

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК ОШКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

ISSN: 1694-7452 e-ISSN: 1694-8610

№4/2025, 175-186

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.928.2

DOI: [10.52754/16948610_2025_4_12](https://doi.org/10.52754/16948610_2025_4_12)

**ИЧКИ ЖАНА ЧЕК АРАЛЫК КАТМАРЛАРГА ЭЭ БОЛГОН КОШИ МАСЕЛЕСИНИН
ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ**

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ С ВНУТРЕННИМ И ПОГРАНИЧНЫМ
СЛОЯМИ**

**ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM WITH INTERIOR AND
BOUNDARY LAYERS**

Сулайманов Завур Мамадалиевич

Сулайманов Завур Мамадалиевич

Sulaimanov Zavur Matadalievich

окутуучу, Ош мамлекеттик университети

преподаватель, Ошский государственный университет

Lecturer, Osh State University

szavur1983@mail.ru

ORCID: 0009-0009-5355-1459

ИЧКИ ЖАНА ЧЕК АРАЛЫК КАТМАРЛАРГА ЭЭ БОЛГОН КОШИ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

Аннотация

Макалада кичи параметрди туунду белгиси астында кармаган биринчи тартиптеги сызыктуу, бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселе изилденет. Мындай маселелер физиканын, техниканын, биологиянын, химиянын ж.б. илимдердин тармактарында кездешет. Изилденип жаткан Кошинин маселесинин өзгөчөлүктөрү – кичи параметрдин белгисиз изделүүчү функциянын туундусу белгиси астында катышып жаткандыгы жана каралып жаткан аралыктын ичинде өзгөчө чекитке ээ болушу. Бул эки өзгөчөлүк эки катмарды пайда кылат, биринчиси классикалык чек аралык катмарды, ал эми экинчиси – ички катмарды. Ошондуктан чыгарылыш үч функциянын суммасынан турат: регулярдык тышкы чыгарылыш, баштапкы чекиттин чеке белиндеги чек аралык катмарды мүнөздөөчү чыгарылыш жана өзгөчө чекиттин чеке белиндеги ички катмарды мүнөздөөчү чыгарылыш. Биздин максат каралып жаткан кесиндиде коюлган бисингулярдык козголгон Коши маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу. Макалада бисингулярдык козголгон маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу үчүн жаңы алгоритм сунушталууда. Конкреттүү мисал келтирилген жана Maple системасында тургузулган сандык чыгарылыш менен салыштырылган.

Ачык сөздөр: баштапкы маселе, бисингулярдык козголуу, сингулярдык козголуу, асимптотикалык чыгарылыш, асимптотикалык ажыралма, чек аралык катмар, ички катмар

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ С ВНУТРЕННИМ И ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЯМИ

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM WITH INTERIOR AND BOUNDARY LAYERS

Аннотация

В статье исследуется начальная задача для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при производной. Подобные задачи встречаются в физике, технике, биологии, химии и др. отраслях науки. Особенности исследуемой задачи Коши являются: присутствие малого параметра перед производной неизвестной искомой функций и особой точки внутри рассматриваемого промежутка. Эти две особенности порождают два слоя, первое – классический пограничный слой, а второе внутренний слой. Поэтому решение состоит из суммы трех функций: регулярное внешнее решение, решение в окрестности начальной точки, характеризующий классический пограничный слой и решение в окрестности особой точки, характеризующий внутренний слой. Целью статьи является построение равномерного асимптотического разложения решения бисингулярно возмущенной задачи Коши. В статье предлагается новый алгоритм построения асимптотического разложения бисингулярных задач. Приведены демонстрационный пример и сравнение с численным решением построенной в системе Maple.

Ключевые слова: начальная задача, бисингулярное возмущение, сингулярное возмущение, асимптотическое решение, асимптотическое разложение, пограничный слой, внутренний слой

Abstract

This article examines the initial-value problem for a linear nonhomogeneous ordinary differential equation with a small parameter in the derivative. Similar problems are encountered in physics, engineering, biology, chemistry, and other fields of science. The Cauchy problem under study is characterized by a small parameter in front of the derivative of the unknown function and a singular point within the interval under consideration. These two singularities generate two layers, the first being the classical boundary layer, and the second the interior layer. Therefore, the solution consists of the sum of three functions: a regular exterior solution, a solution in the neighborhood of the initial point, which characterizes the classical boundary layer, and a solution in the neighborhood of the singular point, which characterizes the interior layer. The goal of this article is to construct a uniform asymptotic expansion of the solution to a bisingularly perturbed Cauchy problem. A new algorithm for constructing an asymptotic expansion of bisingular problems is proposed. A demonstration example and a comparison with a numerical solution constructed in the Maple system are provided.

