**ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ**

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

**e-ISSN: 1694-8610**

№3/2023, 65-72

***МАТЕМАТИКА***

**УДК: 517.928.2**

**DOI:** 10.52754/16948610_2023_3_8

# ТУРУКСУЗ СПЕКТРГЕ ЭЭ БОЛГОН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ С НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

ASYMPTOTICS OF SOLVING SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS WITH UNSTABLE SPECTRUM

**Садиева Акбермет Сайиповна**

*Садиева Акбермет Сайиповна*

*Sadieva Akbermet Sayipovna*

**Ош мамлекеттик университети**

*Ошский государственный университет*

*Osh State University*

asadieva@oshsu.kg

# ТУРУКСУЗ СПЕКТРГЕ ЭЭ БОЛГОН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

**Аннотация**

Макалада бир тектүү эмес сызыктуу сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн баштапкы маселенин асимптотикалык чыгарылышын тургузуу маселеси каралган. Изилденип жаткан маселенин өзгөчөлүгү системанын сызыктуу бөлүгүнүн коэффициенти болгон матрицанын спектри каралып жаткан кесиндиде туруксуз. Тактап айтканда система өзөгөчө чечимге ээ. Система бири-биринен көз каранды болбогон теңдемелерден турат. Биринчи теңдемеде өзгөчө чекит бар, ал эми экинчи теңдемеде жок. Биздин максат ушул өзгөчө чекиттин таасирин изилдөө. Коюлган баштапкы маселенин чыгарылышы бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы жалпыланган чектик функциялар жана классикалык чектик функция методдорунун жардамында тургузулат.

***Ачкыч сөздөр:*** кичине параметр, сингулярдык козголгон Кошинин маселеси, бисингулярдык маселе, туруксуз спектр, жылма тышкы чыгарылыш, чектик функциялар, чек аралык катмар.

## *АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ С НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРОМ*

**Аннотация**

В статье рассматривается задача построения асимптотического решения начальной задачи для системы неоднородной линейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Особенность исследуемой задачи состоит в том, что спектр матрицы, являющейся коэффициентом линейной части системы, нестабилен в рассматриваемом отрезке. Точнее сказать система имеет особое решение. Система состоит независимых друг к другу из двух уранений. Первое уравнение имеет особое решение, а второе не иметт особое решение. Наша цель исследовать влияние особого решения. Равномерное асимптотическое разложение поставленной задачи выстраивается с помощью методов обобщенных пограничных функций и классических пограничных функций.

***Ключевые слова:*** малый параметр, сингулярно возмущенная задача Коши, нестабильный спектр, бисингулярная задача, гладкое внешнее решение, пограничные функций, пограничный слой.

## *ASYMPTOTICS OF SOLVING SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS WITH UNSTABLE SPECTRUM*

**Abstract**

The article deals with the problem of constructing an asymptotic solution of the initial problem for a system of inhomogeneous linear singularly perturbed ordinary differential equations. The peculiarity of the problem under study is that the spectrum of the matrix, which is the coefficient of the linear part of the system, is unstable in the segment under consideration. More precisely, the system has a special solution. The system consists of two equations independent of each other. The first equation has a special solution, and the second does not have a special solution. Our goal is to investigate the impact of a special solution. The uniform asymptotic decomposition of the problem is constructed using the methods of generalized boundary functions and classical boundary functions.

***Keywords:*** small parameter, singularly perturbed Cauchy problem, unstable spectrum, turning point, smooth outer solution, boundary functions, the boundary layer.

**Маселенин коюлушу**. Сингулярдык козголгон, бир тектүү эмес, сызыктуу, биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн Кошинин төмөнкү маселесин изилдейбиз:

$$\begin{cases}\varepsilon y_1'(x) = -xy_1(x) + f_1(x), \\ \varepsilon y_2'(x) = -y_2(x) + f_2(x),\end{cases} \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y_1(0) = y_1^0,\ y_2(0) = y_2^0 \tag{2}$$

мында 0<ε<<1, $f_1, f_2 \in C^\infty[0,1]$, $y_1^0$, $y_2^0$ – const, $y_1(x)$, $y_2(x)$ белгисиз функциялар.

