ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

ISSN 1694-7452 **e-ISSN: 1694-8610**

№2/2026, 297-311

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.928.2

DOI: 10.52754/16948610_2026_2_22

БЕРИЛГЕН КЕСИНДИДЕ ВАЛЛЕ–ПУССЕН МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАЛЫК АЖЫРАТЫЛЫШЫ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА ОТРЕЗКЕ

ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF THE VALLEE POUSSIN PROBLEM ON A SEGMENT

Садиева Акбермет Сайиповна
Садиева Акбермет Сайиповна
Sadieva Akbermet Sayipovna

улук окутуучу, Ош мамлекеттик университети
старший преподаватель, Ошский государственный университет
Senior lecturer, Osh State University
asadieva@oshsu.kg
ORCID: 0009-0009-9218-3388

БЕРИЛГЕН КЕСИНДИДЕ ВАЛЛЕ–ПУССЕН МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАЛЫК АЖЫРАТЫЛЫШЫ

Аннотация

Маанилүүлүк. Макалада сингулярдык козголгон бир тектүү эмес дифференциалдык n теңдемелер системасы изилденди. Мындай типтеги теңдемелер системасы азыркы учурда эң маанилүү маселелерден бири болуп, көбүнчө оптималдуу башкаруу маселелеринде, суюктуктардын механикасында жана электродинамикада татаал процесстерди моделдөө үчүн колдонулуп келет. Бул системалардын ичинен актуалдуу мисал катары Валле-Пуссендин маселесине изилдөө жүргүзүлдү. Каралып жаткан маселеленин өзгөчөлүгү туунду алдындагы параметрдин болушу жана системанын сызыктуу бөлүгүнүн коэффициенти болгон матрицанын спектри каралып жаткан кесиндинин үч чекитинде туруксуз. Биздин максат ушул өзгөчө үч чекиттин таасирин изилдөө. Белгилүү шарттардын негизинде маселенин чыгарылышы бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы К.Алымкуловдун жалпыланган чектик функциялар методунун жардамында тургузулду. Маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасы тургузулган жана анын калдык мүчөсү бааланган. Макалада Валле-Пуссен маселеси системадагы дифференциалдык теңдемелердин саны төрт болгон учур үчүн изилденип, системадагы дифференциалдык теңдемелер саны n болгон учур үчүн жалпылоо иретинде алынган жыйынтыктар чагылдырылды.

Ачкыч сөздөр: кичине параметр, сингулярдык козголгон Валле-Пуссендин маселеси, бисингулярдык маселе, туруксуз спектр, жылма тышкы чыгарылыш, чектик функциялар, чек аралык катмар.

Асимптотическое разложение решения задачи валле пуссена на отрезке

Аннотация

Актуальность. В статье исследуется система неоднородных сингулярно возмущенных n дифференциальных уравнений. Система уравнений этого типа в настоящее время является одной из наиболее важных и часто используется для моделирования сложных процессов в задачах оптимального управления, механики жидкостей и электродинамики. Среди этих систем в качестве актуального примера было исследование задача Валле-Пуссена. Особенностью рассматриваемой задачи является наличие параметра, предшествующего производной, и спектр матрицы, представляющей собой коэффициент линейной части системы, нестабилен в трех точках рассматриваемого сечения. Наша цель - изучить влияние этих трех конкретных точек. Равномерное асимптотическое разложение решения начально-краевой задачи строится с помощью метода обобщенных пограничных функций К. Алымкулова. Построено асимптотическое разложение решения и полечена оценка для остаточного члена. В статье задача Валле-Пуссена рассматривалась для случая, когда количество дифференциальных уравнений в системе равно четырем, а результаты, полученные для этого случая, были представлены в обобщенном виде для системы с количеством дифференциальных уравнений n.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенная задача Валле-Пуссена, бисингулярная задача, нестабильный спектр, гладкое внешнее решение; пограничная функция; пограничный слой.

Asymptotic expansion of the solution of the vallee poussin problem on a segment

Abstract

Relevance. The article studies a system of inhomogeneous singularly perturbed n differential equations. Systems of this type are currently among the most important and are widely used for modeling complex processes in optimal control theory, fluid mechanics, and electrodynamics.

Among such systems, the Valle-Poussin problem is studied as a relevant example. A distinctive feature of the problem under consideration is the presence of a small parameter multiplying the highest derivative, as well as the instability of the spectrum of the coefficient matrix of the linear part of the system at three points of the considered interval. The main objective of this work is to investigate the influence of these three specific points on the behavior of the solution.

A uniform asymptotic expansion of the solution to the boundary value problem is constructed by means of the method of generalized boundary functions developed by K. Alymkulov. An asymptotic expansion of the solution is obtained, and an estimate for the remainder term is derived. In the article, the Valle-Poussen problem was studied for the case where the number of differential equations in the system is four, and the results obtained for this case were presented in a generalized form for a system with n differential equations.

Keywords: small parameter, singularly perturbed Vallee Poussin problem, turning point, unstable spectrum, smooth outer solution, boundary functions, the boundary layer.

Киришүү

Сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер илимдин жана техниканын ар кандай тармактарында болуп жаткан көп масштабдуу процесстерди адекваттуу сүрөттөө жөндөмдүүлүгүнөн улам заманбап колдонмо математикада борбордук орунду ээлейт. Жогорку тартиптеги туунду алдында кичинекей параметрдин болушу эритмелердин структурасында олуттуу сапаттык өзгөрүүлөргө, анын ичинде чек ара жана ички катмарлардын пайда болушуна алып келет. Мындай көйгөйлөр табигый түрдө оптималдуу башкаруу теориясында, суюктук механикасында, электродинамикада, химиялык кинетикада жана башка прикладдык дисциплиналарда пайда болот. Бул изилдөөдө жогорку тартиптеги сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системаларына өзгөчө көңүл бурулат. Скалярдык теңдемелерге салыштырмалуу системалар кыйла татаал спектрдик касиеттерге жана бай асимптотикалык жүрүм-турумга ээ. Атап айтканда, сызыктуу бөлүктүн коэффициенттеринин матрицасынын спектринин структурасы катмарлуу типтеги кубулуштарды калыптандырууда жана локалдаштырууда чечүүчү ролду ойнойт. Мындай системалар үчүн маселелердин арасынан Валле-Пуссендин маселеси маанилүү орунду ээлейт.

Валле-Пуссен маселеси боюнча изилдөөлөрдүн башталышы XX кылымдын ортосуна туура келет. Алгач бул маселелерди Ж.-В. Валле-Пуссен өзүнүн эмпирикалык жана формалдуу ажыроо ыкмалары аркылуу изилдеген, негизги көңүл сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык түзүлүшүнө бурулган.

Кийинки изилдөөчүлөр, мисалы, А.А. Самарский жана И.М. Гельфанд, маселелерди асимптотикалык анализ жана көп масштабдуу методдор аркылуу талдаган. Алар чакан параметр ε таасириндеги түзөтүүлөрдү жана калдык функцияны колдонуу менен формалдуу ажыроонун тууралыгын илимий жактан негиздөөгө аракет кылышкан.