Keywords: initial value problem, bisingular perturbation, singular perturbation, asymptotic solution, asymptotic expansion, boundary layers, interior layers

Киришүү

Сингулярдык козголгон теңдемелер түшүнүгү XVIII кылымдагы классикалык механика жана суюктуктун агымынын изилдөөлөрүнөн башталат. Л. Эйлер (1707–1783) жана Дж. д’Аламбер (1717–1783) сыяктуу окумуштуулар суюктуктун кыймылы үчүн дифференциалдык теңдемелерди жазып чыгышкан. Ал теңдемелерде кичинекей параметрлер (мисалы, илешкектүүлүк, инерция, диффузия) пайда болгон. Бул параметрлер өтө кичине болгондо, теңдемелердин чечими кескин өзгөрүп, жөнөкөй ыкмалар жарабай калган. Бул учур кийин «сингулярдык козголгон» деп аталган. XIX кылымда математикада асимптотикалык анализ өнүгө баштады. (Пуанкаре, 1886), А.М. Ляпунов жана башкалар кичине параметр менен байланышкан асимптотикалык катарлардын ыкмаларын иштеп чыгышкан. Алар көрсөткөндөй, кээ бир учурларда кичине параметр нөлгө умтулганда теңдеменин тартиби өзгөрөт – бул сингулярдык мүнөздүн негизги белгиси (Шлихтинг, 1974).

1904-жылы Людвиг Прандтл Германияда «чек аралык катмар (пограничный слой)» теориясын сунуш кылган. Ал көрсөткөндөй: суюктуктун агымынын теңдемелеринде илешкектүүлүк өтө кичинекей болгондо, ылдамдык профили кескин өзгөргөн жука катмар (boundary layer) пайда болот. Бул катмар сингулярдык аймак болуп эсептелет. Ошентип, физикалык түшүнүк менен математикалык сингулярдык теңдеме биринчи жолу байланышкан (Prandtl, 1904).

1900-1930-жылдарда сингулярдык теңдемелер физикалык теорияларда кеңири колдонулган: гидродинамикада – чектеш катмар (boundary layer) теориясы; аэродинамикада – учак канаттарынын айланасындагы агымдарды эсептөө; электродинамика жана жылуулук өткөрүүдө – тез жана жай өзгөргөн процесстер.

1940-1960-жылдарда бул теориянын өнүгүүсүнө бир топ окумуштуулар салым кошушкан, алар: А.Н. Тихонов (1948; 1952), А.Б. Васильева жана В.Ф. Бутузов (1973), Вишик М.И. (1957), А.Х. Найфе, (1984), В. Вазов (1944), Дж. Коул (1972), Ильин А.М. (1989), Ломов С.А. (1981; 2011), Алымкулов К. (2012; 2013), Сушко В.Г. (1997), О Маллей (1974) ж.б. Бүгүнкү күндө сингулярдык козголгон теңдемелер: физикада (плазма, агымдар, реакциялар); экономикада (инвестиция, тез жана жай динамика системалары); экологияда (биоценоздор, популяциянын моделдери); инженердик башкарууда (автоматтык системалар, стабилизация); маалыматтык технологияларда (нейрондук тармактардын окшош моделдери) колдонулат.

Адатта, кичи параметр белгисиз изделүүчү функциянын жогорку тартиптеги туундусунун астында катышкан дифференциалдык теңдемелерди сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер деп аташат (Омаралиева и Турсунов, 2022).

Мисалы,

$$\varepsilon y'(x) + y(x) = 1, \quad x \in [0,1], \quad y(0) = 2 \quad (1)$$

маселе сингулярдык козголгон маселеге мисал боло алат, мында $0 < \varepsilon$ – кичи параметр. Себеби, ε – кичи параметрди формалдуу түрдө нөлгө барабарласак, пайда болгон теңдеме дифференциалдык теңдеме болбой калат, б.а. $\tilde{y}(x) = 1, \quad x \in [0,1], \quad \tilde{y}(0) = 2$. Бул $\tilde{y}(x) = 1$ функция (0;2) чекити аркылуу өтпөшү айкын көрүнүп турат. Каралып жаткан маселенин чечими төмөнкү көрүнүштө болот:

$$y(x, \varepsilon) = e^{\frac{-x}{\varepsilon}} + 1. \quad (2)$$

(2) - функция теңдемени жана баштапкы шартты канааттандырат. ε – кичи параметр нөлгө умтулганда (2) -функция бир калыпта $\tilde{y}(x) = 1$ функцияга умтулат:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(e^{\frac{-x}{\varepsilon}} + 1 \right) = 1 = \tilde{y}(x), \forall x \in (0, 1).$$

Бул жерден баштапкы чекиттин чеке белиндеги чек аралык катмардын калыңдыгы $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ гө барабар экендиги келип чыгат (эгерде $e^{\frac{-x}{\varepsilon}} = O(1)$ болсун деп алсак, анда катмардын калыңдыгы $O(\varepsilon)$ болот, а эгерде $e^{\frac{-x}{\varepsilon}} = O(\varepsilon^k)$ десек, анда $\varepsilon k \ln(1/\varepsilon)$ болот).

