү алабыз:

$$u_1(t,x,y) = x + y + \int\limits_0^t f(s)ds. \tag{5}$$

(4) системасы төмөнкү системаны канааттандырган жалгыз чечимге ээ болот:

$$D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2), a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]p_1(s,t,x,y) = 0, \quad p_1(s,s,x,y) = x,$$
$$D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2), a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]p_2(s,t,x,y) = 0, \quad p_2(s,s,x,y) = y.$$

Кошумча аргумент кийирүү усулунун негизинде биз белгисиз $u_1(t,x,y)$ функциясын (5) түрүндө таап алдык.

Табылган $u_1(t,x,y)$ *функциясын (1) системасынын экинчи теңдемесине коюп,* $u_2(t,x,y)$ белгисиз функциясы үчүн төмөнкү теңдемени алабыз:

$$D[\tilde{a}_{21}(t,x,y,u_2), \tilde{a}_{22}(t,x,y,u_2)]u_2(t,x,y) = \tilde{b}(t,x,y,u_2), \tag{6}$$

мында

$$\tilde{a}_{2i}(t,x,y,u_2) = a_{2i}(t,x,y,x+y+\int\limits_0^t f(s)ds, u_2),$$

$$\tilde{b}(t,x,y,u_2) = b_1(t,x,y,x+y+\int\limits_0^t f(s)ds, u_2), \quad i = 1,2.$$

(6), (2) маселесине кошумча аргумент кийирүү усулун колдонуп, төмөнкү интегралдык теңдемелер системасына келтиребиз:

$$\begin{cases} u_2(t,x,y) = \phi(q_1(0,t,x,y), q_2(0,t,x,y)) + \\ +\int\limits_0^t \tilde{b}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), \\ u_2(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y))d\nu, \\ q_1(s,t,x,y) = x - \int\limits_s^t \tilde{a}_{21}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), \\ u_2(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y)))d\nu, \\ q_2(s,t,x,y) = y - \int\limits_s^t \tilde{a}_{22}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), \\ u_2(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y)))d\nu, \end{cases} \qquad (7)$$

$(s,t,x,y) \in Q_2^2(T).$

$q_1(s,t,x,y), q_2(s,t,x,y)$ - функциялары төмөнкү теңдемелерди канааттандыраарын көрүүгө болот:

$$D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2),.a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]q_1(s,t,x,y) = 0, \quad q_1(s,s,x,y) = x,$$
$$D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2),.a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]q_2(s,t,x,y) = 0, \quad q_2(s,s,x,y) = y.$$

(7) системасында t өзгөрүлмөсүн s менен, x өзгөрүлмөсүн $q_1(s,t,x,y)$ функциясы менен, y өзгөрүлмөсүн $q_2(s,t,x,y)$ функциясы менен алмаштыралы жана [3] жумушунда берилген $a_{21}(t,x,y,u_1,u_2), a_{22}(t,x,y,u_1,u_2) \in \overline{C}^{(1)}(G_3(T) \times R^2)$ функциялары үчүн төмөнкү барабардыктар далилденген:

$$q_1(s,\tau,q_1(\tau,t,x,y),q_2(\tau,t,x,y)) = q_1(s,\tau,x,y),$$
$$q_2(s,\tau,q_1(\tau,t,x,y),q_2(\tau,t,x,y)) = q_2(s,\tau,x,y), \qquad (8)$$
$$(s,t,x,y) \in Q_2^3(T).$$

(8) барабардыгынын жардамында (7) системасынан төмөнкү интегралдык теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{cases} \omega(s,t,x,y) = \phi(q_1(0,t,x,y), q_2(0,t,x,y)) + \\ +\int\limits_0^t \tilde{b}_1(v, q_1(v,t,x,y), q_2(v,t,x,y), \omega(v,t,x,y))dv, \\ q_1(s,t,x,y) = x - \int\limits_s^t \tilde{a}_{21}(v, q_1(v,t,x,y), q_2(v,t,x,y), \omega(v,t,x,y))dv, \\ q_2(s,t,x,y) = y - \int\limits_s^t \tilde{a}_{22}(v, q_1(v,t,x,y), q_2(v,t,x,y), \omega(v,t,x,y))dv, \end{cases} \tag{9}$$

Мындагы

$$\omega(s,t,x,y) = u_2(s, q_1(s,t,x,y), q_2(s,t,x,y)).$$

(9) системасын бир вектордук барабардык түрүндө жазып алабыз:

$$\theta = A\theta, \tag{10}$$

мында $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ - вектор-функция, анын компоненттери белгисиз функциялар $\theta_1 = \omega(s,t,x,y)$, $\theta_2 = q_1(s,t,x,y)$, $\theta_3 = q_2(s,t,x,y)$, ал эми $A = (A_1, A_2, A_3)$ операторунун компоненттери:

$$\begin{cases} A_1\theta = \phi(\theta_2(0,t,x,y), \theta_3(0,t,x,y)) + \\ +\int\limits_0^t \tilde{b}_1(v, \theta_2(v,t,x,y), \theta_3(v,t,x,y), \theta_1(v,t,x,y))dv, \\ A_2\theta = x - \int\limits_s^t \tilde{a}_{21}(v, \theta_2(v,t,x,y), \theta_3(v,t,x,y), \theta_1(v,t,x,y))dv, \\ A_3\theta = y - \int\limits_s^t \tilde{a}_{22}(v, \theta_2(v,t,x,y), \theta_3(v,t,x,y), \theta_1(v,t,x,y))dv, \end{cases} \tag{11}$$

(10) системасы $G_2(T)$ областында $T < T_*$ үчүн $\|\theta - \theta_0\| \leq M$ барабарсыздыгын канааттандырган жалгыз, үзгүлтүксүз чечимге ээ болот.

Норма төмөнкү барабардык менен аныкталат:

$$\|\theta\| = \max_{0 \leq i \leq 3} \max_{(t,x) \in G_3(T)} \{|\theta_i|, \quad i = 1,2,3\}.$$

Анда:

$$|A_1\theta - \varphi| \leq M_0 T,$$

$$|A_2\theta - x| \leq M_1 T,$$

$$|A_3\theta - y| \le M_2 T,$$

$$\left|\tilde{b}_1(t,x,y,u_2)\right| \le M_0 = const, \qquad |a_{2ii}(t,x,y,u_2)| \le M_i = const, \quad i = 1,2.$$

A оператору $S(\theta_0, M)$ шарынын элементтеринин ортосундагы аралыкты кысып турaарын далилдейбиз.

Төмөнкү барабарсыздыктар орун алат:

$$|A_1\theta^1 - A_1\theta^2| \le \Omega_1(T)\|\theta^1 - \theta^2\|,$$

$$|A_2\theta^1 - A_2\theta^2| \le \Omega_2(T)\|\theta^1 - \theta^2\|,$$

$$|A_3\theta^1 - A_3\theta^2| \le \Omega_3(T)\|\theta^1 - \theta^2\|,$$

мында

$$\Omega_1(T) = L_1 + L_2 + (K_1 + K_2 + K_3)T,$$

$$\Omega_2(T) = (N_1 + N_2 + N_3)T,$$

$$\Omega_3(T) = (H_1 + H_2 + H_3)T,$$

$$\varphi(x,y) \in Lip(L_1|_x, L_2|_y), \quad L_1, L_2 \ge 0, \quad L_1, L_2 - const,$$

$$\tilde{b}_1(t,x,y,u_2) \in Lip(K_1|_x, K_2|_y, K_3|_{u_2}), \quad K_1, K_2, K_3 \ge 0, \quad K_1, K_2, K_3 - const,$$

$$\tilde{a}_{21}(t,x,y,u_2) \in Lip(N_1|_x, N_2|_y, N_3|_{u_2}), \quad N_1, N_2, N_3 \ge 0, \quad N_1, N_2, N_3 - const,$$

$$\tilde{a}_{22}(t,x,y,u_2) \in Lip(H_1|_x, H_2|_y, H_3|_{u_2}), \quad H_1, H_2, H_3 \ge 0, \quad H_1, H_2, H_3 - const.$$

$\Omega_i(T) = 1, i = 1,2,3$ теңдемелеринин чечимдерин тиешелүү түрдө T_1, T_2, T_3 менен белгилейли.

Мындан биз $T < T^* = \min\{T_1, T_2, T_3\}$ учурда , кысып чагылтуу принцибинин негизинде (10) теңдемесин жалгыз чечимге ээ болот.

Теорема далилденди.

Корутунду

Жогорудагы алынган жыйынтыктар боюнча айкын маселенин чечимин тургузууга болот. Ошондой эле башка жекече туундулуу дифференциалдык тендемелердин системасынын чечимдерин изилдөөдө колдонуугa болот.

Адабияттар

1. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М.И. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. –112 с.

2. Иманалиев М.И. К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега - де Фриза [Текст] / М.И. Имана-лиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 342. – № 1. – С.17–19.

3. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.

4. Аширбаева А.Ж. Решение системы интегро-дифференциальных уравне-ний методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж. И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. Специальный выпуск – Ош, 2013. – № 1. -С. 91–94.

5. Аширбаева А.Ж. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Естественные и ма-тематические науки в современном мире. Новосибирск, 2017. - № 1(48). - С.111-124.

6. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими пере-менными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Междуна-родный научно-исследовательский журнал. 2018. – № 3(69). – С. 6-10.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_112

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, НЕЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ

Мамазиаева Эльмира Амановна, к.ф.-м.н., доцент

mamaziaeva67@mail.ru

Абдазова Угилхан Махамадюсуповна, магистрант,

Uabdazova@mail.ru

Ошский технологический университет им. М.М. Адышева

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В работе рассмотрено применение метода дополнительного аргумента к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, нелинейных относительно неизвестной функции. В этих исследованиях появились преимущества метода дополнительного аргумента перед другими методами исследования подобных уравнений, заключающиеся в том, что система интегральных уравнений, к которой приводится исходная задача, не содержит суперпозиции неизвестных функций.*

Кроме того, решение исходной задачи получается из решения интегральных уравнений при помощи понижения размерности множества аргументов, а не при помощи обращения нелинейного алгебраического оператора. С использованием основных идей метода дополнительного аргумента были исследованы дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевега-де-Фриза, а также нелинейные волновые уравнения. Доказано существование единственного решения.

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение, второй порядок, нелинейное, метод дополнительного аргумента, начальная задача, интегральное уравнение.*

БЕЛГИСИЗ ФУНКЦИЯГА КАРАТА СЫЗЫКТУУ ЭМЕС, ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕ ТУУНДУЛУУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРГЕ КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ МЕТОДУН КОЛДОНУУ

Мамазиаева Эльмира Амановна, ф.-м.и.к., доцент
mamaziaeva67@mail.ru
Абдазова Угилхан Махамадюсуповна, магистрант
Uabdazova@mail.ru
М.М. Адышев атындагы Ош технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул эмгекте экинчи даражадагы жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин баштапкы маселеси сунушталган жаңы ыкма менен кошумча аргумент кийирүү методун колдонуу үчүн ыңгайлуу формага келтирилген.*

Мында алгачкы маселе келтирилген интегралдык теңдемелер системасы белгисиз функцияга карата суперпозицияны камтыбайт. Мындан сырткары, алгачкы маселенин чечими сызыктуу эмес алгебралык оператордун кайрылуусунун жардамында эмес, аргументтердин көптүгүнүн өлчөмүнүн төмөндөлүшүнүн жардамында интегралдык теңдемелердин чечиминен алынат.

Кошумча аргумент кийирүү усулунун негизги идеяларын колдонуу менен Кортевега-де-Фриз тибиндеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер, ошондой эле сызыктуу эмес толкундук теңдемелер изилденген. Баштапкы маселенин жалгыз чечиминин бар экендиги далилденген.

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдеме, экинчи тартиптеги, сызыктуу эмес, кошумча аргумент кийирүү методу, баштапкы маселе, интегралдык теңдеме.*

APPLICATION OF THE METHOD OF AN ADDITIONAL ARGUMENT TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER, NONLINEAR WITH RESPECT TO AN UNKNOWN FUNCTION

Mamaziaeva Elmira Amanovna, Ph.D., associate professor
mamaziaeva67@mail.ru
Abdazova Ugilkhan Makhamadyusupovna
Uabdazova@mail.ru
Osh Technological University named after M.M. Adysheva,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The paper considers the application of the additional argument method to second-order partial differential equations that are nonlinear with respect to an unknown* *function. In these studies, the advantages of the method of additional argument over other methods of studying similar equations appeared, consisting in the fact that the system of integral equations, to which the original problem is reduced, does not contain a superposition of unknown functions. In addition, the solution of the original problem is derived from the solution of integral equations by reducing the set dimension of the arguments, and not by inverting a nonlinear algebraic operator.*

Using the basic ideas of the additional argument method, differential and integro-differential equations in partial derivatives of the Korteweg-de-Vries type, as well as nonlinear wave equations, were studied. The existence of a unique solution is proved.

Keywords: *Differential equation, second order, nonlinear, method of additional argument, initial problem, integral equation.*

Введение. Исследование решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка рассмотрены в работах [4, 5]. В настоящее время развивается метод изучения дифференциальных уравнений в частных производных под названием метод дополнительного аргумента. Иманалиев М.И., Панков П.С., Аширбаева А.Ж. внесли свой вклад в развитие этого метода [3, 6]. С помощью этого метода начальная задача для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных сводится к интегральному уравнению.

Постановка задачи. В данной работе метод дополнительного аргумента распространен для уравнений второго порядка, нелинейных относительно неизвестной функции вида:

$$D[-a(t,x)]D[a(t,x)]u(t,x)=F(t,x;u), \qquad (1)$$

$$(t,x)\in G_2(T),\ \ a(t,x)\in \overline{C}^{(2)}(G_2(T)),\ F(t,x,u)\in \overline{C}^{(1)}(G_2(T)\times R^2)\cap Lip(L|_u),$$

$$G_2(T)=[0,T]\times R,\ \ D[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial x}.$$

Мы использовали классы функций $\overline{C}^{(k)}(\Omega)$, $Lip(N|_u,M|_v,\ldots)$ –из работы [3].

Оператор в (1) имеет вид:

$$D\ [-a(t,x)]D\ [a(t,x)]u(t,x)=u_{tt}(t,x)-a^2(t,x)u_{xx}(t,x)+$$
$$+u_x(t,x)(a_t(t,x)-a(t,x)a_x(t,x)).$$

Рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями

$$u(0,x)=\psi_0(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\lambda(x), \tag{3}$$

$$\psi_0(x),\quad \lambda(x)\in \overline{C}^{(2)}(R).$$

Используя начальные данные, введем обозначение:

$D\ [a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=\psi_1(x).$

Обозначим через $p(s,t,x),\ \ q(s,t,x)-$ соответствующие решения интегральных уравнений:

$$p(s,t,x)=x+\int_s^t a(v,p(v,t,x))dv, \tag{4}$$

$$q(s,t,x)=x-\int_s^t a(v,p(v,t,x))dv, \tag{5}$$

$$(s,t,x)\in Q_2(T)$$

$$Q_n(T)=\{(t_1,t_2,t_2,..,t_n,x)\big|\ 0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_n\le T,\,x\in R\}.$$

Следует отметить, (см. работы [1-3]) интегральные уравнения (4), (5) с $a(t,x)\in\overline{C}^{(1)}(G_2(T))$ имеют единственные решения с условием соответственно $p(s,s,x)=x,\quad q(s,s,x)=x.$

Из (4) и (5) вытекают соответственно соотношения

$$D\ [-a(t,x)]p(s,t,x)=0, \tag{6}$$

$$D\ [a(t,x)]q(s,t,x)=0, \tag{7}$$

Лемма 1. Задача (1), (2), (3) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t,x)=\psi_0(q(0,t,x))+\int_0^t\psi_1(p(0,s,q(s,t,x))ds+ \tag{8}$$

$$+\int_0^e\int_0^s F\big(\tau,\,p(\tau,s,q(s,t,x)),u(\tau,\,p(\tau,s,q(s,t,x)))\big)d\tau ds.$$

Доказательство. Обозначая через

$$z(t,x;u)=D[a(t,x)]u(t,x), \quad b(t,x)=-a(t,x),$$

запишем уравнение (1) в виде:

$$D[b(t,x)]z(t,x;u)=F(t,x,u)\,. \tag{9}$$

Уравнение (9) с условиями (2), (3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x;u)=\psi_1(p(0,t,x))+\int_0^t F(s,p(s,t,x),u(s,p(s,t,x)))ds. \tag{10}$$

В самом деле, дифференцируя (10), получаем (9):

$$D[b(t,x)]z(t,x;u)=\psi_1'(p(0,t,x))D[b(t,x)]p(0,t,x)+$$
$$+\int_0^t\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right]D[b(t,x)]p(s,t,x))ds+F(t,x,u).$$

Из последнего равенства в силу (6) получаем (8). Полагая $t=0$ в (10), получаем $z(0,x;u)=\psi_1(x)$.

Уравнение (10) с условиями (2), (3) сводится к решению интегрального уравнения (8).

Из (8) имеем:

$$D[a(t,x)]u(t,x)=\psi_k'(q(0,t,x))D[a(t,x)]q(0,t,x)+$$
$$+\int_0^t\psi_1'(p(0,s.q(s,t,x)))\frac{\partial p}{\partial x}D[a(t,x)]q(s,t,x)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^s\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial p}{\partial x}D[a(t,x)]q(s,t,x)d\tau ds+z(t,x;u).$$

Следовательно, в силу (7) доказано выполнение (1).

В (8) при $t=0, \quad u(0,x)=\psi_0(x)$.

Таким образом, по схеме применения метода дополнительного аргу-мента, приведенной в работе [1-3,6], задача (10), (2), (3) сводится к эквивалентному интегральному уравнению (8).

Лемма 2. Интегральное уравнение (8) имеет единственное решение.

Доказательство. Введем обозначение

$$g(t,x)=\psi_0(q(0,t,x))+\int_0^t\psi_1(p(0,s.q(s,t,x))ds, \qquad (11)$$

запишем уравнение (8) в виде оператора

$$Au=g(t,x)+\int_0^t\int_0^s F(\tau,p,u(\tau,p))d\tau ds.$$

Покажем, что оператор является оператором сжатия.

Пусть $u_1(t,x), u_2(t,x)\in C(G_2(T))$.

Тогда

$$|Au_2-Au_1|=\left|\int_0^t\int_0^s F(\tau,p,u_2(\tau,p))d\tau ds-\int_0^t\int_0^s F(\tau,p,u_1(\tau,p))d\tau ds\right|\le$$

$$\le\frac{Lt^2}{2!}\max_{G_2(T)}|u_2(t,x)-u_1(t,x)|.$$

Тогда оператор A будет оператором сжатия $L\frac{T^2}{2!}<1.$ По обобщенному принципу сжимающих отображений уравнение (8) имеет одно и только одно решение.

Выводы. Начальная задача для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, нелинейного относительно неизвестной функции сведена к интегральному уравнению. По принципу сжимающих отображений доказано существование единственного решения. Результаты работы можно использовать при решении уравнений других классов.

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Материалове-дение. – Бишкек. - 2013. - № 2. – С. 258-261.

2. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального урав-нения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.

3. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро - дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.

4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.

5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Вла-димиров. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.

6. Иманалиев М.И. Метод дополнительного аргумента в теории нелиней-ных волновых уравнений в частных производных [Текст] / М.И. Имана-лиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. –1995. – Т. 343. – № 5. – С. 596–598.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_119

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Мамазиаева Эльмира Амановна, к.ф.-м.н., доцент

mamaziaeva67@mail.ru

Абдазова Угилхан Махамадюсуповна, магистрант,

Uabdazova@mail.ru

Ошский технологический университет им. М.М. Адышева

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной работе начальная задача дифференциального уравнения в частных производных второго порядка предлагаемым в работе новым способом приводится к виду, удобному для применения метода дополнительного аргумента. Этот метод разработан кыргызскими учеными. Использования этого метода рассмотреныв работах Иманалиева М.И., Панкова П.С., Аширбаева А.Ж. и другие ученых. Этот метод отличается от других методов введением новой дополнительной переменной, с помощью которой сводим задачу к системе интегральных уравнений. Существует много методов исследования решения системы интегральных уравнений.*

В настоящее время использование метода дополнительного аргумента для класса новых уравнений, представляющих теоретической и практический интерес актуально. Доказано существование единственного решения начальной задачи.

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение, гиперболический тип, частные производные, метод дополнительного аргумента, начальная задача, интегральное уравнение.*

ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИЛИШИН ИЗИЛДӨӨ

Мамазиаева Эльмира Амановна, ф.-м.и.к., доцент

mamaziaeva67@mail.ru

Абдазова Угилхан Махамадюсуповна, магистрант

Uabdazova@mail.ru

М.М. Адышев атындагы Ош технологиялык университети

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул эмгекте экинчи даражадагы жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин баштапкы маселеси сунушталган жаңы ыкма менен кошумча аргумент кийирүү методун колдонуу үчүн ыңгайлуу формага келтирилген.*

Бул ыкманы кыргызстандык окумуштуулар иштеп чыгышкан. Бул ыкманы колдонууда Иманалиев М.И., Панков П.С., Аширбаева А.Ж. жана башка окумуштуулардын эмгектеринде каралган. Бул ыкма башка ыкмалардан жаңы кошумча өзгөрмө киргизүү менен айырмаланат. Бул изилдөөлөрдө кошумча аргумент кийирүү усулунун башка ошондой теңдемерди изилдөөчү усулдардан өзгөчөлүгү жаңы кошумча аргументти киргизүү менен маселени интегралдык теңдемелер системасына келтирилет. Интегралдык теңдемелер системасынын чечимдерин изилдөөнүн көптөгөн ыкмалары бар.

Азыркы учурда теориялык жана практикалык кызыкчылык туудурган жаңы теңдемелердин классы үчүн кошумча аргумент ыкмасын колдонуу актуалдуу болуп саналат. Баштапкы маселенин жалгыз чечиминин бар экендиги далилденген.

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдеме, гиперболалык тип, жекече туундулар, кошумча аргумент кийирүү методу, баштапкы маселе, интегралдык теңдеме.*

INVESTIGATION OF THE SOLUTION OF A SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE

Mamaziaeva Elmira Amanovna, Ph.D., associate professor

mamaziaeva67@mail.ru

Abdazova Ugilkhan Makhamadyusupovna, master,

Uabdazova@mail.ru

Osh Technological University named after M.M. Adysheva

Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *In this paper, the initial problem of a second-order partial differential equation is brought to mind by the new method proposed in the paper to a form convenient for applying the method of an additional argument. This method was developed by Kyrgyz scientists. The use of this method is considered in the works of Imanaliev M.I., Pankov P.S., Ashirbaev A.Zh. and other scientists. This method differs from other methods by the introduction of a new additional variable, with the help of which we reduce the problem to a* *system of integral equations. There are many methods for studying the solution of an integral equations system.*

At present, the application of the additional argument method for a class of new equations of theoretical and practical interest is relevant. The existence of a unique solution to the initial problem is proved.

Keywords: *Differential equation, hyperbolic type, partial derivatives, method of additional argument, initial problem, integral equation.*

Введение. В данной работе начальная задача дифференциального уравнения в частных производных второго порядка предлагаемым в работе [1-3] новым способом приводится к виду, удобному для применения метода дополнительного аргумента. Использование метода дополнительного аргумента дает возможность исследовать новые классы задач для уравнений в частных производных.

Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение гиперболического типа вида

$$u_{tt} - a^2(t,x)u_{xx} = b(t,x)u_t + c(t,x)u_x + f(t,x), \tag{1}$$

где $(t,x) \in G_2(T)$, $G_2(T)=[0,T]\times R$,

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \tag{2}$$

Исследованию решения задачи (1), (2) методом характеристик, методом функции Римана рассмотрены в работах [4-5] и во многих других работах.

Пусть $u_k(x) \in \overline{C}^{(2-k)}(R), (k = 0,1),\ b(t,x), c(t,x), f(t,x) \in \overline{C}^{(2)}(G_2(T)),$

$\overline{C}^{(k)}(\Omega)$ - класс функций непрерывных и ограниченных в Ω. Обозначим через $p(s,t,x),\ q(s,t,x)$ – соответствующие решения интегральных уравнений:

$$p(s,t,x) = x + \int_s^t a(v, p(v,t,x))dv, \tag{3}$$

$$q(s,t,x) = x - \int_s^t a(v, p(v,t,x))dv, \tag{4}$$

$$(s,t,x)\in Q_2(T)$$

$$Q_n(T)=\{(t_1,t_2,t_2,..,t_n,x)|\ 0\le t_1\le t_2\le t_3\le ...\le t_n\le T,\ x\in R\}.$$

Из (3) и (4) вытекают соответственно соотношения

$$D\ [-a(t,x)]p(s,t,x)=0,$$

$$D\ [a(t,x)]q(s,t,x)=0,$$

$$D[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial x}.$$

Воспользуемся следующими обозначениями:

$$\vartheta(t,x)=D[-a(t,x)]u(t,x), \tag{5}$$

$$g(t,x)=\frac{1}{a(t,x)}[c(t,x)-a_t(t,x)-a(t,x)a_x(t,x)],$$

$$\beta_1(t,x)=b(t,x)+g(t,x),\quad \beta_2(t,x)=b(t,x)-g(t,x),\quad \beta_3(t,x)=D[a(t,x)]\beta_1(t,x).$$

Лемма 1. Задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\vartheta(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}\beta_1(t,x)u+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\ \beta_2(s,q)\vartheta(s,q)ds-\\-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\ \beta_3(s,q)u(s,q)ds+\int\limits_0^t\ f(s,q)ds,\end{aligned} \tag{6}$$

$$u(t,x)=u_0\big(p(0,t,x)\big)+\int\limits_0^t\vartheta\big(s,p(s,t,x)\big)ds\,, \tag{7}$$

где

$$\big[2\vartheta(t,x)-\beta_1(t,x)u(t,x)\big]_{t=0}=\varphi_1(x)\,.$$

Доказательство. Пусть $\vartheta(t,x),\ u(t,x)$ - решение системы интеграль-ных уравнений (6)-(7).

Непосредственным дифференцированием из (6) имеем:

$$\vartheta_t(t,x)+a(t,x)\vartheta_x(t,x)=b(t,x)u_t(t,x)+a(t,x)g(t,x)u_x(t,x)+f(t,x). \tag{8}$$

Принимая во внимание обозначение (5), из (8) получаем справед-ливость уравнения (1).

Таким образом, мы доказали, что решение системы уравнений (6)- (7) удовлетворяет уравнению (1). Такое решение удовлетворяет и начальному условию (2).