Ошондой эле, 1970–1980-жылдардан баштап, изилдөөчүлөр численные методы (санарип ыкмалар) жана спектралдык анализ аркылуу Валле-Пуссен маселелерин талдоону башташкан. Бул ыкмалар татаал көп теңдемеден турган системаларга, ички спектрдик туруксуздуктарга жана четки маселелерге натыйжалуу колдонулган.

Натыйжада, изилдөөлөрдүн өнүгүүсү бир нече негизги багыттарда жүргүзүлгөн:

1. Формалдуу ажыроо жана асимптотикалык ыкмалар — негизги аналитикалык ыкма;
2. Көп масштабдуу жана спектралдык методдор — ички динамиканы жана туруксуздукту изилдөө;
3. Санарип ыкмалар жана численные методы — татаал системаларды жана чектүү аралыктагы чечимдерди так эсептөө.

Бул изилдөөлөр Валле-Пуссен ыкмасын теориялык жактан бекемдеп, практикалык колдонууга шарт түзгөн.

Валле-Пуссен маселеси туундудан мурун кичинекей параметрдин болушу жана интервалдын бир нече чекиттеринде белгисиз функциянын маанилерин камтышы мүмкүн болгон конкреттүү чек шарттары менен мүнөздөлөт. Коэффициент матрицасынын спектри аймактын белгилүү бир чекиттеринде туруксуз болуп, ички өткөөл катмарлардын пайда болушуна алып келген учурлар өзгөчө кызыгууну жаратат. Бул макала Валле-Пуссен маселесинин алкагында сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелердин системасын изилдөөгө арналган. Биз коэффициент матрицасынын спектри каралып жаткан интервалдын үч чекитинде туруктуулугун жоготкон кырдаалга токтолобуз.

Негизги максат - бул чекиттердин асимптотикалык чечим жүрүм-турумуна тийгизген таасирин изилдөө жана бүткүл аймакта жарактуу бирдей асимптотикалык ажыроону куруу.

Бул максатка жетүү үчүн биз К.Алымкулов иштеп чыккан жалпыланган чек ара функцияларын колдонобуз. Бул ыкманын алкагында биз тышкы чечимди куруп, катмардын тууралоолорунун түзүлүшүн жана өлчөмүн аныктап, ички жана чек ара катмарларынын тиешелүү функцияларын чыгарабыз. Натыйжада, чечимдин бирдей асимптотикалык ажыроосу пайда болот жана калдык термин үчүн баа белгиленет.

Алгачкы изилдөөлөр эң жөнөкөй учурлар үчүн каралып, үч дифференциалдык теңдемеден турган система үчүн толук түрдө изилденген (Турсунов, Садиева, 2024). Бул макалада системадагы дифференциалдык теңдемелердин саны 4 болгон учур үчүн жалпыланган чек аралык функциялардын жардамында асимптотикалык ажыралма тургузулуп, n болгон учур үчүн жалпы тыянак чыгарылат.

Маселенин коюлушу. Сингулярдык козголгон, бир тектүү эмес, сызыктуу, кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн Валле-Пуссендин төмөнкү маселесин изилдейбиз. Системада дифференциалдык теңдемелердин саны n болгон учурду алалы:

$$\varepsilon Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x), x \in [0,1], \qquad (1)$$

$$B_0 Y(0) + BY(x_0) + B_1 Y(1) = Y^0, \qquad (2)$$

мында 0<ε – скалярдык кичине параметр, $A(x)$ – $n\times n$ өлчөмдөгү жөнөкөй спектри менен квадраттык матрица-функция, $F(x)$ – $n\times 1$ өлчөмдөгү белгилүү вектор-функция, $A, F \in C^{\infty}[0,1]$, Y_0 – $n\times 1$ өлчөмдөгү берилген туруктуу вектор, $Y(x)$ – $n\times 1$ өлчөмдөгү ε скалярдык кичине параметрден көз каранды болгон изделүүчү вектор-функция, B_0, B, B_1 – $n\times n$ өлчөмдөгү диоганалдык матрицалар жана ал матрицалар төмөнкү көрүнүштө болот:

$$B_0 = diag\{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{q-1}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-q+1}\},$$

$$B = diag\{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{q-1}, 1, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-q}\},$$

$$B_1 = diag\{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{q}, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-q}\},$$

Мында $B_0 + B + B_1 = E_n$ – *n-тартиптеги бирдик матрица.*

A(x) матрица-функция жөнөкөй структурага ээ, башкача айтканда A(x) матрица-функциянын баардык өздүк маанилери жуп-жуптан ар башка (эселүү өздүк маанилери жок):

$\forall x \in [0,1]: \lambda_i(x) \neq \lambda_j(x), i \neq j (i,j = 1,2,\ldots,n)$.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

U₁. A(x) матрицы-функциянын $\lambda(x) = \{\lambda_i(x)\}, i = 1,\ldots,n$ *спектрлери төмөнкү шарттарды канаатандырсын:*

а) $Re\,\lambda_1 \le Re\,\lambda_2 \le \ldots \le Re\,\lambda_{q-2} \le \lambda_{q-1} < \lambda_q < \lambda_{q+1} \le Re\,\lambda_{q+2} \le \ldots \le Re\,\lambda_n$;

$\forall x \in [0,1]: \lambda_i(x) \neq 0, i = 1,2,\ldots,q-2, q+2, q+3,\ldots,n$.

б) $\lambda_{q-1}(x) = x\tilde{\lambda}_{q-1}(x); \lambda_q(x) = (x - x_0)\tilde{\lambda}_q(x), x_0 \in (0,1); \lambda_{q+1}(x) = (1-x)\tilde{\lambda}_{q+1}(x);$

$\forall x \in [0,1]: \tilde{\lambda}_s(x) > 0$.

$x \in [0,1]$ кесиндиде Валле-Пуссендин маселесинин чечиминин кичине параметр оң жактан нөлгө умтулгандагы бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу талап кылынсын.

Маселенин өзгөчөлүктөрү:

1) Туунду алдындагы кичине параметрдин болушу;

2) Тиешелүү козголбогон маселенин чыгарылышы (ε=0):

$$A(x)\tilde{Y}(x) + F(x) = 0, \qquad (3)$$

$x=0$, $x=x_0$ жана $x=1$ чекиттерде үзгүлтүккө учурайт (Бобочко, 2005). Ошол эле учурда (1)-(2) – маселенин чечими $Y(x)$, $Y \in C[0,1]$ болот.

Сингулярдык козголгон бир тектүү кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн Валле-Пуссендин маселесинде спектрдин саны n=3 жекече учуру изилдөө жүргүзүлгөн (Турсунов, Зулпукаров, Садиева, 2022; Турсунов, Садиева, 2024). Бул макалада изилдөөнү спектрдин саны $n=4$ болгон учур үчүн мисалды карап изилдөө менен алгоритмдерди жана жүрүм-турубун так аныктап алсак, андан алынган ыкмаларды жана натыйжаларды жалпы n спектрдин саны үчүн формалдуу түрдө жалпылоо мүмкүнчүлүгүн түзөт. Бул изилдөөнүн логикасы – конкреттүү учурдан жалпы учурга өтүү аркылуу теориялык жана практикалык түшүнүктү бекемдөөгө жардам берет.