Эгерде төмөнкүдөй белгилөө кийирип алсак:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},\ \ A(x) = -\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix},$$

анда (1)-(2) маселе төмөнкү көрүнүшкө келет [1]-[3]:

$$\varepsilon Y'(x) + A(x)Y(x) = F(x), \quad Y(0) = Y^0 \tag{3}$$

Система бири-биринен көз каранды болбогон теңдемелерден турат. Системанын биринчи теңдемеси боюнча талдоо жүргүзсөк, $x = 0$ чекитинде асимптотикалык туруктуулук шарты бузулат. Тиешелүү козголбогон теңдеменин $-x\tilde{y}_1(x) + f_1(x) = 0$ чечими $\tilde{y}_1(x) = f_1(x)/x$ көрүнүштө болот. $x = 0$ чекитинде бул чечим өзгөчөлүккө ээ жана баштапкы шартты канааттандырбайт. Ошондуктан бул маселе бисингулярдуу маселе болуп эсептелет [4], [8]. Ал эми экинчи теңдеме кадимки сингулярдык козголгон теңдеме болуп саналат. Белгилеп кетүү керек, $x = 0$ чекитинде $A(x)$ матрицасына тескери матрица жашабайт, б.а. $A(x)$ матрицасы туруксуз спектрге ээ [5].

Биз $x \in [0,1]$ кесиндиде (1)-(2) маселенин чечиминин кичине параметр нөлгө умтулгандагы бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузабыз.

**Маселенин чыгарылышы**. Алгач тышкы чыгарылышты тургузабыз, анткени ал бизге ички чыгарылышты тургузууда кандай өзгөртүп түзүү керектигин аныктап берет. Кичине параметр методун колдонуп, тышкы чыгарылышты төмөнкү катарлар көрүнүштө издейбиз [7]:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_{10}(x) + \varepsilon y_{11}(x) + \varepsilon^2 y_{12}(x) + \cdots \\ y_2(x) &= y_{20}(x) + \varepsilon y_{21}(x) + \varepsilon^2 y_{22}(x) + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

ушул (4)- катарларды (1)- системага коюуп $y_{1i}(x)$ жана $y_{2i}(x)$ лерди аныктап, закон ченемдүүлүктү таап алабыз:

$$\begin{cases}\varepsilon(y_{10}'(x) + \varepsilon y_{11}'(x) + \varepsilon^2 y_{12}'(x)(x) + \cdots) = -x(y_{10}(x) + \varepsilon y_{11}(x) + \cdots) + f_1(x) \\ \varepsilon(y_{20}'(x) + \varepsilon y_{21}'(x) + \varepsilon^2 y_{22}'(x)(x) + \cdots) = y_{20}(x) + \varepsilon y_{21}(x) + \cdots + f_2(x)\end{cases}$$

мындан, кичине параметр методунун негизги маңызы боюнча, кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарлайбыз:

$$\varepsilon(y_{10}'(x) + \varepsilon y_{11}'(x) + \varepsilon^2 y_{12}'(x)(x) + \cdots) = -x(y_{10}(x) + \varepsilon y_{11}(x) + \varepsilon^2 y_{12}(x) + \cdots) + f_1(x)$$

$$\varepsilon^0: \quad y_{10}(x) = f_1(x)x^{-1};$$

$$\varepsilon^1: \ y_{11}(x) = (f_1(x)x^{-1})'x^{-1} = [f_1'(x)x^{-1} - f_1(x)x^{-2}]x^{-1} = (\underbrace{f_1(x) - f_1'(x)x}_{\tilde{y}_{11}(x)})x^{-3};$$

$\varepsilon^2$: $y_{12}(x) = (\tilde{y}_{11}(x)x^{-3})'x^{-1} = \tilde{y}_{12}(x)x^{-5}$

