УДК 517.983
DOI: 10.52754/16947452_2022_1_167

ВОЛЬТЕРРАНЫН БИРИНЧИ ТИПТЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНА МИСАЛДАР

Чоюбеков Сапарбек Мийзамбекович, *Ага окутуучу*
choybekov.25.04.70@gmail.com
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызсиан

Аннотация: *Интегралдык теңдемелер математиканын негизги бөлүмүнө - анын ичинде физика, техника жана башка көптөгөн илимдерге ар тараптуу колдонулган бөлүмгө кирет. Бул жагынан алганда, акыркы жылдары көптөгөн изилдөөчүлөрдүн аракеттери менен интегралдык теңдемелердин теориясы дүркүрөп өсүүдө. Заманбап компьютердик технологиялардын өнүгүүсү менен сандык чечимдерди реализациялоо жана татаал процесстерди моделдештирүү мүмкүнчүлүгү түзүлдү. Мындай типтеги көптөгөн маселелер интегралдык теңдемелерге келтирилет. Биринчи планга интегралдык теңдемелер чечимдерин сапаттуу изилдөө коюлат. Бирок, пределы боюнча интегралдануучу эки өзгөрүлмөлүү классикалык эмес теңдемелер өтө аз изилденген. Бул анын резольвентасын тургузуунун татаалдыгы менен, ошондой эле кайсы бир моделдик учурларын эске албаганда жалпы типтеги аналитакалык көрүнүшү жазылбаганы менен түшүндүрүлөт. Ошондуктан чечимди ушундай изилдөөлөр актуалдуу деп эсептелинет.*

Ачкыч сөздөр: *интегралдык тендемелер, өсүүчү, үзгүлтүксүз, шарт, өзгөрүлмөлөр, жакындаштырылган чечим, мейкиндик, усул, классикалык эмес.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Чоюбеков Сапарбек Мийзамбекович, старший преподаватель
choybekov.25.04.70@gmail.com
Ошского государственного университета
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Интегральные уравнения относятся к разделу математики, важным для приложений– к ним приводится большое число задач самых разных разделов физики, техники и многих наук. В связи с этим в последние годы теория интегральных уравнений бурно развивается благодаря трудам многих исследователей. С развитием современных компьютерных технологий появляется возможность моделировать самые сложные процессы и реализации численных решений. Многие задачи такого рода сводятся к интегральным уравнениям. На первый план выдвигается качественное исследование решений этих задач. Однако, уравнения с двумя переменными пределами интегрирования, которые называют неклассическими мало изучены. Это объясняется трудностями в построении резольвенты и в составлении соотношения для нее, так как еще не получено аналитическое представление в общем виде за исключением некоторых модельных случаев. Поэтому такого исследования решений являются актуальными.*

Ключевые слова: *интегральное уравнения, возрастающая, непрерывные, условия, переменные, приближенные решения, пространство, метод, неклассические.*

EXAMPLES OF SOLUTION OF THE FIRST KIND VOLTERRA INTEGRAL EQUATION

Choyubekov Saparbek, Senior Lecturer
choybekov.25.04.70@gmail.com
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *Integral equations belong to the branch of mathematics, which is important for applications — a large number of problems of various branches of physics, engineering, and many sciences are given to them. In this regard, in recent years, the theory of integral equations has been developing rapidly thanks to the work of many researchers. With the development of modern computer technologies, it becomes possible to model the most complex processes and implement numerical solutions. And many problems of this kind are reduced to integral equations. The qualitative research of solutions to these problems is put at the forefront. However, equations with two variable limits of integration, which are called non-classical, have been little studied. This is due to the difficulties in constructing the resolvent and in constructing a relation for it, because The analytical representation in general form has not yet been obtained except for some model cases. Therefore, studies of approximate solutions are relevant.*

Keywords: *integral equation, increasing, continuous, conditions, variables, approximate solutions, space, method, nonclassical.*

Киришүү

Интегралдык теңдемелердин теоретикалык бөлүктөрү түрдүү иштерде изилденген. Тактап айтканда, [1] жумушта Вольтерранын экинчи типтеги интегралдык теңдемелерин изилдөө натыйжаларын каралган. [2, 3] жумуштарда, Вольтерранын биринчи типтеги интегралдык теңдемесине ар кандай колдонмо маселелерде колдонулушу келтирилген. [4, 5] жумуштарда Вольтерранын биринчи жана үчүнчү типтеги сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин чечмиминин жалгыздыгы жана чечимдер системасынын регуляризациясы жөнүндө иликтенген. [6] жумушта, Вольтерранын биринчи типтеги интегралдык теңдемеси боюнча натыйжалар келтирилген.