Маселенин чыгарылышы.

$A(x)$ матрица-функциясы жөнөкөй спектрге ээ болгондуктан, ар бир $x \in [0,1]$ үчүн аны төмөнкүдөй түрдө диагоналдаштырууга болот:

$$A(x) = T(x)\Lambda(x)T^{-1}(x)$$

Мында $\Lambda(x) = diag\{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)\}$, ал эми $T(x)$ - өздүк векторлордон түзүлгөн матрица.

Белгилөө киргизели:

$$A(x) = T(x)\mathrm{Z}(x)$$

Андан соң төмөнкү тартиптеги мүчөлөрдү эске алуу менен система диагоналдашкан формага келтирилет:

$$\varepsilon Z'(x) = \Lambda(x)Z(x) + \tilde{F}(x) + \varepsilon R(x)Z(x)$$

Негизги асимптотикалык структураны $\lambda_i(x)$ өздүк маанилери аныктайт. Изилдөө жөнөкөй көрүнүштө болушу үчүн $A(x)$ матрица-функциядагы спектрлердин саны 4 болгон учурду алып, толук асимтотикалык ажыралманы тургузуп алалы. Ал эми n болгон учур үчүн алынган жыйынтыктардан жалпылоо менен натыйжа алабыз. $\lambda(x) = \{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x), \lambda_4(x)\}$ спектрлерин төмөнкү көрүнүштө алалы:

$$\lambda(x) = \{-1, -x, -x + x_0, 1 - x\}.$$

$x \in [0,1]$ *кесиндиде Валле-Пуссен маселесинин чечимдеринин бир калыпта асимптотикалык ажыралмасын тургузуу талап кылынсын*

Тышкы чыгарылыш. Адаттагыдай эле, алгач $U(x)$ тышкы чыгарылышы тургузулат, анткени ал катмарлардын өлчөмүн, башкача айтканда өзгөртүүнү аныктоого мүмкүндүк берет. Тышкы чыгарылышты тургузуу үчүн кичине параметрлер ыкмасын колдонуу ыңгайлуу болот.

Кичине параметрлер усулу — бул математикалык анализде жана колдонмо эсептерде кеңири колдонулган ыкмалардын бири болуп эсептелет. Бул усул, негизинен, теңдемеде же теңдемелер системасында кичине параметр (адатта ε менен белгиленет) бар болгон учурда колдонулат. Эгерде бул параметр нөлгө жакын болсо, анда маселенин так чечимин табуу кыйын болгон шартта анын жакындатылган чечимин табууга мүмкүнчүлүк түзүлөт.

Бул усулдун негизги идеясы — изделип жаткан чечимди кичине параметр боюнча катарга ажыратуу болуп саналат. Башкача айтканда, чечим ε параметрине көз каранды функция катары каралып, ал бир нече мүчөлөрдүн суммасы түрүндө жазылат. Биринчи мүчө ε = 0 болгон учурдагы жөнөкөйлөтүлгөн маселенин чечими болуп эсептелет. Калган мүчөлөр болсо бул негизги чечимди тактоочу кошумча мүчөлөр болуп саналат.

Методду колдонууда алгач ε = 0 деп алып, баштапкы маселенин жөнөкөйлөтүлгөн түрү чечилет. Андан кийин жалпы чечим катар түрүндө жазылып, ал баштапкы теңдемеге коюлат. Натыйжада ε параметринин ар кандай даражалары боюнча теңдемелер алынат. Бул теңдемелерди ирети менен чечүү аркылуу чечимдин ар бир мүчөсү табылат.

Кичине параметрлер усулунун мааниси боюнча тышкы чыгарылыш төмөнкү катарлар түрүндө изделет (Ilin, Danilin, 2009; Wasow, 1944):

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(x,\varepsilon)$$

$$y_1(x) = y_{10}(x) + \varepsilon y_{11}(x) + \varepsilon^2 y_{12}(x) + \cdots$$

же б.а.

$$y_2(x) = y_{20}(x) + \varepsilon y_{21}(x) + \varepsilon^2 y_{22}(x) + \cdots \qquad (4)$$

$$y_3(x) = y_{30}(x) + \varepsilon y_{31}(x) + \varepsilon^2 y_{32}(x) + \cdots$$

$$y_4(x) = y_{40}(x) + \varepsilon y_{41}(x) + \varepsilon^2 y_{42}(x) + \cdots$$

Мында: $A(x)U_0(x) + F(x) = 0,$

$$A(x)U_k(x) = U'_{k-1}(x), k \in N$$

Бул катар $\lambda_i(x) \neq 0$ болгон аймактарда туура. Бирок

- $x = 0, \lambda_{q-1}(x) = 0$
- $x = x_0, \lambda_q(x) = 0$
- $x = 1, \lambda_{q+1}(x) = 0$

чекиттеринде тышкы катар бир калыпта эмес. Бул учурларда маселе бисингулярдык деп аталат. Бисингулярдык маселе - бул кичине параметр камтылган дифференциалдык теңдеме, анда параметр нөлгө жакындаганда маселенин тартиби өзгөрүп, чечимдин жүрүм-туруму кескин айырмаланат. Мындай маселелерде чечим интервалдын ичинде жай өзгөрсө, чек араларга жакын жерде тез өзгөргөн “чек аралык катмарлар” пайда болот. Ошондуктан бул маселелерди чечүү үчүн тышкы жана ички чечимдерди табып, аларды атайын ыкма менен бириктирүү талап кылынат (Ilin, Danilin, 2009).

Белгилей кетсек, (4) тышкы чыгарылыш (2) Валле-Пуссен шарттарына жооп бербейт жана тиешелүү өзгөчө чекиттердин айланасында асимптотикалык мүнөзүн жоготот.

x=0, x=x_0 жана x=1 чекиттерин камтыган Валле-Пуссендин маселесинин чечимдеринин асимптотикалык ажыралмасын тургузуу үчүн жалпыланган чек аралык функциялар усулун колдонобуз (Алымкулов, Асылбеков, Долбеева, 2013; Алымкулов, 2016).

