ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

ISSN: 1694-7452 **e-ISSN: 1694-8610**

№1/2026, 219-229

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.928.2

DOI: 10.52754/16948610_2026_1_15

ИЧКИ КАТМАРГА ЭЭ БОЛГОН ЭКИ ЧЕКИТТТҮҮ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH AN INTERIOR LAYER

Сулайманов Завур Мамадалиевич
Сулайманов Завур Мамадалиевич
Sulaimanov Zavur Mamadalievich

окутуучу, Ош мамлекеттик университети
преподаватель, Ошский государственный университет
Lecturer, Osh State University
szavur1983@mail.ru
ORCID: 0009-0009-5355-1459

ИЧКИ КАТМАРГА ЭЭ БОЛГОН ЭКИ ЧЕКИТТТҮҮ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

Аннотация

Макалада сингулярдык козголон биринчи тартиптеги сызыктуу, бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн эки чекиттүү чектик маселе изилденет. Сингулярдык козголгон маселелер илимдин ар түрдүү тармактарында көп кездешет. Мисалы. жука же ийилгич конструкциялардын (балка, пластинка) термелүүсүн изилдегенде, тез жана жай жүрүүчү процесстерди чагылдырууда, оптикада жана кванттык физикада кичи параметр ε толкундун узундугун же энергиясынын масштабын мүнөздөйт. Каралып жаткан эки чекиттүү сингулярдык козголгон чектик маселенин өзгөчөлүктөрү – козголуу деп аталуучу кичи парметрдин белгисиз изделүүчү функциянын туундусу белгиси астында катышып жаткандыгы жана каралып жаткан кесиндинин ичинде системанын эки теңдемеси өзгөчө чекиттерге ээ болушу. Бул эки өзгөчөлүк эки катмарды пайда кылат, биринчиси классикалык чек аралык катмарды, ал эми экинчиси – ички катмарды. Системанын чечими үч функциянын суммасынан турат, алар регулярдык тышкы чыгарылыш, кесиндинин учтарынын чеке белиндеги чек аралык катмарды мүнөздөөчү чыгарылыш жана кесиндинин ичиндеги өзгөчө чекиттердин чеке белиндеги ички катмарларды мүнөздөөчү чыгарылыш. Ар бир кошулуучу асимптотикалык катар көрүнүшүндө аныкталат. Макаланын максаты эки чекиттүү сингулярдык козголгон чектик маселенин [0,1] кесиндидеги чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу.

Ачкыч сөздөр: эки чекиттүү чектик маселе, бисингулярдык козголуу, сингулярдык козголуу, асимптотикалык чыгарылыш, асимптотикалык ажыралма, чек аралык катмар, ички катмар, кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасы

Асимптотика решения двухточечной краевой задачи с внутренним слоем

Аннотация

В статье исследуется двухточечная краевая задача для сингулярно возмущенного, линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения. Сингулярно возмущенные задачи часто встречаются в различных областях науки. Например, при исследовании колебаний тонких или гибких конструкций (балка, пластина), при отображении быстро-медленно меняющихся процессов, оптике и квантовой физике ε малый параметр характеризует длину волны или масштаб энергии. Особенностями рассматриваемой сингулярно возмущенной двухточечной краевой задачи являются: присутствие возмущения т.е. малого параметра перед производной неизвестной искомой функций и особых точек двух уравнений системы внутри рассматриваемого отрезка. Перечисленные особенности порождают два слоя, первое – классический пограничный слои, а вторoе внутренний слои. Решение системы состоит из суммы трех функций: регулярное внешнее решение, решение в окрестностях граничных точек, характеризующий классические пограничные слои и решение в окрестностях особых точек внутри отрезка [0,1], характеризующие внутренние слои. Целью статьи является построение равномерного асимптотического разложения решения сингулярно возмущенной двухточечной краевой задачи на отрезке [0,1].

Asymptotics of the Solution of a Two-Point Boundary Value Problem With An Interior Layer

Abstract

This article examines a two-point boundary value problem for a singularly perturbed, linear, inhomogeneous ordinary differential equation. Singularly perturbed problems are frequently encountered in various fields of science – for example, in the study of vibrations of thin or flexible structures (such as beams and plates), in the modeling of fast–slow dynamic processes, and in optics and quantum physics, where the small parameter ε characterizes the wavelength or the energy scale. The distinguishing features of the singularly perturbed two-point boundary value problem considered in this work are the presence of a perturbation term – that is, a small parameter multiplying the derivative of the unknown function – and the existence of singular points of both equations of the system within the interval. These singularities give rise to two types of layers: the classical boundary layer and an internal layer. The solution of the system is represented as the sum of three components: a regular outer solution, a solution defined in the neighborhoods of the boundary points describing the classical boundary layers, and a solution valid in the neighborhoods of the singular points inside the interval [0,1], which describes the internal layers. The aim of the article is to construct a uniform asymptotic expansion of the solution to the singularly perturbed two-point boundary value problem on the interval [0,1].