[7, 8] жумуштарда Липшицтин шарттары менен классикалык эмес интегралдык теңдемени чечүү үчүн регуляризациясы оператору тургузулган жана чечимдин жалгыздыгы далилденген. [9] жумушта, Вольтерранын биринчи типтеги сызыктуу классикалык эмес интегралдык тендемелердин чыгарылышы жөнүндө айтылган. [10] жумушта, Вольтерранын биринчи типтеги баштапкы шарты менен берилген сызыктуу классикалык эмес интегралдык тендемесинин чечимин регуляризациялоо далилденген. [11, 12] жумушта биринчи типтеги классикалык эмес интегралдык теңдемени үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде чечүү жөнүндө далилденген.

Бул жумушта Вольтерранын биринчи типтеги классикалык эмес интегралдык теңдемесинин чыгарылышына мисалдар каралат.

Маселенин коюлушу: Төмөнкү интегралдык теңдемени карайлы:

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t); \quad t\in[t_0,T] \tag{1}$$

мында $\alpha(t)$, $K(t,s)$ жана $f(t)-$ берилген функциялар, мында $\alpha(t)\in C^1[t_0,T]$, $\alpha(t)=\beta<t_0$, $f(t)\in C^1[t_0,T]$, $\alpha(t)\le t$ бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн, $K(t,s)$ жана $K_t^{'}(t,s)-$ $G=\{(t,s):\ \alpha(t)\le s\le t\le T\}$ аймагында үзгүлтүксүз функциялар, $\alpha(t)-$ $[t_0,T]$ кесиндисинде өсүүчү функция, ал эми $u(t)-$ $[t_0,T]$ кесиндисинде изделүүчү функция.

Маселенин чечилиши:

Төмөнкү шарттар орун алсын дейли:

a) $K(t,s)$ жана $K'_t(t,s)-$ $G=\{(t,s):\ \alpha(t)\le s\le t\le T\}$, аймагында үзгүлтүксүз функциялар, $K(t,t)\ne 0$ $\mathrm{K}(\mathrm{t},\mathrm{t})\ne 0$ бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн.

b) $\alpha(t)$, $\alpha'(t)$, $f(t)$, $f'(t)\in[t_0,T]$, $\alpha(t_0)=\beta<t_0$, $\alpha(T)=t_0$, $\alpha(t)\le t$, бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн, мында $\alpha(t)-$ $[t_0,T]$ кесиндисинде өсүүчү функция.

$$u(t)=\varphi(t),\ t\in[\beta,t_0] \tag{2}$$

болсун дейли, мында $\varphi(t)-$ $[\beta,t_0]$ кесиндисинде белгилүү функция.

$t\in[t_0,T]$ болсун. Анда (1) интегралдык теңдемени дифференцирлеп,

$$K(t,t)u(t)-K(t,\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{t}K'_t(t,s)u(s)ds=f'(t),\ t\in[t_0,T]$$

теңдемесине ээ болобуз. Мындан төмөнкүнү алабыз:

$$u(t)=\frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)}u(\alpha(t))\alpha'(t)-\int_{\alpha(t)}^{t}\frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}u(s)ds+\frac{f'(t)}{K(t,t)},\ t\in[t_0,T] \tag{3}$$

a), b) шартарды жана (2) функцияны эске алып, (3) интегралдык теңдемени

$$u(t)=-\int_{t_0}^{t}\frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}u(s)ds+P(t),\ t\in[t_0,T] \tag{4}$$

көрүнүшүндө жазабыз, мында

$$P(t)=\frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)}\varphi(\alpha(t))\alpha'(t)-\int_{\alpha(t)}^{t_0}\frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}\varphi(s)ds+\frac{f'(t)}{K(t,t)},\ t\in[t_0,T] \tag{5}$$

