ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

ISSN: 1694-7452 **e-ISSN: 1694-8610**

№4/2025, 163-174

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.928
DOI: 10.52754/16948610_2025_4_11

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ЭЛЛИПТИКАЛЫК ТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ДИРИХЛЕ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATION OF ELLIPTICAL TYPE

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович
Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich

ф.-м.и.д., профессор, Ош мамлекеттик университети
д.ф.-м.н., профессор, Ошский государственный университет
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Osh State University
dtursunov@oshsu.kg
ORCID: 0000-0002-6990-1742

Орозов Максатбек Омурбекович
Орозов Максатбек Омурбекович
Orozov Maksatbek Omurbekovich

ф.-м.и.к., доцент, Ош мамлекеттик университети
к.ф.-м.н., доцент, Ошский государственный университет
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Osh State University
orozov@oshsu.kg
ORCID: 0009-0002-8800-098X

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ЭЛЛИПТИКАЛЫК ТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ДИРИХЛЕ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

Аннотация

Макалада кичи параметрди лапласиан белгиси астында кармаган экинчи тартиптеги, эки өзгөрүлмөлүү, сызыктуу, бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн алкакта Дирихленин маселеси изилденет. Мындай маселелер физиканын, техниканын, биологиянын, химиянын ж.б. илимдердин тармактарында кездешет. Изилденип жаткан Дирихленин маселесинин өзгөчөлүктөрү: 1) кичи парметрдин лапласиандын операторунун белгиси астында катышып жаткандыгы; 2) алкактын ички четинде жоюлуучу өзгөчө айланага ээ болушу. Белгиленген өзгөчөлүктөр алкактын эки четиндеги айланаларда эки катмарды пайда кылат. Бирөөсү классикалык чектик катмарды, ал эми экинчиси – классикалык эмес чектик катмарды пайда кылат. Ошондуктан Дирихленин маселесинин чыгарылышы үч функциянын суммасынан турат: регулярдык тышкы чыгарылыш жана эки чектик катмарлардагы чыгарылыштар. Макаланын максаты каралып жаткан алкакта коюлган сингулярдык козголгон Дирихленин маселенинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу. Макаладагы сингулярдык козголгон маселелерди чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу үчүн жаңы алгоритм сунушталууда. Маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасы тургузулган жана анын калдык мүчөсү бааланган.

Ачкыч сөздөр: Дирихленин маселеси, сингулярдык козголуу, регулярдык козголуу, асимптотикалык чыгарылыш, асимптотикалык ажыралма, чек аралык катмар, алкак

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Аннотация

В статье исследуется задача Дирихле для линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми переменными и с малым параметром при лапласиане. Особенностями исследуемой задачи Дирихле являются: 1) присутствие малого параметра перед лапласианом; 2) устранимой сингулярной окружности на внутренней границе кольца. Цель статьи – построение равномерного асимптотического разложения решения сингулярно возмущенной задачи Дирихле в рассматриваемом кольце. В статье предлагается новый алгоритм построения асимптотического разложения решения сингулярно возмущенных задач. Построено асимптотическое разложение решения и полечена оценка для остаточного члена.

Ключевые слова: задача Дирихле, сингулярное возмущение, регулярное возмущение, асимптотическое решение, асимптотическое разложение, пограничный слои, кольцо.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATION OF ELLIPTICAL TYPE

Abstract

This paper studies the Dirichlet problem for a linear nonhomogeneous elliptic second-order partial differential equation with two independent variables and a small parameter in front of the Laplace operator. Similar problems are encountered in physics, engineering, biology, chemistry, and other fields of science. The Dirichlet problem under consideration is characterized by the following features: 1) the presence of a small parameter in front of the Laplace operator; 2) a removable singular circle on the inner boundary of the annulus. The noted singularities on the boundary annuli generate two boundary layers. One of them generates a classical boundary layer, and the second, a nonclassical one. Consequently, the solution to the Dirichlet problem consists of the sum of three functions: a regular exterior solution and two solutions in the boundary layers.

Keywords: Dirichlet problem, singular perturbation, regular perturbation, asymptotic solution, asymptotic expansion, boundary layer, annulus.

Киришүү

Сингулярдык козголгон чектик маселелерди изилдөө акыркы ондогон жылдарда прикладдык математикада өзгөчө актуалдуу багыттардын бири болуп калды. Бул маселелердин актуалдуулугу алардын реалдуу физикалык, техникалык жана табигый процесстерди математикалык моделдештирүүдөгү ролу менен шартталат. Айрыкча кичи параметр жогорку тартиптеги туундулардын алдында турган учурда, чыгарылыштын сапаттык жүрүм-туруму кескин өзгөрүп, классикалык теориянын алкагында түшүндүрүү мүмкүн болбой калган өзгөчөлүктөр пайда болот.