Теперь покажем, что, в свою очередь, решение задачи (1), (2) является решением системы интегральных уравнений (6)-(7). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$D[a(t,x)]z(t,x;u)=\beta_2(t,x)\vartheta(t,x)-\beta_3(t,x)u+2f(t,x), \tag{9}$$

где $z(t,x;u)=2\vartheta(t,x)-\beta_1(t,x)u(t,x)$.

Решение задачи (9), (2) методом дополнительного аргумента сводится к интегральному уравнению (6). Из обозначения (5) следует справедливость (7)

В уравнение (6), подставляя (7), получаем интегральное уравнение относительно $\vartheta(t,x)$

$$\begin{gathered}\vartheta(t,x)=A(t,x;\vartheta)\equiv\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}\beta_1(t,x)\left(u_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t\vartheta\big(s,p(s,t,x)\big)ds\right)+\\+\frac{1}{2}\int_0^t\beta_2(s,q)\vartheta(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\beta_3(s,q)\left(u_0\big(p(0,s,q)\big)+\int_0^s\vartheta\big(v,p(v,s,q)\big)dv\right)ds+\\+\int_0^t f(s,q)ds.\end{gathered}\tag{10}$$

Лемма 2. Существует такое $T^*>0$, что интегральное уравнение (10) имеет единственное решение в $\overline{C}(G_2(T^*))$.

Доказательство. Покажем, что уравнение (10) имеет в области $G_2(T)$ при $T<T_*$ единственное, непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\|\vartheta-\phi\|\le M.$$

Покажем, что при $T<T_*$ оператор A является оператором сжатия

$$\left\| A\vartheta - \phi \right\| \le M_0 KT + NK\frac{T^2}{2} = \Omega_0(T),$$

где $\left\|\vartheta\right\| \le \left\|\varphi\right\| + M = K, \left|\beta_i(t,x)\right| \le M_0 = const,\ i = 1{,}2,\quad \beta_3(t,x) \le N = const.$

Обозначим через T_0 – положительный корень уравнения

$\Omega_0(T) = M.$

Нам остается показать, что оператор A сжимает расстояние между элементами.

Справедлива следующая оценка

$$\left\| A_1\vartheta^1 - A_1\vartheta^2 \right\| \le \Omega_1(T)\left\| \vartheta^1 - \vartheta^2 \right\|,$$

где $\Omega_1(T) = M_0 T + \frac{NT^2}{2}$.

Обозначим через T_1 - положительный корень уравнения $\Omega_1(T) = 1.$

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{T_0, T_1\}$ осуществляет сжатое отображение. Тогда уравнение определяет единственное решение, принадлежащее этому шару. Это решение может быть получено методом последовательных приближений.

Выводы. Используя предложенную схему сведения к интегральному уравнению, можно построить решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с заданными начальными условиями.

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.

2. Аширбаева А.Ж. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Материаловедение. – Бишкек. - 2013. - № 2. – С. 258-261.

3. Мамазиаева Э.А. Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Известия ОшТУ. – 2015. – № 1. С. 87–90.

4. Соболев С.Л. Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. – Москва: Наука, 1966. – 443 с.

5. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 736 с.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.958

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_126

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ҮЧ МҮНӨЗДӨӨЧҮСҮ БАР ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИН САНДЫК ЧЕЧИМИ

Садалов Төлөнбай Ысманович,ф.-м.и.к., доцент,

saadtol_68@mail.ru

Ош технологиялык университети,

Пирматов Абдыманап Зияйдинович, ф.-м.и.к., доцент

pirmatov@mail.ru

Ош мамлекеттик университети

Ильичбек кызы Айчолпон,магистрант,

aicholpon_ilichbekovna@mail.ru

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Сатимкулов Азизбек Ядигарович, магистрант,

azizbek.satimrulov@ibox.ru

Жалал-Абад мамлекеттик университети,

Жалал-абад, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада төртүнчү тартиптеги үч мүнөздөөчүсү бар гиперболикалык теңдеме үчүн Гурстун маселеси торчо усулунун жардамы чечүү каралган. Берилген теңдемедеги катышкан туундулар аппроксимацияланган. Аппроксимацияланган туундунун маанилерин теңдемедеги туундуну алмаштырып торчо теңдеси алынган. Аппроксимациялоо мегилинде аппросимациялоо кадамдарын тандоого да чоң көңүл бурулган. Макаланын негизги максаты торчо усулунун жардамында берилген маселени аппроксимациялоо жолу менен торчо теңдесине алып келүү жана чектүү айрымалардын схемасына башкача айканда сызыктуу алгебралык теңдемелер системасына алып келүү менен коюлган маселенин кррективдүүлүгүн же чечиминин жашашы жана жалгыздыгын далилдөөнү демонстрациялоо болуп саналат.*

Ачкыч сөздөр: *гиперболикалык теңдеме, торчо усулу, аппроксимация, алгебралык теңдемелер системасы.*

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ТРЕХКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Садалов Толонбай Ысманович,к.ф.-м.н., доцент,
saadtol_68@mail.ru
Ошский технологический университет,
Пирматов Абдыманап Зияйдинович, к.ф.-м.н., доцент
pirmatov@mail.ru
Ошский государственный университет
Ильичбек кызы Айчолпон, магистрант,
aicholpon_ilichbekovna@mail.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан
Сатимкулов Азизбек Ядигарович, магистрант,
azizbek.satimrulov@inbox.ru
Жалал-Абадский государственный университет,
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация: *В статье рассматриваются решение задача Гурса методом сеток для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристи-ками. С начало с помощью аппроксимации получены конечные разности производных и сеточное уравнение. Используя сеточное уравнение и налагаемых условий получено линейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функции в сетке. Использовано метода конечных разностей. Сущность этого наиболее универсального численного метода состоит в том, что за искомый набор чисел принимается таблица значений решения в точках некоторого множества, называемого обычно сеткой. Для вычисления искомой таблицы используются алгебраические уравнения, приближенно заменяющие дифференциальное. Основной целью статьи является продемонстрировать аппроксимуруя и используя методом сеток сведение к разностные схемы, т.е. системе алгебраических уравненией задачу Гурса. Доказаны существование и единственность решений поставленных задач.*

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, аппроксимация, метод сеток, система алгебраических уравнений.*

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A HYPERBOLIC EQUATION OF FOURTH ORDER

Sadalov Tolonbai Ysmanovich, Ph.D., associate professor
saadtol_68@mail.ru
Osh Technological University, Osh, Kyrgyzstan
Pirmatov Abdymanap Ziyaydinovich, Ph.D., associate professor
pirmatov@mail.ru
Ilyichbek kyzy Aicholpon, master,
aicholpon_ilichbekovna@mail.ru
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan
Satimkulov Azizbek Yadigarovich, master,
azizbek.satimrulov@ibox.ru
Jalal-Abad State University, Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Abstract: *The article considers the solution of the Gursa problem by the grid method for a fourth-order hyperbolic equation with three-fold characteristics. From the beginning, with the help of approximation, finite differences of derivatives and a grid equation are obtained. Using a grid equation and imposed conditions, a linear system of algebraic equations is obtained with respect to unknown values of the function in the grid. The finite difference method is used. The essence of this most universal numerical method is that the desired set of numbers is taken as a table of solution values at the points of a certain set, usually called a grid. To calculate the required table, algebraic equations are used, which approximately replace the differential equation. The main purpose of the article is to demonstrate, by approximating and using the grid method, the reduction to difference schemes, i.e., a system of algebraic equations, the Goursat problem. The existence and uniqueness of solutions to the tasks are proved.*

Keywords: *hyperbolic equation, approximation, grid method, system of algebraic equations.*

Введение. Математическое моделирование многих процессов, приводит к изучению краевых задач для уравнений в частных производных. Задачи локальными и нелокальными условиями для гиперболических уравнений четвертого порядка с трехкратными и двукратными характеристиками четвертого порядка рассмотрены в статьях [1, 2, 4, 5, 6]. Локальным и нелокальным краевым задачам для гиперболических уравнений четвертого порядка посвящено большое количество работ. Отметим здесь работы А. С. Сопуева [1] и их учеников.

Исследованию разрешимости задачи Гурса методом сеток для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками и посвящена данная статья.

Постановка задачи. В области $D=\{(x,y):0<x<\ell,\ 0<y<h\}$ для гиперболического уравнения

$$u_{xxxy}(x,y)+u_{xx}(x,y)+cu(x,y)=f(x,y), \tag{1}$$

где $c=const,\ f(x,y)\in C(\bar{D}),$

$M=\{u,\ u_x,u_{xx}\in C(\bar{D}),\ u_y,u_{xy},u_{xxy},u_{xxx},u_{xxxy}\in C(D)\},$ рассмотрим задачу Гурса[3].

Задача 1. Найти в области *D* решение уравнения(1) из класса *M*, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),u_x(0,y)=\varphi_1(y),\ u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y), \tag{2}$$

и начальным условиям:

$$u(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{3}$$

условиями согласования:

$$\varphi_1(0)=\psi(0),\ \varphi_2(0)=\psi'(0),\ \varphi_3(0)=\psi''(0). \tag{4}$$

Разрешимость задачи доказана методом сеток. Аппроксимируя краевые, начальные условия и уравнение (1), задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений. Искомая функция получена в табличном виде.

Аппроксимация. Значения функции в узлах (x_i,y_i) обозначим соответственно $u(x_i,y_i)=u_{i,j},f(x_i,y_i)=f_{i,j},i,j=1,\ldots,21.$

Аппроксимации граничных условий получим в виде[7,8]:

$$u_{0,j}=\varphi_{1j},u_x(0,y_j),\ u_x(x,y)\approx u_{1,j}-u_{0,j}=h_1\varphi_{2j},$$

$$u_{xx}(0,y_j),u_{2,j}-2u_{1,j}+u_{0,j}h_1^2\varphi_{3j},\ u(0,x_i)\approx\psi_i, \tag{5}$$

где h_1,h_2 шаг аппроксимации.

Аппроксимируем производную u_{xxxy} в виде:

$$u_x(x_i,y_i) \approx \left(\frac{1}{h_1}\right)\left[u_{i+1,j} - u_{i,j}\right] + O\left(h_1\right), u_{xx}(x_i,y_i) \approx \left(\frac{1}{h_1^2}\right)\left[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right] + O\left(h_1^2\right),$$

$$u_{xxx}(x_i,y_i) \approx \left(\frac{1}{h_1^3}\right)\left[u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i,j} - u_{i-1,j}\right] + O\left(h_1^3\right),$$

$$u_{xxxy}(x_i,y_i) \approx \left(\frac{1}{h_1^3 h_2}\right)\left[u_{i+2,j+1} - 3u_{i+1,j+1} + 3u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}\right] -$$

$$-\left(\frac{1}{h_1^3 h_2}\right)\left[u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i,j} - u_{i-1,j}\right] + O\left(h_1^3 + h_2\right),$$

где точность аппроксимации равна $O(h_1^3 + h_2)$.

Учитывая аппроксимации производных и шаги аппроксимации, получим сеточное уравнение в виде:

$$\begin{gathered} u_{i+2,j+1} - 3u_{i+1,j+1} + 3u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} - \left[u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right] + h_1 h_2\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right] + \\ + \left(h_1^3 h_2 c - 3 - 2h_1 h_2\right)u_{i,j} = h_1^3 h_2 f_{i,j}, \end{gathered} \tag{6}$$

Разрешимость задачи. Из формул (5), (6) при $j = 0$ получим разностную схему в виде:

$$u_{i+2,1} - 3u_{i+1,1} + 3u_{i,1} - u_{i-1,1} = p_{i,0}, \tag{7}$$

$$p_{i,0} = u_{i+2,0} - 3u_{i+1,0} - u_{i-1,0} - h_1 h_2\left[u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right] + \left(h_1^3 h_2 c - 3 - 2h_1 h_2\right)u_{i,0} + h_1^3 h_2\left(\psi_i + \varphi_{1,0}\right),$$

где $u_{0,j} = \varphi_{1,j}, u_{1,j} = u_{0,j} + h_1\varphi_{2j}, u_{2,j} = 2u_{1,j} - u_{0,j} + h_1^2\varphi_{3,j}, u\left(0, x_i\right) \approx \psi_i,$

из (7) при $i = 1, 2, 3, ..., 21$ получим систему линейных алгебраических уравнений в виде:

$$i = 1, u_{3,1} - 3u_{2,1} + 3u_{1,1} - u_{0,1} = p_{1,0},$$

$$i = 1, u_{3,1} - 3u_{2,1} + 3u_{1,1} - u_{0,1} = p_{1,0},$$

$$i = 2, u_{4,1} - 3u_{3,1} + 3u_{2,1} - u_{1,1} = p_{2,0}, \tag{8}$$

$$i = 19, u_{21,1} - 3u_{02,1} + 3u_{19,1} - u_{18,1} = p_{19,0}.$$

Система алгебраических уравнение (8) совместима и имеет единственное решение. Из (8) однозначно определяются неизвестные значения $u_{3,1}, u_{4,1}, u_{5,1}, \ldots, u_{21,1}$.

Используя значения функции в нижних слоях и формулу

$$u_{i+2,j+1} - 3u_{i+1,j+1} + 3u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} = p_{i,j}, \tag{9}$$

где

$$p_{i,j} = u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - h_1 h_2 \left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} \right] + (h_1^3 h_2 c - 3 - 2h_1 h_2) u_{i,j} + h_1^3 h_2 f_{i,j}, \tag{10}$$

при $j = 1, 2, 3, \ldots$ последовательно определим значения функции второго, третьего, и т. д. слоев.

Итак, доказана

Теорема 1. Если матрица системы линейных алгебраических уравнений (8) невырожденная матрица, то решение задачи 1 существует и единственно.

Для удобства рассмотрим пример для модельного уравнения четвертого порядка гиперболического типа задачу Гурса.

Пример. Рассмотрим задачу Гурса для модельного уравнения четвертого порядка с конкретными данными:

$$u_{xxxy}(x, y) + cu(x, y) = x + y, \tag{11}$$

найти в области $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ решение уравнения(11) из класса *M*, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = y, u_x(0, y) = 1 + y,\ u_{xx}(0, y) = y^2, \tag{12}$$

и начальным условиям:

$$u(x, 0) = x. \tag{13}$$

Методом сеток численное решение построим в квадрате

$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Покроем область D прямоугольной сеткой

$x_i = ih_1, y_i = jh_2, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}, h_1 = 1/n, h_2 = 1/m,$ (*n*,*m*-целые).

Используя аппроксимации на сетке x_i, y_j приближенно заменим уравнение (7) следующим соответствующим сеточным уравнением [7, 8]

$$u_{i+2,j+1} - 3u_{i+1,j+1} + 3u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} - \left[u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right] + \left(h_1^3 h_2 c - 3\right)u_{i,j} = h_1^3 h_2\left(x_i + y_j\right), \quad (14)$$

Из (14) при $j = 0$ получим разностную схему:

$$u_{i+2,1} - 3u_{i+1,1} + 3u_{i,1} - u_{i-1,1} = p_{i,0}, \quad (15)$$

$$p_{i,0} = u_{i+2,0} - 3u_{i+1,0} - u_{i-1,0} - \left(h_1^3 h_2 c - 3\right)u_{i,0} + h_1^3 h_2\left(x_i + y_0\right), \quad (16)$$

где

$$u_{0,j} = y_j, u_{1,j} = u_{0,j} + h_1\left(1 + y_j\right), u_{2,j} = 2u_{1,j} - u_{0,j} + h_1^2 y_j^2, u\left(0, x_i\right) = x_i,$$

из (16) при $i = \overline{1,21}$ получим систему

$$\begin{aligned}
&i = 1, u_{3,1} - 3u_{2,1} + 3u_{1,1} - u_{0,1} = p_{1,0},\\
&i = 2, u_{4,1} - 3u_{3,1} + 3u_{2,1} - u_{1,1} = p_{2,0},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&i = 19, u_{21,1} - 3u_{20,1} + 3u_{19,1} - u_{18,1} = p_{19,0},
\end{aligned} \quad (17)$$

из (17) однозначно определяются неизвестные значения $u_{3,1}, u_{4,1}, u_{5,1}, \ldots, u_{21,1}$.

Используя значения функции в нижних слоях и формулу

$$u_{i+2,j+1} - 3u_{i+1,j+1} + 3u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} = p_{i,j}, \quad (18)$$

где

$$p_{i,j} = u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - \left(h_1^3 h_2 c - 3\right)u_{i,j} + h_1^3 h_2\left(x_i + y_j\right). \quad (19)$$

Для численных значений переменных x, y области D, используя программу, созданную на языке VBA и приведенную в приложении. Соответствующие значения функции и её производной приведены в таблице № 1.

Выводы. В статье рассмотрены задача Гурса для гиперболических уравнений четвертого порядка с трехкратными характеристиками. Методом сеток доказаны существование и единственность решение задачи. Составлена программа в среде VBA и искомая функция получена в виде таблицы. Оценены погрешности аппроксимации и метода.

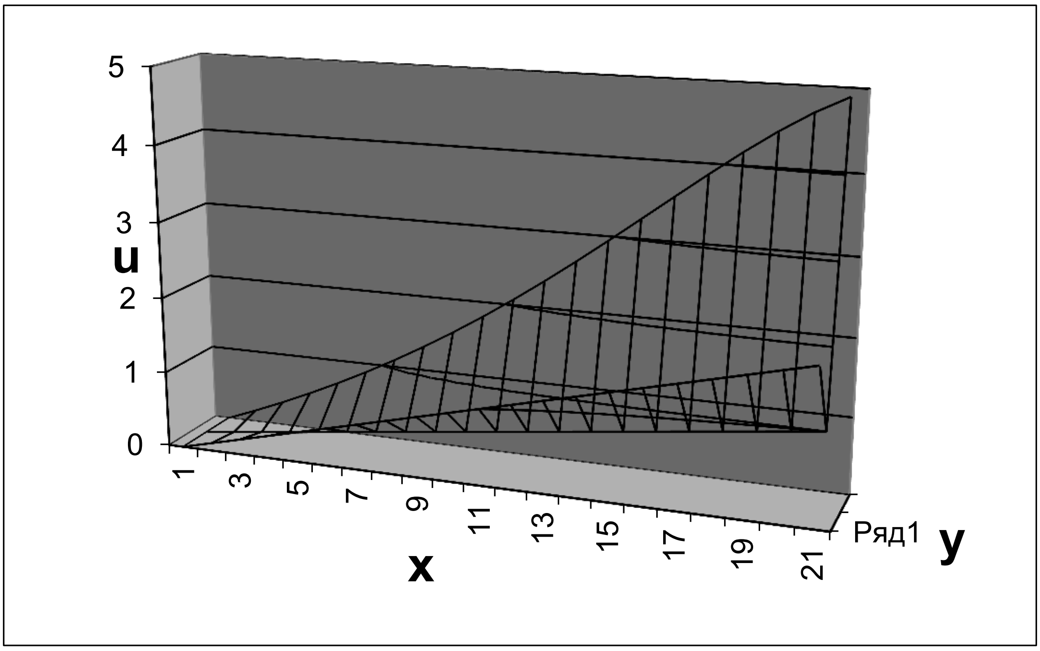
Таблица № 1

c	x	y	u	u_{xxxy}	u_{xxxy}+cu	x+y
2	0,1	0,05	0,155012	-0,16002	0,15	0,15
	0,2	0,1	0,320186	-0,34037	0,3	0,3
	0,3	0,15	0,495904	-0,54181	0,45	0,45
	0,4	0,2	0,68273	-0,76546	0,6	0,6
	0,5	0,25	0,881345	-1,01269	0,75	0,75
	0,6	0,3	1,092464	-1,28493	0,9	0,9
	0,7	0,35	1,316749	-1,5835	1,05	1,05
	0,8	0,4	1,554716	-1,90943	1,2	1,2
	0,9	0,45	1,806622	-2,26324	1,35	1,35
	1	0,5	2,072347	-2,64469	1,5	1,5
	1,1	0,55	2,351263	-3,05253	1,65	1,65
	1,2	0,6	2,642091	-3,48418	1,8	1,8

Таблица № 2

c	x	y	u	uxxxy	uxxxy+cu	x+y
5	1	3	61,875	-57,875	4	4
	0,50	2,5	25,51432	-22,5143	3	3
	0	2	10	-8	2	2
	-0,50	1,5	2,558594	-1,55859	1	1
	-1	1	-2,70833	2,708333	0	0
	-1,50	0,5	-7,16797	6,167969	-1	-1
	-2	0	-10	8	-2	-2
	-2,50	-0,5	-10,5404	7,540365	-3	-3
	-3	-1	-10,625	6,625	-4	-4
	-3,50	-1,5	-16,9336	11,93359	-5	-5
	-4	-2	-43,3333	37,33333	-6	-6
	-4,50	-2,5	-113,223	106,2227	-7	-7
	-5	-3	-261,875	253,875	-8	-8
	-5,50	-3,5	-538,783	529,7826	-9	-9
	-6	-4	-1010	1000	-10	-10
	-6,50	-4,5	-1760,49	1749,488	-11	-11
	-7	-5	-2896,46	2884,458	-12	-12
	-7,50	-5,5	-4547,71	4534,715	-13	-13
	-8	-6	-6870	6856	-14	-14

График №1



Литература

1. Сопуев, А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: [Текст] / А. Сопуев // Дис. …докт. физ.–мат. наук: 01.01.02.-Бишкек, 1996.-249 с.

2. Асылбеков, Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: [Текст] / Т.Д. Асылбеков // Дис. …канд. физ. –мат. наук: 01.01.02.-Бишкек, 2003.-130 с.

3. Асылбеков, Т. Д. Задача Гурса для гиперболических уравнений четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Асылбеков // Тезисы докл. I региональной науч. конф. «Проблемы алгебры, геометрии и их приложений». –Ош: ОшГУ, 1996.-С.47-49.

4. Асылбеков, Т.Д. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами [Текст] / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Республиканский научно-теоретический журнал “Наука, новые техгологии и инновации Кыргызстана”, № 3 – Бишкек, 2019. №3. с. 11-17.

5. Асылбеков, Т.Д. Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для модельного гиперболического уравнения четвертого с трехкратными характеристиками [Текст] / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Республиканский научно-теоретический журнал “Наука, новые техгологии и инновации Кыргызстана”, № 3 – Бишкек, 2019. №3. с. 22-29.

6. Асылбеков, Т.Д. “Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения четвертого с разрывными коэффициентами” [Текст] /

Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Наука. Образование. Техника.-Ош: КУУ, 2019.-№2.-С. 106-115.

7. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем [Текст] / А.А. Самарский - 'М.,1971.

8. Самарский, А.А. Введение в численные методы[Текст] / А.А. Самарский - М.,1982.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.956.6
DOI: 10.52754/16947452_2022_1_136

РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Сопуев Адахимжан, докт. ф.-м. наук, профессор,
sopuev@mail.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан
Апаков Юсупжон Пулатович, докт. ф.-м. наук, профессор,
yusupjonapakov@gmail.com.
Академия наук Республики Узбекистан
В.И. Романовский институт математики
Мирзаев Отабек Мирзарахматович,
mirzayevotabek19812304@gmail.com,
Наманганский инженерно- строительний институт,
Наманган, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье изучено решение второй краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области. Найдены условия единственности и существования решения. При y=0 и y=1 заданы значения производных по y, при x=0 заданы значения самой функции и её производных первого и второго порядка по x, а при x=l значения самой функции и её производной по x. Теорема единственности решения задачи доказана методом интегралов энергии. Методом разделения переменных разрешимость задачи сведена к разрешимости краевых задач для уравнения пятого и второго порядков. Решения указанных задач представлены в виде равномерно сходящихся функциональных рядов.*

Ключевые слова: *уравнение с кратными характеристиками, краевая задача, единственность, существование, метод разделения переменных, собст-венное значение, собственная функция, функциональный ряд, равномерная сходимость.*

БЕШИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЭСЕЛҮҮ ХАРАКТЕРИСТИКАСЫ БАР ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЭКИНЧИ ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕНИ ЧЕЧҮҮ

Сопуев Адахимжан, ф.-м.и. докт., профессор,
sopuev@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан
Апаков Юсупжон Пулатович, ф.-м.и. докт., профессор,
yusupjonapakov@gmail.com,
Өзбекстан Республикасынын илимдер Академиясынын
В.И. Романовский атындагы математика институту,
Мирзаев Отабек Мирзарахматович,
mirzayevotabek19812304@gmail.com,
Наманган инженер-курулуш институту,
Наманган, Өзбекстан

Аннотация: *Бул макалада тик бурчтуу областта эселүү характеристикалары бар бешинчи тартиптеги теңдеме үчүн экинчи чек аралык маселенин чечилиши изилденген. Чечимдин жалгыздыгынын жана жашашынын шарттары табылган. y=0 жана y=1 де y боюнча туундулардын маанилери берилет, x=0 болгондо функциянын өзүнүн жана анын x ке карата биринчи жана экинчи тартиптеги туундуларынын маанилери берилген, x=l болгондо функциянын өзүнүн жана анын x ке карата биринчи тартиптеги туундусунун маанилери берилген. Энергиялык интегралдар методу менен маселенин чечиминин жалгыздыгы теоремасы далилденген. Өзгөрмөлөрдү ажыратуу методу менен маселенин чечилиши бешинчи жана экинчи тартиптеги теңдемелер үчүн чек аралык маселелердин чечилүүчүлүгүнө алып келинген. Бул маселелердин чечимдери бир калыпта жыйналуучу функционалдык катарлардын суммалары түрүндө табылган.*

Ачкыч сөздөр: *характеристикасы эселүү болгон теңдеме, чек аралык маселе, жалгыздыгы, жашашы, өзгөрмөлөрдү ажыратуу методу, өздүк маани, өздүк функция, функционалдык катар, бир калыпта жыйналуучулук.*

SOLUTION OF THE SECOND BOUNDARY PROBLEM FOR A FIFTH ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Sopuev Adakhimzhan, Doctor of Physical and Mathematical sciences
sopuev@mail.ru
Osh State University,

Osh, Kyrgyzstan

Apakov Yusupjon Pulatovich, Doctor of Physical and Mathematical sciences

yusupjonapakov@gmail.com,

the Academy of Sciences of the Republic Uzbekistan Institute

of Mathematics named after V. I. Romanovsky

Mirzaev Otabek Mirzarakhmatovich,

mirzayevotabek19812304@gmail.com,

Namangan Civil Engineering Institute,

Namangan, Uzbekistan

Abstract: *In this article, we study the solution of the second boundary value problem for a fifth-order equation with multiple characteristics in a rectangular domain. Conditions for the uniqueness and existence of a solution are found. At y=0 and y=1, the values of the derivatives with respect to y are given, with x=0, the values of the function itself and its derivatives of the first and second order with respect to x are given, and with x=l, the valuesof the function itself and its derivative with respect to x. The uniqueness theorem for the solution of the problem is proved by the method of energy integrals. By the method of separation of variables, the solvability of the problem is reduced to the solvability of boundary value problems for equations of the fifth and second orders. The solutions of these problems are presented in the form of uniformly convergent functional series.*

Keywords: *Equations with multiple characteristics, boundary value problem, uniqueness, existence, separated variables method, eigenvalue, Eigen function, functional series, uniform convergence.*

I. Введение и постановка задачи

Теория уравнений с частными производными пятого порядка возникла сравнительно недавно. В совокупности, из всех уравнений пятого порядка особое место по специфическому характеру занимают, так называемые, уравнения с кратными характеристиками. Уравнения пятого порядка с кратными характеристиками

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f\left(t,x,y,z\right),$$

возникают в математических моделях волновых процессов в плазме, слабых ударных волн в диспергирующих диссипативных средах, путем добавления к одномерному уравнению Кортевега-де Фриза диссипативного члена [1,2]. Работы по исследованию уравнений пятого порядка сравнительно мало [3-11].