Ключевые слова: двухточечная краевая задача, бисингулярное возмущение, сингулярное возмущение, асимптотическое решение, асимптотическое разложение, пограничный слои, внутренний слои, система обыкновенных дифференциальных уравнений

Key words: two point boundary value problem, bisingular perturbation, singular perturbation, asymptotic solution, asymptotic expansion, boundary layers, interior layers, system of ordinary differential equations

Киришүү

Сингулярдык түрдө козголгон маселелер – математикадагы өзгөчө типтеги теңдемелер. Алар кичине параметр бар болгондуктан (мисалы, $0<\varepsilon\ll 1$), жөнөкөй ыкмалар менен чечилбейт жана көбүнчө жогорку ылдамдыктагы өзгөрүүлөр же чек аралык катмарлар пайда болот (Ильин А.М., 1989; Коул Дж., 1972; Ломов С.А., 2011).

Механика жана инженерияда: сингулярдык маселелер жука же ийилгич конструкциялардын (мисалы, балка, пластинка) термелүүсүн изилдегенде чыгат. Эгер балка өтө жука болсо, анда теңдемеде кичине параметр ε (жукадыгын көрсөтөт) пайда болот. Ошондо система жөнөкөй эмес болуп калат, анткени жука бөлүктө өзгөрүү тез жүрөт, ал эми башка жерде жай. Мындай анализ инженердик эсептөөлөрдө – көпүрө, самолёт канаты, имарат устундарынын термелүүсүн баалоодо колдонулат .

Суюктуктар жана газдар динамикасында (гидродинамика, аэродинамика): сингулярдык маселелер чек аралык катмарлар же агымдын кескин өзгөрүшү (ударный толкун) пайда болгондо колдонулат. Мисалы, абанын агымы дененин бетине тийгенде илешкектүүлүк аз болсо (ε – илешкектүүлүк коэффициенти), ылдамдык чек арада кескин өзгөрөт. Ошондо агымдын бир бөлүгүндө өзгөрүү тез (ичи катмар), ал эми тышында жай болот. Бул анализ **самолёттун корпусу, кеме корпустары, турбиналардын канаттарынын формасын** эсептөөдө маанилүү.

Электр жана электрондук системаларда: Электр тизмектерде (RLC схемалар) айрым элементтер өтө аз индуктивдүүлүккө же сыйымдуулукка ээ болгондо, теңдемеде кичине параметр чыгат. Бул учурда ток же чыңалуу өтө тез өзгөрөт – өткөөл процесс болот. Мисалы, батареяны туташтырганда ток башында секирип өзгөрөт, андан кийин жай басаңдайт. Сингулярдык анализ ушул тез жана жай процесстерди бөлүп кароого жардам берет.

Химия жана биологияда: сингулярдык маселелер тез жана жай жүрүүчү процесстерди чагылдыруу үчүн колдонулат. Кээ бир химиялык реакциялар абдан тез жүрөт, башкалары жай. Ошол себептен система «тез–жай» деп экиге бөлүнөт: тез өзгөргөн компоненттерди өзүнчө, жайларын өзүнчө карашат. Мындай моделдер биохимиялык реакцияларда, экологиялык популяция моделдеринде, жашоо циклинин динамикасында колдонулат.

Оптика жана кванттык механикада: сингулярдык маселелер толкундардын жүрүшүн изилдөөдө чыгат. Кичине параметр ε толкундун узундугун же энергиясынын масштабын мүнөздөйт. Мисалы, кванттык механикада **Шрёдингердин теңдемеси** ушул түргө ээ.

Экономика жана башкаруу теориясында: кээ бир моделдерде чечим тез өзгөрөт (мисалы, баа же пайыздык чен), башкалары жай (инвестиция, өндүрүш). Тез–жай системалар сыяктуу сингулярдык моделдер экономикалык тең салмактуулукка жетүү же басаң жүрүштөгү процесстерди оптималдаштыруу үчүн колдонулат.