Мындай типтеги теңдемелер жылуулук өткөрүү процессинде жука катмарлардын пайда болушун, диффузиялык кубулуштарда тез өзгөрүүчү зоналарды, электростатикада потенциалдын чек арага жакын бөлүктөрүндөгү резки өзгөрүүлөрдү сүрөттөөдө кездешет. Ошондуктан сингулярдык козголгон эллиптикалык теңдемелер үчүн чектик маселелерди терең теориялык жактан изилдөө практикалык колдонмолор үчүн да маанилүү болуп саналат (Алымкулов, Асилбеков, Долбеева, 2013; Найфе, 1984; Wasow, 1944).

Каралып жаткан Дирихленин маселесинин өзгөчөлүгү — ал ички чек арага ээ болгон алкакта коюлгандыгында жана теңдеменин коэффициенттеринин бир бөлүгүндө жоюлуучу сингулярдык фактордун болушунда. Бул жагдай маселени кадимки сингулярдык козголгон маселелерден айырмалап, кошумча татаалдыктарды жаратат. Тактап айтканда, кичи параметрдин нөлгө умтулуусу менен бирге, ички чек аранын айланасында кошумча чек аралык катмар пайда болот. Натыйжада маселе эки чек арада тең сингулярдык мүнөзгө ээ болуп, бисингулярдык маселелер классына кирет.

Бисингулярдык маселелерди изилдөө классикалык асимптотикалык ыкмалардан тышкары, атайын ыкмаларды талап кылат. Бул багытта К. Алымкулов (2013) тарабынан иштелип чыккан чектик функциялар усулу жана анын жалпыланган варианттары кеңири колдонулат. Бул усул чыгарылышты регулярдык бөлүккө жана чек аралык катмарларды сүрөттөгөн атайын функцияларга ажыратууга мүмкүндүк берип, асимптотикалык ажыралманын бир калыпта болушун камсыз кылат.

Макалада дал ушул жалпыланган чектик функциялар усулунун негизинде эки өзгөрүлмөлүү эллиптикалык типтеги теңдеме үчүн Дирихленин сингулярдык козголгон маселеси изилденет. Маселенин коюлушу жана анын геометриялык өзгөчөлүктөрү чек аралык катмарлардын түзүлүшүнө түздөн-түз таасир этери көрсөтүлөт. Чыгарылыштын негизги бөлүгү менен чектик катмарлардын ортосундагы өз ара байланыш асимптотикалык анализ аркылуу так аныкталат.

Изилдөөнүн негизги максаты — кичи параметр нөлгө умтулган учурда маселенин чыгарылышы үчүн толук, бир калыптагы асимптотикалык ажыралманы тургузуу жана алынган жакындатуунун тактыгына баа берүү. Бул максатка жетүү үчүн көмөкчү чектик маселелер коюлуп, алардын чечимдеринин жашоосу жана жалгыздыгы далилденет. Натыйжада алынган асимптотикалык формулалар теориялык жактан негизделип гана тим болбостон, практикалык эсептөөлөрдө колдонууга да жарактуу болот.

Ушул өңүттөн алганда, бул иш сингулярдык козголгон чектик маселелер теориясын өнүктүрүүгө салым кошуп, алкактагы жана ички сингулярдык чек аралары бар башка маселелерди изилдөө үчүн да методикалык негиз болуп кызмат кылат.

Макалада эки өзгөрүлмөлүү, экинчи тартиптеги эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн алкакта коюлган Дирихленин сингулярдык козголгон маселеси каралат. Маселенин өзгөчөлүгү ички чек арада жоюлуучу сингулярдык айлананын болушу менен шартталат. Мындай өзгөчөлүк классикалык жана классикалык эмес чек аралык катмарлардын бир учурда пайда болушуна алып келет [9]-[13] (Турсунов, 2013; Турсунов, 2018; Tursunov, Orozov, 2020a; Tursunov, Orozov, 2020b; Tursunov, 2017).

Маселенин коюлушу. Алкак үчүн Дирихленин төмөнкү маселесин изилдейбиз:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)-(\rho-a)\frac{\partial v}{\partial\rho}-v=F(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \qquad (1)$$

$$v(a,\varphi,\varepsilon)=0,\quad v(b,\varphi,\varepsilon)=0,\quad \varphi\in[0,2\pi], \qquad (2)$$

мында 0<ε<<1, $0<a<b$ турактуулар, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\,0\le\varphi<2\pi\}$, $v=v(\rho,\varphi,\varepsilon),F\in C^\infty(\bar{D})$.

Дирихленин (1)-(2) маселесинин, кичине параметр нөлгө умтулгандагы, чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу талап кылынат.

Маселени чечүүнүн алгоритми. Алгач жардамчы теореманы далилдеп алабыз.

1-теорема. (1)-(2) маселенин чыгарылышы жашайт, жалгыз жана бул чыгарылыш чектелген.