В области $D=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$, рассмотрим уравнение

$$L[u]+\mu^2 u\equiv\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mu^2 u=0, \tag{1}$$

где $\mu\in R.$

Задача A**.** Найти регулярное решение уравнения (1) в области D из класса $C_{x,y}^{5,2}(D)\bigcap C_{x,y}^{4,1}(\bar{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0)=0,\ u_y(x,1)=0,(2) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\\&u(1,y)=\varphi_4(y),\ u_x(1,y)=\varphi_5(y).\end{aligned} \tag{3}$$

где $\varphi_i(y)\left(i=\overline{1,5}\right)$– заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что аналогичная задача для уравнения $\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ исследована в работе [8].

II. Единственность решения

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$, тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнения (1) с однородными краевыми условиями.

Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$u\left(u_{xxxxx}-u_{yy}+\mu^2\cdot u\right)=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxxx}-u_x u_{xxx}+\frac{1}{2}u_{xx}^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2+\mu^2\cdot u^2=0. \tag{4}$$

Интегрируя тождество (4) по области D, имеем:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}[uu_{xxxx} - u_x u_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2]dxdy - \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(uu_y)dxdy +$$

$$+\iint_D u_y^2 dxdy + \mu^2 \iint_D u^2 dxdy = 0,$$

$$\int_0^1 [u(1,y)u_{xxxx}(1,y) - u(0,y)u_{xxxx}(0,y)]dy -$$

$$-\int_0^1 [u_x(1,y)u_{xxx}(1,y)dy - u_x(0,y)u_{xxx}(0,y)]dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \left[u_{xx}^2(1,y) - u_{xx}^2(0,y)\right]dy - \int_0^1 [u(x,1)u_y(x,1) - u(x,0)u_y(x,0)]dx +$$

$$+\iint_D u_y^2 dxdy + \mu^2 \iint_D u^2 dxdy = 0.$$

Учитывая однородные краевые условия задачи A, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(1,y)dy + \iint_D u_y^2 dxdy + \mu^2 \iint_D u^2 dxdy = 0.$$

Отсюда следует, что если $\mu \neq 0$ то $u(x,y) \equiv 0$.

Если $\mu = 0$, тогда $u_y(x,y) = 0$, отсюда $u(x,y) = f(x)$.

Тогда из уравнения (1) имеем $f^{(V)}(x) = 0$, отсюда решение этого уравнения имеет вид

$$f(x) = C_1x^4 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5.$$

Учитывая краевые условия, получим $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0,$ то есть $f(x) \equiv 0.$ Тогда $u(x,y) \equiv 0.$ Теорема 1 доказана.

III. Существование решения

Решение задачи будем искать в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y). \qquad (5)$$

Поставляя (5) в (1) и разделяя по переменные, получим

$$X^{(5)}+(\lambda^2+\mu^2)X=0, \qquad (6)$$

$$Y''+\lambda^2 Y=0. \qquad (7)$$

Из (7) и (2) будем иметь

$$\begin{cases} Y''+\lambda^2 Y=0, \\ Y'(0)=0,\ Y'(1)=0. \end{cases} \qquad (8)$$

Нетривиальные решения задачи (8) существуют при $\lambda \geq 0$, и ее собственные значения равны $\lambda_n^2=(\pi n)^2$, $n=0,1,2,3,...$. [12], а собственными функциями являются

$$Y_n(y)=\begin{cases} 1,\ n=0, \\ \sqrt{2}\cos \pi n y,\ n\in N. \end{cases} \qquad (9)$$

Характеристическое уравнение, уравнения (6) имеет вид

$$k^5+\tau_n^5=0,$$

где $\tau_n=\sqrt[5]{\left((\pi n)^2+\mu^2\right)},\ n=0,1,2,3,....$

Оно имеет один вещественный

$$k_1=-\tau_n,$$

и четыре комплексных корня

$$k_{2,3}=\tau_n\left(\cos\frac{\pi}{5}\pm i\sin\frac{\pi}{5}\right),\ k_{4,5}=\tau_n\left(\cos\frac{3\pi}{5}\pm i\sin\frac{3\pi}{5}\right).$$

Тогда общее решение уравнения (6) имеет вид

$$X_n(x)=C_{1n}e^{-\tau_n x}+e^{\tau_n\alpha_2 x}\left(C_{2n}\cos\left(\tau_n\beta_2 x\right)+C_{3n}\sin\left(\tau_n\beta_2 x\right)\right)+$$
$$+e^{\tau_n\alpha_1 x}(C_{4n}\cos\left(\tau_n\beta_1 x\right)+C_{5n}\sin\left(\tau_n\beta_1 x\right)),$$

где $\theta=\frac{\pi}{5},\ \alpha_1=\cos\theta,\ \beta_1=\sin\theta,\ \alpha_2=\cos 3\theta,\ \beta_2=\sin 3\theta,$

C_{in} $(i=\overline{1,5})$ - произвольные постоянные, $n=0,1,2,...$.

Учитывая линейность и однородность уравнения (1), а также (5) решение задачи A ищем в виде

$$u\left(x,y\right)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n\left(x\right)Y_n\left(y\right). \qquad (10)$$

Так как все члены ряда (10) удовлетворяют условиям (2), определяемой рядом (10) также удовлетворяет условиям (2). Предполагая, что ряд (9) и ряды из производных u_{xxxxx}, u_{yy} сходятся равномерно в $\overline{D}$, а также требуя от функции $u\left(x,y\right)$, определяемой рядом (10), выполнения краевых условий (3) получим

$$u\left(0,y\right)=\varphi_1\left(y\right)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{1n}\cos\pi ny,$$

$$u_x\left(0,y\right)=\varphi_2\left(y\right)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}\cos\pi ny,$$

$$u_{xx}\left(0,y\right)=\varphi_3\left(y\right)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{3n}\cos\pi ny,$$

$$u\left(1,y\right)=\varphi_4\left(y\right)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{4n}\cos\pi ny,$$

$$u_x\left(1,y\right)=\varphi_5\left(y\right)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{5n}\cos\pi ny,$$

$$\begin{cases}C_{1n}+C_{2n}+C_{4n}=A_{1n}\,,\\ -C_{1n}+\cos 3\theta C_{2n}+\sin 3\theta C_{3n}+\cos\theta C_{4n}+\sin\theta C_{5n}=\dfrac{A_{2n}}{\tau_n},\\ C_{1n}+C_{2n}\cos 6\theta+C_{3n}\sin 6\theta++C_{4n}\cos 2\theta+C_{5n}\sin 2\theta=\dfrac{A_{3n}}{\tau_n^2},\\ C_{1n}e^{-\tau_n}+C_{2n}e^{\tau_n\alpha_2}\cos\tau_n\beta_2+C_{3n}e^{\tau_n\alpha_2}\sin\tau_n\beta_2+\\ +C_{4n}\,e^{\tau_n\alpha_1}\cos\tau_n\beta_1+C_{5n}e^{\tau_n\alpha_1}\sin\tau_n\beta_1=A_{4n},\\ -C_{1n}e^{-\tau_n}+C_{2n}e^{\tau_n\alpha_2}\cos\left(\tau_n\beta_2+3\theta\right)+C_{3n}e^{\tau_n\alpha_1}\sin\left(\tau_n\beta_2+3\theta\right)+\\ +C_{4n}e^{\tau_n\alpha_1}\cos\left(\tau_n\beta_1+\theta\right)+C_{5n}e^{\tau_n\alpha_1}\sin\left(\tau_n\beta_1+\theta\right)=\dfrac{A_{5n}}{\tau_n}\,,\end{cases} \qquad (11)$$

где

$$A_{in}=\int_0^1\varphi_i(y)Y_n\left(y\right)dy,\ i=\overline{1,5}. \qquad (12)$$

Решив систему (11), получим

$$C_{in}=\frac{\Delta_i}{\Delta\left(\tau_n\right)},\ i=\overline{1,5}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \cos 3\theta & \sin 3\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ 1 & \cos 6\theta & \sin 6\theta & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ e^{-\tau_n} & e^{\tau_n\alpha_2}\cos\tau_n\beta_2 & e^{\tau_n\alpha_2}\mathrm{Sin}\,\tau_n\beta_2 & e^{\tau_n\alpha_1}\cos\tau_n\beta_1 & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\tau_n\beta_1 \\ -e^{-\tau_n} & e^{\tau_n\alpha_2}\cos\left(\tau_n\beta_2+3\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_2}\sin\left(\tau_n\beta_2+3\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_1}\cos\left(\tau_n\beta_1+\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\left(\tau_n\beta_1+\theta\right) \end{vmatrix},$$

Следует заметить, что $\Delta\left(\tau_n\right) \neq 0.$ Действительно, предположим обратное, пусть $\exists\tau^*, \Delta\left(\tau^*\right) = 0,$ тогда однородная система (11) будет иметь нетривиальное решение $c_i\left(\tau^*\right), i = 1,\ldots,5.$ Отсюда функция вида

$$u^*\left(x,y\right) = \sqrt{2}\cos\left(\lambda^* y\right) X^*\left(x\right),$$

где

$$\left(\lambda^*\right)^2 = \left(\tau^*\right)^5 - \mu^2,$$

$$X^*(x) = C_1\left(\tau^*\right)e^{-\tau^* x} + e^{\tau^*\alpha_2 x}\left(C_2\left(\tau^*\right)\cos\left(\tau^*\beta_2 x\right) + C_3\left(\tau^*\right)\sin\left(\tau^*\beta_2 x\right)\right) +$$

$$+ e^{\tau^*\alpha_1 x}\left(C_4\left(\tau^*\right)\cos\left(\tau^*\beta_1 x\right) + C_5\left(\tau^*\right)\sin\left(\tau^*\beta_1 x\right)\right),$$

будет нетривиальным решением однородной задачи $A,$ что противоречит теореме 1.

Детерминант системы запишем в виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{3\times 3} & B_{3\times 2} \\ C_{2\times 3} & D_{2\times 2} \end{vmatrix},$$

где

$$A_{3\times 3} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ 1 & cos 6\theta & \sin 6\theta \end{Vmatrix}, \quad B_{3\times 2} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta \\ \cos 2\theta & sin 2\theta \end{Vmatrix},$$

$$C_{2\times 3} = \begin{Vmatrix} e^{-\tau_n} & e^{\tau_n\alpha_2}\cos\tau\beta_2 & e^{\tau_n\alpha_2}\sin\tau\beta_2 \\ -e^{-\tau_n} & e^{-\tau_n\alpha_2}\cos\left(\tau\beta_2+3\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_2}\sin\left(\tau\beta_2+3\theta\right) \end{Vmatrix},$$

$$D_{2\times2} = \left\| \begin{matrix} e^{\tau_n\alpha_1}\cos\tau\beta_1 & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\tau\beta_1 \\ e^{\tau_n\alpha_1}\cos\left(\tau\beta_1+\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\left(\tau\beta_1+\theta\right) \end{matrix} \right\|.$$

Найдем самую большую степень экспоненты в значении Δ. Так как в матрице $D_{2\times2}$ у всех экспонент степени положительны, то, очевидно, самая большая степень экспонентов имеется в произведении следующих определителей:

$$\det A_{3\times3}\cdot\det D_{2\times2}.$$

Вычислим каждый определитель в отдельности:

$$\det A_{3\times3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \cos3\theta & \sin3\theta \\ 1 & cos6\theta & \sin6\theta \end{vmatrix} = 4\sin3\theta\cos^2\frac{3\theta}{2},$$

$$\det D_{2\times2} = \begin{vmatrix} e^{\tau_n\alpha_1}\cos\tau\beta_1 & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\tau\beta_1 \\ e^{\tau_n\alpha_1}\cos\left(\tau\beta_1+\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\left(\tau\beta_1+\theta\right) \end{vmatrix} = e^{2\tau_n\alpha_1}\sin\theta.$$

Отсюда

$$\Delta = e^{2\tau_n\alpha_1}K + f\left(\tau_n\right),$$

где

$$K = 4\sin\theta\sin3\theta\cos^2\frac{3\theta}{2},$$

$$f\left(\tau_n\right) = O\left(e^{\tau_n(\alpha_1+\alpha_2)}\right),\ \ \tau_n = \sqrt[5]{\left(\left(\pi n\right)^2+\mu^2\right)},\ n=0,1,2,\ldots \text{ при } n\to\infty.$$

Оценим Δ:

$$\left|\Delta\right| = e^{2\tau_n\alpha_1}\left|K + e^{-2\tau_n\alpha_1}f\left(\tau_n\right)\right|,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty} e^{-2\tau_n\alpha_1}f\left(\tau_n\right) = 0,$$

то

$$\forall\varepsilon\in(0,K),\quad \exists N_1\left|\forall n > N_1 \Rightarrow \left|e^{-2\tau_n\alpha_1}f\left(\tau_n\right)\right| < \varepsilon\right..$$

Отсюда при $n > N_1$ выполняется неравенство

$$\left|K + e^{-2\tau\alpha_1} f\left(\tau_n\right)\right| > K - \left|e^{-2\tau\alpha_1} f\left(\tau_n\right)\right| > K - \varepsilon .$$

Обозначим

$$K_1 = \min_{\underline{n=1,N_1}} \left|K + e^{-2\tau_n\alpha_1} f\left(\tau_n\right)\right|.$$

отсюда

$$\frac{1}{|\Delta|} \le \frac{1}{Me^{2\tau_n\alpha_1}} \Rightarrow |\Delta| \ge Me^{2\tau_n\alpha_1},$$

где

$$M = \min\left\{K_1; K - \varepsilon\right\}.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание условие, $\varphi_i'\left(0\right) = \varphi_i'\left(1\right) = 0, \left(i = \overline{1,5}\right)$ из (12) получим

$$A_{in} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\pi n\right)^3} \int_0^1 \varphi_{in}'''\left(y\right) \sin \pi ny dy.$$

Отсюда

$$\left|A_{in}\right| \le \frac{\sqrt{2}}{\left(\pi n\right)^3} \left|\int_0^1 \varphi_{in}'''\left(y\right) \sin \pi ny dy\right| \le \frac{M_i}{n^3},\ i = \overline{1,5}.$$

Теперь получим оценки для $C_{in},\ i = \overline{1,5},\ n \in N$. Вычисления показывают, что справедливы следующие оценки для определителей $\left|\Delta_i\right|$, $i = \overline{1,5}$:

$$\left|\Delta_1\right| \le M_1 e^{2\tau_n\alpha_1} \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|, \quad \left|\Delta_2\right| \le M_2 e^{2\tau_n\alpha_1} \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|, \quad \left|\Delta_3\right| \le M_3 e^{2\tau_n\alpha_1} \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|,$$

$$\left|\Delta_4\right| \le M_4 e^{\tau_n\alpha_1} \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|, \quad \left|\Delta_5\right| \le M_5 e^{\tau_n\alpha_1} \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|,$$

Отсюда для коэффициентов C_{in} получим следующие оценки:

$$\left|C_{1n}\right| = \frac{\left|\Delta_1\right|}{|\Delta|} \le M_1 \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|, \ \left|C_{2n}\right| = \frac{\left|\Delta_2\right|}{|\Delta|} \le M_2 \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|,$$

$$\left|C_{3n}\right| = \frac{\left|\Delta_3\right|}{\left|\Delta\right|} \le M_3 \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|, \quad \left|C_{4n}\right| = \frac{\left|\Delta_4\right|}{\left|\Delta\right|} \le \frac{M_4 \sum\limits_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|}{e^{\tau_n \alpha_1}},$$

$$\left|C_{5n}\right| = \frac{\left|\Delta_5\right|}{\left|\Delta\right|} \le \frac{M_5 \sum\limits_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|}{e^{\tau_n \alpha_1}},$$

где $M_i = const > 0, \; i = \overline{1,5}.$

Теперь докажем равномерную сходимость ряда (11) в области $\overline{D}$.

$$\left|u\left(x,y\right)\right| \le M_0 + M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left|A_{1n}\right|}{n^3} + \frac{\left|A_{2n}\right|}{n^3} + \frac{\left|A_{3n}\right|}{n^3} + \frac{\left|A_{4n}\right|}{n^3} + \frac{\left|A_{5n}\right|}{n^3} \right) < \infty,$$

Из (11) имеем $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^5} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n^{(5)}\left(x\right) Y_n\left(y\right)$.

Для $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^5}$ имеем оценки:

$$\left|\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right| \le M_0 + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\left|A_{1n}\right| + \left|A_{2n}\right| + \left|A_{3n}\right| + \left|A_{4n}\right| + \left|A_{5n}\right| \right).$$

используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя получим

$$\left|\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right| \le M_0 + M \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|A_{1n}\right|^2} \sqrt{\frac{1}{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|A_{2n}\right|^2} \sqrt{\frac{1}{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|A_{3n}\right|^2} \sqrt{\frac{1}{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|A_{4n}\right|^2} \sqrt{\frac{1}{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|A_{5n}\right|^2} \sqrt{\frac{1}{n^2}} \right] \le$$

$$\le M_0 + M \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left(\left\|\varphi_1'''\left(y\right)\right\| + \left\|\varphi_2'''\left(y\right)\right\| + \left\|\varphi_3'''\left(y\right)\right\| + \left\|\varphi_4'''\left(y\right)\right\| + \left\|\varphi_5'''\left(y\right)\right\| \right) < \infty,$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_{in}'''\right| = \left\|\varphi_{in}'''\right\|_{L_2\left(0,1\right)}^2, \; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}.$

Для $u_{yy}(x,y)$ имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\pi n\right)^2 X_n(x) Y_n(y),$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^2 X_n(x) Y_n(y)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^2 \left|u(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^2 \frac{A_{in}}{n^3} =$$

$$= N\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{in}}{n} \le N\pi^2 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|A_{in}\right|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \le N\pi^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left\|\varphi_{in}'''\right\| \le \frac{N\pi^3}{\sqrt{6}} \left\|\varphi_{in}'''\right\|.$$

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 2. Если $\varphi_i(y) \in C^3[0,1]$ и $\varphi_i'(0) = \varphi_i'(1) = 0$, $\left(i = \overline{1,5}\right)$, то решение задачи A существует и представляется рядом (10).

Литература

1. Булаф, Р. Солитоны [Текст] / Р. Булаф, Ф. Кодри -М.: Мир,1983. 408 с.

2. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения [Текст] / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Морисс -М.: Мир, 1988.-694 с

3. Вахрушев, В.А. Краевая задача для уравнения пятого порядка [Текст] / В.А. Вахрушев // Труды СКГМИ (ГТУ), 2008, № 15, - С.28-31.

4. Дерендяев, Н.В. К задаче о колебаниях упругих систем с малым внутренним трением [Текст] / Н.В. Дерендяев, В.В. Новиков // В сб. «Теория колебания, прикладная математика и кибернетика». Горький, 1974. –С.29.

5. Засорин, Ю.В. Асимптотические и полугрупповые свойства решения задачи коши для одного уравнения математической физики [Текст] / Ю.В. Засорин // Вестник ВГУ, Сер. Физика. Математика. - Воронеж, 2005. -№ 1. - С. 171-173.

6. Уринов, А.К. Канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка [Текст] / А.К. Уринов, А.Т. Абдукодиров // Материалы второй Международный Российско-Узбекский Симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» -Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2012. -С. 151-154.

7. Апаков, Ю.П. О разрешимости краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в конечной области [Текст] / Ю.П. Апаков, А.Х. Жураев // Узбекский математический журнал. 2011. №2.- С. 40-47.

8. Апаков, Ю.П. Вторая краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю.П. Апаков, А.Х. Жураев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14. № 1. - С. 22-27.

9. Апаков, Ю.П. О единственности решения одной краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю.П. Апаков, О.М. Мирзаев // Материалы научной-практической конференции «Применение математики в

экономических и технических задач и проблемы обучение» 9 апрель 2021. АндМИ.-Андижан.-С.26-29

10. Апаков, Ю.П. О единственности решения первой краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю.П. Апаков, О.М. Мирзаев // Материалы научно-практической конференции «Наука и образование в современном мире: вызовы XXI века» 15 март 2022. Нурсултан. -С.42-44

11. Мирзаев, О.М. О единственности решения второй краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристками [Текст] / О.М. Мирзаев // Материалы научной-практической конференции «Теоретические основы и прикладные задачи современной математики» 28 март 2022. АГУ.-Андижан. -С.245-247

12. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский -М.: «Наука», - С.1966.-724.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.951.2

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_149

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Сопуев Адахимжан, докт. ф.-м. наук, профессор,

sopuev@mail.ru

Нуранов Бактыбек Шермаматович, ст. преподователь,

nuranov2014@mail.ru

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотоция: *Доказана существование и единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного парабало-гиперболического типа третьего порядка с переменными коэффициентами при младших членов. Особенностью данной задачи заключается в том, что смешанный параболо-гиперболический оператор применяется к обыкновенному дифференциальному оператору по переменной x. Методом понижения порядка рассматриваемая задача сводится к задаче Гурса для уравнения гиперболического типа в характеристического треугольника и к первой краевой задаче для уравнения параболического типа в прямоугольнике. Разрешимость задачи сводитс к разрешимости интегрального уравнений Фредгольма второго рода. После определения следа функции и её производной по y, решение задачи польностью определяется в рассматриваемых областей.*

Ключевые слова: *краевые задачи, существование, единственность, функции Грина, интегральные уравнение, резольвента, метод понижения.*

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ КИЧИНЕ МҮЧӨЛӨРҮ БАР АРАЛАШ ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР ЖӨНҮНДӨ

Сопуев Адахимжан, ф.-м.и. докт., профессор,

sopuev@mail.ru

Нуранов Бактыбек Шермаматович, улук окутуучу,

nuranov2014@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Үчүнчү тартиптеги өзгөрмөлүү кичине мүчөлөрү бар аралаш парабола-гиперболалык теңдеме үчүн чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы дадилденген. Бул маселенин өзгөчөлүгү болуп аралаш парабола-гиперболалык оператордун x өзгөрмөсү боюнча алынган кадимки дифференциалдык опреаторго колдонулушу болуп эсептелет. Тартибин төмөндөтүү методу менен маселени чечүү характеристикалык үч бурчтукта гиперболалык типтеги теңдеме үчүн Гурстун маселесини жана тик бурчтукта параболалык типтеги теңдеме үчүн биринчи чек аралык меселеге келтирилет. Маселенин чечилиши Фредгольмдун экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесинин чечилүүчүлүгүнө алып келинет. Изделүүчү функциянын изи жана анын y боюнча туундусу табылгандан кийин маселенин каралып жаткан областтардагы чечимдери толугу менен аныкталат.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, чечимдин жашашы, чечимдин жалгыздыгы, Гриндин функциясы, интегралдык теңдеме, тартибин төмөндөтүү методу, резольвента.*

ON BOUNDARY TASKS FOR THE EQUATION MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE OF THE THIRD ORDER WITH MINOR TERMS

Sopuev Adakhimzhan, Doctor of Physical and Matheatical sciences
sopuev@mail.ru
Nuranov Baktybek, senior teacher
nuranov2014@mail.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem for an equation of a mixed parabalo-hyperbolic type of the third order with variable coefficients at lower terms is proved. A feature of this problem is that the mixed parabolic-hyperbolic operator is applied to an ordinary differential operator with respect to the variable x. By the order reduction method, the problem under consideration is reduced to the Goursat problem for a hyperbolic type equation in a characteristic triangle and to the first boundary value problem for a parabolic type equation in a rectangle. The solvability of the problem is reduced to the solvability of the Fredholm integral equations of the second kind. After* *determining the trace of the function and its derivative with respect to y, the solution of the problem is completely determined in the areas under consideration.*

Keywords: *boundary value problems, existence, uniqueness, functions of Green, integral equation, resolvent reduction method.*

1. Постановка задачи. Пусть $D_1=\{(x,y):0<x<\ell,\,0<y<h\}$, $D_2=\{(x,y):0<x<\ell,-h_1<y<0\}$, а $D=D_1\cup D_2$. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих все производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s\,(r=0,1,...,n,\ s=0,1,...,m)$.

В области D рассмотрим уравнение

$$L_1L_2u=0, \tag{1}$$

где

$$L_1\equiv\begin{cases}L_{11}\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}+c_1(x,y),\ y>0,\\ L_{12}\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}-a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}+c_2(x,y),\ y<0,\end{cases}\qquad L_2\equiv\frac{\partial}{\partial y},$$

$a_2, b_2, c_1,\ c_2$ - заданные функции.

Отметим, что оператор L_1 представляет собой смешанный параболо-гиперболический оператор [1]. Нетрудно заметить, что прямая $y=const$ - является двукратной, а прямая $x=const$ - однократный характеристикой уравнения (1) [2].

Задача 1. Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую условиям:

1) $u(x,y)\in C\left(\overline{D}\right)\cap C^2(D)\cap C^{3+2}(D)$;

2) является решением уравнение (1) в области D;

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),u(\ell,y)=\varphi_2(y),0\le y\le h, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\varphi_3(y),\ -h_1\le y\le 0, \qquad (3)$$

$$u(x_i-h_1)=\psi(x),\ 0\le\ x\le\ell$$

(4)

где $\varphi_i(y)(i=\overline{1,3}),\ \psi(x)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C^2[0,h],\varphi_3(y)\in C^1[0,h],\psi(x)\in C^1[0,\ell], \qquad (5)$$

$$\varphi_1(0)=\varphi_3(0),\psi_1'(0)=\psi_3'(0),\varphi_1''(0)=\psi_3''(0),\varphi_3(-h_1)=\varphi(0). \qquad (6)$$

Коэффициенты уравнение (1) удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{gathered} c_1(x,y)\in C\left(\overline{D_1}\right),\ a_2(x,y),\ a_{2x}(x,y),\ b_2(x,y), \\ b_{2y}(x,y),\ c_2(x,y)\in C\left(\overline{D_2}\right). \end{gathered} \qquad (7)$$

Задача 1 при $c_1(x,y)\equiv 0,\ a_2(x,y)=b_2(x,y)=0,\ c_2(x,y)=0,$ где $c-const,$ изучена в работе [3].