Катмардын математикалык мааниси: $O(\varepsilon)$ аралыкта $y(x)$ функциянын мааниси $O(1)$ ге бат өтө тез (секирип) өзгөрөт, ал эми ал аралыктын сыртында дээрлик турактуу болот.

Катмардын физиалык мааниси: Бул кичинекей параметрлердин (илешкектик, диффузия, инерция ж.б.) таасири олуттуу болгон аймак, бирок калган аймакта аларды этибарга албай коюуга болот (Турсунов, 2013; 2017; 2018).

Маселенин коюлушу. Сунушталып жаткан алгоритм жана ички катмарга ээ болгон сингулярдык козголгон маселелердин өзгөчөлүктөрү түшүнүктүүрак болушу үчүн эн жөнөкөй мисалдан баштайбыз.

Төмөнкү Кошинин маселеси изилденет

$$\varepsilon y'(x) + (x - \alpha)^2 p(x) y(x) = f(x), \quad 0 < x \leq T, \quad y(0) = y^0 = const \quad (1)$$

мында $0 < \varepsilon$ – кичи параметр, $0 < \alpha < T$, α , T жана y^0 – берилген турактуу сандар, $p(x)$, $f(x)$ – берилген функция, $\forall x \in [0, T]: 0 < p(x)$, $p, f \in C^\infty[0, T]$, $y(x)$ – белгисиз изделүүчү функция.

(1)- Кошинин маселесине окшош математикалык моделдер квазистабилдүү абалга тез релаксацияны сүрөттөйт жана төмөнкү моделдерде кездешет: кинетикада жана химиялык реакцияларда (тез/жай процесстер); электроникада/башкарууда (кичине чоңдуктагы инерция); биологиялык системаларда (козулуу/калыбына келтирүү) ж.б.у.с.

Кадимки дифференциалдык теңдемелердин теориясы боюнча $0 < \varepsilon$ болгондо (1)- маселенин $y_\varepsilon(x)$ чыгарылышы жашайт, жалгыз болот жана $y_\varepsilon(x) \in C^\infty[0, T]$:

$$y(x) = y^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x (s-\alpha)^2 p(s) ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^x (s-\alpha)^2 p(s) ds} d\tau.$$

Эгерде кичи параметрди формалдуу түрдө $\varepsilon=0$ деп алсак, анда тиешелүү козголбогон теңдеменин $\tilde{y}(x)$ чыгарылышы каралып жаткан кесиндиде өзгөчө чекитке ээ болот:

$$(x - \alpha)^2 p(x) \tilde{y}(x) = f(x) \Rightarrow \tilde{y}(x) = f(x) / (x - \alpha)^2 p(x), \quad \alpha \in (0, T). \quad (2)$$

тактап айтканда $x=\alpha$ чекитинде $\tilde{y}(x)$ үзүлүүгө учурайт.

Бизге белгилүү болгондой $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ туюнтма ε даражасы боюнча катарга ажырабайт. Ошондуктан (1)-маселенин чыгарылышын ε дун даражасы боюнча катарга ажыратуу актуалдуу маселелердин бири болуп эсептелинет.

Биздин максат кичи параметр нөлгө умтулганда $\forall x \in [0, T]$ аралыкта (1)-маселенин $y_\varepsilon(x)$ чыгарылышынын кичи параметрдин даражасы боюнча бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу.

Маселени чыгаруунун методу. Алгач тышкы чыгарылышты тургузабыз, себеби тышкы чыгарылыш $x = \alpha$ чекиттин чеке белиндеги өзгөчөлүктү жана ал жерде x өзгөрүлмөсүнө карата кандай өзгөптүп түзүү керек экендигин аныктап берет. Тышкы чыгарылышты кичи параметр методунун жардамында тургузабыз жана төмөнкү көрүнүштө издейбиз [21]:

$$v(x, \varepsilon) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots + \varepsilon^n v_n(x) + \dots \quad (3)$$

(3)-ажыралма (1)-маселеге алып барып коюлат жана төмөнкү маселе алынат:

$$\begin{aligned} \varepsilon \{v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots\}' + (x - \alpha)^2 p(x) \{v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots\} &= f(x), \\ v_0(0) + \varepsilon v_1(0) + \varepsilon^2 v_2(0) + \dots + \varepsilon^n v_n(0) + \dots &= y^0 \end{aligned}$$

же

$$\begin{aligned} (x - \alpha)^2 p(x) v_0(x) &= f(x), \quad v_0(0) = y^0 \\ (x - \alpha)^2 p(x) v_n(x) &= -v'_{n-1}(x), \quad v_n(0) = 0, \quad n \in N. \end{aligned}$$