(4) катарды (1) системага коюу менен $y_{1i}(x),\ y_{2i}(x), y_{3i}(x), y_{4i}(x)$ маанилерин аныктоо менен биргеликте төмөнкү закон ченемдүүлүккө ээ болобуз:

$$\begin{cases} \varepsilon(y'_{10}(x) + \varepsilon y'_{11}(x) + \cdots) = -(y_{10}(x) + \varepsilon y_{11}(x) + \cdots) + f_1(x) \\ \varepsilon(y'_{20}(x) + \varepsilon y'_{21}(x) + \cdots) = -x(y_{20}(x) + \varepsilon y_{21}(x) + \cdots) + f_2(x) \\ \varepsilon(y'_{30}(x) + \varepsilon y'_{31}(x) + \cdots) = (-x + x_0)\,(y_{30}(x) + \varepsilon y_{31}(x) + \cdots) + f_3(x) \\ \varepsilon(y'_{40}(x) + \varepsilon y'_{41}(x) + \cdots) = (1 - x)(y_{40}(x) + \varepsilon y_{41}(x) + \cdots) + f_4(x) \end{cases}$$

Кичине параметрлер ыкмасынын негизги принциптерине ылайык, издөөчү функцияны параметр боюнча катар түрүндө ажыратып, андан соң ошол катардагы кичине параметрдин бирдей даражаларына тиешелүү мүчөлөрдүн коэффициенттерин өз ара теңөө аркылуу белгисиз функциялар үчүн теңдемелер системасын алабыз

$$\varepsilon(y'_{10}(x) + \varepsilon y'_{11}(x) + \cdots) = -(y_{10}(x) + \varepsilon y_{11}(x) + \cdots) + f_1(x)$$

ε^0: $y_{10}(x) = f_1(x);$

ε^1: $y'_{10}(x) = y_{11}(x) \Rightarrow y_{11}(x) = f'_1(x)$

ε^2: $y_{11}'(x) = y_{12}(x) \Rightarrow y_{12}(x) = f_1''(x)$

………

ε^k: $y_{1k}(x) = f_1^{(k)}(x),\ k = 0,1,2,\dots$

………

$$(y_{20}'(x) + \varepsilon y_{21}'(x) + \varepsilon^2 y_{22}'(x) + \cdots) + (-x) \cdot\cdot (y_{20}(x) + \varepsilon y_{21}(x) + \varepsilon^2 y_{22}(x) + \cdots) = f_2(x)$$

ε^0: $y_{20}(x) = f_2(x)(-x)^{-1}$;

ε^1: $y_{21}(x) = (f_2(x)(-x)^{-1})'(-x)^{-1} = [f_2'(x)(-x)^{-1} - f_2(x)(-x)^{-2}](-x) = (\underbrace{f_2(x) - f_2'(x)(-x)}_{\tilde{y}_{21}(x)})(-x)^{-3}$;

ε^2: $y_{22}(x) = (\tilde{y}_{21}(x)(-x)^{-3})'x^{-1} = \tilde{y}_{22}(x)(-x)^{-5}$

………

$$(y_{30}'(x) + \varepsilon y_{31}'(x) + \varepsilon^2 y_{32}'(x) + \cdots) + (x_0 - x) \cdot\cdot (y_{30}(x) + \varepsilon y_{31}(x) + \varepsilon^2 y_{32}(x) + \cdots) = f_3(x)$$

ε^0: $y_{30}(x) = f_3(x)(x_0 - x)^{-1}$;

ε^1: $y_{31}(x) = (f_3(x)(-x)^{-1})'(x_0 - x)^{-1} = [f_3'(x)(x_0 - x)^{-1} - f_3(x)(x_0 - x)^{-2}](x_0 - x) = (\underbrace{f_3(x) - f_3'(x)(x_0 - x)}_{\tilde{y}_{31}(x)})(x_0 - x)^{-3}$;

………

ε^k: $y_{3k}(x) = \tilde{y}_{3k}(x)(x_0 - x)^{-(2k-1)},\ k = 0,1,2,\dots$

………

$$(y_{40}'(x) + \varepsilon y_{41}'(x) + \varepsilon^2 y_{42}'(x) + \cdots) + (1 - x) \cdot\cdot (y_{40}(x) + \varepsilon y_{41}(x) + \varepsilon^2 y_{42}(x) + \cdots) = f_4(x)$$

ε^0: $y_{40}(x) = f_4(x)(1 - x)^{-1}$;

ε^1: $y_{41}(x) = (f_4(x)(-x)^{-1})'(1 - x)^{-1} = [f_4'(x)(1 - x)^{-1} - f_4(x)(1 - x)^{-2}](1 - x) = (\underbrace{f_4(x) - f_4'(x)(1 - x)}_{\tilde{y}_{41}(x)})(1 - x)^{-3}$;

………

$y_{1i}(x)$, $y_{2i}(x)$, $y_{3i}(x)$, $y_{4i}(x)$ алынган маанилердин өзгөчөлүктөрүн эске алып (4) катарга коелу:

$$y_1(x) = f_1(x) + \varepsilon f_1'(x) + \varepsilon^2 f_1''(x) + \cdots + \varepsilon^k f_1^{(k)}(x) + \cdots$$

$$y_2(x) = f_2(x)x^{-1} + \varepsilon\tilde{y}_{21}(x)x^{-3} + \varepsilon^2\tilde{y}_{22}(x)x^{-5} + \cdots + \varepsilon^k\tilde{y}_{2k}(x)x^{-(2k-1)} + \cdots$$

$$y_3(x) = f_3(x)(x_0 - x)^{-1} + \varepsilon\tilde{y}_{31}(x)(x_0 - x)^{-3} + \varepsilon^2\tilde{y}_{32}(x)(x_0 - x)^{-5} + \cdots + \varepsilon^k\tilde{y}_{3k}(x)(x_0 - x)^{-(2k-1)} + \cdots$$

$$y_4(x) = f_4(x)(1 - x)^{-1} + \varepsilon\tilde{y}_{41}(x)(1 - x)^{-3} + \cdots + \varepsilon^k\tilde{y}_{4k}(x)(1 - x)^{-(2k-1)} + \cdots$$

Мында, $y_1(x) \in C[0,1]$. $y_2(x), y_3(x), y_4(x) \notin C[0,1]$.

Жыйынтыгында тышкы чыгарылыштын бардык мүчөлөрү формалдуу түрдө аныкталды.

(4) тышкы чыгарылыш Валле-Пуссендин (2) шартын канааттандырбайт жана тиешелүү өзгөчө чекиттердин чекебелинде асимптотикалык мүнөзүн жоготот. Бирок бул жерде биз ички созулуу масштабы жөнүндө маалымат алабыз.

$x = \mu\tau$ болсун, мында $\mu = \sqrt{\varepsilon}$. Анда $u_1(x)$ төмөнкү түрдө болот:

$$u_1(\tau) = \frac{1}{\mu\tau}\{f_1(\mu\tau) + \frac{\tilde{u}_{11}(\mu\tau)}{\tau^2} + \frac{\tilde{u}_{12}(\mu\tau)}{\tau^4} + \cdots + \frac{\tilde{u}_{1k}(\mu\tau)}{\tau^{2k}} + \cdots\}.$$

Фигуралык кашаанын ичиндеги катар жыйналат жана $\tau > 1$ учурунда асимптотикалык катар болуп саналат. Ошондуктан $x = 0$ өзгөчө чекиттердин чекебелинде координатанын созулушун $x = \mu\tau$ катышы аркылуу жүргүзүлөт. Аналогиялуу түрдө $x = x_0$ жана $x = 1$ өзгөчө чекиттеринин чекебелинде тиешелүү түрдө $x_0 - x = \mu z$ жана $1 - x = \mu t$ катыштары аркылуу жүргүзүлөт.