Из постановки задачи 1 вытекает следующие условия склеивания

$$\begin{gathered} u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell, \\ u_{yy}(x,-0)=u_{yy}(x,+0)=\mu(x), 0\le x\le\ell, \end{gathered} \qquad (8)$$

где $\tau(x),\ \nu(x),\ \mu(x)$ — пока неизвестные функции.

Пусть

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\vartheta(x,y),\ (x,y)\in D, \qquad (9)$$

где $\vartheta(x,y)$ - новая неизвестная функция. Тогда, из уравнения (1) имеем

$$L_{11}\vartheta\equiv\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}-\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+c_1(x,y)\vartheta(x,y)\in D_1, \qquad (10)$$

$$L_{12}\vartheta\equiv\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial y}-a_2(x,y)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+b_2(x,y)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+c_2(x,y)\vartheta(x,y)\in D_2. \ (11)$$

Из условия склеивания (8) получим

$$\vartheta(x,-0)=\vartheta(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell, \qquad (12)$$

$$\vartheta_y(x,-0)=\vartheta_y(x,+0)=\mu(x),\ 0\le x\le \ell. \tag{13}$$

Тогда для определения $\vartheta(x,y)$ в области D придем к следующим задачам.

<u>Задача 2.</u> Найти в области D_2 решение уравнение (11), удовлетворяя условиям

$$\vartheta(0,y)=\varphi_3'(y),\ 0\le y\le h, \vartheta(x,-0)=\nu(x), 0\le x\le \ell, \tag{14}$$

причем

$$\varphi_3(0)=\nu(0). \tag{15}$$

<u>Задача 3.</u> Найти в области D_1 решение уравнения (10), удовлетворяю-щая условиям

$$\begin{aligned}&\vartheta(0,y)=\varphi_1'(y),\ \vartheta(\ell,y)=\varphi_2'(y),\ 0\le y\le h,\\ &\vartheta(x,0)=\nu(y),\ 0\le x\le \ell,\end{aligned} \tag{16}$$

причем

$$\nu(0)=\varphi_1'(0),\ \nu(\ell)=\varphi_2'(0). \tag{17}$$

2. Соотношения, полученные из областей D_2 и D_1. Из уравнения (11) переходя к пределу при $y\to -0,$ имеем

$$\mu'(x)+a_2(x,0)\nu'(x)+b_1(x,0)\mu(x)+c_1(x,0)\nu(x)=0. \tag{18}$$

Интеграция уравнение (18) от 0 до x и учитывая при этом условия согласования $\mu(0)=\varphi_1''(0),\ \nu(0)=\varphi_1(0)$ имеем

$$\mu(x)+\int_0^x b_2(\xi,0)\mu(\xi)d\xi+a_2(x,0)\nu(x)+a(\xi)\nu(\xi)d\xi=k, \tag{19}$$

где $a(\xi)=a_{2\xi}(\xi,0)-c_1(\xi,0),\ k=a_2(0,0)\varphi_1'(0)+\varphi_1''(0).$

Представим уравнение (19) в виде

$$\mu(x)=\int_0^x K_1(\xi)\mu(\xi)+f(x), \tag{20}$$

где

$$K_1(\xi)=-b_2(\xi,0),\ f(x)=-a_2(x,0)\nu(x)+\int_0^x a(\xi)\nu(\xi)d\xi+k.$$

Считая, что $f(x)$ - известная функция решение интегрального уравнение (20) запишем в виде [4].

$$\mu(x)=f(x)+\int_0^x R_1(x,\xi)f(\xi)d\xi, \qquad (21)$$

где

$$R_1(x,\xi)=K_1(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,\xi), \qquad K_2(x,\xi)=\int_\xi^x K_1(t)K_1(\xi)dt,$$

$$K_3(x,\xi)=\int_\xi^x K_1(t)K_2(t,\xi)dt,\ \ldots,\ K_n(x,\xi)=\int_\xi^x K_1(t)K_{n-1}(t,\xi)d\xi,\ \ldots$$

Далее, подставляя значение $f(x)$ в (21), имеем

$$\mu(x)=-a_2(x,0)\nu(x)+\int_0^x N_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi+f_1(x), \qquad (22)$$

где

$$N_1(x,\xi)=a(\xi)\left[1-R(x,\xi)+\int_\xi^x R_1(x,s)ds\right],\ f_1(x)=k\left[1+\int_0^x R_1(x,\xi)d\xi\right].$$

Устремляя $y\to+0$ из уравнения (10) имеем соотношение, полученное из области D_1:

$$\nu''(x)+c_1(x,0)\nu(x)=\mu(x),0<x<\ell. \qquad (23)$$

3. Сведение задачи к интегральному уравнению. Исключая $\mu(x)$ из (22) и (23), придем к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\nu''(x)+c(x)\nu(x)=\int_0^x N_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi+f_1(x), \qquad (24)$$

где

$$c(x)=a_2(x,0)+c_1(x,0).$$

Считая, что правая часть уравнения (24) известной и учитывая краевых условия (17) имеем

Пусть

$$v(x)=\varphi_1'(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_2'(0)-\varphi_1'(0)\right]+v_1(x), \tag{25}$$

где $v_1(x)$ - новая неизвестная функция. Тогда для определения $v_1(x)$ придем к следующей задачу:

$$v_1''(x)+c(x)v_1(x)=F_1(x), \tag{26}$$

$$v_1(0)=0,\ v_1(\ell)=0 \tag{27}$$

где

$$F_1(x)=\int_0^x N_1(x,\xi)v_1(\xi)d\xi+f_1(x),$$

$$f_2(x)=f_1(x)-c(x)\left\{\varphi_1'(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_2'(0)-\varphi_1'(0)\right]\right\}+$$

$$+\int_0^x N_1(x,\xi)\left\{\varphi_1'(0)+\frac{\xi}{\ell}\left[\varphi_2'(0)-\varphi_1'(0)\right]\right\}d\xi\ .$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$v_1''(x)+c(x)v_1(x)=0. \tag{28}$$

Теорема 1. Если

$$\forall x\in[0,\ell]:c(x)\le 0, \tag{29}$$

то задача (28), (27) имеет единственное решение.

Доказательство умножая уравнение на $v_1(x)$ и интеграция по x от 0 до ℓ, имеем

$$\int_0^\ell\left[v_1''(x)+c(x)v_1(x)\right]v_1(x)dx=\int_0^\ell\left[v_1(x)v_1''(x)\right]_x dx+\int_0^\ell\left\{-\left[v_1'(x)\right]^2+c(x)v^2{}_1(x)\right\}dx=0.$$

Отсюда, учетные условия (27) получаем

$$\int_0^\ell \left\{ \left[v_1'(x) \right]^2 + c(x) v^2{}_1(x) \right\} dx = 0. \tag{30}$$

В силу условия (29) из (30) заключаем, что

$$\forall x \in [0, \ell] : v_1(x) = 0,\ v_1'(x) \equiv 0.$$

Из последнего тождества имеем, что $v_1(x) = const.$ С учетом условия (27), заключаем, что $v_1(x) \equiv 0.$ Теорема доказана.

Исходя из теоремы 1 заключаем, что единственное решение задача (26), (27) представимо в виде

$$v_1(x) = \int_0^\ell G(x,\xi) F_1(\xi) d\xi, \tag{31}$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина [5], обладающая следующими свойствами:

1) определена и непрерывна в области при $0 \le x \le \ell, 0 \le \xi \le \ell;$

2) является решением уравнения

$$G_{xx}(x,\xi) + c(x) G(x,\xi) = 0,\ 0 < x < \xi,\ \xi < x < \ell,$$

3) $$G_x(\xi+0,\xi) - G_x(\xi-0,\xi) = 1;$$

4) удовлетворяет условиям

$$G(0,\xi) = 0,\ G(\ell,\xi) = 0.$$

Подставляя значение $F(x)$ в (31) имеем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$v_1(x) = \int_0^\ell K(x,\xi) v_1(\xi) d\xi + F_1(x), \tag{32}$$

где

$$K(x,\xi) = \int_\xi^\ell G(x,t) N_1(t,\xi) dt, \quad F(x) = \int_0^\ell G(x,\xi) f_1(\xi) d\xi.$$

Пусть $\|K\| = \max\limits_{\substack{0 \le x \le \ell \\ 0 \le \xi \le \ell}} |K(x,\xi)|.$ Имеет место следующая теореме.

Теорема 2. Если

$$\|K\| < 1, \qquad (33)$$

тогда уравнение (32) имеет единственное решение, представимое через резольвенту $R(x,\xi)$ в виде [5]:

$$v_1(x) = F_1(x) + \int_0^{\ell} R(x,\xi)F_1(\xi)d\xi.$$

Функция $v(x)$ определяется по формуле (25). После определения $v(x)$, перейдем к решению задача 2 и 3.

Задача 2 является задачей Гурса для уравнения (11). Решение этой задачи строится методом последовательных приближений [6]. Решение задачи 3 строится методом функции Грина [7].

Теперь перейдем к решению задачи 1. Интегрируя уравнение (9) от 0 до y имеем

$$u(x,y) = \tau(x) + \int_0^{y} \vartheta(x,t)dt\,. \qquad (34)$$

Учитывая условия (4) из (34) найдем $T(x)$:

$$\tau(x) = \psi(x) + \int_{-h_1}^{0} \vartheta(x,t)dt.$$

Тогда из (34) получим предствление решение задачи 1 в виде

$$u(x,y) = \psi(x) + \int_{-h_1}^{y} \vartheta(x,t)dt, (x,y) \in D.$$

Литература

1. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнение смешанно-составного типа [Текст] / Т.Д. Джураев - Ташкент: Фан, 1973. - 240 с.

2. Джураев, Т.Д. Классификация и приведение к каноническому виду уравнение с частными производными третьего порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, Я.О. Попёлок // Дифференциальное уравнение. -1991. - Т .27. - №10. - С. 1734-1745.

3. Сопуев, А. Краевые задачи для уравнение смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Б.Ш. Нуранов // Вестник Ошского государственного университета. - 2021. №2. - С. 93-101.

4. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями [Текст] / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко - М: Комкнига, 2007. – 192 с.

5. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы [Текст] / М.А Наймарк. - М.: Наука, 1969. – 528 с.

6. Соболев, С.Л. Уравнение математической физики [Текст] / С.Л. Соболев - М.: Наука, 1966. – 444 с.

7. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнение второго порядка параболического типа [Текст] / А.М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник - УМН, 1962. - Т. 17. - Вып. 3 - С. 3-141.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.95

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_159

РЕГУЛЯРДЫК ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТКЕ ЭЭ БОЛГОН КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, ф.-м.и.д., профессор
dtursunov@oshsu.kg

Бекмурза уулу Ыбадылла, аспирант

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Макала бисингулярдык козголгон эки чекиттүү чектик маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасын тургузууга арналган. Кичи параметр жогорку тартиптеги туундунун астында катышкан экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн кесиндиде эки чекиттүү Дирихленин чектик маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы тургузулат. Каралып жаткан маселенин өзгөчөлүгү тиешелүү козголбогон биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме кесиндинин сол учунда регулярдык өзгөчө чекитке ээ. Биз чектик маселелердин асимптотикалык чыгарылыштарын тургузуунун жөнөкөйлөштүрүлгөн алгоритмин сунуштайбыз, ал эки функциянын суммасынан турат жана биздин чек ара функциялар өзгөчө чекиттин чеке-белинде "чек ара катмары" касиетине ээ, б.а. чек ара катмарынын сыртында даражалуу мүнөздө жок болот.*

Ачкыч сөздөр: *ассимптотикалык чыгарылыш, Дирихленин эки чекиттүү чектик маселеси, бисингулярдык козголгон маселе, кичи параметр, регулярдык өзгөчө чекит.*

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д.ф.-м.н., профессор
dtursunov@oshsu.kg

Бекмурза уулу Ыбадылла, аспирант

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Статья посвящена построению асимптотического разложения решения бисингулярно возмущенной двух точечной краевой задачи. На отрезке строится равномерное асимптотическое разложение решения двухточечной краевой задачи Дирихле для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что соответствующая невозмущенная задача для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка имеет регулярную особую точку на левом конце отрезка. Нами предлагается более простой алгоритм построения асимптотического решения краевых задач, который состоит из двух составных функций и наши пограничные функций построенные в окрестности особой точки обладают свойством «погранслойности», т.е. степенным характером исчезают вне пограничного слоя.*

Ключевые слова: *асимптотическое решение, двухточечная краевая задача Дирихле, бисингулярно возмущенная задача, малый параметр, регулярная особая точка.*

ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PERTURBED PROBLEM WITH A REGULARLY SINGULAR POINT

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich, d. p.-m. s., professor
dtursunov@oshsu.kg

Bekmurza uulu Ybadylla, graduate student

Osh State University,

Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *A uniform asymptotic expansion of the solution of the two-point Dirichlet boundary value problem for a linear inhomogeneous ordinary differential equation of the second order with a small parameter at the highest derivative is constructed on the segment. The peculiarity of the problem under consideration is that the corresponding unperturbed problem for an ordinary differential equation of the first order has a regular singular point at the left end of the segment. We propose a simpler algorithm for constructing an asymptotic solution to boundary value problems, which consists of two composite functions, and our boundary functions constructed in the neighborhood of a singular point have the "boundary layer" property, i.e. power-law disappear outside the boundary layer.*

Keywords: *asymptotic solution, two-point Dirichlet boundary value problem, singularly perturbed problem, small parameter, regular singular point.*

Постановка задачи. Исследуем двухточечную краевую задачу

$$\varepsilon y_{\varepsilon}''(x) + xp(x)y_{\varepsilon}'(x) - q(x)y_{\varepsilon}(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \qquad (1)$$

$$y_\varepsilon(0)=a,\ \ y_\varepsilon(1)=b, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon<<1$, a, b, – заданные постоянные, $0<p$, $0<q$, $f\in C^\infty[0,1]$, $p(0)=1$, $q(0)=2$, $f'(0)\neq 0$, $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция зависящая от малого параметра ε и от независимой переменной x.

Двух точечная краевая задача (1), (2) называется задачей Дирихле. Решение краевой задачи существует, единственно и ограничена [1].

Особенностью рассматриваемой задачи является: присутствие малого параметра при старшей производной искомой функции дифференциального уравнения (1) и соответствующее невозмущенное уравнение

$$xp(x)y_0'(x)-q(x)y_0(x)=f(x), \tag{3}$$

имеет регулярную особую точку при x=0 [2].

Ранее в монографии [1] методом согласования исследовано подобная задача. В [2] методом структурного сращивания исследована задача Дирихле для уравнения (1). В этих работах асимптотическое решение состоит из четырех составных частей, и поэтому при построении асимптотического разложения решения проведено сравнительно много вычислении. А в работе [2] обобщенным методом пограничных функций исследована задача Дирихле для дифференциального уравнения (1). Однако функций $\pi_k(t),\ k=0,1,2,...$ построенные в окрестности точки x=0, ограниченны, но не обладают свойством «поранслойности», т.е. не исчезают вне пограничного слоя, которое является существенным в теории пограничного слоя. Нами предлагается более простой алгоритм построения асимптотического решения краевых задач (1)-(2), который состоит из двух составных функций и наши пограничные функции $\pi_k(t),\ k=0,1,2,...$ построенные в окрестности x=0, обладают свойством «погранслойности», т.е. степенным характером исчезают вне пограничного слоя.

Основной результат. Для начала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Дифференциальное уравнение (3) с условием

$$y_0(1)=b, \tag{4}$$

имеет единственное решение, представимое в виде

$$y_0(x)=e^{\int\limits_1^x\frac{q(\mathrm{s})}{sp(\mathrm{s})}ds}\left(b+\int\limits_1^x\frac{f(\tau)}{\tau p(\tau)}e^{-\int\limits_1^\tau\frac{q(\mathrm{s})}{sp(\mathrm{s})}ds}d\tau\right). \qquad (5)$$

Лемма доказывается прямым интегрированием дифференциального уравнения.

Следствие. Решение (5) можно представить в виде:

$$y_0(x)=c_0x^2\ln x+Q(x),\text{ где }\ Q\in C^\infty[0,1],\ c_0-\mathrm{const}.$$

Нетрудно заметить, что $y_0\in C^1[0,1]$, но $y_0\notin C^2[0,1]$.

И эта особенность при *x*=0 влияет на структуру внешних асимптотических решений задач (1), (4):

$$V_\varepsilon(x)=\ f_1x^2\ln x+\varepsilon\ln x\tilde{v}_1(x)+\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right)\tilde{v}_2(x)+\ldots+\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right)^n\tilde{v}_{n+1}(x)+\ldots,\ x\to0\,,$$

где $\tilde{v}_k\in C^\infty[0,1],\ k\in N.$

Следовательно, рассматриваемая задача является бисингулярной.

Формальное асимптотическое решение краевых задач будем искать в виде [4]-[7]:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^\infty\varepsilon^kw_k(x)+\sum_{k=0}^\infty\mu^k\pi_k(t)\,,\qquad\text{где }\ \mu=\sqrt{\varepsilon},\ x=t\mu. \qquad (6)$$

Дифференциальное уравнение (1) запишем в виде

$$\varepsilon\,y''_\varepsilon(x)+xp(x)y'_\varepsilon(x)-q(x)y_\varepsilon(x)=\ f(x)-g_\varepsilon(x)+\mathrm{g}_\varepsilon(x),\quad 0\le x\le1\,, \qquad (7)$$

где $g_\varepsilon(x)=\sum\limits_{k=1}^\infty\varepsilon^kg_k\ln x,$ пока неизвестные постоянные g_k конкретизируются ниже.

Подставляя (6) в (7) имеем:

$$lw_0\equiv xp(x)w'_0(x)-q(x)w_0(x)=\ f(x), \qquad (8)$$

$$lw_k\ =\mathrm{g}_k\ln x-w''_{k-1}(x),\quad k\in N; \qquad (9)$$

$$\sum_{k=0}^\infty\mu^k\left(\pi''_k(t)+p(\mu t)t\pi'_k(t)-q(\mu t)\pi_k(t)\right)=-g_k\ln(\mu t)\,. \qquad (10)$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$w_0(1)=b,\ w_k(1)=0,\ \ k\in N. \qquad (11)$$

$$\pi_0(0)=a-w_0(0);\ \pi_{2k-1}(0)=0;\ \ \ \pi_{2k}(0)=-w_k(0);\ \pi_{k-1}(\mu^{-1})=0,\ k\in N\ ; \qquad (12)$$

На основании леммы 1, решения краевых задач (8), (9), (11) существуют и единственны эти решения можно представить в виде:

$$w_0(x) = \alpha_0 x^2 \ln x + \tilde{w}_0(x), \text{ где } \tilde{w} \in C^\infty[0,1].$$

Вычислим $w''_0(x)$:

$$w'_0(x) = 2\alpha_0 x \ln x + \alpha_0 x + \tilde{w}'(x), \quad w''_0(x) = 2\alpha_0 \ln x + 3\alpha_0 + \tilde{w}''(x).$$

Решение задачи (9), (11) при k=1 запишем в виде:

$$w_1(x) = e^{\int_1^x \frac{q(\mathrm{s})}{sp(\mathrm{s})} ds} \int_1^x \frac{g_1 \ln \tau - w''_0(\tau)}{\tau p(\tau)} e^{-\int_1^\tau \frac{q(\mathrm{s})}{sp(\mathrm{s})} ds} d\tau .$$

Пусть $g_1 = 2\alpha_0$, тогда $w_1(x) = \alpha_1 x^2 \ln x + \tilde{w}_1(x),$ где $\tilde{w}_1 \in C^\infty[0,1].$

Аналогично, при $g_2 = 2\alpha_1$, имеем $w_2(x) = \alpha_2 x^2 \ln x + \tilde{w}_2(x),$ где $\tilde{w}_2 \in C^\infty[0,1].$

Продолжая этот процесс, мы последовательно определяем $w_k(x)$, при $g_k(x) = \alpha_{k-1}$: $w_k(x) = \alpha_k x^2 \ln x + \tilde{w}_k(x),$ где $\tilde{w}_k \in C^\infty[0,1].$

Таким образом, нами определены все функций $w_k(x)$ и $g_k(x)$. Так как

$$g_\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k \right) \ln x \Rightarrow g_\mu(\mu t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k \right) \ln(\mu\,\mathrm{t}) .$$

Дифференциальное уравнение (10) запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(\pi''_k(t) + t\pi'_k(t) - 2\pi_k(t) + \mu t^2 \tilde{p}(\mu t)\pi'_k(t) - \mu t\tilde{q}(\mu t)\pi_k(t) \right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu^{2k} g_k \ln(\mu t) ,$$

где $p(x) = p(0) + x\tilde{p}(x),\ q(x) = q(0) + x\tilde{q}(x),\ \tilde{p},\ \tilde{q} \in C^\infty[0,1]$.

Отсюда, записываем следующие дифференциальные уравнения

$$L\pi_0 \equiv \pi''_0(t) + t\pi'_0(t) - 2\pi_0(t) = 0; \tag{13}$$

$$L\pi_{2k+1} = \Phi_{2k}(\mu t, t),\ k=0,1,2,\ldots; \tag{14}$$

$$\mathrm{L}\,\pi_{2k} = \Phi_{2k-1}(\mu t, t) - g_k \ln(\mu t),\ k=0,1,2,\ldots; \tag{15}$$

где $\Phi_k(\mu t, t) = t\tilde{q}(\mu t)\pi_k(t) - t^2 \tilde{p}(\mu t)\pi'_k(t)$.

Справедлива лемма.

Лемма 2. Краевая задача

$$Lz = r(t), \quad 0 < t < \mu^{-1}, \tag{16}$$

$$z(0) = z^0, \ z(\mu^{-1}) = 0, \tag{17}$$

имеет единственное решение, представимое в виде:

$$z(t) = \frac{z_2(t)}{c}\int_0^t e^{t^2/2} z_1(s)r(s)ds + \frac{z_1(t)}{c}\int_t^{\mu^{-1}} e^{t^2/2} z_2(s)r(s)ds + z_2(t)\left(z^0 - \frac{1}{c}\int_0^{\mu^{-1}} e^{t^2/2} z_2(s)r(s)ds \right).$$

где $r \in C[0,\mu^{-1}]$, $z_1(t)$ и $z_2(t)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения $Lz=0$: $z_1(t)=t^2+1$ и $z_2(t) = -(t^2+1)c\int_t^{\mu^{-1}} \frac{1}{(s^2+1)^2} e^{-s^{2/2}} ds$,

$$c = -\left(\int_0^{\mu^{-1}} \frac{1}{(s^2+1)^2} e^{-s^2/2} ds \right)^{-1}, \ \ \mu \to 0\text{: c} \to -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Функция $z_2(t)$ обладает свойствам:

a) $z_2(0)=1$; *b*) $z_2(t) \sim t^{-3} e^{-t^2/2},\ t \to \infty, \mu \to 0$; *c*) $z_2 \in C^\infty[0,\mu^{-1}]$;

d) функция $z_2(t)$ монотонно убывает при $t \in [0,\mu^{-1}]$, $\left(z'_2(t) < 0\right)$.

Доказательство леммы 2 не представляет трудности. С помощью функций $z_1(t)$, $z_2(t)$ и вронскиана $W(z_1,z_2) = ce^{-t^2/2}$ можно построить общее решение дифференциального уравнения (16):

$$z(t) = z_2(t)\int \frac{z_1(t)r(t)}{W}dt - z_1(t)\int \frac{z_2(t)r(t)}{W}dt + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t),$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные интегрирования.

Затем, c_1 и c_2 подберем так чтобы выполнялись краевые условия (17).

Заметим, что однородная краевая задача

$$L\pi_0 \equiv \pi''_0(t) + t\pi'_0(t) - 2\pi_0(t) = 0, \ \ 0 < t < 1/\mu, \ \pi'_0(0) = 0, \ \pi'_0(\mu^{-1}) = 0$$

имеет единственное тривиальное решение $\pi_0(t) \equiv 0$.

С помощью этой леммы 2 доказывается существование и единственность решения уравнений (13)-(15) с краевыми условиями (12).

Перейдем к оценке остаточного члена. Пусть

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k w_k(x) + \sum_{k=0}^{2n+1} \mu^k \pi_k(t) + R_{n+1,\varepsilon}(x), \tag{18}$$

где $R_{n+1,\varepsilon}(x)$ остаточный член формального асимптотического разложения.

Подставляя (18) в (1)-(2) имеем:

$$\varepsilon R''_{n+1,\varepsilon}(x)+xp(x)R'_{n+1,\varepsilon}(x)-q(x)R_{n+1,\varepsilon}(x)=G(x,t,\varepsilon),\quad 0\le x\le 1 \tag{19}$$

$$R_{n+1,\varepsilon}(0)=0,\quad R_{n+1,\varepsilon}(1)=0, \tag{20}$$

где $G(x,t,\varepsilon)=\mu^{2n+2}\left(t\tilde{q}(\mu t)\pi_{2n+1}(t)-t^2\tilde{p}(\mu t)\pi'_{2n+1}(t)\right)-\varepsilon^{n+1}w''_n(x)$.

Учитывая свойств функций $\tilde{q}(\mu t),\ \pi_{2n+1}(t),\ \tilde{p}(\mu t),\ \pi'_{2n+1}(t), w''_n(x)$ получаем асимптотические оценки:

$$G(x,t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{n+1}\right),\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1/\sqrt{\varepsilon},$$

$$R_{n+1,\varepsilon}(0)-h_1R'_{n+1,\varepsilon}(0)=O(\varepsilon^{n+1/2}),\ \ \varepsilon\to 0.$$

Для задачи (19), (20) применяя теорему [1, с. 116], получаем оценку для $R_{n+1,\varepsilon}(x)$: $R_{n+1,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^{n+1/2}),\quad \varepsilon\to 0,\ \ 0\le x\le 1.$

Нами доказана теорема

Теорема. Для решения задачи (1)-(2) на отрезке $0\le x\le 1$ справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k w_k(x)+\sum_{k=0}^{2n+1}\sqrt{\varepsilon}^k\pi_k(x\mu^{-1})+O\left(\varepsilon^{n+1/2}\right),\ \ \varepsilon\to 0\,.$$

Литература

1. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе [Текст] / А.М. Ильин, А.Р. Данилин М.- ФИЗМАТЛИТ, 2009. 248 с.