$t=t_0$ эсептеп жана (2), (5) функцияларды эске алып, (1) теңдемеден жана (4) функциядан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0}K(t_0,s)u(s)ds=f(t_0); \tag{6}$$

$$\varphi(t_0)=\frac{K(t_0,\alpha(t_0))}{K(t_0,t_0)}u(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)-\int_{\beta}^{t_0}\frac{K'_t(t_0,s)}{K(t_0,t_0)}\varphi(s)ds+\frac{f'(t_0)}{K(t_0,t_0)} \qquad (7)$$

Теорема. a), b), (6) жана (7) шарттары орун алсын дейли. Анда, (2) шарты менен (1) интегралдык теңдеме (4) көрүнүштөгү экинчи типтеги интегралдык теңдемеге эквиваленттүү, мында $P(t)-$ (5) формула менен аныкталган.

Далилдөө: Айталы, $u(t)\in C[\beta,T]$ функциясы (1) теңдеменин (2) шарты канааттандырган чечими болсун. Анда (2) шарт жана (3), (5) катыштардын негизинде $u(t)\in C[t_0,T]$ функциясы (4) интегралдык теңдеменин чечими болот.

Тескерисинче, $u(t)\in C[t_0,T]$ функциясы (4) интегралдык теңдемесинин чечими болсун дейли, мында $P(t)-$ (5) формула менен аныкталган. $v(t)-$ функциясын төмөнкү формула боюнча аныктайбыз:

$$v(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \beta\le t\le t_0,\\ u(t), & t_0\le t\le T.\end{cases} \qquad (8)$$

Анда (5) функциянын, (7) жана (2) шарттарынын негизинде (4) интегралдык теңдемеден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$K(t,t)u(t)-K(t,\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{t}K'_t(t,s)v(s)ds=f'(t)\,,\quad t\in[t_0,T]$$

мындан

$$\left(\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)v(s)ds\right)'_t=f'(t);\quad t\in[t_0,T] \qquad (9)$$

(9) туундуну t_0 дөн t га чейин интегралдап жана (6) шарты эске алуу менен

$$\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)v(s)ds=f(t);\quad t\in[t_0,T]$$

ээ болобуз. Б.а. (8) формула менен аныкталган функция (1) теңдеменин (2) шартты канааттандырган чечими болот. **Теорема далилденди.**

Натыйжа: Теореманын шарттары орун алсын дейли. Анда (2) шарт канаатандырган (1) интегралдык теңдеме $C \in [\beta, T]$ мейкиндигинде жалгыз чечимге ээ болот.

1-мисал.

$$u(t) = t, \quad t \in [-2;0] \tag{10}$$

шарты менен берилген

$$\int_{t-2}^{t} [1 + (t-s)]u(s)ds = t^2 + 4t - \frac{28}{3}; \quad t \in [0;1] \tag{11}$$

интегралдык теңдемени карайлы. Мында $\alpha(t) = t - 2$, $t_0 = 0$, $\beta = -2$, $t_1 = 1$, $K(t,s) = 1 + (t-s)$, $\alpha'(t) = 1$, $f(t) = t^2 + 4t - \frac{28}{3}$. Дагы $t \in [-2;0]$ болгондо $u(t) = t.$ $\varphi(t) = t$, $t \in [-2;0]$ болсун дейли. Бул учурда $K(t,t) = 2$, $K(t, \alpha(t)) = 3$, $K_t'(t,s) = 1$, $(t,s) = G = \{(t,s) : t - 2 \le s \le t \le 1\}$.