Далилдөө. (1), (2) маселенин жалгыз гана чыгарылышынын жашашын дифференциалдык барабарсыздыктар усулу менен далилдейбиз. Эгерде $u^{Т}$(ρ,φ,ε) жана $u^{Ж}$(ρ,φ,ε) функциялар үчүн

$$Lv^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)\ge 0,\quad Lv^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)\le 0,\quad (\rho,\varphi)\in D, \qquad (3)$$

$$v^{T}(a,\varphi,\varepsilon)\le 0\le v^{Ж}(a,\varphi,\varepsilon),\; v^{T}(b,\varphi,\varepsilon)\le 0\le v^{Ж}(b,\varphi,\varepsilon),\; \varphi\in[0,2\pi],\; 0<\varepsilon<<1, \quad (4)$$

барабарсыздыктары орун алса, анда бул функциялар тиешелүү түрдө *төмөнкү* жана *жогорку* чыгарылыштар деп аталышат, мында L оператору: $Lv\equiv\varepsilon\Delta v-(\rho-a)\dfrac{\partial v}{\partial\rho}-v-f(\rho,\varphi,\varepsilon)$.

Эгерде

$$v^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)\le v^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in\bar{D}, \qquad (5)$$

барабарсыздыкты канааттандырган $v^{Т}$(ρ,φ,ε) төмөнкү жана $v^{Ж}$(ρ,φ,ε) жогорку чыгарылыштар жашаса, анда (1), (2) маселенин *v*(ρ,φ,ε) чыгарылышы жашайт жана ал чыгарылыш төмөнкү барабарсыздыктарды канааттандырат:

$$v^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)\le v(\rho,\varphi,\varepsilon)\le v^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in\bar{D}. \qquad (6)$$

Ошондуктан, алгач төмөнкү $v^{Т}$(ρ,φ,ε) жана жогорку $v^{Ж}$(ρ,φ,ε) чыгарылыштарды тургузабыз.

Мейли $v^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)=-M$, $v^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)=M$ болсун, мында $M=\max\limits_{\bar{D}}\left|f(\rho,\varphi,\varepsilon)\right|$, $0<\varepsilon<<1$.

Анда $(\rho,\varphi)\in D,\ 0<\varepsilon<<1$ болгондо төмөнкү барабарсыздыктарды алабыз:

$$Lv^{T}\equiv\varepsilon\Delta v^{T}-(\rho-a)\frac{\partial v^{T}}{\partial\rho}-v^{T}-f(\rho,\varphi,\varepsilon)=M-f(\rho,\varphi,\varepsilon)\geq 0\ \Rightarrow\ Lv^{T}\geq 0,\ \ (\rho,\varphi)\in D;$$

$$Lv^{Ж}\equiv\varepsilon\Delta v^{Ж}-(\rho-a)\frac{\partial v^{Ж}}{\partial\rho}-v^{Ж}-f(\rho,\varphi,\varepsilon)=-M-f(\rho,\varphi,\varepsilon)\leq 0\Rightarrow Lv^{Ж}\leq 0,\ \ (\rho,\varphi)\in D.$$

Биздин төмөнкү $u^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жана жогорку $u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылыштар үчүн (5) шарттар орун алат экен. Эми (4) шарттарды текшеребиз: $-M\leq 0\leq M,\ 0<M-const.$

Демек, (4) шарттар дагы аткарылат экен.

Биз тандап алган төмөнкү $v^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жана жогорку $v^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылыштар (3), (4) жана (5) шарттарды канааттандыргандыгы үчүн (1), (2) маселенин чыгарылышы жашайт. Чыгарылыштын жалгыздыгын көрсөтүү үчүн $f(\rho,\varphi,\varepsilon)\equiv 0$ болгондо, $u(\rho,\varphi,\varepsilon)\equiv 0$ дун келип чыгышын байкоо жетиштүү болот.

(6) барабарсыздык төмөнкү көрүнүшкө келет:

$-M\leq u(\rho,\varphi,\varepsilon)\leq M,\ (\rho,\varphi)\in\bar{D},$

бул акыркы барабарсыздыктан (1), (2) маселенин чыгарылышы үчүн төмөнкү баа келип чыгат: $|u(\rho,\varphi,\varepsilon)|\leq M,\ (\rho,\varphi)\in\bar{D},\ 0<\varepsilon<<1.$ 1-теорема далилденди.

Жардамчы лемманы далилдейбиз.

1-лемма. Төмөнкү маселе

$$(\rho-a)\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}+z(\rho,\varphi)=-f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D,$$

$$z(a,\varphi)=0,\quad \varphi\in[0,2\pi],$$

жалгыз чыгарылышка ээ жана бул чыгарылыш төмөнкүдөй көрүнүштө болот

$$z(\rho,\varphi)=-\frac{1}{(\rho-a)}\int_a^{\rho}f(s,\varphi)ds,$$

мында $f\in C^{\infty}(\bar{D}),\ D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\ 0\leq\varphi<2\pi\}.$

Лемма түздөн-түз интегралдоо менен далилденет.

(1)-(2) маселенин формалдуу асимптотикалык ажыралмасын жалпыланган чектик функциялар усулу менен тургузабыз.