Изилдөөнүн методу жана методологиясы. Сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелерди түз чыгарып болбой турганынын негизги себеби — алардын классикалык (стандарттуу) дифференциалдык теңдемелерден кескин айырмаланган татаал түзүлүшүнө байланыштуу. Мындай теңдемелерди стандарттуу методдор менен чыгара албайбыз, анткени параметрди нөлгө теңегенде теңдеменин өзү өзгөрүп кетет. Сингулярдык козголгон системаларда: чечимдин бир бөлүгү жай өзгөрөт (outer solution), экинчи бөлүгү чек арада өтө тез өзгөрөт (boundary layer). Бул катмарды жөнөкөй интегралдоо менен табууга мүмкүн эмес.

Бир гана жалпы чечим бүт функцияны түшүндүрө албай калат. Кичи параметр нөлгө умтулганда (ε→0) чечим же үзгүлтүккө, же бузулууга, де тез өзгөрүүнүн (секирик) аймактарына эга болушу мүмкүн. Бул математикалык жактан классикалык чечим жок дегенди билдирет. Сингулярдык козголгон теңдемелерде түз интегралоо, параметрди вариациялоо, Лапластын өзгөртүп түзүүсү, Фурьенин методдору иштебей калышы мүмкүн. Мындай теңдемелерди чыгарууда кичи параметрлер методу, Вишик-Люстерник-Васильева-Иманалиевтердин методу, Ломовдун регуляризация методу, Ван Дайк-Ильиндин жалгаштыруу методу, К. Алымкуловдун структуралык жалгаштыруу жана жалпыланган чектик функциялар методдору, К.С. Алыбаевдин денгээл сызыктар методу, WKB методдору колдонулат. Бул ыкмалар чечимдин *ар түрдүү масштабдагы* бөлүктөрүн өзүнчө чыгарып, кийин аларды “жалгаштырып” бириктирет.

Сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелер (singularly perturbed ODEs) үчүн колдонулуучу асимптотикалык методдордун айрымасы жана өзгөчөлүгү — бул $0<\varepsilon\ll1$ кичине параметр теңдемеде эң чоң ролду ойной турган учурларда ар кандай масштабдардагы чечимдерди өзүнчө талдоо зарылдыгы. Төмөндө негизги идеялар системалуу жана салыштырмалуу түрдө берилет.

Маселенин коюлушу. Төмөнкү маселени изилдейбиз:

$$\varepsilon y'(t)+A(t)y(t)=f(t),\ t\in[0,1], \tag{1}$$

$$y_1(0)B_0+y_2(1)B_1=y^0, \tag{2}$$

$0<\varepsilon<<1$ – чыныгы сан болгон кичи параметр, $A(t)$ – элементтери чыныгы өзгөрүлмөлүү чыныгы функциялар болгон экинчи тартиптеги квадраттык матрица-функция. $A(t)$ матрица-функциянын өздүк маанилери төмөнкүдөй көрүнүшкө ээ:

$$\lambda_1(t)=(t-\alpha)^2,\ \lambda_2(t)=-(t-\beta)^2,\ 0<\alpha,\ \beta<1, \alpha\neq\beta;$$

$f(t)$ – берилген чексиз дифференцирленүүчү вектор функция: $f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix}$;

$$B_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix},\ y^0=\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}.$$

(1)-теңдемелердин системасына коюлуп жаткан (2)- шарттар каралып жаткан кесиндинин учтарында берилип жаткандыктан (1)-(2)- маселе чек аралык маселе деп аталат. (1)-(2)- көрүнүштөгү маселелер алгач (Alymkulov жана Tursunov, 2016) жана (Турсунов, 2018), (Alymkulov жана Tursunov, 2017) жумуштарда каралган. Макалада каралып жаткан эки чекиттүү чектик маселе мурда изилденген эмес. (Tursunov ж.б., 2021) - жумушта ички катмарга ээ болгон скаляр теңдеме үчүн чектик маселе изилденген, бул жерде система үчүн чектик маселе каралып жатат. Изилдөөлөр чыныгы сандардын тааласында жүргүзүлөт.