………

$\varepsilon^k$: $y_{1k}(x) = \tilde{y}_{1k}(x)x^{-(2k-1)}, \; k = 0,1,2, \dots$

$$\varepsilon(y'_{20}(x) + \varepsilon y'_{21}(x) + \varepsilon^2 y'_{22}(x)(x) + \cdots) = y_{20}(x) + \varepsilon y_{21}(x) + \varepsilon^2 y_{22}(x) + \cdots + f_2(x)$$

$\varepsilon^0$: $y_{20}(x) = -f_2(x)$;

$\varepsilon^1$: $y_{21}(x) = y'_{20}(x) = f'_2(x)$;

$\varepsilon^2$: $y_{22}(x) = f''_2(x)$;

………

$\varepsilon^k$: $y_{2k}(x) = f_2^{(k)}(x)$;, $k = 0,1,2, \dots$

Аныкталган белгисиз $y_{1i}(x)$ жана $y_{2i}(x)$ функциялардын өзгөчөлүктөрүн көрсөтүп жазабыз:

$$y_{10}(x) = f_1(x)x^{-1}$$

$$y_{11}(x) = y'_{10}(x)x^{-1} = \tilde{y}_{11}(x)x^{-2}$$

$$y_{12}(x) = \tilde{y}_{12}(x)x^{-3}$$

$$y_{13}(x) = \tilde{y}_{13}(x)x^{-4}$$

………

$$y_{1k}(x) = \tilde{y}_{1k}(x)x^{-(k+1)}, \;\; k \in N$$

$$y_{20}(x) = f_2(x)$$

$$y_{21}(x) = y'_{20}(x) = f'_2(x)$$

$$y_{22}(x) = f''_2(x)$$

$$y_{23}(x) = f'''_2(x)$$

………

$$y_{2k}(x) = f_2^{(k)}(x), \;\; k \in N.$$

Табылган $y_{1i}(x)$ жана $y_{2i}(x)$ функциялардын өзгөчөлүктөрүн эске алуу менен (4)- катарга алып барып коебуз:

$$y_1(x) = f_1(x)x^{-1} + \varepsilon\tilde{y}_{11}(x)x^{-2} + \varepsilon^2\tilde{y}_{12}(x)x^{-3} + \varepsilon^3\tilde{y}_{13}(x)x^{-4} + \cdots + \varepsilon^k\tilde{y}_{1k}(x)x^{-(k+1)} + \cdots$$

$$y_2(x) = f_2(x) + \varepsilon f'_2(x) + \varepsilon^2 f''_2(x) + \varepsilon^3 f'''_2(x) + \cdots + \varepsilon^k f_2^{(k)}(x) + \cdots$$

Белгилеп кетүү керек $y_1(x) \notin C^\infty[0,1]$,

$$y_2(x) \in C^\infty[0,1].$$

Тургузулган тышкы чыгарылыш баштапкы шартты канааттандырбайт жана баштапкы чекиттин чеке белинде асимптотикалык мүнөзүн жоготот. Бирок тышкы чыгарылыштан биз ички чыгарылыш кандай өзгөрүлмө боюнча ажыралышы керек деген маалыматты алабыз:

$$\varepsilon x^{-2} = \|x = \mu t,\ \mu^2 = \varepsilon\| = \ \mu^2(\mu t)^{-2} = t^{-2}.$$

(1)-(2)- маселенин бир калыптагы толук асимптотикалык ажыралмасын жалпыланган чектик функциялар методун колдонуп тургузабыз [6], [7].

Асимптотикалык чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{1j}(x) + \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi_j(t)\,; \\ y_2(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{2j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \omega_j(\tau)\,; \end{aligned} \qquad (5)$$

мында $y_{1j}(x)$ жана $y_{2j}(x)$ – жылма тышкы чыгарылыштын мүчөлөрү;

$\pi_j(t)$ жана $\omega_j(\tau)$ – чектик функциялар, $t = \frac{x}{\mu},\ \mu = \sqrt{\varepsilon}, \tau = \frac{x}{\varepsilon}$.