Алгач формалдуу асимптотикалык чыгарылышты тургузабыз, андан соң тургузулган катардын калдык мүчөсүн баалайбыз.

(1)-(2) маселенин асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз [9]-[13]:

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon)=u(\rho,\varphi,\varepsilon)+w(t,\varphi,\varepsilon)+z(\tau,\varphi,\mu)\qquad(7)$$

мында $t=(b-\rho)/\varepsilon,\ \tau=(\rho-a)/\mu,\ \varepsilon=\mu^2$.

(7)-туюнтманы (1)-ге алып барып коебуз:

$$\varepsilon\Delta u-(\rho-a)\frac{\partial u}{\partial\rho}-u=F(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c\frac{\partial w}{\partial t}=\varepsilon w+\varepsilon t\frac{\partial w}{\partial t}+\varepsilon\alpha\frac{\partial w}{\partial t}-(\varepsilon\alpha)^2\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2},\ (t,\varphi)\in D_t \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2}-\tau\frac{\partial z}{\partial\tau}-z=-\mu\beta\frac{\partial z}{\partial\tau}-(\mu\beta)^2\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2},\quad (\tau,\varphi)\in D_\tau \qquad (10)$$

мында $c=b-a,\ \alpha=\dfrac{1}{b-\varepsilon t},\beta=\dfrac{1}{a+\mu\tau}$, $D_t=\{(t,\varphi)\,|\,0\le t<\infty,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $D_\tau=\{(\tau,\varphi)\,|\,0\le\tau<\infty,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$.

(7)-ни (2)- чек аралык шарттарга коебуз:

$$v(a,\varphi,\varepsilon)=u(a,\varphi,\varepsilon)+w((b-a)/\varepsilon,\varphi,\varepsilon)+z(0,\varphi,\mu)=0,$$

$$v(b,\varphi,\varepsilon)=u(b,\varphi,\varepsilon)+w(0,\varphi,\varepsilon)+z((b-a)/\mu,\varphi,\mu)=0,$$

мындан $u(\rho,\varphi,\varepsilon),\ z(\tau,\varphi,\mu),\ w(t,\varphi,\varepsilon)$ белгисиз функциялар үчүн төмөнкү шарттарды алабыз:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)\in C^\infty(\bar D\times(0,\varepsilon_0]),\ \varepsilon_0=const, \qquad (11)$$

$$w(0,\varphi,\varepsilon)=-u(b,\varphi,\varepsilon),\ \lim_{t\to\infty}w(t,\varphi,\varepsilon)=0,\ \varphi\in[0,2\pi], \qquad (12)$$

$$z(0,\varphi,\mu)=-u(a,\varphi,\mu^2),\ \lim_{\tau\to\infty}z(\tau,\varphi,\mu)=0,\ \varphi\in[0,2\pi]. \qquad (13)$$

Натыйжада каралып жаткан (1)-(2) маселе үч маселеге бөлүнөт: (8),(11); (9), (12) жана (10), (13).

Алгач (8), (11) маселенин асимптотикалык чыгарылышын тургузабыз, чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=u_0(\rho,\varphi)+\varepsilon u_1(\rho,\varphi)+\varepsilon^2 u_2(\rho,\varphi)+\ldots+\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+\ldots \qquad (14)$$

(14)- туюнтманы (8)-барабардыкка алып барып коебуз жана кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин чогултуп, төмөнкү маселелерди алабыз:

$$(\rho-a)\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}+u_0(\rho,\varphi)=-F(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D,\ u_0(\rho,\varphi)\in C^\infty(\bar D); \quad (15)$$

$$(\rho-a)\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}+u_k(\rho,\varphi)=\Delta u_{k-1}(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D,\ u_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(\bar D),\ k\in\mathrm{N}, \quad (16)$$

(15) жана (16)- теңдемелерди (11)- шартты эске алып интегралдайбыз. 1-лемманын негизинде:

$$u_0(\rho,\varphi)=-\frac{1}{(\rho-a)}\int_a^{\rho}F(s,\varphi)ds,\quad u_k(\rho,\varphi)=-\frac{1}{(\rho-a)}\int_a^{\rho}\Delta u_{k-1}(s,\varphi)ds, k\in N$$

туюнтмаларды алабыз, алынган функциялар (11)-шартты канааттандырышат.