2. Алымкулов, К. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / К. Алымкулов, Т.Д. Асылбеков, С.Ф. Долбеева // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 4. С. 484-487.

3. Алымкулов, К. Равномерное приближение решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка в случае, когда невозмущенное уравнение имеет регулярную особую точку [Текст] / К. Алымкулов, А.З. Зулпукаров // Исслед. по инт.-дифф.уравнениям. –Бишкек: Илим. 2004. Вып. 33. С.118-123.

4. Tursunov, D. A. Asymptotic Solution of the Robin Problem with a Regularly Singular Point [Текст] / D. A. Tursunov, Bekmurza uulu Ybadylla // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 613–620.

5. Турсунов, Д.А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем [Текст] / Д.А. Турсунов // Изв. вузов. Математика. 2018. № 3. С. 70–78. DOI: 10.3103/S1066369X18030088.

6. Турсунов, Д.А. Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена [Текст] / Д.А. Турсунов // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 10–21. DOI 10.17377/semi.2017.14.002

7. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота [Текст] / Д.А. Турсунов // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 271–281.

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.983

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_167

ВОЛЬТЕРРАНЫН БИРИНЧИ ТИПТЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНА МИСАЛДАР

Чоюбеков Сапарбек Мийзамбекович, *Ага окутуучу*
choybekov.25.04.70@gmail.com
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызсиан

Аннотация: *Интегралдык теңдемелер математиканын негизги бөлүмүнө - анын ичинде физика, техника жана башка көптөгөн илимдерге ар тараптуу колдонулган бөлүмгө кирет. Бул жагынан алганда, акыркы жылдары көптөгөн изилдөөчүлөрдүн аракеттери менен интегралдык теңдемелердин теориясы дүркүрөп өсүүдө. Заманбап компьютердик технологиялардын өнүгүүсү менен сандык чечимдерди реализациялоо жана татаал процесстерди моделдештирүү мүмкүнчүлүгү түзүлдү. Мындай типтеги көптөгөн маселелер интегралдык теңдемелерге келтирилет. Биринчи планга интегралдык теңдемелер чечимдерин сапаттуу изилдөө коюлат. Бирок, пределы боюнча интегралдануучу эки өзгөрүлмөлүү классикалык эмес теңдемелер өтө аз изилденген. Бул анын резольвентасын тургузуунун татаалдыгы менен, ошондой эле кайсы бир моделдик учурларын эске албаганда жалпы типтеги аналитакалык көрүнүшү жазылбаганы менен түшүндүрүлөт. Ошондуктан чечимди ушундай изилдөөлөр актуалдуу деп эсептелинет.*

Ачкыч сөздөр: *интегралдык тендемелер, өсүүчү, үзгүлтүксүз, шарт, өзгөрүлмөлөр, жакындаштырылган чечим, мейкиндик, усул, классикалык эмес.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Чоюбеков Сапарбек Мийзамбекович, старший преподаватель
choybekov.25.04.70@gmail.com
Ошского государственного университета
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Интегральные уравнения относятся к разделу математики, важным для приложений– к ним приводится большое число задач самых разных разделов физики, техники и многих наук. В связи с этим в последние годы теория интегральных уравнений бурно развивается благодаря трудам многих исследователей. С развитием современных компьютерных технологий появляется возможность моделировать самые сложные процессы и реализации численных решений. Многие задачи такого рода сводятся к интегральным уравнениям. На первый план выдвигается качественное исследование решений этих задач. Однако, уравнения с двумя переменными пределами интегрирования, которые называют неклассическими мало изучены. Это объясняется трудностями в построении резольвенты и в составлении соотношения для нее, так как еще не получено аналитическое представление в общем виде за исключением некоторых модельных случаев. Поэтому такого исследования решений являются актуальными.*

Ключевые слова: *интегральное уравнения, возрастающая, непрерывные, условия, переменные, приближенные решения, пространство, метод, неклассические.*

EXAMPLES OF SOLUTION OF THE FIRST KIND VOLTERRA INTEGRAL EQUATION

Choyubekov Saparbek, Senior Lecturer
choybekov.25.04.70@gmail.com
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *Integral equations belong to the branch of mathematics, which is important for applications — a large number of problems of various branches of physics, engineering, and many sciences are given to them. In this regard, in recent years, the theory of integral equations has been developing rapidly thanks to the work of many researchers. With the development of modern computer technologies, it becomes possible to model the most complex processes and implement numerical solutions. And many problems of this kind are reduced to integral equations. The qualitative research of solutions to these problems is put at the forefront. However, equations with two variable limits of integration, which are called non-classical, have been little studied. This is due to the difficulties in constructing the resolvent and in constructing a relation for it, because The analytical representation in general form has not yet been obtained except for some model cases. Therefore, studies of approximate solutions are relevant.*

Keywords: *integral equation, increasing, continuous, conditions, variables, approximate solutions, space, method, nonclassical.*

Киришүү

Интегралдык теңдемелердин теоретикалык бөлүктөрү түрдүү иштерде изилденген. Тактап айтканда, [1] жумушта Вольтерранын экинчи типтеги интегралдык теңдемелерин изилдөө натыйжаларын каралган. [2, 3] жумуштарда, Вольтерранын биринчи типтеги интегралдык теңдемесине ар кандай колдонмо маселелерде колдонулушу келтирилген. [4, 5] жумуштарда Вольтерранын биринчи жана үчүнчү типтеги сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин чечмиминин жалгыздыгы жана чечимдер системасынын регуляризациясы жөнүндө иликтенген. [6] жумушта, Вольтерранын биринчи типтеги интегралдык теңдемеси боюнча натыйжалар келтирилген.

[7, 8] жумуштарда Липшицтин шарттары менен классикалык эмес интегралдык теңдемени чечүү үчүн регуляризациясы оператору тургузулган жана чечимдин жалгыздыгы далилденген. [9] жумушта, Вольтерранын биринчи типтеги сызыктуу классикалык эмес интегралдык тендемелердин чыгарылышы жөнүндө айтылган. [10] жумушта, Вольтерранын биринчи типтеги баштапкы шарты менен берилген сызыктуу классикалык эмес интегралдык тендемесинин чечимин регуляризациялоо далилденген. [11, 12] жумушта биринчи типтеги классикалык эмес интегралдык теңдемени үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде чечүү жөнүндө далилденген.

Бул жумушта Вольтерранын биринчи типтеги классикалык эмес интегралдык теңдемесинин чыгарылышына мисалдар каралат.

Маселенин коюлушу: Төмөнкү интегралдык теңдемени карайлы:

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t); \quad t \in [t_0,T] \tag{1}$$

мында $\alpha(t)$, $K(t,s)$ жана $f(t)-$ берилген функциялар, мында $\alpha(t) \in C^1[t_0,T]$, $\alpha(t) = \beta < t_0$, $f(t) \in C^1[t_0,T]$, $\alpha(t) \le t$ бардык $t \in [t_0,T]$ үчүн, $K(t,s)$ жана $K_t^{'}(t,s)-$ $G = \{(t,s): \ \alpha(t) \le s \le t \le T\}$ аймагында үзгүлтүксүз функциялар, $\alpha(t)-$ $[t_0,T]$ кесиндисинде өсүүчү функция, ал эми $u(t)-$ $[t_0,T]$ кесиндисинде изделүүчү функция.

Маселенин чечилиши:

Төмөнкү шарттар орун алсын дейли:

a) $K(t,s)$ жана $K'_t(t,s)-$ $G=\{(t,s):\ \alpha(t)\le s\le t\le T\}$, аймагында үзгүлтүксүз функциялар, $K(t,t)\ne 0$ $\mathrm{K(t,t)} \neq 0$ бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн.

b) $\alpha(t)$, $\alpha'(t)$, $f(t)$, $f'(t)\in[t_0,T]$, $\alpha(t_0)=\beta<t_0$, $\alpha(T)=t_0$, $\alpha(t)\le t$, бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн, мында $\alpha(t)-$ $[t_0,T]$ кесиндисинде өсүүчү функция.

$$u(t)=\varphi(t),\ t\in[\beta,t_0] \tag{2}$$

болсун дейли, мында $\varphi(t)-$ $[\beta,t_0]$ кесиндисинде белгилүү функция.

$t\in[t_0,T]$ болсун. Анда (1) интегралдык теңдемени дифференцирлеп,

$$K(t,t)u(t)-K(t,\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{t}K'_t(t,s)u(s)ds=f'(t),\ t\in[t_0,T]$$

теңдемесине ээ болобуз. Мындан төмөнкүнү алабыз:

$$u(t)=\frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)}u(\alpha(t))\alpha'(t)-\int_{\alpha(t)}^{t}\frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}u(s)ds+\frac{f'(t)}{K(t,t)},\ t\in[t_0,T] \tag{3}$$

a), b) шартарды жана (2) функцияны эске алып, (3) интегралдык теңдемени

$$u(t)=-\int_{t_0}^{t}\frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}u(s)ds+P(t),\ t\in[t_0,T] \tag{4}$$

көрүнүшүндө жазабыз, мында

$$P(t)=\frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)}\varphi(\alpha(t))\alpha'(t)-\int_{\alpha(t)}^{t_0}\frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}\varphi(s)ds+\frac{f'(t)}{K(t,t)},\ t\in[t_0,T] \tag{5}$$

$t=t_0$ эсептеп жана (2), (5) функцияларды эске алып, (1) теңдемеден жана (4) функциядан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0}K(t_0,s)u(s)ds=f(t_0); \tag{6}$$

$$\varphi(t_0)=\frac{K(t_0,\alpha(t_0))}{K(t_0,t_0)}u(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)-\int\limits_{\beta}^{t_0}\frac{K'_t(t_0,s)}{K(t_0,t_0)}\varphi(s)ds+\frac{f'(t_0)}{K(t_0,t_0)} \qquad (7)$$

Теорема. а), b), (6) жана (7) шарттары орун алсын дейли. Анда, (2) шарты менен (1) интегралдык теңдеме (4) көрүнүштөгү экинчи типтеги интегралдык теңдемеге эквиваленттүү, мында $P(t)-$ (5) формула менен аныкталган.

Далилдөө: Айталы, $u(t)\in C[\beta,T]$ функциясы (1) теңдеменин (2) шарты канааттандырган чечими болсун. Анда (2) шарт жана (3), (5) катыштардын негизинде $u(t)\in C[t_0,T]$ функциясы (4) интегралдык теңдеменин чечими болот.

Тескерисинче, $u(t)\in C[t_0,T]$ функциясы (4) интегралдык теңдемесинин чечими болсун дейли, мында $P(t)-$ (5) формула менен аныкталган. $v(t)-$ функциясын төмөнкү формула боюнча аныктайбыз:

$$v(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \beta\le t\le t_0,\\ u(t), & t_0\le t\le T.\end{cases} \qquad (8)$$

Анда (5) функциянын, (7) жана (2) шарттарынын негизинде (4) интегралдык теңдемеден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$K(t,t)u(t)-K(t,\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t)+\int\limits_{\alpha(t)}^{t}K'_t(t,s)v(s)ds=f'(t), \quad t\in[t_0,T]$$

мындан

$$\left(\int\limits_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)v(s)ds\right)'_t=f'(t); \quad t\in[t_0,T] \qquad (9)$$

(9) туундуну t_0 дөн t га чейин интегралдап жана (6) шарты эске алуу менен

$$\int\limits_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)v(s)ds=f(t); \quad t\in[t_0,T]$$

ээ болобуз. Б.а. (8) формула менен аныкталган функция (1) теңдеменин (2) шартты канааттандырган чечими болот. **Теорема далилденди.**

Натыйжа: Теореманын шарттары орун алсын дейли. Анда (2) шарт канаатандырган (1) интегралдык теңдеме $C\in[\beta,T]$ мейкиндигинде жалгыз чечимге ээ болот.

1-мисал.

$$u(t)=t\text{,}\quad t\in[-2;0] \tag{10}$$

шарты менен берилген

$$\int_{t-2}^{t}[1+(t-s)]u(s)ds=t^2+4t-\frac{28}{3}\text{;}\quad t\in[0;1] \tag{11}$$

интегралдык теңдемени карайлы. Мында $\alpha(t)=t-2$, $t_0=0$, $\beta=-2$, $t_1=1$, $K(t,s)=1+(t-s)$, $\alpha'(t)=1$, $f(t)=t^2+4t-\dfrac{28}{3}$. Дагы $t\in[-2;0]$ болгондо $u(t)=t.$ $\varphi(t)=t$, $t\in[-2;0]$ болсун дейли. Бул учурда $K(t,t)=2$, $K(t,\alpha(t))=3$, $K_t'(t,s)=1$, $(t,s)=G=\{(t,s):t-2\le s\le t\le 1\}$.

(6) жана (7) шарттарын текшерели:

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0}K(t_0,s)u(s)ds=f(t_0)\text{;} \tag{6}$$

$$\int_{-2}^{0}(1-s)sds=\int_{-2}^{0}(s-s^2)ds=\left(\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{3}s^3\right)_{-2}^{0}=-\frac{28}{3}$$

$$\varphi(t_0)=\frac{K(t_0,\alpha(t_0))}{K(t_0,t_0)}u(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)-\int_{\beta}^{t_0}\frac{K_t'(t_0,s)}{K(t_0,t_0)}\varphi(s)ds+\frac{f'(t_0)}{K(t_0,t_0)} \tag{7}$$

$$\varphi(0)=P(0)=\frac{3}{1}\cdot(-2)\cdot 1-\int_{-2}^{0}\frac{1}{1}sds+\frac{4}{1}=-6-\frac{1}{2}s^2\Big|_{-2}^{0}+4=-2+2=0\text{.}$$

Анда теорема боюнча (10) шарт менен берилген (11) интегралдык теңдеме төмөнкү интегралдык теңдемеге эквиваленттүү болот:

$$u(t) = -\int_{0}^{t} u(s)ds + P(t)\text{,}\quad t \in [0;1] \qquad (12)$$

мында

$$P(t) = \frac{3}{1}\cdot(t-2)\cdot 1 - \int_{t-2}^{0} sds + 2t + 4 = 3t - 6 + 2t + 4 - \frac{1}{2}s^{2}\Big|_{t-2}^{0} =$$

$$= t - 2 + \frac{1}{2}(t-2)^{2} = t - 2 + \frac{1}{2}t^{2} - 2t + 2 = \frac{1}{2}t^{2} - t\,;$$

$$P(t) = \frac{1}{2}t^{2} - t\,;\quad t \in [0;1] \qquad (13)$$

Анда (12) интегралдык теңдеменин чечимин төмөнкүчө табабыз:

$$u(t) = P(t) - \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)} P(s)ds$$

$$u(t) = \frac{1}{2}t^{2} - t - \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)}(\frac{1}{2}s^{2} - s)ds = \begin{vmatrix} u = \frac{1}{2}s^{2} - s & dv = \mathrm{e}^{-(t-s)}ds \\ du = (s-1)ds & v = \mathrm{e}^{-(t-s)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}t^{2} - t - \mathrm{e}^{-(t-s)}\left(\frac{1}{2}s^{2} - s\right)\Big|_{0}^{t} + \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)}(s-1)ds = \begin{vmatrix} u = s-1 \\ du = ds \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}t^{2} - t - \left(\frac{1}{2}t^{2} - t\right) + \mathrm{e}^{-(t-s)}(s-1)\Big|_{0}^{t} - \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)}ds = t - 1 + \mathrm{e}^{-t} - 1 + \mathrm{e}^{-t} = t - 2 + 2\mathrm{e}^{-t}$$

Ошентип, берилген интегралдык теңдеменин жообу:

$$u(t) = t - 2 + 2\mathrm{e}^{-t} \qquad (14)$$

2-мисал. Төмөнкү интегралдык теңдемени карайлы:

$$\int_{t-1}^{t} e^{t-s}u(s)ds = e^{t}\,;\quad t \in [0;1] \qquad (15)$$

$$u(t) = e^{t}\text{,}\quad t \in [-1;0] \qquad (16)$$

шарты менен берилген. Мында $\alpha(t) = t - 1$, $t_0 = 0$, $\beta = -1$, $t_1 = 1$, $K(t,s) = e^{t-s}$, $\alpha'(t) = 1$, $f(t) = e^{t}$. Андан сырткары $t \in [-1;0]$ болгондо

$u(t)=e^t$. $\varphi(t)=e^t$, $t\in[-1;0]$ болсун дейли. Бул учурда $K(t,\alpha(t))=e$, $K'_t(t,s)=e^{t-s}$, $K(t,t)=1$, $(t,s)=G=\{(t,s):t-1\le s\le t\le 1\}$ үчүн.

(6), (7) шарттарды текшерели:

$$\int_{-1}^{0} e^{-s}e^{s}ds=\int_{-1}^{0} ds=1 \qquad (6^{*})$$

$$\varphi(0)=P(0)=ee^{-1}-\int_{-1}^{0} e^{-s}e^{s}ds+1=1-\int_{-1}^{0} ds+1=2-1=1. \qquad (7^{*})$$

Теорема боюнча (16) шарт менен берилген (15) интегралдык теңдеме төмөнкү интегралдык теңдемеге эквиваленттүү болот:

$$u(t)=P(t)-\int_{0}^{t} e^{t-s}u(s)ds,\ t\in[0;1] \qquad (17)$$

мында

$$P(t)=ee^{t-1}-\int_{t-1}^{0} e^{t-s}e^{s}ds+e^{t}=e^{t}-e^{t}\int_{t-1}^{0} ds+e^{t}=2e^{t}-e^{t}s\Big|_{t-1}^{0}=2e^{t}+e^{t}(t-1)=$$

$$=2e^{t}+e^{t}t-e^{t}=e^{t}+e^{t}t=e^{t}(t+1)$$

$$P(t)=e^{t}(t+1);\ t\in[0;1] \qquad (18)$$

Анда (16) интегралдык теңдеменин чечими төмөнкүчө жазылат:

$$R(t,s)=-e^{(t-s)}e^{-(t-s)}=-1$$

$$u(t)=e^{t}(t+1)-\int_{0}^{t} \mathrm{e}^{s}(s+1)ds=\begin{vmatrix} u=s+1 & dv=\mathrm{e}^{s}ds \\ du=ds & v=\mathrm{e}^{s} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{t}(t+1)-\mathrm{e}^{s}(s+1)\Big|_{0}^{t}+\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{s}ds=e^{t}(t+1)-e^{t}(t+1)+1+\mathrm{e}^{s}\Big|_{0}^{t}=1+e^{t}-1=e^{t}$$

Б.а. (16) шартты канааттандырган (15) интегралдык теңдеменин чечими

$$u(t)=e^{t} \qquad (19)$$

болот.

Корутунду: Вольтерранын биринчи түрдөгү (1) классикалык эмес интегралдык теңдемеси чечилди. Теорема 1 айтылып, далилденди. Бир нече мисалдар келтирилип толук чыгарылды.

Адабияттар

1. Цалюк, З.Б. Интегральное уравнения Вольтерра [Текст] / З.Б. Цалюк // Итоги науки и техники, Мат. анализ, 15, 131-198 (1977)
2. Апарцин, А.С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода: Теория и численные методы [Текст] / А.С. Апарцин // Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1999.-193 стр;
3. Апарцин, А.С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода: Теория и численные методы [Текст] / А.С. Апарцин // Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1999.-193 стр;
4. Апарцин, А.С. Применения интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики [Текст] / А.С. Апарцин, И.В. Караулова, Е.В. Маркова, В.В Труфанов // Электричество, 2005, -№ 10- Стр. 69-75;
5. Иманалиев, М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов, // доклады АН СССР, 309, №5, 1053-1056, (1975)
6. Иманалиев, М.И. Регуляризация и единственность решений для интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов, // доклады РАН, 415, №1, 14-17, (2007)
7. Lamm, R.K. survey of regularization methods for the first kind Volterra equations, Surveys on Solution Methods for Inverse Problems [Текст] / R.K. Lamm // Springer, Vienna (2000), p. 53-82
8. Асанов, А. Регуляризация и единственность решения неклассического интегрального уравнения со условиями Липшица [Текст] / Асанов А., Бекешов Т.О., С.М. Чоюбеков // Вестник спецвыпуск КНУ имени Ж. Баласагына. - Бишкек, 2011. Стр 108-112
9. Чоюбеков, С.М. Регуляризация решения неклассического интегрального уравнения с условиями Липшица [Текст] / С.М. Чоюбеков // Международный научный журнал «Молодой ученый» № 8 (112) Россия, г. Казань 2016; стр. 34-38.
10. Асанов, А. Регуляризация решение неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / Асанов А., С.М. Чоюбеков // ННТиИК, № 1, 2021, 3 DOI:10.26104/NNTIK.2019.4/г.Бишкек стр 3-9

11. Чоюбеков, С.М. О решении линейных неклассических интегральных уравнений вольтерра первого рода [Текст] / С.М. Чоюбеков, Асанов А., Бекешов Т.О. // ННТиИК, № 1, 2020 3 DOI:10.26104/NNTIK.2019.4/г.Бишкек стр. 3-9

12. Асанов, А. О решение неклассического интегрального уравнения I рода в пространстве не прерывных функции [Текст] / Асанов А., Бекешов Т.О., С.М. Чоюбеков // Вестник ОшГУ, №3. - Ош, 2012, с. 48-54

13. Чоюбеков, С.М. Об одном классе неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода [Текст] / С.М. Чоюбеков, Асанов А., Бекешов Т.О., // Вестник ОшГУ, №3. - Ош, 2014, с. 83-88

Математика, физика, техника. 2022, №1

ФИЗИКА

УДК 532.5:536.2

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_177

КВАДРАТТЫК ТУРБУЛЕНТТҮҮ КОНВЕКЦИЯНЫ МОДЕЛДЕШТИРҮҮ

Калбекова Махбурат Жамшитбековна, окутуучу

mkalbekova@list.ru

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Берилген жумушта эки өлчөмдүү коюлуштагы көлөмдүк-ысытылган суюктуктагы турбуленттик конвекциянын сандык анализи жүргүзүлгөн. Навье-Стокстун теңдемелер системасын Буссинестин жакындоосу менен чечүүнүн сандык методу сунушталды. Математикалык моделдештирүү Пранталдын Pr=0.6 санында Open FOAM ачык пакетинин жардамында Рэлейдин санынын* 10^6 *дан* 10^{11} *ге чейинки диапазонунда квадраттык дубалдары бар изотермалык кавернада жүргүзүлгөн. Бул жумушта каралган маселени чечүү процедурасы катарында Open FOAM программасындагы контролдук көлөм методун жана PIMPLE алгоритми колдонулду. Open FOAM пакетине имплементтештирилген турбуленттүүлүктүн моделдеринен үч модель каралды, алар: классикалык k-ε модель, анын Рейнольдстун төмөнкү сандары үчүн вариациясы жана турбуленттүүлүктүн k-ω-SST – модели. Турбуленттүүлүктүн үч моделин колдонуу менен эсептөөлөрдүн жыйынтыктары тиешелүү эксперименталдык берилиштер менен салыштырылды. Салыштыруу турбуленттүүлүктүн k-ω-SST модели Рейнольдстун жана Рэлейдин каралган сандарында берилген маселелер классын керектүү тактыкта сүрөттөйт. Турбуленттүүлүктүн бардык каралган моделдери тигил же бул деңгээлде агымдын стационардык эмес мүнөзүн түшүндүрөт.*

Ачкыч сөздөр: *Рейнольдс саны, турбуленттүү модель, табигый конвекция, OpenFOAM, Рэлей саны.*

МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАДРАТНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ

Калбекова Махбурат Жамшитбековна, преподаватель
mkalbekova@list.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной работе проведен количественный анализ турбулентной конвекции в двумерной объемно-нагретой жидкости. Предложен численный метод решения системы уравнений Навье-Стокса в приближении Бюссина. Математическое моделирование проводилось в изотермической каверне с квадратными стенками в диапазоне чисел Рэлея от 106 до 1011 с использованием открытого пакета Open FOAM в Prantal Pr = 0,6. Метод контрольного объема в программе Open FOAM и алгоритм PIMPLE использовались в качестве процедуры решения задачи в данной работе. Рассмотрены три модели турбулентности, реализованные в пакете Open FOAM: классическая k-ε модель, ее вариация для меньших чисел Рейнольдса и k-ω-SST модель турбулентности. Результаты расчетов сравнивались с соответствующими экспериментальными данными по трем моделям турбулентности. k-ω-SST модель сравнительной турбулентности с требуемой точностью описывает класс задач, представленных в рассматриваемых числах Рейнольдса и Рэлея. Все рассмотренные модели турбулентности в той или иной степени объясняют нестационарный характер течения.*

Ключевые слова: *число Рейнольдса, турбулентная модель, естественная конвекция, OpenFOAM, число Рэлея.*

MODELING SQUARE TURBULENT CONVECTION

Kalbekova Makhburat Zhamshitbekovna, Lecturer,
mkalbekova@list.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan,

Abstract: *In this work, a quantitative analysis of turbulent convection in a two-dimensional volume-heated liquid was performed. A numerical method for solving the Navier-Stokes system of equations with Bussines approximation was proposed. Mathematical modeling was performed in an isothermal cavern with square walls in the range of* 10^6 *to* 10^{11} *Rayleigh numbers using the Open FOAM open package in Prantal Pr = 0.6. The control volume method in the Open FOAM program and the PIMPLE algorithm were used as a problem-solving procedure in this paper. Three models of turbulence implemented in the Open FOAM package were considered: the classical k-ε model, its variation for the lower Reynolds numbers, and the k-ω-SST model of turbulence. The results of the calculations were* *compared with the relevant experimental data using three models of turbulence. The k-ω-SST model of comparative turbulence describes the class of problems presented in the considered numbers of Reynolds and Rayleigh with the required accuracy. All considered models of turbulence explain to some extent the non-stationary nature of the flow.*

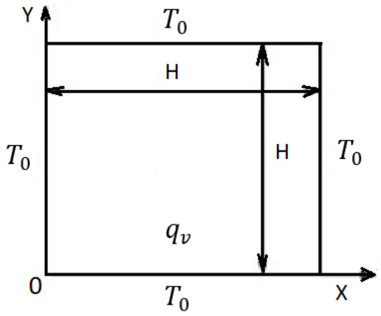
Keywords: *Reynolds number, turbulent model, natural convection, OpenFOAM, Relay number.*

Киришүү. Азыркы мезгилдерде табигый конвекцияны моделдештирүү проблемасына көп көңүл бөлүнүүдө [1-6], бул ар кандай техникалык системалардын жана түзүлүштөрдүн энергетикалык эффективдүүлүгүн жакшыртуу зарылчылыгы менен байланыштуу. Табигый конвекция процессин башкаруу жолу менен көптөгөн технологиялык процесстердин эффективдүүлүгүн маңыздуу түрдө жакшыртууга болот. Көп сандаган эсептик жана эксперименталдык иштердин, математикалык моделин колдонуунун ар кандай методдору жана аны сандык реализациялоонун ар кандай ыкмалары болгондугуна карабастан, суюктуктун ар кандай агымдарындагы жылуулукту конвективдик өткөрүүнүн практикалык колдонуунун потенциалы идеалдуулуктан алыс. Бул жумуштарда табигый конвекциянын тигил же бул закон ченемдүүлүктөрүн жетишээрлик жөнөкөй моделдерди колдонуу каралган жана энергиянын локалдык булагы бар учурдагы жылуулук өткөрүмдүүлүктүн өзгөчөлүктөрү эске алынбаган. Мындай катуу божомолдоодо да табигый конвективдик агымды моделдештирүү татаал болуп эсептелет. Рэлейдин санынын чоң маанилеринде (10^{17} чейин) турбуленттүүлүктүн моделдештирүүдө бир катар факторлордон көз каранды болгон проблемалар келип чыгат. Баарынан мурда, мындай агымдар өздөрүнүн өзгөчөлүгү боюнча туруксуз болушат. Экинчи кыйынчылык – дубалга жакын аймактардын негизги чоңдуктарынын чоң градиенттерин эсепке алуу. Акырында, турбуленттик кинетикалык энергиянын генерациясын агуучулук эффектисинен улам туура моделдештирүү зарыл.