(6) жана (7) шарттарын текшерели:

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0} K(t_0, s)u(s)ds = f(t_0); \tag{6}$$

$$\int_{-2}^{0} (1-s)sds = \int_{-2}^{0} (s - s^2)ds = \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^3 \right)_{-2}^{0} = -\frac{28}{3}$$

$$\varphi(t_0) = \frac{K(t_0, \alpha(t_0))}{K(t_0, t_0)} u(\alpha(t_0))\alpha'(t_0) - \int_{\beta}^{t_0} \frac{K_t'(t_0, s)}{K(t_0, t_0)} \varphi(s)ds + \frac{f'(t_0)}{K(t_0, t_0)} \tag{7}$$

$$\varphi(0) = P(0) = \frac{3}{1} \cdot (-2) \cdot 1 - \int_{-2}^{0} \frac{1}{1} sds + \frac{4}{1} = -6 - \frac{1}{2}s^2 \bigg|_{-2}^{0} + 4 = -2 + 2 = 0.$$

Анда теорема боюнча (10) шарт менен берилген (11) интегралдык теңдеме төмөнкү интегралдык теңдемеге эквиваленттүү болот:

$$u(t) = -\int_0^t u(s)ds + P(t)\textbf{,}\quad t \in [0;1] \tag{12}$$

мында

$$P(t) = \frac{3}{1}\cdot(t-2)\cdot 1 - \int_{t-2}^{0} sds + 2t + 4 = 3t - 6 + 2t + 4 - \frac{1}{2}s^2\Big|_{t-2}^{0} =$$

$$= t - 2 + \frac{1}{2}(t-2)^2 = t - 2 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2 = \frac{1}{2}t^2 - t\,;$$

$$P(t) = \frac{1}{2}t^2 - t\,;\quad t \in [0;1] \tag{13}$$

Анда (12) интегралдык теңдеменин чечимин төмөнкүчө табабыз:

$$u(t) = P(t) - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)} P(s)ds$$

$$u(t) = \frac{1}{2}t^2 - t - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}(\frac{1}{2}s^2 - s)ds = \begin{vmatrix} u = \frac{1}{2}s^2 - s & dv = \mathrm{e}^{-(t-s)}ds \\ du = (s-1)ds & v = \mathrm{e}^{-(t-s)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - t - \mathrm{e}^{-(t-s)}\left(\frac{1}{2}s^2 - s\right)_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}(s-1)ds = \begin{vmatrix} u = s-1 \\ du = ds \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - t - \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) + \mathrm{e}^{-(t-s)}(s-1)_0^t - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}ds = t - 1 + \mathrm{e}^{-t} - 1 + \mathrm{e}^{-t} = t - 2 + 2\mathrm{e}^{-t}$$

Ошентип, берилген интегралдык теңдеменин жообу:

$$u(t) = t - 2 + 2\mathrm{e}^{-t} \tag{14}$$

2-мисал. Төмөнкү интегралдык теңдемени карайлы:

$$\int_{t-1}^{t} e^{t-s}u(s)ds = e^t\,\textbf{;}\quad t \in [0;1] \tag{15}$$

$$u(t) = e^t\textbf{,}\quad t \in [-1;0] \tag{16}$$

шарты менен берилген. Мында $\alpha(t) = t - 1$, $t_0 = 0$, $\beta = -1$, $t_1 = 1$, $K(t,s) = e^{t-s}$, $\alpha'(t) = 1$, $f(t) = e^t$. Андан сырткары $t \in [-1;0]$ болгондо

$u(t)=e^t$. $\varphi(t)=e^t$, $t\in[-1;0]$ болсун дейли. Бул учурда $K(t,\alpha(t))=e$, $K_t'(t,s)=e^{t-s}$, $K(t,t)=1$, $(t,s)=G=\{(t,s):t-1\le s\le t\le 1\}$ үчүн.

(6), (7) шарттарды текшерели:

$$\int_{-1}^{0}e^{-s}e^{s}ds=\int_{-1}^{0}ds=1 \qquad (6^*)$$

$$\varphi(0)=P(0)=ee^{-1}-\int_{-1}^{0}e^{-s}e^{s}ds+1=1-\int_{-1}^{0}ds+1=2-1=1. \qquad (7^*)$$