Валле-Пуссен маселесинин чечиминин $x = 0$, $x = x_0$ жана $x = 1$ өзгөчө чекиттерин камтыган асимптотикалык ажыралмасын тургузуу жалпыланган чек аралык функция ыкмасынын жардамында ишке ашырылат (Алымкулов, Асылбеков, Долбеева, 2013; Алымкулов, 2016)

Функциянын асимптотикалык ажыроосун төмөндө берилген формада карап чыгып, анын касиеттерин жана мүчөлөрүнүн жүрүм-турумун изилдейбиз:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{1j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \upsilon_j(\eta) \\ y_2(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{2j}(x) + \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi_j(\tau) \\ y_3(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{3j}(x) + \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \omega_j(z) \\ y_4(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{4j}(x) + \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \varphi_j(t) \end{aligned} \qquad (5)$$

Мында $y_{1j}(x)$, $y_{2j}(x)$, $y_{3j}(x)$, $y_{4j}(x)$ – тышкы жылма чыгарылыштын мүчөлөрү;

$\upsilon_j(\eta)$, $\pi_j(\tau)$, $\omega_j(z)$ жана $\varphi_j(t)$ – чек аралык функциялар, $\eta = \frac{x}{\varepsilon}, \tau = \frac{x}{\mu}, z = \frac{x_0 - x}{\mu}, t = \frac{1-x}{\mu}, \mu = \sqrt{\varepsilon}$.

(5) катарды (1) теңдемеге коюу менен төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} y'_{1j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} \upsilon'_j(\eta) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{1j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \upsilon_j(\eta) = f_1(x) \\ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} y'_{2j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi'_j(\tau) + x\left[\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{2j}(x) + \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi_j(\tau)\right] = f_2(x) \\ \qquad - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_{1k} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_{1k} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} y'_{3j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \omega'_j(z) + (x_0 - x)\left[\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{3j}(x) + \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \omega_j(z)\right] = f_3(x) \\ \qquad - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_{2k} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} y'_{4j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \varphi'_j(t) + (1 - x)\left[\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_{4j}(x) + \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \varphi_j(t)\right] = f_4(x) \\ \qquad - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_{3k} \end{cases} \qquad (6)$$

Изилдөөнүн кийинки кадамдарын биз системанын биринчи жана үчүнчү теңдемелери үчүн жүргүзөбүз, ал эми системанын экинчи жана төртүнчү теңдемелери үчүн бул кадамдар ушуга окшош болот.

(5) катарды (2) шартка коюу менен төмөнкү теңдештиктерди алууга болот:

$$y_1(0) = y_1^0$$

$$y_1^0 = y_{10}(0) + \varepsilon y_{11}(0) + \varepsilon^2 y_{12}(0) + \cdots + \upsilon_0(0) + \varepsilon \upsilon_1(0) + \varepsilon^2 \upsilon_2(0) + \cdots$$

ε^0: $\upsilon_0(0) = y_1^0 - y_{10}(0)$;

ε^1: $\upsilon_1(0) = -y_{11}(0)$;

ε^2: $\upsilon_1(0) = -y_{12}(0)$;

………

$\omega_k(0) = -y_{1k}(0)$, $k = 1,2,\ldots$;

… … …

$$y_3(0) = y_3^0$$

$$y_3^0 = y_{30}(0) + \varepsilon y_{31}(0) + \varepsilon^2 y_{32}(0) + \cdots + \frac{1}{\mu}(\omega_0(0) + \varepsilon \omega_1(0) + \varepsilon^2 \omega_2(0) + \cdots)$$

μ^{-1}: $\omega_0(0) = 0$;
μ^0: $\omega_1(0) = y_3^0 - y_{30}(0)$;
μ^1: $\omega_2(0) = 0$;
μ^2: $\omega_3(0) = -y_{31}(0)$;
………
$\omega_{2k}(0) = 0,\ k = 1,2,\dots;$
$\omega_{2k+1}(0) = -y_{3k}(0),\ k = 1,2,\dots;$

(6) - системадан көрүнүп тургандай, биринчи теңдеме жок дегенде бир чечимге ээ жана бул чечим жылма (гладкий) болуп саналат. Ал эми системанын кийинки теңдемелеринен жылма тышкы чечимдин мүчөлөрүн табабыз:

$$\varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_{3j}'(x) + (x_0 - x)\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_{3j}(x) = f_3(x) - \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k$$
$$y_{30}(x) = (f_3(x) - h_{20})(x_0 - x)^{-1} \approx \tilde{y}_{30}(x);$$
$$y_{31}(x) = (y_{31}'(x) - h_{21})(x_0 - x)^{-1} \approx \tilde{y}_{31}(x);$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y_{3k}(x) = (y_{3k}'(x) - h_{2k})(x_0 - x)^{-1} \approx \tilde{y}_{3k}(x)$$
$$h_{20} = f_3(0)$$
$$\dots$$
$$h_{2k} = -y_{3k-1}'(0)$$

Мындан кийин чек аралык функцияларды табуу үчүн (6) системадан төмөнкү системаны бөлүп алабыз:

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j \upsilon_j'(\eta) = -\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j \upsilon_j(\eta)\\ \sum_{j=0}^{\infty}\mu^j \pi_j'(\tau) + \tau\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j \pi_j(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k\\ \sum_{j=0}^{\infty}\mu^j \omega_j'(z) + z\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j \omega_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k\\ \sum_{j=0}^{\infty}\mu^j \varphi_j'(t) + t\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j \varphi_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k\end{gathered} \tag{7}$$

(2) шарты эске алуу менен төмөнкү системаны аныктап алууга болот.
Биринчи теңдеме үчүн:

$$\left.\begin{gathered}\upsilon_0'(\eta) = -\upsilon_0\ (\eta),\ \ \upsilon_0(0) = y_1^0 - y_{10}(0)\\ \upsilon_{2k+1}'(\eta) = -\upsilon_{2k+1}(\eta),\ \ \upsilon_{2k+1}(0) = -y_{1k+1}(0)\\ \upsilon_{2k}'(\eta) = -\upsilon_{2k}(\eta),\ \ \upsilon_{2k}(0) = -y_{1k}(0)\end{gathered}\right\} \tag{8}$$

Экинчи теңдеме үчүн:

$$\left.\begin{gathered}\omega_0'(z) + x\omega_0\ (z) = h_{20},\ \ \omega_0(0) = 0\\ \omega_{2k+1}'(z) + x\omega_{2k+1}(z) = h_{2,2k+1},\ \ \omega_{2k+1}(0) = -y_{3k}(0)\\ \omega_{2k}'(z) + x\omega_{2k}(z) = h_{2,2k},\ \ \omega_{2k}(0) = 0\end{gathered}\right\} \tag{8'}$$