(1)-(2)-маселенин өзгөчөлүктөрүн белгилеп кетебиз:

1) Кичи параметрдин изделүүчү белгисиз $y(t)$ вектор-функциянын туундусунун астында катышуусу – биринчи өзгөчөлүк (сингулярдык). Анткени кичи параметр нөлгө умтулганда теңдеменин баш мүчөсү нөлгө айланып, пайда болгон теңдеме

дифференциалдык теңдеме болбой калат жана анын чыгарылышы (2)-шарттарды канааттандыра албайт (жалпы учурда). Ошондуктан (1)- көрүнүштөгү системаны сингулярдык козголгон система деп аташат;

2) (1)-системанын экинчи өзгөчөлүгү – тиешелүү козголбогон (ε=0):

$$A(t)\tilde{y}(t) = f(t),\ t \in [0,1],$$

системада $A(\alpha) = 0 \vee A(\beta) = 0$ экендиги. Себеби *A(t)* матрица-функциянын өздүк маанилери каралып жаткан кесиндинин ичиндеги α жана β чекиттерде нөлгө айланат. Бул $t = \alpha,\ t = \beta$ өзгөчө (сингулярдык) чекиттер $\tilde{y}(t)$ чыгарылыштын жылмакайлыгын жокко чыгарат. Мындай касиетке ээ болгон сингулярдык козголгон маселелер бисингулярдык маселелер деп аталат. Бисингуляр терминин козголуулар теориясына алгачкы жолу орус академиги А.М. Ильин кийирген [2]. Бисингуляр деген кош сингуляр дегенди түшүндүрөт. Биринчи сингулярдык – бул кичи параметрдин (1)- теңдемеде туунду белгиси астында катышуусу болсо, экинчи сингулярдык – бул тиешелүү козголбогон теңдеменин чыгарылышы каралып жаткан аймакта жылма болбой калуусу, б.а. чечимдин сингулярдык чекиттерге ээ болуусу.

Изилдөөнүн негизги максаты (1)-(2)-чек аралык маселенин чыгарылышынын [0,1] кесиндиде кичи параметрдин даражасы боюнча бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу жана ажыралманын калдык мүчөсүн баалоо.

Коюлган максатка жетүү үчүн эки маселени чечүү керек:

1) кичи параметрдин даражасы боюнча бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу;

2) тургузулган ажыралманын калдык мүчөсүн баалоо.

Маселени чыгаруунун методу. Төмөнкү жардамчы лемманы далилдеп алабыз.

Лемма 1. *A(t)* – квадраттык матрица үчүн ар дайым кубулбаган ушундай *S*(*t*) матрицасы табылып, төмөнкү барабардык орун алат:

$$S^{-1}(t)A(t)S(t) = diag(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t))\,.$$

Далилдөө. Айталы *A(t)* төмөнкү көрүнүшкө ээ болсун:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}.$$

Маселенин шарты боюнча *A(t)* нын $\lambda_1(t) = (t-\alpha)^2,\ \lambda_2(t) = -(t-\beta)^2$ өздүк маанилери $\forall t : \lambda_1(t) \neq \lambda_2(t)$. $\lambda(t)$ өздүк маани үчүн $v = (u, w)^T$ өздүк вектор төмөнкү теңдемени канааттандырат:

$$(A(t) - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a(t) - \lambda(t))u + b(t)w = 0, \\ c(t)u + (d(t) - \lambda(t))w = 0. \end{cases}$$

Бул эки теңдеме сызыктуу көз каранды (себеби det($A(t)$–λI)=0), ошондуктан бир жолчонун каалагандай ноль эмес чыгарылышын алсак боло берет. Адатта, төмөнкүдөй көрүнүштө алынат:

$$v(\lambda)=\begin{cases}(-b, \quad a-\lambda)^T, \text{ эгерде } b(t)\neq 0 \text{ болсо,}\\ (d-\lambda, -c)^T, \text{ эгерде } b(t)=0 \text{ болсо.}\end{cases}$$

Эскертүү. $b(t)$=0 болгондо $c(t)\neq 0$ болот, анткени эгерде $b(t)$=0 жана $c(t)$=0 болсо, анда $A(t)$ матрица диагоналдык матрица болот, бул учурда $(1,0)^T$, $(0,1)^T$ – өздүк векторлор болушат.

Демек, $v_1(t)=v(\lambda_1(t)),\ v_2(t)=v(\lambda_2(t))$ болот, себеби $\forall t:\lambda_1(t)\neq\lambda_2(t)$ болгондуктан v_1 жана v_2 векторлору коллениардуу эмес, мындан $S(t):=[v_1(t)\ v_2(t)]$ матрицанын кубулбагандыгы келип чыгат жана $S^{-1}(t)A(t)S(t)=diag(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t))$ барабардыгы орун алат.

