Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.95

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_159

РЕГУЛЯРДЫК ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТКЕ ЭЭ БОЛГОН КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, ф.-м.и.д., профессор
dtursunov@oshsu.kg

Бекмурза уулу Ыбадылла, аспирант

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Макала бисингулярдык козголгон эки чекиттүү чектик маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасын тургузууга арналган. Кичи параметр жогорку тартиптеги туундунун астында катышкан экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн кесиндиде эки чекиттүү Дирихленин чектик маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы тургузулат. Каралып жаткан маселенин өзгөчөлүгү тиешелүү козголбогон биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме кесиндинин сол учунда регулярдык өзгөчө чекитке ээ. Биз чектик маселелердин асимптотикалык чыгарылыштарын тургузуунун жөнөкөйлөштүрүлгөн алгоритмин сунуштайбыз, ал эки функциянын суммасынан турат жана биздин чек ара функциялар өзгөчө чекиттин чеке-белинде "чек ара катмары" касиетине ээ, б.а. чек ара катмарынын сыртында даражалуу мүнөздө жок болот.*

Ачкыч сөздөр: *ассимптотикалык чыгарылыш, Дирихленин эки чекиттүү чектик маселеси, бисингулярдык козголгон маселе, кичи параметр, регулярдык өзгөчө чекит.*

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д.ф.-м.н., профессор
dtursunov@oshsu.kg

Бекмурза уулу Ыбадылла, аспирант

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Статья посвящена построению асимптотического разложения решения бисингулярно возмущенной двух точечной краевой задачи. На отрезке строится равномерное асимптотическое разложение решения двухточечной краевой задачи Дирихле для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что соответствующая невозмущенная задача для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка имеет регулярную особую точку на левом конце отрезка. Нами предлагается более простой алгоритм построения асимптотического решения краевых задач, который состоит из двух составных функций и наши пограничные функций построенные в окрестности особой точки обладают свойством «погранслойности», т.е. степенным характером исчезают вне пограничного слоя.*

Ключевые слова: *асимптотическое решение, двухточечная краевая задача Дирихле, бисингулярно возмущенная задача, малый параметр, регулярная особая точка.*

ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PERTURBED PROBLEM WITH A REGULARLY SINGULAR POINT

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich, d. p.-m. s., professor
dtursunov@oshsu.kg

Bekmurza uulu Ybadylla, graduate student

Osh State University,

Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *A uniform asymptotic expansion of the solution of the two-point Dirichlet boundary value problem for a linear inhomogeneous ordinary differential equation of the second order with a small parameter at the highest derivative is constructed on the segment. The peculiarity of the problem under consideration is that the corresponding unperturbed problem for an ordinary differential equation of the first order has a regular singular point at the left end of the segment. We propose a simpler algorithm for constructing an asymptotic solution to boundary value problems, which consists of two composite functions, and our boundary functions constructed in the neighborhood of a singular point have the "boundary layer" property, i.e. power-law disappear outside the boundary layer.*

Keywords: *asymptotic solution, two-point Dirichlet boundary value problem, singularly perturbed problem, small parameter, regular singular point.*

Постановка задачи. Исследуем двухточечную краевую задачу

$$\varepsilon y''_\varepsilon(x) + xp(x)y'_\varepsilon(x) - q(x)y_\varepsilon(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0)=a,\ \ y_\varepsilon(1)=b, \qquad (2)$$

где $0<\varepsilon<<1$, a, b, – заданные постоянные, $0<p$, $0<q$, $f\in C^\infty[0,1]$, $p(0)=1$, $q(0)=2$, $f'(0)\neq 0$, $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция зависящая от малого параметра ε и от независимой переменной x.

Двух точечная краевая задача (1), (2) называется задачей Дирихле. Решение краевой задачи существует, единственно и ограничена [1].

Особенностью рассматриваемой задачи является: присутствие малого параметра при старшей производной искомой функции дифференциального уравнения (1) и соответствующее невозмущенное уравнение

$$xp(x)y_0'(x)-q(x)y_0(x)=f(x), \qquad (3)$$

имеет регулярную особую точку при x=0 [2].