Акыркы алынган теңдемелерден төмөнкү жалгыз чечимдерге ээ болобуз:
Биринчи теңдеме үчүн:

$$v_0(\eta) = (y_1^0 - y_{10}(0))e^{-\frac{\eta^2}{2}}$$
$$v_{2k+1}(\eta) = -y_{1k+1}(0)e^{-\frac{\eta^2}{2}}$$
$$v_{2k}(\eta) = -y_{1k}(0)e^{-\frac{\eta^2}{2}}$$

Экинчи теңдеме үчүн:

$$\omega_0(z) = h_{20}\int_{x_0}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{s^2}{2}}ds = h_{20}e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{x_0}^{z} e^{\frac{s^2}{2}}ds$$
$$\omega_{2k+1}(z) = h_{2,2k+1}\int_{x_0}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{s^2}{2}}ds - y_{3k}(0)e^{-\frac{z^2}{2}} = h_{2,2k+1}e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{x_0}^{z} e^{\frac{s^2}{2}}ds - y_{3k}(0)e^{-\frac{z^2}{2}}$$
$$\omega_{2k}(z) = h_{2,2k}\int_{x_0}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{s^2}{2}}ds = h_{2,2k}e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{x_0}^{z} e^{\frac{s^2}{2}}ds$$

(8), (8)’ маселенин жалгыз чечими жашайт, тиешелүү түрдө чек аралык катмардан сырткары даражалуу мүнөздө кемийт жана маселелерди чечүү үчүн төмөнкү теңдештик орун алат:

$v_k(\eta) = O(e^{-\frac{\eta^2}{2}}), \eta \to \infty,$
$\pi_k(\tau) = h_k\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^5} + \cdots\right),\ \tau \to \infty,$
$\omega_k(z) = h_k\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \cdots\right),\ z \to \infty,$
$\varphi_k(t) = h_k\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^5} + \cdots\right),\ t \to \infty,$

Ошентип, жүргүзүлгөн далилдөө көрсөткөндөй, (5) формалдуу ажыралма Валле-Пуссендин (1) жана (2) теңдемелеринен турган маселенин так чечими болуп саналат.

Бул изилдөөдө негизинен системанын биринчи жана үчүнчү теңдемелерине бурулду, анткени ушул теңдемелер аркылуу маселенин негизги мүнөздөмөлөрү жана жүрүм-туруму так байкалат. Бул этапта ар бир теңдеме боюнча алгач негизги жакындашуу аныкталып, андан кийин кичине параметр ε таасиринен келип чыккан кошумча мүчөлөр ырааттуу түрдө эсептелет.

Биринчи жана үчүнчү теңдемелерге жүргүзүлгөн изилдөө кадамдары жалпы методиканын ядросун түзөт жана системанын чечиминин жүрүм-турумун түшүнүүгө мүмкүндүк берет. Экинчи жана төртүнчү теңдемелер үчүн ошол эле ыкма колдонулат: негизги жакындашуу аныкталып, түзөтүү мүчөлөрү кошулат жана алынган жыйынтыктар калдык функция аркылуу текшерилет.

Мындан улам, системанын бардык теңдемелери үчүн изилдөө бирдиктүү жана уюшкан схема менен жүргүзүлүп, ар бир теңдеменин өзгөчөлүктөрү эске алынган. Бул ыкма натыйжаларды жалпылоо жана көп теңдемеден турган татаал системаларга колдонуу мүмкүнчүлүгүн камсыз кылат.

Тургузулган формалдуу асимптотикалык ажыралманы тууралыгын жана негиздүүлүгүн текшерүү үчүн калдык функция колдонулат. Ал жакындашкан чечимди оригиналдык теңдемеге салыштырып түзүлөт жана эгер ажыралма туура болсо, калдык функция ε→0 болгондо нөлгө умтулат. Бул ыкма түзөтүүлөрдүн таасирин баалоого жана системанын жалпы жүрүм-турумун талдоого мүмкүндүк берет, ошондой эле формалдуу ажыралманын аналитикалык негизин бекемдейт:

$R_n(x) = Y(x) - G_n(x)$, мында $R_n(x) = (R_{1,n}(x) R_{2,n}(x) R_{3,n}(x) R_{4,n}(x))^T$, $Y(x)$ – (1)-(2) маселенин чечими, ал эми $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k U_k(x) + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{2n+1} \mu^k \Pi_k(x)$.

Бул аныктамадан көрүнүп тургандай, $R_n(x)$ калдык мүчө катары так чечим менен анын асимптотикалык жакындашуусунун айырмасын мүнөздөйт жана анын жүрүм-туруму формалдуу ажыроонун тууралыгын баалоодо негизги роль ойнойт.

Калдык функция үчүн алынган маселе төмөнкү түргө ээ::

$$\varepsilon R'_n(x) = A(x) R_n(x) + \varepsilon^{n+1} \tilde{F}(x),\ x \in [0,1],$$
$$\mathrm{B}_1 \mathrm{R}_\mathrm{n}(0) + \mathrm{B}_2 \mathrm{R}_\mathrm{n}(\mathrm{x}_0) + \mathrm{B}_3 \mathrm{R}_\mathrm{n}(1) = 0.$$

$\tilde{F}(x)$ - жогорку тартиптеги мүчөлөрдү камтыган белгилүү вектор-функция.

Берилген теңдемеден көрүнүп тургандай, калдык функция $R_n(x)$ да сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемеге баш ийет, бирок анын оң жагында ε^{n+1} тартиптеги мүчө пайда болот. Бул жагдай калдык функциянын кичине параметр боюнча жогорку тартипте кичирейишин камсыз кылат. Башкача айтканда, тиешелүү шарттар аткарылганда

$R_n(x) = O(\varepsilon^n), \varepsilon \to 0, \forall x \in [0,1]$.

Бул көрсөтүлгөн баалоо калдык функциясынын n-чи деңгээлдеги тартибин аныктайт. Бул шартта $R_n(x)$ ε параметри кичинеленген сайын акырындап азаят жана системанын жакындашкан чечими оригиналдык теңдемеге акырындап жакындашат. Башкача айтканда, $\varepsilon \to 0$ болгондо калдык функция $O(\varepsilon^n)$ тартибинде чектелет, жана бул ар бир x чек аралык аралыктан [0,1] көз карандысыз сакталат.

Илимий жактан алганда, мындай баалоо бир нече маанилүү аспектилерди камтыйт. Биринчиден, ал формалдуу ажыроонун тууралыгын кепилдейт: n-чи тартиптеги жакындашуу оригиналдык чечимге белгилүү тактыкта жана ε параметри азайган сайын мүнөздүү жакындашат. Экинчиден, калдык функциянын мындай тартиптеги азаюусу түзөтүү мүчөлөрүнүн чечимге таасирин систематикалык түрдө баалоого мүмкүндүк берет жана ар бир деңгээлдеги түзөтүүлөрдүн маанилүүлүгүн ачык көрсөтөт. Үчүнчүдөн, баалоо [0,1] аралыктагы бардык x үчүн иштелип чыккандыктан, системанын чечиминин глобалдык жүрүм-турумун анализдөөгө мүмкүндүк түзүлөт, жана локалдык каталар гана эмес, бүтүндөй аралыктагы жакындашуунун тактыгы каралат.