Бул жерден $v_j(x), (j = 0, 1, \dots)$ лерди аныктайбыз:

$$v_0(x) = f(x) / (x - \alpha)^2 p(x), \quad v_n(x) = -v'_{n-1}(x) / (x - \alpha)^2 p(x), \text{ бирок бул функциялар } v_0(0) = y^0, v_n(0) = 0, n \in N \text{ шарттарды канаатандырбайт.}$$

$x \rightarrow \alpha$ болгондо төмөнкү асимптотикалар орун алат:

$$v_0(x) = \frac{1}{(x - \alpha)^2} \tilde{v}_0(x), \quad v_n(x) = -\frac{1}{(x - \alpha)^{2+3n}} \tilde{v}_n(x), \quad \tilde{v}_{n-1} \in C^\infty[0, T], \quad n \in N.$$

(3)-катар төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$v(x, \varepsilon) = \frac{1}{(x - \alpha)^2} (\tilde{v}_0(x) + \frac{\varepsilon}{(x - \alpha)^3} \tilde{v}_1(x) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{(x - \alpha)^{3n}} \tilde{v}_n(x) + \dots). \quad (4)$$

(4)-катар асимптотикалык мүнөзгө ээ боло турган аралыкты аныктап алабыз:

$$\left| \frac{\varepsilon}{(x - \alpha)^3} \right| \leq \varepsilon^\beta \Rightarrow \varepsilon^{1-\beta} \leq |x - \alpha|^3 \Rightarrow 0 \leq x \leq \alpha - \sqrt[3]{\varepsilon^{1-\beta}} \vee \alpha + \sqrt[3]{\varepsilon^{1-\beta}} \leq x \leq T, \quad 0 < \beta < 1.$$

Демек, (4)-катар $x \in [0, \alpha - \sqrt[3]{\varepsilon^{1-\beta}}] \cup [\alpha + \sqrt[3]{\varepsilon^{1-\beta}}, T]$ аралыкта асимптотикалык катар боло алат, ал эми $x \in (\alpha - \sqrt[3]{\varepsilon^{1-\beta}}, \alpha + \sqrt[3]{\varepsilon^{1-\beta}})$ аралыкта (4)-катардын асимптотикалык мүнөзү жоголот. $x = \alpha$ – сингулярдык чекит.

Бирок (4)-катар $v(0, \varepsilon) = y^0$ шартын канааттандырбайт.

Ушул алынган маалыматты эске алып (1)-маселенин толук асимптотикалык ажыралмасын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$y(x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + w(t, \mu) + \pi(\tau, \varepsilon), \quad (5)$$

мында $u(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x)$, $u_k \in C^{\infty}[0, T]$,

$$w(t, \mu) = \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(t), \quad (x - \alpha) = t\mu, \quad \varepsilon = \mu^3, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} w_k(t) = 0;$$

$$\pi(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k(\tau), \quad x = \varepsilon\tau, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \pi_k(\tau) = 0.$$

(5)-туюнтманы (1)-маселеге алып барып коебуз:

$$\varepsilon u'(x, \varepsilon) + (x - \alpha)^2 p(x)u(x, \varepsilon) = f(x) - h(x, \varepsilon), \quad x \in (0, T]; \quad (6)$$

$$\mu^2 w'(t, \mu) + \mu^2 t^2 p(\mu t)w(t, \mu) = h(t, \mu), \quad t \in (-\infty, +\infty); \quad (7)$$

$$\pi'(\tau, \varepsilon) + (\varepsilon\tau - \alpha)^2 p(\varepsilon\tau)\pi(\tau, \varepsilon) = 0, \quad \tau \in (0, \infty); \quad (8)$$

$$\pi(0, \varepsilon) = y^0 - u(0, \varepsilon), \quad (9)$$

мында $h(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (h_{k,0} + (x - \alpha)h_{k,1})$, $h(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} (h_{k,0} + \mu t h_{k,1})$, $h_{k,0}$ жана $h_{k,1}$ азырынча белгисиз коэффициенттер.

(6)-катыштан $u(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x)$ эске алып төмөнкүлөрдү алабыз:

$$(x - \alpha)^2 p(x)u_0 = f(x) - h_{0,0} - (x - \alpha)h_{0,1} \Rightarrow u_0 = \frac{f(x) - h_{0,0} - (x - \alpha)h_{0,1}}{(x - \alpha)^2 p(x)};$$

$$(x - \alpha)^2 p(x)u_k = -u'_{k-1} - h_{k,0} - (x - \alpha)h_{k,1} \Rightarrow u_k = -\frac{u'_{k-1} + h_{k,0} + (x - \alpha)h_{k,1}}{(x - \alpha)^2 p(x)}.$$

Эгерде $h_{0,0} = f(\alpha)$, $h_{0,1} = f'(\alpha)$; $h_{k,0} = -u'_{k-1}(\alpha)$, $h_{k,1} = -u''_{k-1}(\alpha)$ болсо, анда $u_k \in C^{\infty}[0, T]$ болот [14].