Жумуштун максаты. Open FOAMга [7] имплементирлештирилген, классикалык k-ε - моделди, Рейнолдстун төмөнкү сандары үчүн аны вариациялоо, Лоундер – Шармдын Re – моделин жана k-ω-SST турбуленттүүлүктүн моделин табигый конвективдик агымды квадраттык кавернде сүрөттөө үчүн мүмкүнчүлүктөрдү баалоо.

Моделдештирүүнүн жыйынтыгын тиешелүү экспрементелдык берилиштери менен салыштыруу, турбулентүүлүктүн үч моделин колдонуудагы башка авторлордун моделдештирүүсү менен салыштыруу турбулентүүлүктүн k-ω-SST модели маселелердин берилген классын Рэйнольдстун жана Рэлейдин каралган сандарын керектүү тактыкта сүрөттөйт жана эксперимент менен дээрлик дал келет. Турбулентүүлүктүн бардык каралган моделдери керектүү тактыкта агымдын стационардык эмес мүнөзүн берет.

Маселенин коюулушу. Температурасы $T_0 = 273\,K$ 1-сүрөттө изотермалык, дубалдары квадраттык кавернадагы көлөмдүк ысытылган кысылбоочу суюктуктагы табигый конвективдик агым берилген. Суюктук үчүн Прондтлдын саны *Pr=0.6га барабар болду, ал эми Рэлейдин тиешелүү саны* 10^6 нан 10^{11} не чейин болду.



1-сүрөт. Каралуучу маселенин геометриясы

Математикалык модель. Ички жылуулуктун көлөмдүү булагына ээ болгон кысылбоочу суюктук үчүн массанын, импульстун жана энергиянын сакталуу закондорун камтыган Рейнольдс боюнча орточолоштурулган Навье-Стокстун теңдемесин табигый конвекцияны эске алуу менен төмөнкү теңдемелер түрүндө жазууга болот:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j^2} - \beta\left(T - T_0\right) g_i \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} - \frac{\partial \overline{u_i' T'}}{\partial x_i} + \frac{q_v}{\rho c_p} \qquad (3)$$

мында, u_i –орточо ылдамдыктын x_i координаттык огунун багыты компонентасы, P – орточо басым, ν – суюктуктун кинематикалык илешимдүүлүк коэффициенти, β – суюктуктун көлөмдүк кеңейүүсүнүн температуралык коэффициенти, α – суюктуктун температуралык өткөрүмдүүлүк коэффициенти, ρ – суюктуктун тыгыздыгы, c_p – турактуу басымдагы суюктуктун салыштырмалуу жылуулук сыйымдуулугу, T_o-273К, Т – орточо температура, g_1 – эркин түшүүнүн ылдамдануусунун x_i координаттык огунун багыты боюнча компонентасы, g_v – энергиянын бирдик көлөмгө генерациялануу чоңдугу. Штрих ылдамдыктын жана температуранын пульсациялык түзүүчүлөрүнө тиешелүү. (1-3) теңдемелер системасы туюк эмес, себеби 9 белгисиз чоңдуктарды камтыйт: U U_j – Рейнольдстун чыңалуусунун тензорунун 6 түзүүчүсүн, - турбуленттик ташуунун эсебинен жылуулук агымынын 3 түзүүчүсүн, (1-3) теңдемелер системасын туюктоо үчүн Буссинестин гипотезасына негизделген катыштар колдонулат:

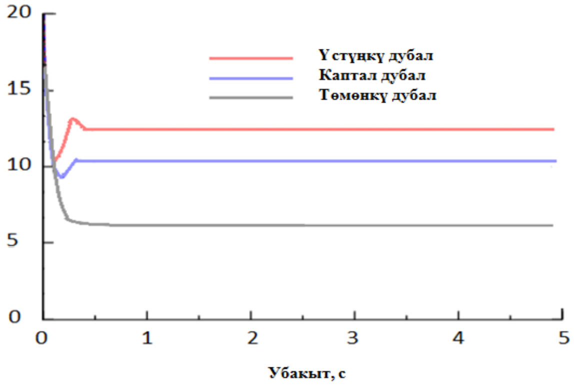
$$-\overline{u_i'u_j'} = \nu_t \left({}^{\partial u_i}\!\big/_{\partial x_i} + {}^{\partial u_j}\!\big/_{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k\delta_{ij}$$

$$-\overline{u_i'T'} = \alpha_t \, \partial T / \partial x_i \,, \;\; \nu_t = \mathrm{Pr}_t \, \alpha_t : \nu_t = C_\mu \, {}^{k^2}\!\big/_{\varepsilon}$$

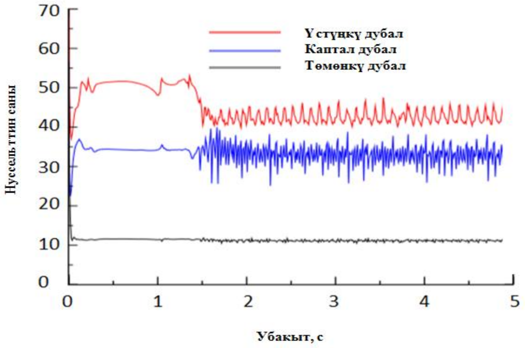
(1)-(3) теңдемелер системасын жана эсептик аймакты дискреттештирүү контролдук көлөмдөр методунун жардамында жүргүзүлдү. Эсептерде 100x100 эсептик торчосу тиешелүү түрдө O_x жана O_y координаталык окторунун багытында колдонулду. (1)-(3) теңдемелеринин бардык мүчөлөрүн мейкиндиктик дискреттештирүү үчүн экинчи тартиптеги так борбордук айырмалык схема колдонулду, убакыттын интеграциясы Эйлердин айкын эмес методу менен аткарылды. Ылдамдык жана басым аркылуу өз ара байланышкан сызыктуу эмес алгебралык теңдемелер системаксын чечүү үчүн PIMPLE алгоритми колдонулган.

Сандык эсептердин жана талкуулардын жыйынтыгы. Сандык эсептерде колдонулуучу суюктук P_r =0,6 га барабар **Пранталдын санына** ээ. Табигый конвекция кубулушун изилдөө үчүн бардык дубалдары 0^oC (273К) туруктуу температурадагы эритилген ядронун муздоосун берүүчү чектик шарттары менен квадраттык каверна түрүндөгү жүнүкүй геометрия тандалып алынды.

Эсептик торчо. Open FOAM пакетинин block Mesh утилитинин жардамында генерацияланган. Сандык моделдештирүүдө RANS турбуленттүүлүгүнүн эки параметрлик моделинин үчөө колдонулду, тактап айтканда: k-ε, k-ω-SST жана Лоундер-Шармдын төмөнрейнольдстук модели. Эсептик моделдештирүү Рэлейдин 10^6-10^{11} сандары үчүн жүргүзүлдү. Лоундер-Шармдын моделин колдонуу менен эсептин жыйынтыгы берилген 2-сүрөттө көрүнүп тургандай Ra=10^6 да Ra=10^9 болгон учурдагыдан айырмаланып, 3-сүрөт турбилентиик режимге өтө агым ламинардык боло жана туруктуу абалга жетет. Жогорку дубалда жылуулук берүү интенсивдүү. Себеби ысытылган суюктук төмөнкү температурадагы кавернанын жогорку дубалын көздөй агат.



2-сүрөт. Ra=10^6 үчүн Нуссельттин санын убакыт боюнча өзгөрүүсү.

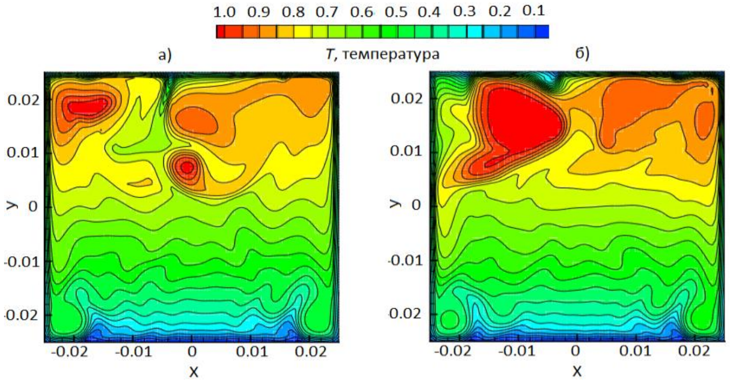


3-сүрөт. Ra=10^9 үчүн Нуссельттин санын убакыт боюнча өзгөрүүсү.

Кийин суюктук өзү менен бирге жылуулукту ташуу менен температурасы бир топ төмөн болгон төмөнкү дубалдарга жеткенге чейин каптал беттерди бойлой агат, демек башка дубалдарга салыштырмалуу түктө жылуулук алмашуу төмөндөйт. Ra=10^6да агым симметриялуу болот, бирок Рэлейден санын көбөйүшү менен агымдын симметриялуулугу жоголуп туруксуздук башталат. Биринчи туруксуздуктар Ra=10^8 де байкалат.

2-3 сүрөткө ылайык Лоундер-Шарманын модели жогорку дубалда Нусельттин санын жогорку маанилерин берет. Жогоруда айтылгандай суюктук бул абалга конвекциядан улум жогору кыймылдап ысытылып жетет. Бул кубулуштун себеби турбулентүүлүктүн k-ε моделинин төмөнкү рейнольдстук дагы жогорку рейнольдстук дагы версиялары токтоп турган аймактын турбуленттик кинетикалык энергиясынын генерациялануу денгээлин толук алекваттуу сүрөттөй албайт, демек Нусельттин саны бул аймакта жогоруда айтылгандан бир топко көп.

4-сүрөттө көрсөтүлгөн температуранын талааларынын жардамында жогорку дубалдагы жогорку температура жана суюктуктун кысылган агымы каптал дубалдардын жанында пайда болгондугун жана Рэлейдин эн жогорку саны үчүн ($Ra=10^{11}$) симуляция суюктуктун агымында жана аны менен байланышкан. Жылуулук берүүдө көптөгөн стационардык эмес түзүлүштөрдү берүү менен туруксуз болгондугун белгилөөгө болот.



4-сүрөт. Убакыттын t=1500 с (солдо) жана t=6000 с (оңдо) моменттери үчүн Pr = 0.6 жана $Ra = 10^{11}$ температуралардын талаасы

Корутунду. Бул жумушта Ra үчүн 10^6 дан 10^{11} га чейинки сандар үчүн, суюктукту камтыган Pr=0.6 изотермалык квадраттык дубалдары бар кавернадагы табигый конвекция анализденген. RANS теңдемелерине негизделген турбуленттүүлүктүн үч модели: k-ε, k-ω-SST жана Лоундер –Шарманын, k-ε Рейнолдсу төмөн модель. Моделдештирүү турбуленттүүлүктүн мыкты модели катарында k-ω-SST да көрсөттү, себеби бул модель башкаларына караганда ишеничтүү болду, ал эми k-ε модели моделдештирүү учурунда толугу менен туруксуз болду, бул **итерациялык** процесстин чачыроосуна жана кайрадан жүргүзүү зарылчылыгына алып келген, өзгөчө Рэлейдин жогорку саны менен моделдөөдө. Лоундер – Шарманын моделин колдонуу менен моделдештирүү итерациялардын жүрүүсү окшош экендигин көрсөттү, бирок дал келбөөчүлүк k-ε го салыштырмалуу аз болду.

Нуссельтин санынын чеги боюнча убакыттын орточолоштурулган бөлүштүрүү турбуленттүүлүк биринчи каптал дубалдарда пайда болорун көрсөттү, бул учурга төмөнкү аймактагы суюктук турбуленттүүлүк режиминин башталышы үчүн чоң каршылыкка ээ.

Конвективдик агымдын эсебинен турбуленттүүлүктүн генерациясын эсепке алуу кандайдыр бир деңгээлде k-ω-SST моделинин тактыгын жакшыртат, бул k-ε стандарттык модели үчүн тескери эффектке алып келет.

Адабияттар

1. Абрамов, А.Г.Численное моделирование турбулентной свободной конвекции паровоздушной среды в замкнутой полости при наличии пленочной конденсации на

центральнойвертикальной трубке [Текст] / Абрамов А. Г., Смирнов Е. М. // Тр. 5-й Рос. нац. конф. по теплообмену, Москва, 25–29 окт. 2010 г. М.: Изд-во Моск. энерг. ин-та, 2010. С. 33–36.

2. Горбунов, А.А. Полежаев В. И. Об условиях возникновения конвекции Рэлея — Бенара и теплообмене в околокритической среде [Текст] / Горбунов А. А., Никитин С. А. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 5. С. 19–36.

3. Ермолаев, И.А. Моделирование естественной термогравитационной конвекции в горизонтальных каналах с сечением нерегулярной формы [Текст] / Ермолаев И. А., Жбанов А. И., Кошелев В. С. // Инж.-физ. журн. 2003. Т. 76, № 4. С. 134–137.

4. Обухов, А.Г. Численное моделирование трёхмерных нестационарных конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа: учебное пособие [Текст] / А.Г. Обухов, Е. М. Сорокина. – М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2017. – 94 с.

5. Терехов, В.И. Трехмерная ламинарная конвекция внутри параллелепипеда с нагревом боковых стенок [Текст] / Терехов В. И., Экаид А. Л. // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 6. С. 905–911.

6. Calcagni, B. Paroncini M. Natural convective heat transfers in square enclosures heated from below [Текст] / Calcagni B., Marsili F. // Appl. Therm. Engng. 2005. V. 25. P. 2522–2531. https://cfd.direct/openfoam/user-guide-v5/. OpenFOAM v5 User Guide.

Математика, физика, техника. 2022, №1

ТЕХНИКА

УДК: 62-526:004.43
DOI: 10.52754/16947452_2022_1_185

ARDUINO ПЛАТФОРМАСЫ МЕНЕН ИШТӨӨНҮН ЖӨНӨКӨЙ ЖОЛДОРУ

Жолдошов Толкунбек Мамытович,т.и.к., доцент,
jtolkun_kg@mail.ru
Турдубеков Бурканбек Токторович, ага окутуучу,
Парпиев Музаффар Иброхимжанович, магистр
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Макалада Arduino тактайчасы жөнүндө түшүнүк берилип, Arduino тактайчасы менен иштөөнүн жана программаларды компилясиялоонун негиздери талкууланат. Ошондой эле, эмгектен Arduinoнун иштөө принциби менен таанышып, Arduino үчүн жөнөкөй программаларды түзүүнү, жарык чыгаруучу диодторду башкаруунун оптималдуу жөнөкөй жолу көрсөтүп берилди.* Arduino *тактайчасы электрониканын кээ бир сырларын практикада ачууга жардам берет жана робототехникасынын топтомдору иштөө жана башкаруу принциптерине, кайтарым сигналга жана сенсор сигналын иштетүүгө киришүүнү камсыз кылат. Arduino тактайчасы менен иштөө үчүн C++ программалоо тилин тандап алуу менен бирге жарык чыгаруучу диодду атайын баскыч аркылуу башкарган мисал келтирилди.*

Ачкыч сөздөр: *робот, робототехника, Arduino, мобилдик робот, C++ программалоо тили.*

ПРОСТЫЕ СПОСОБЫ РАБОТЫ С ПЛАТФОРМОЙ ARDUINO

Жолдошов Толкунбек Мамытович, к.т.н.,
доцент, jtolkun_kg@mail.ru
Турдубеков Бурканбек Токторович, ст. преподователь,
Парпиев Музаффар Иброхимжанович, магистр

Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В статье рассматриваются основы работы с платой Arduino. В работе также можно ознакомиться с принципом работы Arduino и компиляции программ, показали оптимальный простой способ создания простых программ для Arduino, управления светодиодами. Плата Arduino помогает разгадать некоторые тайны электроники на практике, знакомит с принципами работы и управления робототехникой, обратной связью и обработкой сигналов датчиков. Помимо выбора языка программирования C++ для работы с платой Arduino, приведен пример светодиода, управляемого специальной кнопкой.*

Ключевые слова: *робот, робототехника, Arduino, программирование, мобильный робот, язык программирования C++.*

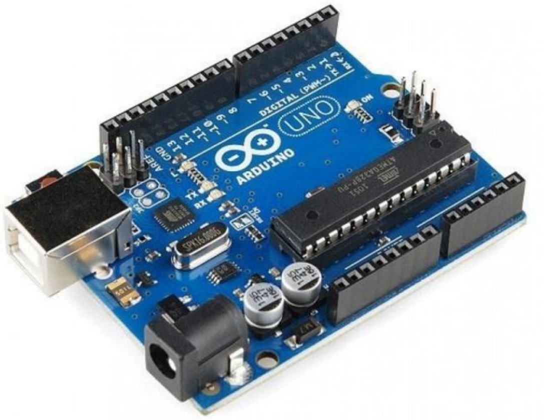
SIMPLE WAYS TO WORK WITH ARDUINO PLATFORM

Zholdoshov Tolkunbek Mamytovich,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
jtolkun_kg@mail.ru
Turdubekov Burkanbek Toktorovich,
Senior Lecturer,
Parpiev Muzaffar Ibrokhimzhanovich, master
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *in the article consider the main work with the Arduino plateau. In the work you can also get acquainted with the principle of operation of the Arduino and compile the program, showed the optimal simple way to create a simple program for the Arduino, LED control. The Arduino board helps to unravel some of the mysteries of electronics in practice, introduces the principles of operation and control of robotics, feedback and sensor signal processing. For example, the choice of C ++ programming language for work with the Arduino board, given an example of LED, controlled by a special button.*

Keywords: *robot, robotics, Arduino, programming, mobile robot, programming language C++.*

Киришүү. Arduino тактайчасы (1-сүр.) электрониканын кээ бир сырларын практикада ачууга жардам берет. Массимо Банзи жана Дэвид Куартиллиер тарабынан түзүлгөн Arduino системасы алыстан башкарылуучу роботтор, GPS негизиндеги байкоо тутумдары жана электрондук оюндар сыяктуу интерактивдүү долбоорлорду жана объекттерди түзүүнүн арзан жана ыңгайлуу жолун сунуштайт. Arduino платформасын өздөштүрүү үчүн эң негизги керектүү маалыматтарды жана эң алгачкы жөнөкөй макетти жасап ага программа жазалы.



1- сүрөт. Arduino тактайчасы

Жыйынтыктар жана талкуулар

Азыркы күндө көптөгөн программалоо тилдери бар, атүгүл популярдуу болуп жаткан тилдердин ичинен дагы ондогон төмөнкү программалоо тилдерин бизге жакын тааныш: Assembler, C, C++, C#, Java, Python, Ruby, PHP, Scala, JavaScript.

Маселе мындай тилдер процессорго түшүнүксүз болгондуктан, ага бул программаны берүүдөн мурун аны компиляциялоо керек: табигый тилден нөл жана бир түрүндөгү экилик системага которуу. Бул компиляторлор деп аталган программалар аркылуу ишке ашырылат. Демек, адамга түшүнүктүү тилде программалар бар: алар "коддору", жөн эле "код" же "баштапкы коддору" деп да аталат. Алар жөнөкөй текст файлдарына каалаган тексттик редакторлордун жардамы менен, жада калса блокноттун жардамы менен жазылат. Андан кийин алар процессорго түшүнүктүү болуп, компилятордун жардамы менен процессорго нөлдүк жана бирдик жыйындысын: компилятор баштапкы кодду киргизүү катары алат, ал эми процессорго түшүнүктүү болгон экилик системмада аткарылуучу файлды түзүп берет.

Arduino менен иштөө үчүн Assembler, C жана C++ программалоо тилиндерин тандоо менен гана чектелет. Бул жумушчу компьютер менен салыштырганда, алар абдан чектелген ресурстарга ээ экенине байланыштуу. Андыктан гигабайт эмес, килобайт эстутум. Гигагерц эмес, процессордогу мегагерц болуп саналат.

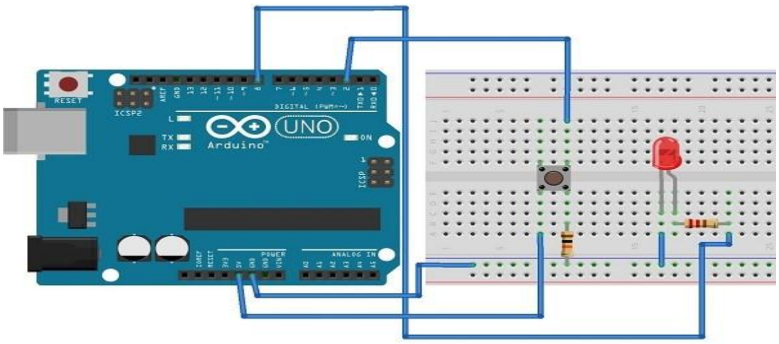
Демек, бизге компиляция жана эффективдүү иштей турган тил керек. Башкача айтканда, баалуу нускамаларды жана бош эстутумду коротпостон, нускамалардан мүмкүн болушунча оптималдуу нөлгө жана бирлерге которуу. Бул тилдер өтө эффективдүү. Аларды колдонуу менен, ресурстардын тар чегинде да, тез иштей турган өзгөчөлүктөргө бай программаларды жаза алабыз.

Arduino модулдары – интегралдык процессору, эс тутуму жана перифериялык түзүлүштөрү бар тактайчалар, алар бир тактайча аркылуу негизги функцияларды ишке ашырууга мүмкүндүк берет. Мүмкүнчүлүктөрдү кеңейтүү үчүн ар кандай типтеги кыймылдаткычтар жана сенсорлор менен иштеген, ошондой эле эстутум карталарын жана дисктерди окууга жана жазууга, USB Хостту колдоого жана Ethernet, Bluetooth жана Wi-Fi менен иштей алган кошумча калкан модулдары колдонулат [1, 2]. Өнөр жай деңгээлиндеги кеңейтүү модулдары гальваникалык изоляцияга ээ жана акылдуу үй модулдары IoT («Нерселердин Интернети») түзүлүштөрүн прототиптөө үчүн ылайыктуу. Ал тургай, Arduino негизинде өз веб-сервериңизди түзө аласыз.

Прототиптөө жана окутуу үчүн перифериялык жабдыктардын чоң арсеналы бар. Булар түрдүү сенсорлор, сенсорлордун жана кыймылдаткычтардын көпчүлүк түрлөрү, ар кандай дисплейлер, буфердик жана күчөтүүчү модулдар, мотор драйверлери, зымсыз байланыш жана башкаруу үчүн модулдар. Модулдар негизги тескемечи тактайчасы менен бириктирилип, андан кийин Arduino IDEде конфигурацияланат.

Долбоорлорду түзүү атайын көндүмдөрдү талап кылбайт, анткени адистер тарабынан тынымсыз жаңыланып турган атайын Arduino IDE программалык жабдыгы Arduino микроконтроллерлери үчүн эскиздик программаларды (микропрограммаларды) түзүү, ошондой эле туташтыруу, кодду жүктөп алуу жана маалымат алмашууну көзөмөлдөө үчүн колдонулат. Бүгүнкү күнгө чейин, Arduino IDE жогорку сапаттагы кошумча жана кеңейтүүлөргө ээ, анын ичинде 32 биттик микроконтроллерлерди программалоого мүмкүндүк берип келет. Arduino тактайчалары менен иштөө үчүн атайын жүктөгүч-дебагер же программист талап кылынбайт, бардык негизги иштер Arduino платформасынын жардамы менен аткарылат.

Arduino робототехникасынын топтомдору иштөө жана башкаруу принциптерине, кайтарым сигналга жана сенсор сигналын иштетүүгө киришүүнү камсыз кылат - робототехникадагы алгачкы кадамдарды жасоо жана жөнөкөй алгоритмдерди программалоону үйрөнүү үчүн идеалдуу [3].



2-сүрөт. Баскыч менен жарык чыгаруучу диодун башкаруу үчүн Arduino тактайчасына байланыштыруу схемасы

Негизги механизмди башкаруу үчүн эки гана серво жана эки аналогдук сигнал булагы менен түзсө болот [4]. Прототип үчүн ширетүүчү аксессуарлардын кереги деле жок - бүт долбоор Arduino монтаждоочу тактайларында чогулган (2-сүр.).

Программа жазууга мисал:

Биз баштапкы код менен текст файлын түзүп, аны компиляциялайбыз жана алынган файлды тактага жүктөшүбүз керек.

Андыктан баштапкы кодду биз блокнотко же башка редакторго жаза алабыз. Бирок, ишти ыңгайлуу кылуу үчүн иштеп чыгуу чөйрөлөрү IDE (Integrated Development Environment) деп аталгандар бар. Алар тексттик редакторду бөлүп көрсөтүү жана инструментардык кеңештерди берип, баскычта иштеген компилятор жана курал түрүндө башка көптөгөн функцияларды камсыз кылат.