Лемма далилденди.

(1)-системага $y(t)=S(t)x(t)$ өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз:

$$\varepsilon S(t)x'(t)+A(t)S(t)x(t)=f(t)-\varepsilon S'(t)x(t),\ t\in[0,1],$$

мында $x(t)$ – жаңы изделүүчү функция. $S(t)$ – леммада аныкталган матрица.

Пайда болгон барабардыкты сол жактан $S^{-1}(t)$ ге көбөйтөбүз:

$$\varepsilon x'(t)+\Lambda(t)x(t)=F(t)+\varepsilon G(t)x(t),\ t\in[0,1], \qquad (3)$$

мында $\Lambda(t)=diag(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t)),\ F(t)=S^{-1}(t)f(t),\ G(t)=-S^{-1}(t)S'(t).$

(3)-теңдеменин чыгарылышын $x(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x_k(t)$ көрүнүштө издейбиз. Натыйжада төмөнкү катышарды алабыз:

$$\Lambda(t)x_0(t)=F(t)\Rightarrow x_0(t)=\Lambda^{-1}(t)F(t);$$

$$x'_{k-1}(t)+\Lambda(t)x_k(t)=G(t)x_{k-1}(t)\Rightarrow x_k(t)=\Lambda^{-1}(t)(G(t)x_{k-1}(t)-x'_{k-1}(t)),\ k\in N.$$

$\lambda_1(t)=(t-\alpha)^2,\ \lambda_2(t)=(t-\beta)^2$ өздүк маанилер $t=\alpha$ жана $t=\beta$ чекиттерде эки эселүү нөлдөргө ээ, ошондуктан $x_0(t)$ функциясы $t=\alpha$ жана $t=\beta$ чекиттерде эки эселүү уюлга ээ болот. $x_k(t)=\Lambda^{-1}(t)(G(t)x_{k-1}(t)-x'_{k-1}(t)),\ k\in N$ рекуррентик формуладан $x_k(t)$ функциясы $t=\alpha$ жана $t=\beta$ чекиттерде $(3k+2)$ эселүү уюлга ээ боло тургандыгы келип чыгат. Бул сүйлөмдү математикалык индукция принцибин колдонуп далилдөөгө болот.

Натыйжада $x(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x_k(t)$ катарды төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$x(t,\varepsilon)=\frac{1}{(t-\alpha)^2(t-\beta)^2}\left(\tilde{x}_0(t)+\frac{\varepsilon}{(t-\alpha)^3(t-\beta)^3}\tilde{x}_1(t)+...+\frac{\varepsilon^k}{(t-\alpha)^{3k}(t-\beta)^{3k}}\tilde{x}_k(t)+...\right).$$

Акыркы барабардыктан $t=\alpha$ жана $t=\beta$ чекиттердин чеке белинде координаталар огун тиешелүү түрдө $t-\alpha=\mu\tau,\ t-\beta=\mu\xi$ эреже менен созуу керек экендиги, б.а. өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуу керектиги жөнүндө маалымат берет, мында $\mu=\sqrt[3]{\varepsilon}$, τ жана ξ – жаңы өзгөрүлмөлөр.

(2)-шарт төмөнкүдөй көрүнүшкө келет:

$$B_0S(0)x(0)+B_1S(1)x(1)=y^0. \quad (4)$$

(3)-(4)-маселенин асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$x(t)=u(t)+\pi(t)+w(t), \quad (5)$$

мында $u(t)$ – регулярдык тышкы чыгарылыш; $\pi(t)=(\pi_1(t)\ \pi_2(t))^T$, $\pi_1(t)$ жана $\pi_2(t)$ функциялары классикалык чектик функциялар, тиешелүү түрдө t=0 жана t=1 чекиттеринин чеке белиндеги катмарларды мүнөздөйт; $w(t)=(w_1(t)\ w_2(t))^T$ – компоненталары тиешелүү түрдө $t=\alpha$ жана $t=\beta$ чекиттердин чеке белиндеги ички катмарларды мүнөздөөчү чыгарылыштар.