Натыйжада, бул жерде изделүүчү $u(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x)$ жана $h(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (h_{k,0} + (x - \alpha)h_{k,1})$ катарлардын бардык мүчөлөрү аныкталды.

(7)-ден төмөнкү маселелерди алабыз:

$$w'_{3k}(t, \mu) + t^2 p(\mu t) w_{3k}(t, \mu) = h_{k,0}, t \in (-\infty, +\infty), \lim_{t \rightarrow \pm\infty} z(t) = 0;$$

$$w'_{3k+1}(t, \mu) + t^2 p(\mu t) w_{3k+1}(t, \mu) = t h_{k,1}, t \in (-\infty, +\infty), \lim_{t \rightarrow \pm\infty} z(t) = 0;$$

$$w'_{3k+2}(t, \mu) + t^2 p(\mu t) w_{3k+2}(t, \mu) = 0, t \in (-\infty, +\infty), \lim_{t \rightarrow \pm\infty} z(t) = 0.$$

Бул маселелердин чыгарылыштарын, тиешелүү түрдө, төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$w_{3k}(t, \mu) = h_{k,0} \int_{-1/\sqrt[3]{\varepsilon}}^t e^{\int_{s^2}^t p(\mu s) ds} d\tau;$$

$$w_{3k+1}(t, \mu) = h_{k,1} \int_{-1/\sqrt[3]{\varepsilon}}^t \tau e^{\int_{s^2}^t p(\mu s) ds} d\tau; w_{3k+1}(t, \mu) \equiv 0.$$

Маселенин шарты боюнча $p \in C^\infty[0, T]$, ошондуктан $\exists M > 0: |p(x)| < M = \text{const}$.

$w_{3k}(t, \mu)$ жана $w_{3k+1}(t, \mu)$ функциялар үчүн асимптотикалык баалар орун алат:

$$w_{3k}(t, \mu) = O(1/t^2), w_{3k+1}(t, \mu) = O(1/t), t \rightarrow \pm\infty.$$

(8)-(9)-маселени карайбыз.

$$\pi'(\tau, \varepsilon) + \alpha^2 p(\varepsilon\tau)\pi(\tau, \varepsilon) = 2\varepsilon\tau\alpha p(\varepsilon\tau)\pi(\tau, \varepsilon) - \varepsilon^2\tau^2 p(\varepsilon\tau)\pi(\tau, \varepsilon), \tau \in (0, \infty); \tag{8}$$

$$\pi(0, \varepsilon) = y^0 - u(0, \varepsilon), \tag{9}$$

$\pi(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k(\tau)$ катарды (8)-(9)-маселеге коебуз:

$$\pi'_0 + \alpha^2 p(\varepsilon\tau)\pi_0 = 0, \quad \pi_0(0, \varepsilon) = y^0 - u_0(0), \lim_{\tau \rightarrow \infty} \pi_0 = 0;$$

$$\pi'_1 + \alpha^2 p(\varepsilon\tau)\pi_1 = 2\tau\alpha p(\varepsilon\tau)\pi_0, \quad \pi_1(0, \varepsilon) = -u_1(0), \lim_{\tau \rightarrow \infty} \pi_1 = 0;$$

$$\pi'_k + \alpha^2 p(\varepsilon\tau)\pi_k = 2\tau\alpha p(\varepsilon\tau)\pi_{k-1} - \tau^2 p(\varepsilon\tau)\pi_{k-2}, \quad \pi_k(0, \varepsilon) = -u_k(0), \lim_{\tau \rightarrow \infty} \pi_k = 0, 1 < k \in N;$$

$$\pi_0 = (y^0 - u_0) e^{-\alpha^2 \int_0^\tau p(s\varepsilon) ds};$$

$$\pi_1 = -u_1 e^{-\alpha^2 \int_0^\tau p(s\varepsilon) ds} + 2\alpha(y^0 - u_0) e^{-\alpha^2 \int_0^\tau p(s\varepsilon) ds} \int_0^\tau s p(s\varepsilon) ds;$$

$$\pi_k = -u_k(0) e^{-\alpha^2 \int_0^\tau p(s\varepsilon) ds} + e^{-\alpha^2 \int_0^\tau p(s\varepsilon) ds} \int_0^\tau (2s\alpha\pi_{k-1}(s, \varepsilon) - s^2\pi_{k-2}(s, \varepsilon)) p(s\varepsilon) ds;$$

(1)-маселенин шарты боюнча $p(x) \in C^\infty[0, T], p > 0, 0 \leq x = \tau\varepsilon \leq T$ ошондуктан төмөнкү асимптотикалык баалар орун алат:

$$|\pi_k(\tau, \varepsilon)| \leq c e^{-\gamma\tau}, \tau \in [0, \infty), 0 < c, \gamma = \text{const}.$$

Натыйжада биз (5)-катыштагы белгисиз функцияларды, тактап айтканда $u(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x)$, $w(t, \mu) = \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(t)$, $\pi(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k(\tau)$ катарлардын мүчөлөрүн таап алдык. Катарларды мүчөлөрү аларга коюлган шарттардын баарын толугу менен канааттандырышат.