Ранее в монографии [1] методом согласования исследовано подобная задача. В [2] методом структурного сращивания исследована задача Дирихле для уравнения (1). В этих работах асимптотическое решение состоит из четырех составных частей, и поэтому при построении асимптотического разложения решения проведено сравнительно много вычислении. А в работе [2] обобщенным методом пограничных функций исследована задача Дирихле для дифференциального уравнения (1). Однако функций $\pi_k(t),\ k=0,1,2,...$ построенные в окрестности точки x=0, ограниченны, но не обладают свойством «поранслойности», т.е. не исчезают вне пограничного слоя, которое является существенным в теории пограничного слоя. Нами предлагается более простой алгоритм построения асимптотического решения краевых задач (1)-(2), который состоит из двух составных функций и наши пограничные функции $\pi_k(t),\ k=0,1,2,...$ построенные в окрестности x=0, обладают свойством «погранслойности», т.е. степенным характером исчезают вне пограничного слоя.

Основной результат. Для начала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Дифференциальное уравнение (3) с условием

$$y_0(1)=b, \qquad (4)$$

имеет единственное решение, представимое в виде

$$y_0(x)=e^{\int_1^x \frac{q(s)}{sp(s)}ds}\left(b+\int_1^x \frac{f(\tau)}{\tau p(\tau)}e^{-\int_1^\tau \frac{q(s)}{sp(s)}ds}d\tau\right). \qquad (5)$$

Лемма доказывается прямым интегрированием дифференциального уравнения.

Следствие. Решение (5) можно представить в виде:

$$y_0(x)=c_0x^2\ln x+Q(x),\text{ где } Q\in C^\infty[0,1],\ c_0-\text{const}.$$

Нетрудно заметить, что $y_0\in C^1[0,1]$, но $y_0\notin C^2[0,1]$.

И эта особенность при x=0 влияет на структуру внешних асимптотических решений задач (1), (4):

$$V_\varepsilon(x)=f_1x^2\ln x+\varepsilon\ln x\tilde{v}_1(x)+\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right)\tilde{v}_2(x)+...+\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right)^n\tilde{v}_{n+1}(x)+...,\ x\to 0,$$

где $\tilde{v}_k\in C^\infty[0,1],\ k\in N.$

Следовательно, рассматриваемая задача является бисингулярной.

Формальное асимптотическое решение краевых задач будем искать в виде [4]-[7]:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k w_k(x)+\sum_{k=0}^\infty \mu^k\pi_k(t),\qquad \text{где } \mu=\sqrt{\varepsilon},\ x=t\mu. \qquad (6)$$

Дифференциальное уравнение (1) запишем в виде

$$\varepsilon y''_\varepsilon(x)+xp(x)y'_\varepsilon(x)-q(x)y_\varepsilon(x)=f(x)-g_\varepsilon(x)+g_\varepsilon(x),\quad 0\le x\le 1, \qquad (7)$$

где $g_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k g_k\ln x,$ пока неизвестные постоянные g_k конкретизируются ниже.

Подставляя (6) в (7) имеем:

$$lw_0\equiv xp(x)w'_0(x)-q(x)w_0(x)=f(x), \qquad (8)$$

$$lw_k=g_k\ln x-w''_{k-1}(x),\quad k\in N; \qquad (9)$$

$$\sum_{k=0}^\infty \mu^k\left(\pi''_k(t)+p(\mu t)t\pi'_k(t)-q(\mu t)\pi_k(t)\right)=-g_k\ln(\mu t). \qquad (10)$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$w_0(1)=b,\ w_k(1)=0,\ k\in N. \qquad (11)$$

$$\pi_0(0)=a-w_0(0);\ \pi_{2k-1}(0)=0;\quad \pi_{2k}(0)=-w_k(0);\ \pi_{k-1}(\mu^{-1})=0,\ k\in N; \qquad (12)$$

На основании леммы 1, решения краевых задач (8), (9), (11) существуют и единственны эти решения можно представить в виде:

$$w_0(x) = \alpha_0 x^2 \ln x + \tilde{w}_0(x), \quad \text{где} \quad \tilde{w} \in C^\infty[0,1].$$

Вычислим $w''_0(x)$:

$$w'_0(x) = 2\alpha_0 x \ln x + \alpha_0 x + \tilde{w}'(x), \qquad w''_0(x) = 2\alpha_0 \ln x + 3\alpha_0 + \tilde{w}''(x).$$

Решение задачи (9), (11) при k=1 запишем в виде:

$$w_1(x) = e^{\int_1^x \frac{q(s)}{sp(s)}ds} \int_1^x \frac{g_1 \ln\tau - w''_0(\tau)}{\tau p(\tau)} e^{-\int_1^\tau \frac{q(s)}{sp(s)}ds} d\tau .$$