Arduino үчүн бул чөйрө Arduino IDE деп аталат. Аны жүктөп, пайда болгон терезеде мейкиндиктин көбү текст редакторуна берилгенин көрө алабыз. Ал кодду жазат. Arduino дүйнөсүндөгү код эскиз деп аталат.

Андыктан, диодду жаркылдатып өчүрүп-жандырган C++ программалоо тилинде жазылган кодун текшерели [5].

```
int ledPin = 7;//пин Arduino тактайчасына туташкан жарык диод
void setup() {
  pinMode(ledPin, OUTPUT);// пинди чыгаруу катары жайгаштыруу}
void loop() {
  digitalWrite(ledPin, HIGH);//жарыкдиодду жандыруу
  delay(1000);// кечиктирүү 1000 мсек (1 сек)
  digitalWrite(ledPin, LOW);// жарыкдиодду өчүрүү
  delay(1000);// 1 секунд күтүү}
```

Натыйжада, биз Arduino тарабынан аткарыла турган .hex форматындыгы файлыбыз даяр болду. Эми биз бул файлды тактайчага жөнөтүшүбүз керек. Бул процесс жүктөө, жаркылдоо же жарк кылуу деп аталат. Arduino'ну компьютерге USB кабели аркылуу туташтырып, "Жүктөө" баскычын басышыбыз жана бир нече мүнөттөн кийин программа Arduino'го жүктөлөт.

Ийгиликтүү микропрограмма "Жүктөө аяктады" деген жазуу менен жарыяланат.

Корутунду. Ошентип, Arduino – тактайчасында иштөө үчүн алгачкы жөнөкөй программаны жаздык. Жаңыдан баштаган жеткинчектер үчүн дагы чоңдор үчүн дагы көптөгөн кызыктуу башталгыч долбоорлорду ушинтип жасап баштаса болот. Ушул эле программаны өркүндөтүү жолу менен жол чырактын программасын жазууга дагы жеңил болуп турат. Ал үчүн Arduino – тактайчасына дагы түстүү эки диодду жайгаштырабыз жана программага убакытты, диодторду башкарган код жазуу жетиштүү.

Адабияттар

1. Крейг Джон Дж. Введение в робототехнику. Механика и управление. – 2013 – 564 б.

2. Платт Ч. Энциклопедия электронных компонентов. Т. 3. Датчики местоположения, присутствия, ориентации, вибрации, жидкости, газа, света, тепла, звука, электричества / Ч. Платт, Ф. Янссон Э. – 2017. – 288 б.

3. Момот М. Мобильные роботы на базе Arduino. – 2018. – 336 б.

4. Бройнль Т. Встраиваемые робототехнические системы. Проектирование и применение мобильных роботов со встроенными системами управления. – 2012. – 520 б.

5. http://wiki.amperka.ru/конспект-arduino

Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 621.395

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_191

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЦИФРОВОГО ТЕЛЕРАДИОВЕЩАНИЯ

Сопубеков Нематилла Абдилахатович, к.т.н., доцент,
nemat67@mail.ru
Абдиталип уулу Бектур, магистрант,
Ошский технологический университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной статье рассмотрены модели определения помехоустойчивости систем DVB-T, особенности многолучевого распространения радиоволн в среде распространения. Учитывая географическое расположение и рельеф местности определение покрытия является наиболее важным аспектом для передатчиков и приемников станций. Расчет зоны покрытия на основе фактического существующего рельефа очень трудоемкая операция только квалифицированным персоналом. Эфирное наземное телерадиовещание в данное время являются основными средствами донесение информации, которое влияет на нравственное развитие и экономическую активность жителей земного шара, на социальную стабильности и развитию гражданских институтов. Повышение помехоустойчивости систем цифрового телевизионного вещания является основным занчением исследования.*

Ключевые слова: *радиоволны, зона покрытия, модель, цифровой стандарт, канал, мощность, помех, защита.*

САНАРИПТИК ТЕЛЕРАДИОБЕРҮҮ СИСТЕМАСЫНЫН ТОСКООЛДУКТАРГА ТУРУКТУУЛУГУН ИЗИЛДӨӨ

Сопубеков Нематилла Абдилахатович, к.т.н., доцент,
nemat67@mail.ru
Абдиталип уулу Бектур, магистрант,
Ош технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада DVB-T системасынын тоскоолдукка туруктуулугун аныктоо моделдери, таралуу чөйрөсүндө радио толкундарынын көп нурлуу* *таралышынын өзгөчөлүктөрү каралды. Географиялык жайгашуусун жана рельефин эске алганда, камтуу аймагын аныктоо станциянын жибергичтери жана кабыл алгычтары үчүн эң маанилүү аспект болуп саналат. Учурдагы рельефтин негизинде камтуу аймагын эсептөө квалификациялуу кызматкерлер тарабынан өжөрлүү эмгекти талап кылган иш чара. Жер үстүндөгү эфирдик телерадиоберүү азыркы учурда жер шарынын жашоочуларынын адеп-ахлактык өнүгүүсүнө жана экономикалык активдүүлүгүнө, социалдык туруктуулукка жана жарандык институттардын өнүгүүсүнө таасир этүүчү маалыматтарды жеткирүүнүн негизги каражаты болуп саналат. Санариптик телекөрсөтүү тутумдарынын тоскоолдукка туруктуулугун жогорулатуу изилдөөнүн негизги мааниси болуп саналат.*

Ачкыч сөздөр: *радио толкундары, камтуу аймагы, модель, санариптик стандарт, канал, кубаттуулук, кийлигишүү, коргоо.*

INVESTIGATION OF NOISE IMMUNITY OF DIGITAL TELEVISION BROADCASTING SYSTEMS

Sopubekov Nematilla Abdilahatovich, c.t.s., associate professor,
nemat67@mail.ru
Abdimitalip uulu Bektur, graduate student,
Osh Technological University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *This article discusses models for determining the noise immunity of DVB-T systems, features of multipath propagation of radio waves in the propagation medium. Given the geographical location and terrain, determining coverage is the most important aspect for transmitters and receivers of stations. Calculating the coverage area based on the actual existing terrain is a very time-consuming operation only by qualified personnel. Terrestrial terrestrial broadcasting is currently the main means of conveying information that affects the moral development and economic activity of the inhabitants of the globe, social stability and the development of civil institutions. Increasing the noise immunity of digital television broadcasting systems is the main value of the study.*

Keywords: *radio waves, coverage area, model, digital standard, channel, power, interference, protection.*

Актуальность темы. Цифровое телевещание поволяет гораздо увеличить число количество телепрограмм, усовершенствовать качество передаваемой информации, дополнить вещание разными интерактивными мультимедийными службами.

Необходимость внедрения цифрового телевещания порождается возникшиеся социальными запросами населения а так же нехваткой радио-частотных спектров, нехватка новых европейских и мировых стандартов [4].

Совершенствование цифровых технологий в первую очередь обусловливается на обеспечение свободного доступа к общественной информации, а так же качественное применение современных информационных цифровых технологий. В современом обществе весь мир перешла на цифровое телевещание, которое владеет существенные превосходства по сравнению с аналоговым вещанием которое использовались до настоящего времени.

Задачи исследования. Исследование, создание, построение, проектирование, а так же дальнейшая эксплуатация сетей цифрового телерадиовещания цифрового телерадиовещания стандартов DVB обязаны опираться на точные данных о помехоустойчивости систем цифрового телерадиовещания в разных условиях. Одним из факторов, который определяет реальную помехоустойчивости систем DVB, является многолучевое распространения радиоволн, возникающих в итоге неоднородностей или отражений в среде распространения [1].

В стандарте на систему DVB-T2 дано представление квазибезошибочного приёма - *QEF*, для которых приведен табулированные аналитическое значение граничного отношения *C/N* - мощности сигнала несущей к спектральной плотности адитивного белого Гауссовских шумов (АБГШ), требуемых для достижений в разных условиях и режимах вещания вероятности ошибок на выходе декодеров, равной 2-11Л. Это максимально возможные значения, при котором в типично функционирующей системе обеспечиваются довольный резерв помехоустойчивостей. Следственно весьма значимо не довольствоваться одним граничными значениями показателя ошибок по битам (КОБ, *англ.* - BER), а иметь отчётливое представления о нраве зависимости КОБ от отношение *C/N* в каналах с разными колляциями интенсивности и многолучевости. Ниже приведены итоги исследования, исполненных на модели тракта вещания системы DVB-T2 модели каналов [2].

Применение моделов. Гауссовские каналы в цифровом вещании по факту не встречается, его модели применяются только при лабораторных исследованиях оборудований в качестве легко и простого воспроизводимого стандарта.

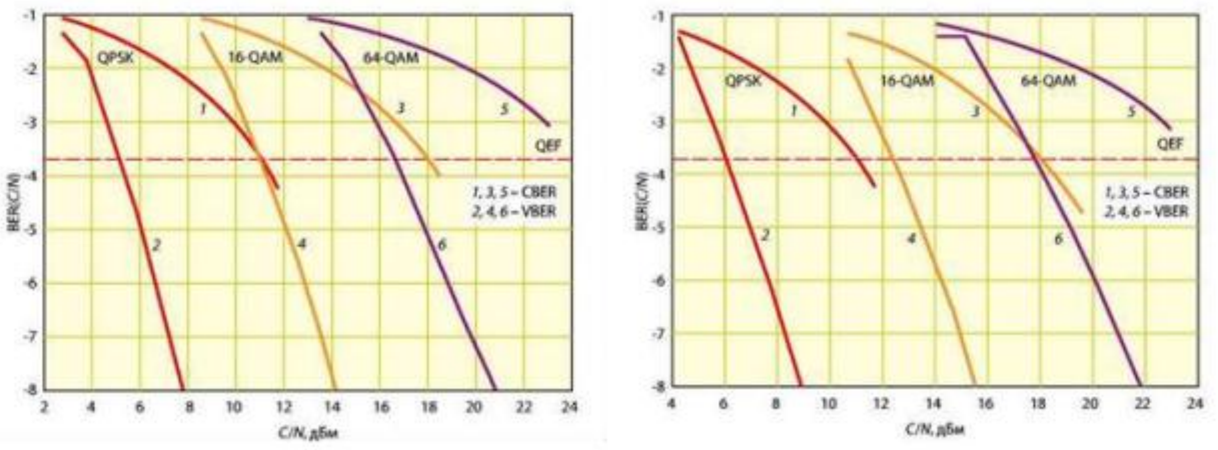
Фиксированному приёму (ФП) на наружно направленных антенн, соответствует модели Райсовского канала, статистических свойств отраженных лучей которого описываются разделениям вероятностей Райса.

Модель Рэлеевского канала используются при приёме на портативное оборудования (как внутри, так вне помещения) и при подвижном приёме в неимение прямой видимостей передатчиков. Статистические свойства отраженных лучей описывается разделением вероятностей Рэлея.

Существует уйма реализации рэлеевского и райсовского каналов, который различаются числами рассматриваемые отраженных лучей и их колляциями. Для обеспечения солидарности измерений вероятности и помехоустойчивости сравнения полученными итогами в стандарте на систему DVB-T2 приняты модели рэлеевского и райсовского каналов с АБГШ, содержать по 22 отраженых лучей. На раннем этапе внедрению систем DVB обширно применяются типовые модели с шестью отраженным лучам. Параметры этих моделей закладывается в специализированную измерительных аппаратов, моделирующую настоящую тракт распространение сигнала [3].

Тракт цифрового телерадиовещания был смоделировано с подмогой прибора для тестирования вещательных оборудований SFU фирмы Rohde & Schwarz и комплексных анализаторов принимаемого OFDM-сигнала MS2751B фирмы Anritsu. В качестве добавочных контрольных средств применялся измерительные приёмники EFA-T фирмы Rohde&Schwarz. Приборы SFU дозволяет сформировать сигнал OFDM системы DVB-T2 с внесением в него детерминированные искажении, соответствующих разными помехами и шумами при приёме и передаче сигнала в настоящем тракте. С подмогой анализатора MS2741 дозволен измерить параметры принимаемых сигнала и позже его декодирования и демодуляции - показатели на ошибки в широком диапазонах. Таким образом, эти измерительные приборы разрешает предпочесть режимы вещания системы DVB-T2 (оборонительный промежуток, кодовую скорость, модуляцию) и модели каналов цифрового вещания (вид много-лучевости), задать требуемую интенсивности помех и оценить помехоустойчивости при приёме [2, 3].

Итоги исследований. В качестве начальных баз для сопоставления колляций декодирования, а также для калибровки и проверки модели тракта цифрового телерадиовещания были снят зависимости показателей ошибки от отношения *C/N* в гауссовском канале для всех видов модуляций несущих в системе DVB-T2 (QPSK, 16-QAM, 64-QAM). От того что для всякого вида модуляции допустим выборы из пяти значения кодовой скорости, решили ограничиться особенно классическим итогам. Так, для гауссовского канала представлено обширно используемую скорость 2/3 (рисунок 1) и 3/4.



а *б*

Рисунок 1. Зависимости показателей ошибок CBE/R и VBE/R от отношения C/N для скорости 2/3 а и 3/4 б.

Пунктиром показана граница, соответствующая QEF при вероятности ошибки = $2X10^{-4}$. На точке пересечения этой границы и кривых помехоустойчивости на выходе декодера фактически соответствуют значениям *C/N,* что подтверждает адекватность применяемое модели тракта DVB-T2.

Метаморфоза конструкций ошибки в каналах и крутое снижения помехоустойчивости исключительно крепко проявляется на модели рэлеэвского канала. Это отменно видно по изменению ходов кривых. Даже при дюже крупных значениях *C/N,* когда белые шумы фактически отсутствует, отслеживается так сказать насыщения кривых, показатели ошибки на входе декодера становится непрерывными и не опускается ниже некоторого значения.

В зоне QEF смещения кривых составляют около 6дБ, а при последующих увеличении *C/N* расхождения становится еще огромнее. Причем при модуляций 64 QAM результат насыщение распространяется и на кривую. Это обозначается, что даже при отсутствии помех и шумов и вероятность ошибки в рэлеэвском канале не может быть произвольно низкими. Слежения за счётчиком ошибок показала, что в области насыщение *(C/N* > 30дБм) ошибка появляется в виде коротких пакетов длиной до 11 битов, поделенные промежутки без ошибки длительностью до несколькими десятков секунд.

Заключение. Всеобщий итог о неудовлетворительного помехоустойчивостей модуляций 64-QAM в каналах с многолучевостю требует уточнение с привязкой к выбору кодовой скоростей кодека. С этой целью был проведен измерения в канале Релея и канале Райса и для всех допустимые кодовые скорости, значение которых указан на кривых. Рисунки позволяет непринужденно оценить значения и нрав снижение помехоустойчивости в многолучевых каналах. Если в райсовском канале в диапазонах кодовых скоростей снижения равно 0,6-1,6 дБ при довольно откровенных кривые, канал будут приближаться к рэлеэвскому с соответствующими увеличением числа ошибок.

Еще один фактор снижение помехоустойчивости связано с промышленными помехами, как водится, импульсных нрав. Особенно ясно, это выражен при стационарном либо портативном приёме на не-направленную антенну внутри помещения. Сочетание внешних помех с приёмом в канале Релэя может иметь безграничное, огромное числа вариантов и потребовать довольно большого резерва помехоустойчивостей касательно планируемые значения. Следственно при создании сетей DVB-T2 с ориентировками на удобоносимый приём либо сетей мобильного телевидения DVB-H следует сторониться выбора модуляции 64-QAM с высоким кодовым скоростям. Таким образом, задачи исследования и разработки методов повышения помехоустойчивости систем эфирного ЦТВ, связанных с использованием обратной связи, а также созданием аппаратно-программного комплекса, разработанного на их основе, являются актуальными.

Литература

1. Локшин, М. Основы планирования наземных сетей телевизионного и ОВЧ-ЧМ-вещания. Зоны сервиса радиостанций [Текст] / М. Локшин // Broadcasting” №4, -2014.
2. Красносельский, И.Н. Определение помехоустойчивости системы DVB-T на модели канала с многолучевыми распространениеми [Текст] / И.Н. Красносельский, С. А. Канев // Электросвязь. №6. - 2016. - 120 с.
3. Методика определения зоны сервиса одиночной передающей станции наземного цифрового телерадиовещания стандарта DVB-T / Электронный ресурс // ГКРЧ 2013 г. № 11.
4. Сопубеков, Н.А. Внедрение цифрового телерадиовещания в Кыргызской Республике [Текст] / Н.А. Сопубеков // Известия Ошского технологического университета. 2017. №2. - С 14-18.

УДК 627.397
DOI: 10.52754/16947452_2022_1_197

САНАРИПТИК ТЕЛЕРАДИОБЕРҮҮНҮН ӨЗГӨЧӨЛҮКТӨРҮ

Сопубеков Нематилла Абдилахатович, к.т.н., доцент,
nemat67@mail.ru
Абдиталип уулу Бектур, магистрант,
Ош технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада санариптик телеберүүнүн негизги өзгөчөлүктөрү, анын коомдогу ролу жана аны жайылтуудагы негизги маселелер каралды. Азыркы учурда санариптештирүү жана санариптик технологияны өнүктүрүү дүйнө жүзүндө өтө тездик менен өнүгүүдө жана кеңири жайылууда. Кыргыз Республикасында да бул иштер алкагында санариптештирүү багытында алгылыктуу иштер ишке ашырылууда. Бул жаңы технологияны колдонууда биздин иштеп жаткан станциялар, жабдуулар, түзүлүштөр санариптик технологиянын баардык мүмкүнчүлүктөрүнө ээ болушат. Мунун негизинде башка өлкөлөр да санариптик берүүгө толук өтүп бүтүштү, ага байланыштуу бири бирине тоскоолдук жаратпоосу үчүн ар бир өлкө баардык аймактарында аналогдук берүүнү толугу менен өчүрүштү.*

Ачкыч сөздөр: *телеберүү, технология, санариптик иштеп чыгуу, маалымат, санариптик жабдыктар, интерактивдүү телеберүү.*

ОСОБЕННОСТИ ЦИФРОВОГО ТЕЛЕРАДИОВЕЩАНИЕ

Сопубеков Нематилла Абдилахатович, к.т.н., доцент,
nemat67@mail.ru
Абдиталип уулу Бектур, магистрант,
Ошский технологический университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной статье рассматривается особенности цифрового телерадиовещания, его роль в обществе и основные задачи его развития. В данное время цифровизация является актуальной задачей всего мира. Весь мир переходит на цифровое телерадиовещание, обладающее значительными преимуществами по* *сравнению с существующим аналоговым вещанием. Переход на цифровое телерадиовещания внедряется, в том числе у нас в Кыргызстане. В условиях научно-технического прогресса непрерывно возрастает объем передачи цифровой информации. Велика потребность в быстрой и качественной связи. Эти факторы определили высокую динамику в развитии мировой отрасли телекоммуникации, оставляя предпосылки для высокотехнологичных разработок и внедрения новых систем коммуникации.*

Ключевые слова: *телевещание, цифровая обработка, технология, информация, цифровое оборудование, интерактивное телевидение.*

FEATURES OF DIGITAL BROADCASTING

Sopubekov Nematilla Abdilahatovich, c.t.s., associate professor,
nemat67@mail.ru
Abdimitalip uulu Bektur, graduate student,
Osh Technological University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *This article examines the features of digital broadcasting, its role in society and the main tasks of its development. At this time, digitalization is an urgent task for the whole world. The whole world is switching to digital broadcasting, which has significant advantages over existing analog broadcasting. The transition to digital broadcasting is being implemented, including in Kyrgyzstan. In the conditions of scientific and technological progress, the volume of digital information transmission is continuously increasing. There is a great need for fast and high-quality communication. These factors have determined the high dynamics in the development of the global telecommunications industry, leaving prerequisites for high-tech developments and the introduction of new communication systems.*

Keywords: *broadcasting, digital processing, technology, information, digital equipment, interactive television.*

Изилдөөнүн актуалдуулугу. Азыркы учурда санариптештирүү дүйнө жүзүндө өтө тездик менен жайылууда. Бул иштер алкагында биздин өлкөдө да алгылыктуу иштер аткарылууда. Санариптик телеберүүгө өткөндөн кийин биздин мамлекетте орнотулган санариптик станциялар артыкчылык алышат жана баштапкы негизде иштей башташат. Бул болсо, эгерде коңшулаш өлкөлөр ушул кезге чейин санариптик берүүгө өткөн болсо, анда санариптик сигналдарды кабыл алган телевизиондук кабыл алгычтарга тоскоолдук жаратпоосу үчүн ар бир өлкө өзүнүн чек арага жакын аймактарында аналогдук берүүнү өчүрүүгө милдеттүү дегенди түшүндүрөт жана бул процесс буга чейин аткарылды.

Күнүмдүк маалыматтарды массалык таркатууда интернет булактары менен кошо телеберүү жана радиоуктуруу негизги ролду ээлеп келүүдө. Жалпыга маалымдоо каражаттары катары калкты коомдук туруктуулукка үндөөгө, өнүгүүгө, руханий жана экономикалык өнүгүүсүнө таасир этүүчү күч болуп саналат.

Дүйнөдөгү өзгөрүүлөрдү карай турган болсок, бүгүнкү күндө дүйнөдөгү көпчүлүк мамлекеттер санариптик телерадиоберүүгө өтүшүүдө. Кыргыз Республикасы да санариптик телерадиоберүүгө Борбордук Азия өлкөлөрүнүн ичинде биринчилерден болуп өткөн мамлекеттердин катарына кирет [2, 3].

Өлкөнү толугу менен санариптик телерадиоберүүгө өткөрүү мамлекеттин маалыматтык коопсуздугун камсыз кылуу маселелери, ошондой эле, сапаттуу берүү аркылуу калктын маалыматтын ачыктыгына болгон муктаждыктарын канааттандыруу маселелерин чечүүгө байланышкан. Санариптик берүү телеберүүнү, радиоберүүнү гана эмес, ошондой эле, коммуникациянын башка тармактарын да өзүнө камтып кетет.

Азыркы учурда телеберүү – бул коомдук мааниге ээ болгон маалыматтардын негизги булагы болуп эсептелет, адатта өлкөдөгү маалыматтык жана маданий-эстетикалык мейкиндигин калыптандыруудагы башкы каражат катары болуп эсептелет [1]. Ошол себептүү, анын ар бир өкмөткө өз жарандарынын көз караштарына жана баалуулуктарына таасир берүү үчүн керектиги айкын. Дүйнөлүк аренада колдонуучулардын интерактивдүү массалык маалымат каражаттарына жана интернетке акырындык менен, бирок, жетишерлик түрдө өтүп жаткандыктарына карабастан биздин мамлекетте интернеттик инфраструктуранын акырындык менен өнүгүсүүнө байланыштуу келечекте телерадиоберүү калк үчүн актуалдуулугу жогору бойдон калат. Ошондуктан санариптик берүүгө өтүү – бул бир гана техникалык эмес, көбүнчө маданий, социалдык, экономикалык жана саясий маселе болуп да эсептелет.

Санариптик телеберүүгө өтүүнүн негизги өзгөчөлүктөрү. Санариптик берүүгө өтүү долбоору 2013-2017-жылдарга карата Өлкөнүн туруктуу өнүгүү стратегиясында артыкчылыка ээ болгон улуттук долбоорлордун бири катары аныкталган [2,3,4]. КР Өкмөтү 2017-жылдан калбай өлкөнүн бардык аймактарында коомго санариптик телеберүүнүн жеткиликтүүлүгүн камсыз кылуу боюнча тапшырма койгон болчу. Ошонун негизинде Кыргыз Республикасында аналогдук берүү 2017-жылдын 15-майында толук токтотулган [3, 4]. Санариптик телерадиоберүү системасына өтүү телеберүү тармагын заманбап туруктуу иштей турган жана рынок шарттарында жеке өнүгүүсүнө ээ болгон экономиканын тармактарына карай реформалоо аркылуу калкты маалымат булактары менен дагы да толугураак жеткирүү муктаждыгы менен байланыштуу. Азыркы учурда дүйнөдөгү баардык өлкөлөрдө маалымат алуунун болгон деңгээлин, эң аз дегенде, сактап калуу жана, эң көп дегенде, алыскы аймак менен борбордун, ири шаарлар менен алыскы шаар-айылдардын ортосундагы маалыматтык теңсиздикти жоюу («санариптик ажырым») мамлекеттик органдар тарабынан чечилип, «санарипке» өтүү менен байланышкан биринчи жана эң маанилүү тапшырмалардан болуп эсептелинет.

Өкмөттүн берген тапшырмаларынын негизинде санариптештирүү жана санариптик берүүгө өтүү менен бирге бирдиктүү коммуникативдик маселелерди чечүү, мейкиндикти жана өлкөнүн маалыматтык коопсуздугун сактоо маселесин чечүү да негизги ролду ойнойт.

Санариитик телерадиоберүүгө өтүү биздин өлкөдө да ишке ийгиликтүү ишке ашууда. Кыргызстан тоолуу өлкө болгондуктан анан рельефи, ошондой эле, өлкөнүн калкынын жарымынан көбү (66%) айыл жерлеринде жашагандыгына байланыштуу республикада санариптик телерадиоберүүгө өтүүнү ишке ашыруу процессине өзүнүн өзгөчөлүктөрүн киргизет [4]. Башка мамлекеттердей эле, бир топ убакытка чейин Кыргызстанда да санариптик берүү аналогдук көрсөтүү менен бирге жүргүзүлүп келди, анткени, санариптик берүүгө өтүү этап менен ишке ашырылып келди. Аналогдук режимде берүүнү толугу менен токтотконго чейин тесттик режимде; санариптик берүүнү өлкөнүн ички аймактарында киргизип, аны чек араларга жакын аймактарда иштеткенден кийин гана жайылтылды. Техикалык жабдыктарды алмаштырганга, кайра даярдап оңдогонго да убакыт керек болду. Андан сырткары, баардык эң зарыл болгон керектүү түзүлүштөрдү сатып алып, аларды ишке киргизүү да убакытты талап кылгандыктан, өткөөл мезгилде санариптик берүү менен аналогдук берүүнү удаалаш киргизүү зарыл болду. Өлкө тарабынан 2011-жылы Кыргыз

Республикасында санариптик телерадиоберүүгө өтүү Программасы кабыл алынып, «жер үстүндөгү санариптик эфирдик берүү» менен, жердик антенналык - мачталык түзүлүштөгү инфраструктураны колдонуу менен ишке ашырылууда [2,3,4].