Ошентип, $R_n(x) = O(\varepsilon^n)$ түрүндөгү асимптотикалык баалоо формалдуу ажыроонун аналитикалык негизин түзөт жана системанын чечимин көп деңгээлдүү жакындашуу аркылуу изилдөөгө, ошондой эле ички жана четки шарттардагы туруктуулукту жана өзгөрүүлөрдү талдоого мүмкүндүк берет. Бул баалоо Валле-Пуссен ыкмасы менен алынган асимптотикалык чечимдердин илимий негиздүүлүгүн тастыктайт жана алардын практикалык колдонулушу үчүн тактык критерийин камсыздайт.

Төрт өлчөмдүү система үчүн спектралдык касиеттер изилденгенден кийин, алынган жыйынтыктарды жалпы n өлчөмдүү учурга жалпылоо табигый кадам болуп саналат. Жалпы учурда каралып жаткан система n теңдемеден туруп, ага тиешелүү матрицалык оператор $A(x)$ $n \times n$ өлчөмгө ээ болот. Бул матрицанын спектри анын менчик маанилеринин жыйындысы катары аныкталат:

$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)$

Демек, n өлчөмдүү система үчүн спектрдин саны n ге барабар болуп, ар бир менчик мааниси системанын тиешелүү багыттагы динамикалык жүрүм-турумун мүнөздөйт. Бул маанилер системанын чечиминин туруктуулугуна, өсүү же өчүү ылдамдыгына жана көп масштабдуу түзүлүшүнүн пайда болушуна түздөн-түз таасир этет.

Сингулярдык козголгон системаларда спектрдин түзүлүшү өзгөчө мааниге ээ. Эгер өздүк маанилердин бир бөлүгү чоң модулга ээ болсо, анда система тез өзгөрүүчү компоненттерди камтыйт; ал эми кичине же нөлгө жакын өздүк маанилер жай өзгөрүүчү процесстерге алып келет. Мындай айырмачылык чечимде чек аралык катмарлардын жана ички катмарлардын пайда болушуна шарт түзөт. Ошондой эле, өздүк маанилердин реалдуу бөлүгүнүн белгиси системанын туруктуулугун аныктайт: терс реалдуу бөлүк туруктуулукту камсыз кылса, оң реалдуу бөлүк туруксуз жүрүм-турумду жаратышы мүмкүн.

Мындан тышкары, n өлчөмдүү учурда спектрдин бөлүнүшү (мисалы, “тез” жана “жай” спектрге ажыроо) асимптотикалык ажыралманы курууда негизги роль ойнойт. Бул ажыралма аркылуу ар кандай масштабдагы компоненттер өз-өзүнчө каралып, формалдуу чечимдин тактыгы жогорулатат.

Ошентип, төрт өлчөмдүү система үчүн алынган спектралдык жыйынтыктарды n өлчөмгө жалпылоо менен төмөнкү негизги тыянакка келүүгө болот: система үчүн спектр n өздүк мааниден турат жана алардын жайгашуусу менен касиеттери системанын чечиминин сапаттык жүрүм-турумун, туруктуулугун жана көп масштабдуу түзүлүшүн аныктайт. Бул жалпылоо Валле-Пуссен маселесинде көп өлчөмдүү системаларды изилдөөнүн теориялык негизин түзөт жана асимптотикалык ыкмалардын колдонулушун кеңейтет.

Талкулоо

Бул макалада алынган жыйынтыктар сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн чечимдердин жүрүм-туруму туундуга көбөйтүүчү кичинекей параметр менен гана эмес, системанын сызыктуу бөлүгүнүн коэффициенттеринен түзүлгөн матрицасынын спектрдик касиеттери менен да аныкталаарын тастыктайт. Каралып жаткан Валле-Пуссен маселесинин негизинде спектрдин аралыктын үч чекитиндеги туруксуздугу классикалык чек ара катмарларынан тышкары ички өткөөл катмарлардын пайда болушуна алып келет.

Изилдөөнүн негизги натыйжасы - бул үч чекиттин асимптотикалык ажыроо структурасына тийгизген таасирин аныктоо. Ар бир туруксуздук чекити масштабы жана структурасы матрицанын жергиликтүү спектрдик жүрүм-туруму менен аныкталган өзүнүн жергиликтүү деңгээлдеги коррекциясын жаратат. Натыйжада, чечимдин асимптотикалык чагылдырылышы тышкы чечимди ички жана чек ара катмарларынын бир нече компоненттери менен бириктирип, курама мүнөзгө ээ болот.

К. Алымкулов тарабынан иштелип чыккан жалпыланган чек ара функцияларынын методун колдонуу дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн өзүнүн натыйжалуулугун көрсөттү. Бул ыкма процедуранын аналитикалык тунуктугун сактап, бардык аралыкта жарактуу болгон бирдей асимптотикалык ажыроону системалуу курууга мүмкүндүк берет. Атап айтканда, калдык мүчөсү үчүн ачык баалоо корутундусу кичинекей параметр боюнча жакындоонун бирдей мүнөзүн тастыктайт.

Иштин маанилүү аспектиси системадагы дифференциалдык теңдемелердин саны 3 болгон учур изилденип, теңдемелердин саны төрт болгон учур үчүн стабилдүү эмес спектрлердин өзгөчөлүгүн эске алуу менен бир калыптагы асимптотикалык ажырламаны тургузуу. Ошондой эле системадагы дифференциалдык теңдемелердин саны n болгон учур үчүн изилдөөнүн жыйынтыгын жалпылоо болуп саналат.

Төрт теңдемеден турган система үчүн спектр төрт өздүк мааниден турганы белгилүү. Жалпыланган учурда, n теңдемеден турган система үчүн спектрдин саны да n-ге барабар болот жана ар бир менчик мааниси $\lambda_i(x)$, i=1,2,…,n, системанын өз алдынча динамикалык мүнөздөмөсүн аныктайт. Спектрдик анализ аркылуу алынган бул өздүк маанилер системанын чечиминин сапаттык жүрүм-турумуна түздөн-түз таасир этет.

Талкуулоо жагынан караганда, өздүк маанилердин белгилери жана чоңдуктары маанилүү мааниге ээ. Эгерде $\lambda_i(x)$ терс реалдуу бөлүккө ээ болсо, анда системанын тиешелүү компоненттери туруктуу, ал эми оң реалдуу бөлүккө ээ болгон өздүк маанилер туруксуздукту жаратат. Нөлгө жакын же кичине өздүк маанилер болсо, бул чек аралык катмарлардын пайда болушуна жана чечимдин көп масштабдуу структурасына алып келет. Бул өзгөчөлүк Валле-Пуссен маселесинин негизги өзгөчөлүктөрүнүн бири болуп эсептелет: калдык функциялар жана түзөтүүлөр спектрдин тартибин жана кичине параметрдин таасирин эске алуу менен түзүлөт.