(9), (12)- маселеге өтөбүз. (9), (12) маселенин асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$w(t,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t,\varphi). \qquad (17)$$

(17)-ни (9) жана (12)-катыштарга алып барып коюуп, кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин чогултуп анан барабардыктын эки жагындагы коэффициенттерди барабарлап, төмөнкү маселелерди алабыз:

$$lw_0\equiv\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+c\frac{\partial w_0}{\partial t}=0, (t,\varphi)\in D_t,\ w_0(0,\varphi)=-u_0(b,\varphi), \lim_{t\to\infty}w_0(t,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi]; \quad (18)$$

$$lw_1=w_0+(t+\alpha)\frac{\partial w_0}{\partial t},\ (t,\varphi)\in D_t,\quad w_1(0,\varphi)=-u_1(b,\varphi), \lim_{t\to\infty}w_1(t,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi]; \quad (19)$$

$$\begin{gathered}lw_k=w_{k-1}+(t+\alpha)\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t}-\alpha^2\frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial\varphi^2},\ (t,\varphi)\in D_t,\\ w_k(0,\varphi)=-u_k(b,\varphi), \lim_{t\to\infty}w_k(t,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi], k=2,3,...\end{gathered} \quad (20)$$

2-лемма. Төмөнкү маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз болот:

$$lw=G(t,\mu t,\varphi), (t,\varphi)\in D_t,\ w(0,\varphi)=\gamma(\varphi), \lim_{t\to\infty}w(t,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi], \quad (21)$$

мында G – үзгүлтүксүз функция.

Далилдөө. Бир тектүү теңдеменин сызыктуу көз каранды эмес эки жекече чыгарылыштарын табабыз:

$lq\equiv\dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2}+c\dfrac{\partial q}{\partial t}=0$ теңдеменин бир жекече чыгарылышы $q_1(t,\varphi)=c_1(\varphi)$ экендигин байкоо кыйын эмес, чындыгында $q_1(t,\varphi)=c_1(\varphi)$ функциянын t боюнча жеке туундулары нөлгө барабар болот.

Экинчи сызыктуу күз каранды эмес чыгарылышы $q_2(t,\varphi)=e^{-ct}$ болот, чындыгында, бул функция $\dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2}+c\dfrac{\partial q}{\partial t}=0$ барабардыгын канааттандырат.

Демек, $q_1(t,\varphi)=c_1(\varphi)$, $q_2(t,\varphi)=e^{-ct}$.

Сызыктуу көз каранды эмес $q_1(t,\varphi)$ жана $q_2(t,\varphi)$ чыгарылыштарды колдонуп (21) маселенин чыгарылышын жазабыз:

$$w(t,\varphi)=\gamma(\varphi)e^{-ct}+e^{-ct}\int_0^t e^{c\xi}\int_{\infty}^{\xi}G(s,\mu s,\varphi)dsd\xi. \qquad (22)$$

Эгерде (21) маселе бир тектүү болсо, анда ал тривиалдык (нөлдүк) чыгарылышка ээ болорун (22)ден байкоого болот. Мындан (21) маселенин чыгарылыш жалгыз экендиги келип чыгат.

2-лемма далилденди.

2-лемманын негизинде (18)-(20) маселелердин чыгарылыштарынын жашашы жана жалгыздыгы келип чыгат.

(18)- маселенин так чыгарылышы төмөнкү көрүнүштө болот:

$$w_0(t,\varphi)=-u_0(b,\varphi)e^{-ct},$$

жана $t\to\infty$, $\mu\to 0$ болгондо $w_0(t,\varphi)$ функциясы экспоненциалдык мүнөздө кемийт.

Анда (19) жана (20)- маселелердин чыгарылыштары төмөнкү көрүнүштө болот:

$$w_1(t,\varphi)=-u_1(b,\varphi)e^{-ct}+e^{-ct}\int_0^t e^{c\xi}\int_\infty^\xi\left(w_0+(s+\alpha)\frac{\partial w_0}{\partial s}\right)dsd\xi,$$

$$w_k(t,\varphi)=-u_k(b,\varphi)e^{-ct}+e^{-ct}\int_0^t e^{c\xi}\int_\infty^\xi\left(w_{k-1}+(s+\alpha)\frac{\partial w_{k-1}}{\partial s}-\alpha^2\frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial\varphi^2}\right)dsd\xi,\ k=2,3,...$$

Натыйжада (17)-катардын бардык мүчөлөрү аныкталды, б.а.(9), (12)-маселенин чыгарылышы тургузулду.

Эми (10), (13)-маселеге өтөбүз. Аналогиялуу түрдө, (10), (13)- маселенин асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$z(\tau,\varphi,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k z_k(\tau,\varphi). \qquad (23)$$

(23)-катарды (10) жана (13)-катыштарга алып барып коюуп, кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин чогултуп анан барабардыктын эки жагындагы коэффициенттерди барабарлап, төмөнкү маселелерди алабыз:

$$Mz_0\equiv\frac{\partial^2 z_0}{\partial\tau^2}-\tau\frac{\partial z_0}{\partial\tau}-z_0=0,(\tau,\varphi)\in D_\tau,\ z_0(0,\varphi)=-u_0(a,\varphi),\lim_{\tau\to\infty}z_0(\tau,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi]; \quad (24)$$

$$Mz_1=-\beta\frac{\partial z_0}{\partial\tau},(\tau,\varphi)\in D_\tau,\ z_1(0,\varphi)=0,\lim_{\tau\to\infty}z_1(\tau,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi]; \quad (25)$$