Тоолуу рельеф жана калктын жыштыгынын аздыгы санариптик технологияны колдонуу менен аймакты телеберүү менен мүмкүн болушунча көбүрөөк камтууну камсыз кылууга жана эфирдик санариптик телеберүү менен гана калкты 100% камтууга мүмкүнчүлүк түзүлөт. Программа менен катар эле, санариптик берүүнү оптобулалык (оптоволокондук жазы тилкелүү интернет) жана спутниктик байланыш аркылуу өнүктүрүү боюнча жеке инвестициялык долбоорлор ишке ашырылууда. Жер үстүндөгү эфирдик санариптик берүү системасы менен катар эле санарипти өнүктүрүүдө башка альтернативалык мүмкүнчүлүктөрүн тактык менен изилдөө. Алардын бири катары спутниктик телеберүүнү айтсак болот.

Кабыл алынган жана так экономикалык эсептөөлөрдү жүргүзүүнүн жардамы менен мамлекеттик саясатты ийгиликтүү ишке ашыруу үчүн кеңири түшүнүктөрдү тандоого жана кайсы стратегиялык багыттар бизге пайдалуу экендигин түшүнүүгө мүмкүн болот. Ошондуктан, мамлекеттик саясатты жүргүзүү рыноктор, продуктылар, инвестициялар, кирешелер ж.б. карата ченемдердин топтому узак мөөнөткө принципиалдык түрдө туруктуу өзгөрбөшү керек. Телеберүү чөйрөсүн ыкмалардан жана аны жайылтуу технологияларына көз каранды болбостон жөнгө салуусун мезгил талап кылп жатат. Өкмөт программалардын социалдык пакетин кабелдик, спутниктик телекөрсөтүү программалары пакетине киргизүүнүн так тартибин иштеп чыгууну көздөөдө [4].

Өлкөнү толугу менен санариптик берүүгө өткөрүү төмөнкүдөй максаттарды өзүнө камтыйт. Биздин мамлекет санариптик берүүгө санариптик берүүнүн жогорку өндүрүштүк-технологиялык мүмкүнчүлүктөрүнө чыгуу:

- берилүүчү программалык контенттин санын көбөйтүү;
- баардык аймактарда каналдарды жогорку санариптик сапатта берүү;
- мультимедиялык жана интерактивдик баарлашуу мүмкүнчүлүктөрүн түзүү;

- азыркы учурдун талабына жооп берген жаңы стандарттарды колдонуу менен берүү сигналдарын өндүрүү, калыптандыруу жана жайылтуу;
- инфокоммуникация тармагында ишкердүүлүктү өнүктүрүү үчүн жаңы мүмкүнчүлүктөрдү түзүү (кызматтык тейлөөлөр, чекене сатуу, импорттук операциялар, оңдоп - түзөө, ж.б.);
- талапка жооп берген жаңы жабдыктарды сатып алуу жана санариптик телеберүүнүн заманбап инфраструктурасын куруу. өтүүдө төмөнкүдөй максаттарды алдыга койгон:

Байланыш тармактарын жана санариптик берүүнү технологиялык жактан өнүктүрүү жакынкы учурда мамлекет жана жеке секторлор тарабынан ири инвестицияларды тартууну талап кылат. Азыркы мезгилде санариптик берүүгө өткөрүүнү ишке ашыруу боюнча негизги ишти мамлекет жана акциялардын мамлекеттик пакетине ээ болгон коммерциялык структуралар ишке ашырып келүүдө. Санариптик берүүнү өнүктүрүүдө, ири инвестицияларды тартууда, санариптик телеберүү рыногунда жаңы инвесторлорду тартуу муктаждыгы келип чыгууда. Колдонуучулар дайыма жаңы маалыматтарды, жаңылыктарды алып турууга кызыкдар. Кээ бир өлкөлөрдүн тажрыйбасы көрсөткөндөй аймактык (коллективдүү, жеке) массалык маалымат каражаттары жана телерадиоберүү мекемелери санариптик берүүгө өтүү мезгилинде ар кандай тоскоолдуктардан жана себептерден улам жабылып калуу тобокелчилигине дуушар болуу коркунучу да бар. Негизги маанилүү себептер – булар аймактык-региондук телеканалдардын техникалык жана адистик потенциалдын төмөндүгү, начар техникалык инфраструктура, аймактагы жарнамалык рыноктун көлөмүнүн аздыгы, каржы булактарынын аздыгы. Демек, бул аймактык телерадиоберүү мекемелерин өнүктүрүү үчүн уюштуруучулук – экономикалык шарттарды сактоо жана түзүү боюнча мамлекеттин туруктуу саясаты зарыл [3].

Стратегиялык мааниге ээ болгон санариптик берүүнү жайылтууну борбордук, региондук жана жергиликтүү деңгээлдерди бирдиктүү маалымат мейкиндигине топтоштурган социалдык мааниге ээ болгон долбоор катары кароо керек жана төмөнкүлөрдү эске алуу керек:

- контент (телекөрүүчүлөрдүн муктаждыктары);
- саясаттын субъекттери;
- телерадиоберүүнүн субъекттери.

Санариптик берүүгө өтүүнүн пайдалуулугунун негизги критерийи бул керектөөчүлөрдүн телерадиоберүү аркылуу маалыматтын жеткиликтүүлүгү менен канааттануу деңгээли болуп саналат, ошол себептен, маалыматтын жеткиликтүүлүгүнүн жана улуттук контенттин көлөмү санариптик берүүгө өтүүдө сапаты жогору болушу керек.

Артыкчылыктар жана пайдалуулуктар. Жаңы технологиянын негизиндеги санариптик берүү төмөндөгүдөй артыкчылыктарды берет:

- *Телеберүү менен коомчулукту камсыздоону көбөйтүү менен калкты территориалдык жактан камсыздоодогу диспропорция жоюлат;*
- *Калкты маалыматтарды өз убагында ачык колдонуусун жетишерлик түрдө кеңейтүү, санариптик берүүдө транспортту айдап жүргөндө, мобилдик телефондордо жана компьютердик каражаттарда телевизиондук программалардын тартылышын толук түрдө камсыз кылынат;*
- *Телепрограммалардын санын көрүнүктүү түрдө көбөйтүүнүн эсебинен маалыматтык булактардын кеңирирээк спектри колдонуучуларга тартууланат;*
- *Таркатуунун жана берүүнүн сапатын жакшыртуу. Санариптик телеберүүнүн сапаты тартуунун ар кандай шарттарында эң жогору бойдон калат. Санариптик телеберүүнүн аналогдук телеберүүгө караганда тоскоолдуктарга туруктуулугу жогорку эффективдүү каскаддык жаңылоочу коддордун колдонулгандыгы менен негизделет.*
- *Жеткирип берүүчү чөйрөнүн өткөрүүчүлүк жөндөмүнүн эффективдүүлүгүн жогорулатууну камсыз кылат, анткени, бир эле бөлүнгөн жыштыкта бир канча көбүрөөк телеканалдарды берүүгө болот;*
- *Керектөөчүлөргө кошумча кызматтарды жеткирүүнү өнүктүрүү мүмкүнчүлүгү камсыз кылынат (интерактивдик телеберүү, кабельдик телеберүү ж.б.) [3, 4].*

Жыйынтык. Санариптик телеберүүнү жайылтуу азыркы учурдагы пайда болгон көйгөйлөрдү чечүүдө негизги ролду ойнойт. Анализдердин жыйынтыктарына жана изилдөөлөрдөн алынган маалыматтарга карасак коомчулук үчүн маалымат алуунун негизги булагы мурункудай эле телерадиоберүү экендиги көрүнүп турат. Аналитикалык сурамжылоого катышкандардын ичинен: телеберүүдөн маалымат алгандар – 88,2%, ал эми радиоберүүдөн маалымат алгандар - 30% экени тастыкталган. Жогоруда айтылган баардык маалыматтардын негизинде азыркы мезгилде санариптик берүүнү жакшыртуу, өнүктүрүү жана жайылтуу коомчулукту өз убагында жаңы маалыматтар менен камсыз кылууда негизги ролду аткарат деп тыянак чыгарсак болот.

Адабияттар

1. Смирнов А.В., Пескин А.Е. Цифровое телевидение: от теории к практике [Текст] / А.В. Смирнов, А.Е. Пескин // Горячая линия - Телеком, 2014.
2. Кыргыз Республикасында санариптик телерадиоберүүгө өтүүнүн программасы. КР Өкмөтүнүн №692 Токтому. 02.11.2011-ж. Бишкек.
3. КР санариптик телерадиоберүүгө өтүү жана аны өнүктүрүү саясаты: кырдаалды баалоо жана жарандык коомдун сунуштары. // Санариптик Кыргызстан» коомдук уюмдар альянсы. 2014, Бишкек.
4. Сопубеков Н.А. Внедрение цифрового телерадиовещания в Кыргызской Республике. [Текст] / Н.А. Сопубеков // Известия Ошского технологического университета. 2017. №2. -С.14-18.

УДК 539.3+622.831.31
DOI: 10.52754/16947452_2022_1_205

ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОРЕЛЬЕФА (ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА) ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛОВ БАЗАЛЬТОВЫХ ПОРОД КЫЗЫЛ-КИЙСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ КР

Маматов Элбек Умаржанович, аспирант
mamatov.elbek@list.ru
Ташполотов Ысламидин, д.ф.-м.,н., профессор,
itashpolotov@mail.ru
Ибраимов Таалайбек Каилбекович, преподаватель
t.kailbekovich@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Изучены свойства поверхности микрорельефа кристаллов базальтовых пород Кызыл-Кийского месторождения КР. Исследование микрорельефа поверхности кристаллов базальтовых пород проводили на основе определения фрактальной размерности. С помощью микроскопа сопреженной с компьютером выполнено сканирование поверхности образцов кристаллов и для каждого вида кристалла изучено несколько характерных участков кристалла базальтовых пород. Проведены оценки индекса трещиностойкости базальтовых горных пород в зависимости от фрактальной размерности микрорельефа поверхности. Для определения фрактальной размерности D изображение поверхности кристалла базальта разбивали на множество ячеек и подсчитывали число занятых ячеек, далее размер ячейки увеличивается, повторяем действия предыдущего шага и по полученной зависимости числа занятых ячеек от размера ячеек определили значения индекса фрактальности и далее фрактальную размерность.*

Ключевые слова: *Кристаллы базальтовых пород, микрофотографии, индекс трещиностойкости, индекс фрактальности, метод покрытия, фрактальная размерность, разрушения горных пород.*

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН КЫЗЫЛ-КИЯ БАЗАЛЬТ КЕНИНИН КРИСТАЛЛДАРЫНЫН БЕТИНИН МИКРОРЕЛЬЕФИНИН (ФРАКТАЛДЫК КАСИЕТТЕРИН) ИЛИКТӨӨ.

Маматов Элбек Умаржанович, аспирант
mamatov.elbek@list.ru
Ташполотов Ысламидин, ф.-м.и.д., профессор,
itashpolotov@mail.ru
Ибраимов Таалайбек Каилбекович, преподаватель
t.kailbekovich@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Кыргыз Республикасынын Кызыл-Кыя базальт кенинин кристаллдарынын микрорельефинин беттик касиеттери изилденген. Фракталдык өлчөмдү аныктоонун негизинде базальт тектеринин кристаллдарынын бетинин микрорельефин изилдөө жүргүзүлгөн. Компьютер менен коштолгон микроскоптун жардамы менен кристалл үлгүлөрүнүн бети сканерден өткөрүлдү жана кристаллдын ар бир түрү үчүн базальт тектеринин кристаллынын бир нече мүнөздүү аймактары изилденген. Беттик микрорельефтин фракталдык өлчөмүнө жараша базальт тектеринин жаракаларга туруктуулугунун индексине баа берүүлөр жүргүзүлгөн. D фракталдык өлчөмүн аныктоо үчүн базальт кристаллынын бетинин сүрөтү көптөгөн клеткаларга бөлүнгөн жана ээлеген клеткалардын саны эсептелген, андан кийин клетканын өлчөмү чоңойтулуп, мурунку жасалган кадамдарды кайталап, алынган. Колдонулган клетканын өлчөмү боюнча ээлеген клеткалардын санынын анын өлчөмүнөн болгон көз карандылык табылган жана графиктен фракталдык индексинин маанилери, андан кийин фракталдык өлчөм аныкталган.*

Ачкыч сөздөр: *Базальт тоо тектеринин кристаллдары, микросүрөттөр, бекемдик көрсөткүчүнүн индекси, фракталдык индекс, каптоо ыкмасы, фракталдык өлчөм, тоо жаракалары.*

THE MICRORELIEF RESEARCH (FRACTAL PROPERTIES) OF THE SURFACE OF CRYSTALS OF BASALT ROCKS OF THE KYZYL-KII DEPOSIT OF KR

Mamatov Elbek Umarzhanovich, aplicant
mamatov.elbek@list.ru
Tashpolotov Yslamidin d.f-m.s., professor,

itashpolotov@mail.ru
Ibraimov Taalaibek Kailbekovich, teather
t.kailbekovich@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The surface properties of the microrelief of crystals of basalt rocks of the Kyzyl-Kiya deposit of the Kyrgyz Republic were studied. The study of the microrelief of the surface of basaltic rock crystals was carried out on the basis of determining the fractal dimension. Using a microscope coupled with a computer, the surface of crystal samples was scanned, and for each type of crystal, several characteristic areas of a basalt rock crystal were studied. Estimates of the index of crack resistance of basalt rocks depending on the fractal dimension of the surface microrelief have been carried out. To determine the fractal dimension D, the image of the basalt crystal surface was divided into many cells and the number of occupied cells was counted, then the cell size increased, we repeated the steps of the previous step, and the resulting dependence of the number of occupied cells on the cell size was used to determine the values of the fractality index and then the fractal dimension.*

Keywords: *Crystals of basalt rocks, micrographs, fracture toughness index, fractality index, coating method, fractal dimension, rock fractures.*

Введение. В настоящее время значительный интерес представляет вопрос о влиянии фрактальной структуры материалов на их физико-химические и технологические свойства. Например, при изучении физико-механических свойств поверхности различных кристаллов, наряду с известными физическими параметрами используются фрактальные параметры. Поскольку фрактальная размерность вещества определяет степень шероховатости рельефа поверхности, то этот параметр влияет на отдельные физические свойства кристалла[1].

Для поваренной соли определены значения фрактальной размерности, твердости и модуля упругости и установлена незначительная обратная корреляция между фрактальной размерностью поверхности и механическими характеристиками.

В работе установлена обратная корреляция между параметром S/l (S – средний шаг местных выступов профиля, l – шаг сканирования) и фрактальной размерностью. Изучена зависимость этих параметров от масштаба и показано, что значения фрактальной размерности и степень выраженности эффектов анизотропии могут быть неодинаковыми на различных масштабных уровнях.

Экспериментальная часть

Нами с помощью микроскопа сопреженной с компьютером выполнено сканирование поверхности образцов кристаллов базальтовых пород, для каждого вида кристалла изучено несколько характерных участков кристалла базальтовых пород.

Микрофотографии рельефа сканированных поверхностей базальта, приведены на рис. 1.

а) б) в)

Рис. 1. Микрофотографии рельефа поверхностей кристаллов базальтовых горных пород Кызыл-Кийского месторождения КР.

Из рис. 1 а, б, в видно, что поверхности кристалла базальтовых горных пород одного и того же месторождения обладают различные рельефы.

Методы измерения фрактальной размерности

Для определения фрактальной размерности твердых тел существуют большое число экспериментальных методов[1]. Для каждого конкретного случая, выбор метода измерения, зависит от природы рассматриваемой системы и от интервала масштабов, на котором исследуемый объект считается фрактальной.

Все методы измерения фрактальной размерности подразделяются на следующие группы:

1) методы измерения, основанные на построении различного рода покрытий;

2) методы измерения, основанные на анализе Фурье-образов фрактальных объектов, полученных при рассеянии ими света, рентгеновских лучей, электронов или нейтронов;

3) методы исследования энергопереноса на фрактальных частицах, основанные на изучении скорости релаксации возбужденных молекул красителя, распределенных на фрактальной поверхности [4,5].

В данной статье мы используем метод покрытий.

Методика обработки полученных микрофотографий

Для изучения поверхностных свойств базальтового кристалла использовали индекс фрактальности *Φ*[4] рельефа поверхности, определяемый при оценке фрактальной размерности *D* .

Согласно [5], фрактальная размерность *D* связан с *Φ* *следующим выражением* *Φ*=*D*-1. Индекс фрактальности определяли для трех взаимно перпендикулярных плоскостей.

Индекс фрактальности кристаллов базальтовых горных пород

Для определения фрактальной размерности D изображение поверхности кристалла базальта разбиваем на множество ячеек и подсчитываем число занятых ячеек, далее размер ячейки увеличивается, повторяем действия предыдущего шага и по полученной зависимости числа занятых ячеек от размера ячеек определяем фрактальную размерность.

В таблице 1 приведены вычисленные средние значения одномерного индекса фрактальности для различных участков поверхности кристаллов базальта.

Таблица 1. Средние значения индекса фрактальности (*Φ*) и фрактальной размерности D базальтового кристалла Кызыл- Кийского месторождения КР

Наименование поверхности	Среднее значение индекса фрактальности, *Φ*	Фрактальная размерность, *D*
XOY	*0,54*	*1.54*
YOZ	*0,51*	*1.51*
XOZ	*0,26*	*1.26*

Из данных, приведенных в таблицы 2 видно, что индексы фрактальности (*Φ)* выбранных плоскостей поверхности кристалла базальтовых пород Кызыл-Кийского месторождения КР находятся в интервале 0,26-0,54. Это свидетельствует о том, что эти поверхности не относятся к числу сильно шереховатых.

Наиболее высокие индексы фрактальности из трех сторон наблюдаются в плоскости XOУ и YOZ, т.е.для участков поверхности 1-ой области индекс фрактальности по горизонтальной и вертикальной линии обусловлено скачкообразным изменением высот(шереховатости).

Область XOZ является относительно гладкой и средний индекс фрактальности в этой поверхности составляет 0,26.

Таким образом установлено, что в кристаллах базальта наблюдаются эффект анизотропии фрактальных свойств по направлениям плоскости поверхности.

Взаимосвязь фрактальной размерности поверхности кристалла базальтовых горных пород на трещиностойкость

В работе установлено, что процесс образования и разрушения твердых тел имеет многоуровневую фрактальную структуру. Поэтому можно предположить, что характер рельефа поверхности разрушения кристаллов базальтовых пород также обусловлены изменениями, происходящими на различных масштабных уровнях. Для количественной характеристики структурного разрушения поверхности горной породы можно использовать фрактальную размерность, так как нижние слои кристалла связаны с верхним слоем и наооборот за счет силовых взаимодействий.Величина силовых взаимодействий, по-видимому, зависить от фрактальной размерности(шероховатости).

Показано, что для трещины, имеющей фрактальную структуру справедливы соотношения

$$\sigma(r) = pkr^{\alpha} \qquad (1)$$

где p – продольное сжимающее напряжение, r – расстояние от вершины трещины, $K = pк$– индекс интенсивности напряжений,

$$k = \sqrt{\frac{D-1}{2-D}}, \qquad \alpha = \frac{D-1{,}5}{2-D} \qquad (2)$$

D – фрактальная размерность трещины вблизи вершины.

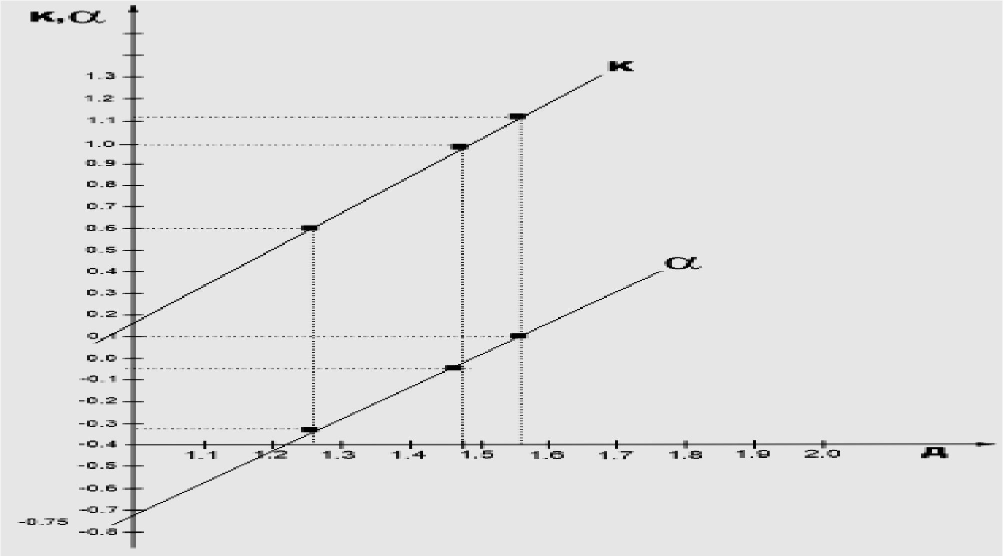
Из формул (1) и (2) видно, что в диапазоне $1<D<1{,}54$ вершина трещины является особой точкой – полюсом порядка α, т.е имеются предпосылки к распространению трещины, а при *D*>1,54 напряжения при $r \to 0$ имеют нуль порядка α и трещина не развивается.

Используя данные, приведенные в таблице 1 определим фрактальную размерность *D(см. таб 1.)* , а также коэфициенты ***к*** и ***α.***

Из полученных данных видно, что для плоскости XOZ α=-0,32, а для плоскости XOY α =0,087 и YOZ α =0,02.

На рис. 2 приведены графики зависимости параметров *k* (кривая 1) и α (кривая 2) от фрактальной размерности, полученные на основе данных приведенной в таблице 1.

Рис. 2. Зависимость трещиностойкости кристалла базальтовых пород от индекса фрактальности.



Из рисунка 2 видно, что для гладкой поверхности (*D*=1), α становится равной α=-0,75. Однако, для реальных кристаллов(горных пород), рост значений параметров *k* и α означает возрастание трещиностойкости с повышением фрактальной размерности (D) поверхности породы.

Фрактальная природа разрушения горных пород

Можно предположить, что процесс образования(разрушения) гетерогенных систем, наряду с другими физико-технологическими процессами является фрактальным процессом. Поэтому, фрактальная размерность должна входить в качестве критерия разрушения таких систем. В связи с этим нужно установить взаимосвязь между измеримыми показателями и фрактальной мерой разрушения[6-8].

Особый интерес представляет поведение фракталов в топохимических реакциях, так как гетерогенная система откликается на небольшие различия в механической, термической и химической предыстории исходных компонентов. Предположим, что основным разрушаюшим элементом горной породы является вода. Тогда такая модель разрушения должна основываться на следующих положениях:

1. Вода адсорбирется в порах твердофазной системы, и температура кипения воды в порах породы растет с уменьшением их радиуса;

2. Процесс разрушения протекает равновесно, т.е. по мере повышения температуры, вода испаряется сначала из крупных пор, потом из все более мелких;

3. Масса воды в поре пропорциональна площади поверхности этой поры и при некоторой температуре *T* определяется следующим образом:

$$m(T) \propto 1 - \alpha \propto \left(\frac{T_{cr} - T}{T - T_b} \right)^{3-D} ;$$

где 3-D степень разрушения тела; *D* — фрактальная размерность; T_b – температура кипения воды; T_{cr} – критическая температура.

Выводы. Фрактальный анализ рельефа с использованием метода минимального покрытия[1] поверхности кристаллов базальтовых пород показывает, что для них характерна невысокой степени шереховатости, так как фрактальная размерность находится в пределах 1,26–1,54, на отдельных участках поверхности могут быть практически гладкими, хотя на некоторых областях поверхности кристаллов базальта имеет место эффект анизотропии.

Поверхности базальта с более низкой фрактальной размерностью большей степени склонны к разрушению, причем в области анизотропии фрактальных свойств распространение трещины наиболее вероятно происходит в направлении с низкой фрактальной размерности. Этот установленный факт имеет важное значение при создании строительных материалов и изделий на основе базальта.

Литература

1. Латыпова Н. В. Фрактальный анализ: учеб. пособие [Текст]/Н.В.Латыпова –

Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020.   120 с.

2. Аптуков В.Н., Митин В.Ю., Морозов И.А. Фрактальные и механические свойства кристаллов поваренной соли в нанодиапазоне [Текст] / В.Н. Аптуков, В.Ю Митин., И.А. Морозов// Вестник Пермского университета. – 2014.   В. 4(27) .   С. 16–21.

3. Аптуков В.Н., Митин В.Ю., Скачков А.П. Исследование шероховатости поверхности кристаллов шпатового галита на микро- и наноуровне [Текст] / В.Н. Аптуков, В.Ю Митин., А.П. Скачков// Вестник Пермского университета.   2014.   В. 1(24) .   С. 25–30.

4. Старченко Н.В. Индекс фрактальности как анализ хаотических временных рядов[Текст]: дисс. канд. физ.-мат. наук./Н.В.Старченко.   М., 2005. 122 с.

5. Аптуков В.Н., Митин В.Ю. Сравнительные характеристики изрезанности рельефа поверхности зерен сильвина, шпатовой соли и карналлита в нанодиапазоне [Текст] / В.Н. Аптуков, В.Ю Митин // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых.   2013. № 1.   С. 51–60.

6. Ташполотов Ы., Петрянов И.В., Садовский Б.Ф. О дискретном изменении сферы действия поверхностных сил при взаимодействии конденсированных фаз[Текст] / Ы.Ташполотов, И.В.Петрянов., Б.Ф.Садовский // ДАН СССР, 1990, т. 314, №4, С. 900-903.

7. Мосолов А.Б. Фрактальная Гриффитсова трещина [Текст]/А.Б.Мосолов // Журнал технической физики. – 1991.   Т. 61. – № 7.   С. 57–60.

8. Булат А.Ф., Дырда В.И. Фракталы в геомеханике[Текст]/А.Ф.Булат, В.И.Дырда. – Киев: Наукова думка.   2005.   357 с.

«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ»
ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ

Корректор: ***Салиева А.А.***

Техникалык редактор: ***Убайдилаева Ж.А.***

ОшМУнун “Билим” редакциялык басма бөлүмүндө даярдалып,
басмадан чыгарылды.

Биздин дарегибиз: 723500, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331.
Байланыш телефондору: (+9963222) 72273
Факс: (+9963222) 70915
Электрондук дарегибиз: journal@oshsu.kg
Сайт: www.oshsu.kg

Негиздөөчүсү – Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим
министрлиги
Ош мамлекеттик университети

Басууга берилди: 29.03.2022
Көлөмү: 26,7 б.т. Буюртма: ____
Форматы: 176х250 1/8 Нуска: 200 д.

«Билим» редакциялык – басма бөлүмү