(5)-барабардыкты (3)-гө алып барып төмөнкү катыштарды алабыз:

$$\varepsilon u'(t)+\Lambda(t)u(t)=F(t)-H(t,\varepsilon)+\varepsilon G(t)u(t),\ t\in[0,1], \quad (6)$$

$$\varepsilon w'(t)+\Lambda(t)w(t)=H(t,\varepsilon)+\varepsilon G(t)w(t), \quad (7)$$

$$\varepsilon\pi'(t)+\Lambda(t)\pi(t)=\varepsilon G(t)\pi(t), \quad (8)$$

Мында $H(t,\varepsilon)$ – азырынча белгисиз функция.

$H(t,\varepsilon)$ функциясы (6)-тышкы чыгарылыш [0,1] кесиндиде чексиз дифференцирленүүчү (жылма) функция боло тургандай тандалып алынат.

Айталы $u(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(t),\ H(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(t),$ болсун, анда бул катарларды (6)-га алып барып коюп, кичи параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарлап, төмөнкү рекуррентик катышты алабыз:

$$\Lambda(t)u_0(t)=F(t)-h_0(t),$$

$$\Lambda(t)u_k(t)=-h_k(t)+G(t)u_{k-1}(t)-u'_{k-1}(t),k\in N.$$

Белгисиз $h_k(t)$ функцияларын $u_k\in C^\infty[0,1],\ k=0,1,...$ шарты орун ала тургандай кылып тандап алабыз.Натыйжада $u(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(t),\ H(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(t)$ катарлардын бардык мүчөлөрү бир маанилүү, толук аныкталды.

(7)-теңдемени скаляр көрүнүштө жазып алабыз:

$$\varepsilon w'_1(t)+\lambda_1(t)w_1(t)=h_{11}(t)+\varepsilon(g_{11}(t)w_1(t)+g_{12}(t)w_2(t)),$$
$$\varepsilon w'_2(t)+\lambda_2(t)w_2(t)=h_{12}(t)+\varepsilon(g_{21}(t)w_1(t)+g_{22}(t)w_2(t)).$$

$w_1(t)$ жана $w_2(t)$ компоненталар тиешелүү түрдө $t=\alpha$ жана $t=\beta$ чекиттердин чеке белиндеги ички катмарларды мүнөздөөчү чыгарылыштар болгондуктан бул өзгөчө чекиттердин чеке белинде $t-\alpha=\mu\tau,\ t-\beta=\mu\xi,\ \ \mu=\sqrt[3]{\varepsilon},\ w_i=\frac{1}{\mu^2}z_i$ өзгөртүп түзүүлөрдү колдонобуз, натыйжада төмөнкү системаны алабыз:

$$z'_1(\tau)+\tau^2 z_1(\tau)=h_{11}(\mu\tau)+\mu(g_{11}(\mu\tau)z_1(\mu\tau)+g_{12}(\mu\tau)z_2(\mu\tau)),\ \lim_{\tau\to\pm\infty} z_1(\tau)=0,$$
$$z'_2(\xi)-\xi^2 z_2(\xi)=h_{12}(\mu\xi)+\mu(g_{21}(\mu\xi)z_1(\mu\xi)+g_{22}(\mu\xi)z_2(\mu\xi)),\ \lim_{\xi\to\pm\infty} z_2(\xi)=0.$$

Системанын чыгарылышы жашайт, жалгыз жана төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$z_i=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k z_{i,k},\quad i=1,2;$$

$$z_{1,k}(\tau)=e^{-\tau^3/3}\int_{-\infty}^{\tau} e^{s^3/3}F_{1,k}(s)ds,\quad z_{2,k}(\xi)=e^{\xi^3/3}\int_{\infty}^{\xi} e^{s^3/3}F_{2,k}(s)ds, k=0,1,...$$

Эми (8)-маселени изилдейбиз, ал үчүн (8)-системаны төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$\begin{aligned}\varepsilon\pi'_1(t)+\lambda_1(t)\pi_1(t)&=\varepsilon(g_{11}(t)\pi_1(t)+g_{12}(t)\pi_2(t)),\\ \varepsilon\pi'_2(t)+\lambda_2(t)\pi_2(t)&=\varepsilon(g_{21}(t)\pi_1(t)+g_{22}(t)\pi_2(t)).\end{aligned}\qquad(9)$$

$\pi_1(t)$ жана $\pi_2(t)$ функциялары тиешелүү түрдө [0,1] кесиндинин учтарындагы чек аралык шарттар менен чыгарылышты бириктире турган классикалык чектик функциялар. Ошондуктан t=0 жана t=1 чекиттердин чеке белдеринде төмөнкүдөй өзгөртүп түзүүлөрдү кийиребиз:

$$t=\varepsilon\eta,\ 1-t=\varepsilon\rho\,(0\le\eta\le\varepsilon^{-1};0\le\rho\le\varepsilon^{-1})$$

ε→0 болгондо $0\le\eta\le\infty;0\le\rho\le\infty$ деп алса да болот.