(5)- катарларды (1)- теңдемеге алып барып коюуп төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} y'_{1j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi'_j(t) = -x\left[\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{1j}(x) + \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi_j(t)\right] + f_1(x) \\ \qquad\qquad - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k \\ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} y'_{2j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} \omega'_j(\tau) = -\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{2j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \omega_j(\tau) + f_2(x) \end{cases} \qquad (6)$$

(5)- катарларды (2)- баштапкы шартта алып барып коюуп төмөнкү катыштарды алабыз:

$$y_1(0) = y_1^0$$

$$y_1^0 = y_{10}(0) + \varepsilon y_{11}(0) + \varepsilon^2 y_{12}(0) + \cdots + \frac{1}{\mu}\{\pi_0(0) + \mu\pi_1(0) + \mu^2\pi_2(0) + \cdots\}$$

$\mu^{-1}$: $\pi_0(0) = 0$;

$\mu^0$: $\pi_1(0) = y_1^0 - y_{10}(0)$;

$\mu^1$: $\pi_2(0) = 0$;

$\mu^2$: $\pi_3(0) = -y_{11}(0)$;

………

$\pi_{2k}(0) = 0, k = 0,1, \dots$;

$\pi_{2k+1}(0) = -y_{1k}(0),\ k = 1,2,\dots;$

$$y_2(0) = y_2^0$$
$$y_2^0 = y_{20}(0) + \varepsilon y_{21}(0) + \varepsilon^2 y_{22}(0) + \cdots + \omega_0(0) + \varepsilon\omega_1(0) + \varepsilon^2\omega_2(0) + \cdots$$

$\varepsilon^0: \omega_0(0) = y_2^0 - y_{20}(0);$

$\varepsilon^1:\ \omega_1(0) = -y_{21}(0);$

$\varepsilon^2:\ \omega_2(0) = -y_{22}(0);$

………

$\omega_k(0) = -y_{2k}(0),\ k = 1,2,\dots;$

(6)- системадан жылма тышкы чыгарылыштын мүчөлөрүн аныктап алабыз:

$\varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y'_{1j}(x) = -x\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_{1j}(x) + f_1(x) - \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k$

$$y_{10}(x) = \big(h_0 - f_1(x)\big)x^{-1};$$
$$y_{11}(x) = (h_1 - y'_{11}(x))x^{-1} = \tilde{y}_{11}(x);$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y_{1k}(x) = (h_k - y'_{1k}(x))x^{-1} = \tilde{y}_{1k}(x)$$
$$h_0 = f_1(0)$$
$$\dots$$
$$h_k = -y'_{1k-1}(0)$$

Эми чектик функцияларды тургузууга киришебиз. (6)- системадан төмөнкү системаны бөлүп алабыз [9]:

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j\pi'_j(t) = -t\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j\pi_j(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k \\ \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\omega'_j(\tau) = -\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\omega_j(\tau)\end{gathered} \qquad (7)$$

Баштапкы шартты эске алуу менен төмөнкү системаларга ээ болобуз:

$$\begin{gathered}\pi'_0(t) + t\pi_0(t) = h_0,\ \ \pi_0(0) = 0 \\ \omega'_0(\tau) = -\omega_0\,(\tau),\ \ \omega_0(0) = y_2^0 - y_{20}(0)\end{gathered} \qquad (8)$$

$$\begin{gathered}\pi'_{2k+1}(t) + t\pi_{2k+1}(t) = h_{2k+1},\ \ \pi_{2k+1}(0) = -y_{1k}(0) \\ \omega'_{2k+1}(\tau) = -\omega_{2k+1}(\tau),\ \ \omega_{2k+1}(0) = -y_{2k+1}(0)\end{gathered} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}\pi_{2k}'(t)+t\pi_{2k}(t)=h_{2k},\ \ \pi_{2k}(0)=0,\\ \omega_{2k}'(\tau)=-\omega_{2k}(\tau),\ \ \omega_{2k}(0)=-y_{2k}(0)\end{aligned} \tag{10}$$