Тургузулган

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x) + \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k(\tau) \quad (10)$$

катар чындап (1)-маселенин асимптотикалык ажыралмасы экендигин далилдөө үчүн анын калдык мүчөсүн баалайбыз. (10)-катарды төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x) + \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=0}^{3n+2} \mu^k w_k(t) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \pi_k(\tau) + R_n(x), \quad (11)$$

мында $R_n(x)$ – калдык функция.

(11)-катышты (1)-маселеге алып барып коюп, калдык функцияга карата төмөнкү маселени алабыз:

$$\varepsilon R'_n(x) + (x - \alpha)^2 p(x) R_n(x) = \varepsilon^{n+1} \Phi(x, \tau, \varepsilon), \quad 0 < x \leq T, \quad R_n(0) = 0, \quad (12)$$

мында $\Phi(x, \tau, \varepsilon) = u'_n(x) + (2\alpha + \varepsilon\tau)\tau p(\varepsilon\tau)\pi_n(\tau) + \tau^2 p(\varepsilon\tau)\pi_{n-1}(\tau)$.

$\Phi(x, \tau, \varepsilon)$ функциясын $H = \{(x, \tau, \varepsilon) | 0 \leq x \leq T, 0 \leq \tau < \infty, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1\}$ аймагында баалайбыз:

$$\begin{aligned} |\Phi(x, \tau, \varepsilon)| &= |u'_n(x) + (2\alpha + \varepsilon\tau)\tau p(\varepsilon\tau)\pi_n(\tau) + \tau^2 p(\varepsilon\tau)\pi_{n-1}(\tau)| \leq \\ &\leq |u'_n(x)| + |(2\alpha + \varepsilon\tau)\tau p(\varepsilon\tau)\pi_n(\tau)| + |\tau^2 p(\varepsilon\tau)\pi_{n-1}(\tau)| \leq c, \quad 0 < c = const. \end{aligned} \quad (13)$$

(12)-маселенин чыгарылышы төмөнкү көрүнүштө болот:

$$R_n(x) = \varepsilon^n \int_0^x \Phi(\xi, \tau, \varepsilon) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^x (s-\alpha)^2 p(s) ds} d\xi.$$

Жогорудагы (13)-бааны эске алып, төмөнкү асимптотикалык бааны алабыз:

$$|R_n(x, \varepsilon)| = \varepsilon^n \left| \int_0^x \Phi(\xi, \tau, \varepsilon) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^x (s-\alpha)^2 p(s) ds} d\xi \right| \leq \varepsilon^n c \left| \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^x (s-\alpha)^2 p(s) ds} d\xi \right| \leq \varepsilon^n c T.$$

Төмөнкү теорема далилденди

Теорема. Оң кичи параметр ε нөлгө умтулганда сингулярдык козголгон биринчи тартиптеги, сызыктуу, бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы (1)-маселенин чыгарылышы үчүн

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x) + \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=0}^{3n+2} \mu^k w_k(t) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \pi_k(\tau) + O(\varepsilon^n)$$

асимптотикалык ажыралма орун алат.

Мисал. Айталы (1)-маселеде $\alpha=1$, $p(x)=1$, $f(x)=1+x$, $T=2$, $y^0=1$ болсун. Анда (1)-маселе төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varepsilon y'(x) + (x-1)^2 y(x) = 1+x, \quad 0 < x \leq 2, \quad y(0) = 1. \quad (14)$$

Так чыгарылышы:

$$y(x, \varepsilon) = e^{-\frac{(x-1)^3+1}{3\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{(x-1)^3}{3\varepsilon}} \int_0^x (1+s) e^{\frac{(s-1)^3}{3\varepsilon}} ds.$$

Биз алган ажыралма (10)-ажыралма төмөнкү көрүнүштө болот:

$$Y(x, \varepsilon) = w\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right) + \pi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

мында

$$w(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon^2}} e^{-t^3/3} \int_{-1/\sqrt[3]{\varepsilon}}^t e^{s^3/3} ds + \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} e^{-t^3/3} \int_{-1/\sqrt[3]{\varepsilon}}^t s e^{s^3/3} ds,$$

$$\pi(\tau) = e^{-\tau} \left(1 + \varepsilon \tau^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\tau^4}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right) \right).$$

Алынган $y(x, \varepsilon)$ жана $Y(x, \varepsilon)$ чыгарылыштарды салыштырабыз. Сандык эсептөөлөр үчүн Maple системасын колдонобуз. Maple системасында ε кичи параметрдин маанилеринде эки функциянын графиктерин тургузуп салыштырабыз. Maple системасында эки функциянын графиктерин бир координаталар системасында түрдүү түстөр жана сызыктар менен сүрөттөө үчүн төмөнкү команданы беребиз:

>restart; eq:= $\varepsilon*(diff(y(x), x)) + (x-1)^2 y(x) = 1+x$;

> ics := $y(0) = 1$;

>dsolve ({eq, ics});

$$y(x) := \left(\int_0^x \frac{e^{\frac{(z1-1)^3}{3\varepsilon}} (z1+1)}{\varepsilon} d_z1 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} \right) e^{-\frac{(x-1)^3}{3\varepsilon}};$$

> $\varepsilon:=0.000001$:

$$>w(t) := \frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon^2}} \cdot e^{-\frac{t^3}{3}} \cdot \int_{-\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}}^t e^{\frac{s^3}{3}} ds + \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{t^3}{3}} \cdot \int_{-\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}}^t s \cdot e^{\frac{s^3}{3}} ds;$$

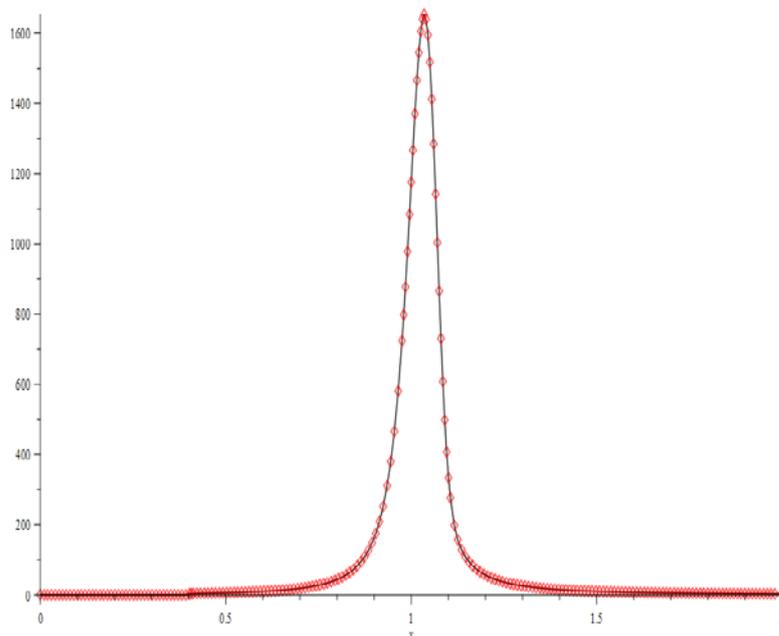
$$z(\tau) := e^{-\tau} + \varepsilon \cdot \tau^2 \cdot e^{-\tau} + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\tau^4}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right) \cdot e^{-\tau};$$

$$Y(x) := w\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right) + z\left(\frac{x}{\varepsilon}\right);$$

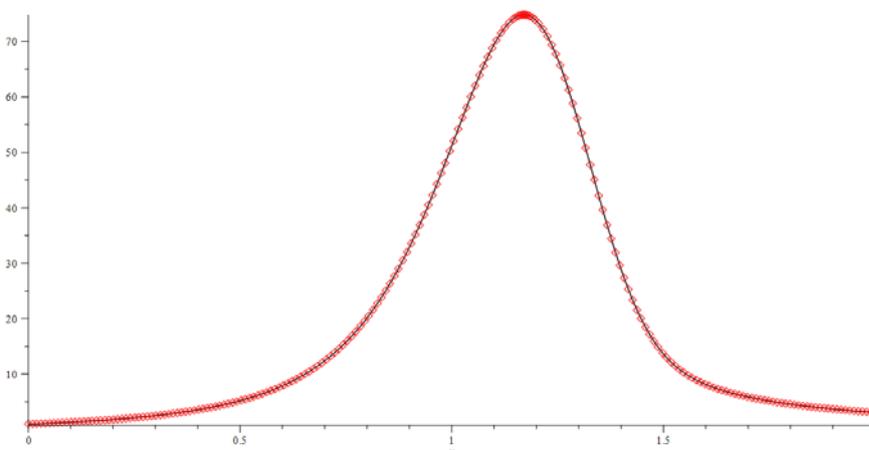
>plot ([y(x), Y(x)], x = 0..2, color = [black, red], style = [line, point])

Натыйжада $y(x, 10^{-6})$ жана $Y(x, 10^{-6})$ функцияларынын графиктерин алабыз.