Натыйжада (9)-система төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\begin{aligned}\pi'_1(\eta)+(\alpha-\varepsilon\eta)^2\pi_1(\eta)&=\varepsilon(g_{11}(\eta)\pi_1(\eta)+g_{12}(\eta)\pi_2(\eta)),\\ \pi'_2(\rho)+(1-\beta-\varepsilon\rho)^2\pi_2(\rho)&=-\varepsilon(g_{21}(\rho)\pi_1(\rho)+g_{22}(\rho)\pi_2(\rho)).\end{aligned}\qquad(10)$$

(10)- теңдемелердин системасына кошумча шартты (2)-ден $y(t)=S(t)x(t)$ өзгөртүп түзүүнү эске алып келтирип чыгарабыз:

$$y_1^0=s_{11}(0)x_1(0)+s_{12}(0)x_2(0),\qquad y_2^0=s_{21}(1)x_1(1)+s_{22}(1)x_2(1).$$

Келип чыккан катыштарга (5)-ни колдонбуз:

$$y_1^0=s_{11}(0)(u_1(0)+\pi_1(0)+w_1(-\alpha/\mu))+s_{12}(0)(u_2(0)+\pi_2(1/\varepsilon)+w_2(-\beta/\mu)),$$

$$y_2^0=s_{11}(1)(u_1(1)+\pi_1(1/\varepsilon)+w_1((1-\alpha)/\mu))+s_{12}(1)(u_2(1)+\pi_2(0)+w_2((1-\beta)/\mu)).$$

Эгерде $\lim_{\tau\to\pm\infty} w_1(\tau)=0,\ \lim_{\xi\to\pm\infty} w_2(\tau)=0,\ \lim_{\varepsilon\to0}\pi_k(1/\varepsilon)=0,\ k=1,2,$ эске алсак, анда төмөнкү катыштарды алабыз:

$$\pi_1(0)=\pi_1^0,\ \pi_1^0=(y_1^0-s_{12}(0)u_2(0)-s_{11}(0)(u_1(0))/s_{11}(0),$$

$$\pi_2(0)=\pi_2^0,\quad \pi_2^0=(y_2^0-s_{11}(1)u_1(1)-s_{12}(1)u_2(1))/s_{12}(1).\qquad(11)$$

(10)-системаны төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$\pi'_1(\eta)+\alpha^2\pi_1(\eta)=\varepsilon(2\eta\alpha\pi_1(\eta)+g_{11}(\eta)\pi_1(\eta)+g_{12}(\eta)\pi_2(\eta))-(\varepsilon\eta)^2\pi_1(\eta),$$
$$\pi'_2(\rho)+(1-\beta)^2\pi_2(\rho)=\varepsilon(2(1-\beta)\rho\pi_2(\rho)-g_{21}(\rho)\pi_1(\rho)-g_{22}(\rho)\pi_2(\rho))-(\varepsilon\rho)^2\pi_2(\rho).$$

Маселенин шарты боюнча $0<\alpha,\beta<1$. Ошондуктан (10)-(11) маселенин чыгарылышы жашайт, жалгыз болот жана төмөнкү катарлар көрүнүшүндө жазууга болот:

$$\pi_1(\eta,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\pi_{1,k}(\eta),\quad \pi_2(\rho,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\pi_{2,k}(\rho). \tag{12}$$

(12)-катарлар тиешелүү түрдө (11)-шарттарды канааттандырышат жана төмөнкү катыштар орун алат: $\left|\pi_1(\eta,\varepsilon)\right|\le c_1e^{-\eta}$; $\left|\pi_2(\rho,\varepsilon)\right|\le c_2e^{-\rho}$. Төмөнкү теорема далилденди.