$$Mz_{2k}=-\beta\frac{\partial z_{2k-1}}{\partial\tau}-\beta^2\frac{\partial^2 z_{2k-2}}{\partial\varphi^2},(\tau,\varphi)\in D_\tau,\ z_{2k}(0,\varphi)=-u_k(a,\varphi),\lim_{\tau\to\infty}z_{2k}(\tau,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi]; \quad (26)$$

$$Mz_{2k+1}=-\beta\frac{\partial z_{2k}}{\partial\tau}-\beta^2\frac{\partial^2 z_{2k-1}}{\partial\varphi^2},(\tau,\varphi)\in D_\tau,\ z_{2k+1}(0,\varphi)=0,\lim_{\tau\to\infty}z_{2k+1}(\tau,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi]. \quad (27)$$

Бул маселелер үчүн төмөнкү лемманы далилдейбиз.

3-лемма. Төмөнкү маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз болот:

$$Mz=H(\tau,\mu\tau,\varphi),(\tau,\varphi)\in D_\tau,\ z(0,\varphi)=\gamma(\varphi),\lim_{\tau\to\infty}z(\tau,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi], \quad (28)$$

мында H – үзгүлтүксүз функция.

Далилдөө. Бир тектүү теңдеменин сызыктуу көз каранды эмес эки жекече чыгарылыштарын табабыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2}-\tau\frac{\partial z}{\partial\tau}-z=0\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2}-\frac{\partial}{\partial\tau}(\tau z)=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\tau}(\frac{\partial z}{\partial\tau}-\tau z)=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial\tau}-\tau z=c_1(\varphi)\Rightarrow$$

$$z(\tau,\varphi)=c_2(\varphi)e^{\tau^2/2}+c_1(\varphi)e^{\tau^2/2}\int_{\infty}^{\tau}e^{-s^2/2}\,ds,$$

мында $c_1(\varphi)$ жана $c_2(\varphi)$ – эрктүү функциялар.

Демек, $e^{\tau^2/2}$ жана $e^{\tau^2/2}\int_{\infty}^{\tau}e^{-s^2/2}\,ds$ функциялары $\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2}-\tau\frac{\partial z}{\partial\tau}-z=0$ теңдеменин сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштары болушат.

Табылган сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштардын жардамында (28)-маселенин чыгарылышын жазабыз:

$$z(\tau,\varphi)=-\frac{2\gamma(\varphi)}{\sqrt{\pi}}e^{\tau^2/2}\int_{\infty}^{\tau}e^{-s^2/2}\,ds+e^{\tau^2/2}\int_{t}^{\infty}(e^{\xi^2/2}\int_{\infty}^{\xi}e^{-s^2/2}\,ds)Hd\xi+\left(e^{\tau^2/2}\int_{\infty}^{\tau}e^{-s^2/2}\,ds\right)\int_{0}^{\tau}e^{s^2/2}\,Hds.$$

3-лемма далилденди.

3-лемманын негизинде (24)-(27) маселелердин чыгарылыштарынын жашашы жана жалгыздыгы келип чыгат.

(24)- маселенин так чыгарылышы төмөнкү көрүнүштө болот:

$$z_0(\tau,\varphi)=\frac{2u(a,\varphi)}{\sqrt{\pi}}e^{\tau^2/2}\int_{\infty}^{\tau}e^{-s^2/2}\,ds,$$

жана $\tau\to\infty$ болгондо $z_0(t,\varphi)$ функциясы даражалуу мүнөздө кемийт.

Аналогилуу түрдө (25)-(27)-маселелердин чыгарылыштарын (3)-лемманын негизинде жазууга болот, жана алар $\tau\to\infty$ болгондо даражалуу мүнөздө кемийт.

Натыйжада (23)-катардын бардык мүчөлөрү аныкталды, тактап айтканда (10), (13)-маселенин чыгарылышы тургузулду.

Ошентип, (1)-(2)-чектик маселенин (7)-формалдуу асимптотикалык ажыралмасынын бардык мүчөлөрү аныкталды. Тургузулган (7)-ажыралманын калдык мүчөсүн баалайбыз.

Мейли $v(\rho,\varphi,\varepsilon)=v_n(\rho,\varphi,\varepsilon)+R(\rho,\varphi,\varepsilon)$ болсун, мында $R(\rho,\varphi,\varepsilon)$ – калдык мүчө, $v_n(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k w_k(t,\varphi)+\sum_{k=0}^{2n+1}\mu^k z_k(\tau,\varphi)$.