Ошентип, n теңдемеден турган системалар үчүн спектр n өздүк мааниден турат жана алардын таасири менен системанын глобалдык жана локалдык динамикасын талдоого мүмкүнчүлүк түзүлөт. Бул талдоо чек аралык функциялар ыкмасы менен алынган асимптотикалык чечимдердин негиздүүлүгүн жана тууралыгын системалуу түрдө баалоого шарт түзөт.

Бул сунушталган ыкма фазалык мейкиндиктин конкреттүү өлчөмдүүлүгүнө көз каранды эмес экенин жана окшош спектрдик касиеттери бар кеңири класстагы тапшырмаларга колдонулушу мүмкүн экенин көрсөтүп турат. Ошол эле учурда, анализ андан ары изилдөө үчүн бир нече жолду ачып берет. Тактап айтканда, спектрдик туруксуздук чекиттери бириккен же интервалдын чегине жакын жайгашкан учурларда кошумча изилдөөлөр талап кылынат. Мындан тышкары, маселенин сызыктуу эмес жалпылоосу жана алынган асимптотикалык формулаларды сандык текшерүү келечектеги изилдөө үчүн келечектүү темаларды билдирет. Ошентип, берилген жыйынтыктар сингулярдык бузулган системалар үчүн асимптотикалык методдордун өнүгүшүнө көмөктөшөт жана көп масштабдуу чечим структураларын түзүүдө ички спектрдик туруксуздук чекиттеринин ролун түшүнүүнү тереңдетет.

Корутунду

Бул макалада каралган изилдөө Валле-Пуссен маселесинин алкагында сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системаларынын өзгөчөлүктөрүнө багытталган. Бул жерде негизги көңүл системадагы сызыктуу бөлүктүн коэффициент матрицасынын спектрдик өзгөрүүлөрүнө жана анын чечимге тийгизген таасирине бурулган.

Негизги идеялар:

1. Спектралдык туруксуздук чекиттери. Изилдөөнүн өзөгү — матрицанын спектри каралып жаткан интервалдын үч ички чекитинде туруктуулугун жоготкон учур. Бул чекиттерде сызыктуу система "туруктуу эмес" абалга өтөт, ал эми чечимдин сапаттык түзүлүшү маанилүү өзгөрүүлөргө дуушар болот.
2. Ички жана тышкы чек ара катмарлары. Классикалык чек ара катмарларынан тышкары, спектралдык туруксуздук чекиттеринин айланасында ички өткөөл катмарлар пайда болот. Бул катмарлар жергиликтүү түзөтүүлөрдү киргизип, асимптотикалык чечимди тактоо үчүн маанилүү. Башкача айтканда, чечим үч деңгээлде курулат:
   - Тышкы чечим — система глобалдуу деңгээлде кандай жүрөрүн көрсөтөт.
   - Чек ара катмарлары — системанын чек ара шарттарын камсыз кылат.

- o Ички өткөөл катмарлары — спектралдык туруксуздук чекиттеринин таасирин жергиликтүү деңгээлде корректировка кылат.

3. Жалпыланган чек аралык функциялар ыкмасы. К. Алымкулов тарабынан иштелип чыккан жалпыланган чек ара функциялары ыкмасы колдонулуп, асимптотикалык ажыралманы бир калыпта формасы курулган. Бул ыкма кичинекей параметр боюнча асимптотикалык жакындоонун тактыгын камсыз кылат жана калдык мүчөнүн баасын так эсептөөгө мүмкүндүк берет.
4. Жалпылоо жана спектралдык мүнөздөмөлөр. Баштапкы эсептөөлөр системадагы дифференциалдык теңдемелердин саны үч болгон учурда жүргүзүлгөн. Бул макалада системадагы дифференциалдык теңдемелердин саны төрт болгон учур үчүн изилдөөлөр жүргүзүлүп, n болгон жалпы учурга жалпыланган. Бул жалпылоо ыкманын ишенимдүүлүгүн жана кеңири колдонулушун көрсөтөт, себеби спектрдик мүнөздөмөлөрү окшош системаларда метод бирдей натыйжа берет.
5. Илгерилетилген аналитикалык база. Натыйжалар көп масштабдуу кубулуштарды теориялык жактан түшүнүүгө жардам берип, ички спектрдик туруксуздук менен чек ара маселелерди изилдөө үчүн күчтүү аналитикалык негизди камсыз кылат. Башкача айтканда, изилдөө теориялык жактан системанын жүрүшүн так жана деталдуу сүрөттөйт, ал эми практикалык жактан сандык моделдөө жана анализ үчүн негиз түзөт.

Адабияттар:

1. Алымкулов, К., Асылбеков, Т.Д., Долбеева, С.Ф. (2013). Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка. *Математические заметки,* 94(4), 484–487.
2. Алымкулов, К. (2016). Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач. *Известия вузов. Математика,* 12. 3–11. https://doi.org/10.3103/S1066369X1612001X
3. Бобочко, В.Н. (2005). Нестабильная дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. *Известия вузов. Математика*, 4, 8–17.
4. Турсунов, Д.А., Кожобеков, К.Г. (2021). Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота. *Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.,* 156, ВИНИТИ РАН, М., 2018, 84–88; J. Math. Sci. (N. Y.), 254:6 (2021), 788–792.
5. Турсунов, Д., Зулпукаров, А., Садиева, А. (2022). Асимптотика решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с точкой поворота. *Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника,* (1), 43–50. https://doi.org/10.52754/16948645_2022_1_4
6. Турсунов, Д., Садиева, А. (2024). Асимптотика решения одной задачи Валле-Пуссена с нестабильным спектром. *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»,* 16(2), 72–77. DOI: https://elibrary.ru/item.asp?id=65643702
7. Садиева, А. (2023). Туруксуз спектрге ээ болгон сингулярдык козголгон маселенин чыгарылышынын асимптотикасы. *Ош мамлекеттик университетинин Жарчысы,* 3, 65-72. DOI: 10.52754/16948610_2023_3_8
8. Bobochko, V. N. (1929). The de la Vallée-Poussin problem for a system of singularly perturbed differential equations with unstable spectrum. *Soviet Math. (Iz. VUZ),* 32:6, 16–28.

9. de la Vallee-Poussin Ch. J. Sur l'equation differentielle lineaire de second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. *Extension aux equations d'ordre n. J. Math. pures et appl.* 8, No 2, 125-144.
10. Kiguradze, I. (1997). Bedřich Půža On the Vallée-Poussin problem for singular differential equations with deviating arguments. *Archivum Mathematicum,* Vol. 33 No. 1-2, 127-138.
11. Ilin, A.M., Danilin, A.R. (2009). *Asimptoticheskie metody v analize (Asymptotic methods in analysis).* Moscow, FIZMATLIT Publ., 248 p. (in Russ.).
12. Wasow, W. (1944) *Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation* $\Delta U + \lambda(\partial/\partial x)U = \lambda f(x, y)$. Duk