(8) - (10) маселелер төмөнкү түрдөгү жалгыз чечимдерге ээ болот:

$$\pi_0(t)=h_0\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}+\frac{s^2}{2}}ds=h_0e^{-\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{\frac{s^2}{2}}ds$$

$$\omega_0(\tau)=(y_2^0-y_{20}(0))e^{-\frac{\tau^2}{2}}$$

$$\pi_{2k+1}(t)=h_{2k+1}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}+\frac{s^2}{2}}ds-y_{1k}(0)e^{-\frac{t^2}{2}}=h_{2k+1}e^{-\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{\frac{s^2}{2}}ds-y_{1k}(0)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\omega_{2k+1}(\tau)=-y_{2k+1}(0)e^{-\frac{\tau^2}{2}}$$

$$\pi_{2k}(t)=h_{2k}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}+\frac{s^2}{2}}ds=h_{2k}e^{-\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{\frac{s^2}{2}}ds$$

$$\omega_{2k}(\tau)=-y_{2k}(0)e^{-\frac{\tau^2}{2}}$$

(8)-(10) маселелерди чечүү үчүн $t\to\infty$, $\tau\to\infty$ умтулганда төмөнкү теңдештик орун алат:

$\pi_k(t)=h_k\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^5}+\cdots\right)$,

$\omega_k(\tau)=O(e^{-\frac{\tau^2}{2}}),\ \tau\to\infty$,

(5) системанын асимптотикалык чыгарылышынын бардык мүчөлөрү аныкталды.

**Корутунду**

Макалада сызыктуу бир тектүү сингулярдык козголбогон, спектри туруксуз болгон дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн (1)-(2) Коши маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы изилденди. Изилдөөнүн жыйынтыгында (1)-(2) Коши маселесинин чыгарылышы үчүн $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$ аралыгында (5) – асимптотикалык ажыралма орун ала тургандыгы далилденди. Асимптотикалык ажыралманын бардык мүчөлөрү бир маанилүү аныкталды. Теңдемелер системасында $x=0$ өзгөчө чекиттин чекебели толук изилденди. Натыйжада чек аралык функциялардын чек аралык катмардагы абалы ар түрдүү экендиги далилденди. Тактап айтканда $\pi_k(t)$ чек аралык функциялар $t\to\infty$ умтулганда даражалуу мүнөздө кемийт, ал эми $\omega_k(\tau)$ чек аралык функциялар экспоненциалдуу мүнөздө кемийт.

**Адабияттар**

1. Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations /W.Wasow. – N. Y.: Dover publications, INC, Mineola, 1965.
2. Wasow W. Linear turning point theory / W. Wasow. – N. Y. : Springer-Verlag, 1985. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1090-0.
3. Wasow W. A turning point problem for a system of two linear differential equations, /. Math. Phys., 38 A960), 257—278.
4. Алымкулов К. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач / К. Алымкулов, Д. А. Турсунов // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 12. – С. 3–11. https://doi.org/10.3103/S1066369X1612001X
5. Бобочко В. Н. Нестабильная дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений / В. Н. Бобочко // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 4. – С. 8–17.
6. Кожобеков К.Г. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 29:3 (2019), 332–340.
7. Турсунов Д. А., Кожобеков К.Г., Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота, Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 156, ВИНИТИ РАН, М., 2018, 84–88; J. Math. Sci. (N. Y.), 254:6 (2021), 788–792.
8. Турсунов Д.А., Турсунов Э.А., Асимптотика решения бисингулярной задачи коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2017. № 1 (38), 33–41.
9. Турсунов, Д., Зулпукаров, А., Садиева, А. (2022). Асимптотика решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с точкой поворота. Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника, (1), 43–50. https://doi.org/10.52754/16948645_2022_1_4