Теорема. (1)-(2)- чектик маселенин чыгарылышы үчүн [0,1] кесиндиде төмөнкү бир калыптагы асимптотикалык ажыралма орун алат:

$$y(t)=S(t)\left(\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(t)+\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=0}^{3n}\mu^k w_k(t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\pi_k(t)\right)+O(\varepsilon^n),\ \varepsilon\to 0,$$

мында $u_k\in C^\infty[0,1],\ w_k\in C^\infty(\mathrm{R}),\pi_k\in C^\infty[0,\infty),\ \lim_{\eta\to\pm\infty}w_k(\eta)=0,\lim_{\tau\to\infty}\pi_k(\tau)=0.$

Корутунду. Макалада сингулярдык козголон биринчи тартиптеги сызыктуу, бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн эки чекиттүү чектик маселе изилденди. Сингулярдык козголгон маселелер илимдин ар түрдүү тармактарында көп кездешет, мисалы. жука же ийилгич конструкциялардын (балка, пластинка) термелүүсүн изилдегенде, тез жана жай жүрүүчү процесстерди чагылдырууда, оптикада жана кванттык физикада кичи параметр ε толкундун узундугун же энергиясынын масштабын мүнөздөйт. Каралып жаткан эки чекиттүү сингулярдык козголгон чектик маселенин өзгөчөлүктөрү – козголуу деп аталуучу кичи парметрдин белгисиз изделүүчү функциянын туундусу белгиси астында катышып жаткандыгы жана каралып жаткан кесиндинин ичинде системанын эки теңдемеси өзгөчө чекиттерге ээ болушу. Бул эки өзгөчөлүк эки катмарды пайда кылды:

1) классикалык чек аралык катмарлар,

2) ички катмарлар.

Системанын чечими үч (асимптотикалык катарлардын) функциянын суммасынан тургузулду, алар регулярдык тышкы чыгарылыш, кесиндинин учтарынын чеке белиндеги чек аралык катмарды мүнөздөөчү чыгарылыштар жана кесиндинин ичиндеги өзгөчө чекиттердин чеке белиндеги ички катмарларды мүнөздөөчү чыгарылыштар. Ар бир кошулуучу асимптотикалык катар көрүнүшүндө аныкталды.

Натыйжада коюлган эки чекиттүү сингулярдык козголгон чектик маселенин [0,1] кесиндидеги чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузулду. Бүгүнкү күндө сингулярдык козголгон маселелердин теориясы чоң ылдамдык менен өсүп бара жатат, мунун далили катары акыркы жылдарда макалалардын, монографиялардын санынын көбөюшү, мисалы (Feng жана Ni, 2024; Kumar жана Gowrisankar, 2025) жумуштарда сингулярдык козголгон маселелердин жаңы багыттары баяндалган.

Адабияттар

1. Alymkulov, K., & Tursunov, D. A. (2016). Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач. *Известия вузов. Математика,* 12, 3–11.
2. Ильин, А.М. (1989). *Согласование асимптотических разложений краевых задач.* Москва: Наука.
3. Коул, Дж. (1972). *Методы возмущений в механике жидкости.* Москва: Мир.
4. Ломов, С.А., Ломов, И.С. (2011) *Основы математической теории пограничного слоя.* Москва: Изд-во МГУ.
5. Сулайманов, З. (2025). Ички жана чек аралык катмарларга ээ болгон коши маселесинин чечиминин асимптотикасы. *Ош мамлекеттик университетинин Жарчысы,* (4), 175–186. https://doi.org/10.52754/16948610_2025_4_12
6. Турсунов, Д.А. (2018). Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. *Известия вузов. Математика,* (3), 70–78.
7. Турсунов, Д.А. (2018). Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений». *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика,* (54), 46–57.
8. Alymkulov, K., Tursunov, D.A. (2017). Perturbed differential equations with singular points. In D. I. Uzunov (Ed.), *Recent studies in perturbation theory* (pp. 1–43). InTech.
9. Antony Prince, P., Govindarao, L., Elango, S. (2025). Non-standard finite difference scheme for system of singularly perturbed Fredholm integro-differential equations. *Journal of Mathematical Modeling,* 13(4), 823–840.
10. Feng, T., Ni, M. (2024). Asymptotic solution for a system of singularly perturbed delay differential equations. *Journal of Applied Analysis and Computation,* 16(1), 458–478.
11. Kumar, D., Gowrisankar, S. (2025). Parameter uniform numerical scheme for singularly perturbed Fredholm integro-differential equation with an interior layer. *Journal of Applied Mathematics and Computing,* 71(Suppl 2), 1641–1663.
12. Tursunov, D.A., Sulaimanov, Z.M., Khalmatov, A.A. (2021) Singularly perturbed ordinary differential equation with turning point and interior layer. *Lobachevskii Journal of Mathematics,* 42(12), 3016–3021.