Теорема боюнча (16) шарт менен берилген (15) интегралдык теңдеме төмөнкү интегралдык теңдемеге эквиваленттүү болот:

$$u(t)=P(t)-\int_{0}^{t}e^{t-s}u(s)ds,\ \ t\in[0;1] \qquad (17)$$

мында

$$P(t)=ee^{t-1}-\int_{t-1}^{0}e^{t-s}e^{s}ds+e^t=e^t-e^t\int_{t-1}^{0}ds+e^t=2e^t-e^t\,s\Big|_{t-1}^{0}=2e^t+e^t(t-1)=$$

$$=2e^t+e^tt-e^t=e^t+e^tt=e^t(t+1)$$

$$P(t)=e^t(t+1);\ \ t\in[0;1] \qquad (18)$$

Анда (16) интегралдык теңдеменин чечими төмөнкүчө жазылат:

$$R(t,s)=-e^{(t-s)}e^{-(t-s)}=-1$$

$$u(t)=e^t(t+1)-\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{s}(s+1)ds=\begin{vmatrix}u=s+1 & dv=\mathrm{e}^{s}ds\\ du=ds & v=\mathrm{e}^{s}\end{vmatrix}=$$

$$=e^t(t+1)-\mathrm{e}^{s}\left(s+1\right)\Big|_0^t+\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{s}ds=e^t(t+1)-e^t(t+1)+1+\mathrm{e}^{s}\Big|_0^t=1+e^t-1=e^t$$

Б.а. (16) шартты канааттандырган (15) интегралдык теңдеменин чечими

$$u(t)=e^t \qquad (19)$$

болот.

Корутунду: Вольтерранын биринчи түрдөгү (1) классикалык эмес интегралдык теңдемеси чечилди. Теорема 1 айтылып, далилденди. Бир нече мисалдар келтирилип толук чыгарылды.

Адабияттар

1. Цалюк, З.Б. Интегральное уравнения Вольтерра [Текст] / З.Б. Цалюк // Итоги науки и техники, Мат. анализ, 15, 131-198 (1977)
2. Апарцин, А.С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода: Теория и численные методы [Текст] / А.С. Апарцин // Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1999.-193 стр;
3. Апарцин, А.С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода: Теория и численные методы [Текст] / А.С. Апарцин // Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1999.-193 стр;
4. Апарцин, А.С. Применения интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики [Текст] / А.С. Апарцин, И.В. Караулова, Е.В. Маркова, В.В Труфанов // Электричество, 2005, -№ 10- Стр. 69-75;
5. Иманалиев, М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов, // доклады АН СССР, 309, №5, 1053-1056, (1975)
6. Иманалиев, М.И. Регуляризация и единственность решений для интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов, // доклады РАН, 415, №1, 14-17, (2007)
7. Lamm, R.K. survey of regularization methods for the first kind Volterra equations, Surveys on Solution Methods for Inverse Problems [Текст] / R.K. Lamm // Springer, Vienna (2000), p. 53-82
8. Асанов, А. Регуляризация и единственность решения неклассического интегрального уравнения со условиями Липшица [Текст] / Асанов А., Бекешов Т.О., С.М. Чоюбеков // Вестник спецвыпуск КНУ имени Ж. Баласагына. - Бишкек, 2011. Стр 108-112
9. Чоюбеков, С.М. Регуляризация решения неклассического интегрального уравнения с условиями Липшица [Текст] / С.М. Чоюбеков // Международный научный журнал «Молодой ученый» № 8 (112) Россия, г. Казань 2016; стр. 34-38.
10. Асанов, А. Регуляризация решение неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / Асанов А., С.М. Чоюбеков // ННТиИК, № 1, 2021, 3 DOI:10.26104/NNTIK.2019.4/г.Бишкек стр 3-9

11. Чоюбеков, С.М. О решении линейных неклассических интегральных уравнений вольтерра первого рода [Текст] / С.М. Чоюбеков, Асанов А., Бекешов Т.О. // ННТиИК, № 1, 2020 3 DOI:10.26104/NNTIK.2019.4/г.Бишкек стр. 3-9

12. Асанов, А. О решение неклассического интегрального уравнения I рода в пространстве не прерывных функции [Текст] / Асанов А., Бекешов Т.О., С.М. Чоюбеков // Вестник ОшГУ, №3. - Ош, 2012, с. 48-54

13. Чоюбеков, С.М. Об одном классе неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода [Текст] / С.М. Чоюбеков, Асанов А., Бекешов Т.О., // Вестник ОшГУ, №3. - Ош, 2014, с. 83-88