$y(x, 10^{-6})$ – үзгүлтүксүз сызык (line), $Y(x, 10^{-6})$ – чекиттер менен (point):



Сүрөт 1. $\varepsilon=10^{-9}$ болгон учур



Сүрөт 2. $\varepsilon=10^{-3}$ болгон учур

Корутунду

Кичи параметрди туундуу белгиси астында кармаган биринчи тартиптеги сызыктуу, бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселе изилденди. Физиканын, техниканын, биологиянын, химиянын ж.б. илимдердин тармактарында кеңири кездешет мындай маселелерди изилдөө бүгүнкү күндө өтө актуалдуу болуп саналат. Изилденип жаткан Кошинин маселесинин өзгөчөлүктөрү – кичи параметрдин белгисиз изделүүчү функциянын туундусу белгиси астында катышып жаткандыгы жана каралып жаткан аралыктын ичинде өзгөчө чекитке ээ болушу. Бул эки өзгөчөлүк кичи параметрден көз каранды болгон эки катмарды пайда кылат, биринчиси классикалык чек аралык катмарды, ал эми экинчиси – ички катмарды. Катмарлардын калыңдыгы ар түрдүү, классикалык катмар экспоненциалдуу мүнөздө кемийт, ал эми ички катмар болсо даражалуу мүнөздө. Ошондуктан чыгарылыш үч функциянын суммасы көрүнүштө туюнтулду, алар: регулярдык тышкы чыгарылыш, баштапкы чекиттин чеке белиндеги чек аралык катмарды мүнөздөөчү чыгарылыш жана өзгөчө чекиттин чеке белиндеги ички катмарды мүнөздөөчү чыгарылыш. Макалада каралып жаткан кесиндиде коюлган бисингулярдык козголгон Коши маселенин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузулду жана катардын калдык мүчөсү бааланды. Бисингулярдык козголгон маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу үчүн жаңы алгоритм сунушталды. Конкреттүү мисал келтирилип, сунушталып жаткан алгоритм менен алынган ажыралманын Maple системасында тургузулган сандык чыгарылыш менен алынган чыгарылыштар салыштырылды. Натыйжада эки чыгарылыш асимптотикалык мааниде дал келди.

Адабияттар

1. Абдилазизова, А. (2022). “Асимптотика решения сингулярно возмущенного линейного дифференциального уравнения первого порядка”. *Вестник Ошского государственного университета*, (1), 5–11. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_1_5
2. Алымкулов, К., Халматов, А. А. (2012). “Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой”. *Математические заметки*, 92(6), 819–824.
3. Алымкулов, К., Асылбеков, Т.Д., Долбеева, С.Ф. (2013). “Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка”. *Математические заметки*, 94(4), 484–487.
4. Васильева, А.Б., Бутузов, В.Ф. (1973). *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*. Москва: Наука.
5. Вишик, М. И., Люстерник, Л. А. (1957) Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *Успехи математических наук*, 12(4), 3–122.
6. Ильин, А. М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. *Москва: Наука*, 1989. – 334 с.
7. Коул, Дж. (1972) *Методы возмущений в механике жидкости*. Москва: Мир. – 276 с.

8. Ломов, С. А., Ломов, И. С. (2011) *Основы математической теории пограничного слоя*. Москва: Изд-во МГУ. – 456 с.
 9. Ломов, С. А. (1981) *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*. Москва: Наука. – 400 с.
 10. Найфе, А. (1984) *Введение в методы возмущений*. Москва: Мир. – 535 с.
 11. Омаралиева, Г. А., Турсунов, Д. А. (2022) Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка. *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 28(2), 193–200.
 12. Сушко, В. Г., Розов, Н. Х. (1997) Асимптотическое решение бисингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Математическое моделирование*, 9(10), 33.
 13. Тихонов, А. Н. О (1948) зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. *Математический сборник*, 22 (64), 193–204.
 14. Тихонов, А. Н. (1952) Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. *Математический сборник*, 31 (73) (3), 575–586.
 15. Турсунов, Д. А. (2013) Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений. *Ош: Билим*. – 150 с.
 16. Турсунов, Д. А. (2018) Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. *Известия вузов. Математика*, (3), 70–78.
 17. Турсунов, Д. А. (2018) Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений». *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, (54), 46–57.
 18. Турсунов, Д., Бекмурза уулу, Ы. (2022). Асимптотики решения возмущенной задачи с регулярной особой точкой. *Вестник Ошского государственного университета*, (1), 159–166. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_1_159
 19. Шлихтинг, Г. (1974) *Теория пограничного слоя*. Москва: Наука. – 712 с.
 20. O'Malley, R. E. (1974) *Introduction to Singular Perturbation*. Academic Press, New York.
 21. Poincaré, H. (1886) *Acta Mathematica*, 8. – P. 295–344.
 22. Prandtl, L. (1904) *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*. Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg. – P. 484–491.
 23. Tursunov, D. A. (2017) *The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 38(3), 542–546.
 24. Tursunov, D. A., Sulaimanov, Z. M., & Khalmatov, A. A. (2021) Singularly perturbed ordinary differential equation with turning point and interior layer. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(12), 3016–3021.
- Wasow, W. (1944) Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation $\Delta U + \lambda (\partial/\partial x) U = \lambda f(x, y)$. *Duke Mathematical Journal*, 11, 405.