Анда калдык мүчө үчүн төмөнкү маселени алабыз:

$$\varepsilon\Delta R-(\rho-a)\frac{\partial R}{\partial\rho}-R=O(\varepsilon^{n+1}),\ \ \varepsilon\to 0,\quad (\rho,\varphi)\in D,$$

$$R(a,\varphi,\varepsilon)=0,\ \ R(b,\varphi,\varepsilon)=0,\ \ \varphi\in[0,2\pi].$$

Максимум принцибин [9]-[13] колдонуп же 1-теореманын негизинде, төмөнкү асимптотикалык бааны алабыз: $R(\rho,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon\to 0,\ (\rho,\varphi)\in\bar{D}.$

Натыйжада, биз төмөнкү теореманы далилдедик

2-теорема. (1)-(2) маселенин чыгарылышы үчүн $\varepsilon\to 0, (\rho,\varphi)\in\bar{D}$ болгондо, төмөнкү бир калыптагы асимптотикалык ажыралма орун алат

$$\left\| v(\rho,\varphi,\varepsilon)-\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k w_k(t,\varphi)+\sum_{k=0}^{2n+1}\mu^k z_k(\tau,\varphi)\right\|\le k\varepsilon^{n+1}, 0<k=const.$$

жана төмөнкү пределдик барабардык туура болот

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v(\rho,\varphi,\varepsilon)=v_0(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}.$$

Талкуулоо

Бул изилдөөдө алынган натыйжалар сингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги дифференциалдык теңдемелер үчүн чектик маселелердин теориясында маанилүү орунду ээлейт. Айрыкча ички чек арага ээ болгон алкакта коюлган Дирихленин маселеси үчүн чыгарылыштын асимптотикалык жүрүм-турумун талдоо маселени тереңирээк түшүнүүгө мүмкүндүк берди. Кичи параметрдин оператор Лапластан алдында турушу маселенин классикалык чечимдеринен олуттуу айырмалануусуна алып келип, чек аралык катмарлардын пайда болушун шарттайт.

Алынган жыйынтыктар көрсөткөндөй, каралып жаткан маселе бир гана тышкы чек арада эмес, ички чек арада да сингулярдык мүнөзгө ээ. Бул жагдай чыгарылыштын эки башка чек аралык катмарды камтыган структурасын түзөт. Тактап айтканда, регулярдык бөлүк негизги аймакта жакшы жакындаштырылса, ички жана тышкы чек араларга жакын зоналарда өзүнчө масштабдагы өзгөрүүлөр орун алат. Бул көрүнүш маселени бисингулярдык деп классификациялоого толук негиз берет.

Жалпыланган чектик функциялар усулунун [1] колдонулушу маселенин мындай татаал түзүлүшүн системалуу түрдө талдоого мүмкүндүк берди. Бул усулдун артыкчылыгы — ар бир чек аралык катмар үчүн өзүнчө көмөкчү маселе коюлуп, алардын чечимдери регулярдык бөлүк менен дал келтирилгенинде. Натыйжада алынган асимптотикалык ажыралма алкактын бардык чекиттеринде бир калыпта жарактуу болуп, чечимдин сапаттык жана сандык жүрүм-турумун толук сүрөттөп бере алат.

Изилдөө процессинде коюлган көмөкчү чектик маселелердин ар бири өз алдынча математикалык кызыгуу жаратат. Алар үчүн чыгарылыштын жашоосу жана жалгыздыгы далилденип, чечимдердин чексиздикке умтулгандагы жүрүм-туруму кылдат изилденди. Бул факт асимптотикалык ажыралманын формалдуу гана эмес, теориялык жактан негизделген экенин көрсөтөт. Ошондой эле калдык мүчөнүн баасы алынгандыгы асимптотикалык жакындатуунун тактыгын сандык жактан баалоого шарт түзөт.

Мындан тышкары, алынган натыйжалар практикалык эсептөөлөр үчүн да маанилүү. Чек аралык катмарларды эске албаган сандык ыкмалар, адатта, чоң ката кетириши мүмкүн. Ал эми бул иште алынган асимптотикалык формулалар эсептик алгоритмдерди жакшыртуу үчүн негиз катары кызмат кыла алат. Айрыкча инженердик жана физикалык моделдерде, мында кичи параметр реалдуу физикалык чоңдуктарга байланыштуу болсо, мындай жакындатуулар жогорку тактыкты камсыз кылат.

Алынган жыйынтыктарды мурдагы илимий эмгектер менен салыштырганда, бул иш ички чек арасы бар алкактар үчүн сингулярдык козголгон маселелерди изилдөөгө кошумча салым кошот деп айтууга болот. Классикалык иштерде көбүнчө жөнөкөй аймактар же бир гана чек аралык катмар каралса, бул эмгекте эки тараптуу сингулярдык толук эске алынды. Бул жагдай изилдөөнүн илимий жаңылыгын жана актуалдуулугун баса белгилейт.

Ошентип, талкууланган натыйжалар сингулярдык козголгон чектик маселелердин теориясын тереңдетип гана тим болбостон, аларды практикалык колдонууга жакындатат. Бул өз кезегинде прикладдык математика менен математикалык физиканын ортосундагы байланышты чыңдоого өбөлгө түзөт.

Корутунду

Бул макалада алкакта коюлган сингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги дифференциалдык теңдеме үчүн Дирихленин маселеси ар тараптуу изилденди. Маселенин негизги өзгөчөлүгү — Лаплас операторунун алдында кичи параметрдин болушу жана ички чек арада жоюлуучу сингулярдык фактордун катышуусу — чыгарылыштын татаал асимптотикалык түзүлүшүн шарттайт. Бул өзгөчөлүктөр маселенин бисингулярдык мүнөзгө ээ экенин көрсөтөт.

Жалпыланган чектик функциялар усулунун негизинде маселенин чыгарылышы үчүн толук жана бир калыптагы асимптотикалык ажыралма тургузулду. Бул ажыралма регулярдык бөлүктөн жана ички жана тышкы чек аралык катмарларды сүрөттөгөн кошумча мүчөлөрдөн турат. Ар бир компонент үчүн тиешелүү көмөкчү маселелер коюлуп, алардын чечимдеринин жашоосу жана жалгыздыгы далилденди.

Асимптотикалык ажыралманын калдык мүчөсүнө алынган баа жакындатуунун тактыгын камсыз кылып, алынган формулалардын ишенимдүүлүгүн тастыктады. Бул жыйынтык теориялык жактан да, практикалык колдонмолор үчүн да маанилүү болуп саналат. Айрыкча кичи параметр өтө аз мааниге ээ болгон учурларда, алынган асимптотикалык чечимдер так эсептөөлөрдү жүргүзүүгө мүмкүндүк берет.

Изилдөөнүн натыйжалары сингулярдык козголгон чектик маселелердин теориясын өнүктүрүүгө белгилүү бир салым кошот. Ички чек арасы бар алкактар үчүн алынган жыйынтыктар мурдагы иштерди толуктап, кеңейтет. Мындан тышкары, сунушталган ыкма башка геометриялык аймактарда коюлган окшош маселелерге да ийгиликтүү колдонулушу мүмкүн.

Келечектеги изилдөөлөр үчүн бир нече багыттарды белгилөөгө болот. Биринчиден, бул маселени көп өлчөмдүү учурларга жайылтуу актуалдуу болуп саналат. Экинчиден, башка типтеги чектик шарттар (Нейман же аралаш шарттар) менен коюлган маселелерди изилдөө кызыктуу натыйжаларды бериши мүмкүн. Үчүнчүдөн, алынган асимптотикалык формулаларды сандык ыкмалар менен айкалыштыруу практикалык эсептөөлөрдүн тактыгын жогорулатууга шарт түзөт.

Жыйынтыктап айтканда, бул иште алынган натыйжалар сингулярдык козголгон эллиптикалык теңдемелер үчүн чектик маселелерди теориялык жактан терең түшүнүүгө мүмкүндүк берет жана прикладдык маселелерди чечүүдө пайдалуу инструмент катары кызмат кыла алат. Бул изилдөө прикладдык математика жана математикалык физика тармагындагы мындан аркы илимий иштер үчүн бекем негиз түзөт.

Адабияттар

1. Алымкулов, К., Асылбеков, Т.Д., Долбеева, С.Ф. (2013). Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка. *Математические заметки*, 94(4), 484–487.

2. Васильева, А.Б., Бутузов, В.Ф. (1973). *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.* Москва: Наука.

3. Вишик, М.И., Люстерник, Л.А. (1957). Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *Успехи математических наук,* 12(4), 3–122.

4. Ильин, А.М. (1989). *Согласование асимптотических разложений краевых задач.* Москва: Наука.

5. Коул, Дж. (1972). *Методы возмущений в механике жидкости*. Москва: Мир.

6. Ломов, С.А., Ломов, И.С. (2011). *Основы математической теории пограничного слоя.* Москва: Изд-во МГУ.

7. Ломов, С.А. (1981). *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* Москва: Наука.

8. Найфе, А. (1984). *Введение в методы возмущений.* Москва: Мир.

9. Турсунов, Д. А. (2013). *Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений.* Ош: Билим.

10. Турсунов, Д.А. (2018). Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. *Известия вузов. Математика,* (3), 70–78.

11. Tursunov, D.A., Orozov, M.O. (2020). Asymptotics of the Solution to the Roben Problem for a Ring with Regularly Singular Boundary. *Lobachevskii Journal of Mathematics,* 41(1), 89–95.

12. Tursunov, D. A. Orozov, M.O. (2020). Asymptotic solution of the perturbed first boundary value problem with a non-smooth coefficient. *Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics.* 12(3), 41–47.

13. Турсунов, Д., Бекмурза уулу, Ы. (2022). Асимптотики решения возмущенной задачи с регулярной особой точкой. *Вестник Ошского государственного университета*, (1), 159–166. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_1_159

14. Tursunov, D.A. (2017). The Asymptotic Solution of the Three-Band Bisingularly Problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics,* 38(3), 542–546.

15. Wasow, W. (1944) Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation $\Delta U + \lambda(\partial/\partial x)U = \lambda f(x, y)$. *Duke Mathematical Journal,* 11, 405.