Пусть $g_1 = 2\alpha_0$, тогда $w_1(x) = \alpha_1 x^2 \ln x + \tilde{w}_1(x)$, где $\tilde{w}_1 \in C^\infty[0,1]$. Аналогично, при $g_2 = 2\alpha_1$, имеем $w_2(x) = \alpha_2 x^2 \ln x + \tilde{w}_2(x)$, где $\tilde{w}_2 \in C^\infty[0,1]$. Продолжая этот процесс, мы последовательно определяем $w_k(x)$, при $g_k(x) = \alpha_{k-1}$: $w_k(x) = \alpha_k x^2 \ln x + \tilde{w}_k(x)$, где $\tilde{w}_k \in C^\infty[0,1]$.

Таким образом, нами определены все функций $w_k(x)$ и $g_k(x)$. Так как

$$g_\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k g_k\right)\ln x \Rightarrow g_\mu(\mu t) = \left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k g_k\right)\ln(\mu t).$$

Дифференциальное уравнение (10) запишем в виде

$$\sum_{k=0}^\infty \mu^k \left(\pi''_k(t) + t\pi'_k(t) - 2\pi_k(t) + \mu t^2 \tilde{p}(\mu t)\pi'_k(t) - \mu t\tilde{q}(\mu t)\pi_k(t)\right) = -\sum_{k=1}^\infty \mu^{2k} g_k \ln(\mu t),$$

где $p(x) = p(0) + x\tilde{p}(x),\ q(x) = q(0) + x\tilde{q}(x),\ \tilde{p},\ \tilde{q} \in C^\infty[0,1]$.

Отсюда, записываем следующие дифференциальные уравнения

$$L\pi_0 \equiv \pi''_0(t) + t\pi'_0(t) - 2\pi_0(t) = 0; \tag{13}$$

$$L\pi_{2k+1} = \Phi_{2k}(\mu t, t),\ k=0,1,2,\ldots; \tag{14}$$

$$\mathrm{L}\,\pi_{2k} = \Phi_{2k-1}(\mu t, t) - g_k \ln(\mu t),\ k=0,1,2,\ldots; \tag{15}$$

где $\Phi_k(\mu t, t) = t\tilde{q}(\mu t)\pi_k(t) - t^2\tilde{p}(\mu t)\pi'_k(t)$.

Справедлива лемма.

Лемма 2. Краевая задача

$$Lz = r(t), \quad 0 < t < \mu^{-1}, \tag{16}$$

$$z(0) = z^0, \;\; z(\mu^{-1}) = 0, \tag{17}$$

имеет единственное решение, представимое в виде:

$$z(t) = \frac{z_2(t)}{c}\int_0^t e^{t^2/2} z_1(s) r(s) ds + \frac{z_1(t)}{c}\int_t^{\mu^{-1}} e^{t^2/2} z_2(s) r(s) ds + z_2(t)\left(z^0 - \frac{1}{c}\int_0^{\mu^{-1}} e^{t^2/2} z_2(s) r(s) ds \right).$$

где $r \in C[0,\mu^{-1}]$, $z_1(t)$ и $z_2(t)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения Lz=0: $z_1(t)=t^2+1$ и $z_2(t) = -(t^2+1)c\int_t^{\mu^{-1}} \frac{1}{(s^2+1)^2} e^{-s^{2/2}} ds$,

$$c = -\left(\int_0^{\mu^{-1}} \frac{1}{(s^2+1)^2} e^{-s^2/2} ds \right)^{-1}, \;\; \mu \to 0\text{: c} \to -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Функция $z_2(t)$ обладает свойствам:

a) $z_2(0)=1$; *b*) $z_2(t) \sim t^{-3} e^{-t^2/2},\ t \to \infty, \mu \to 0$; *c*) $z_2 \in C^\infty[0,\mu^{-1}]$;

d) функция $z_2(t)$ монотонно убывает при $t \in [0,\mu^{-1}],\ \left(z'_2(t) < 0 \right)$.

Доказательство леммы 2 не представляет трудности. С помощью функций $z_1(t)$, $z_2(t)$ и вронскиана $W(z_1,z_2) = ce^{-t^2/2}$ можно построить общее решение дифференциального уравнения (16):

$$z(t) = z_2(t)\int \frac{z_1(t)r(t)}{W}dt - z_1(t)\int \frac{z_2(t)r(t)}{W}dt + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t),$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные интегрирования.

Затем, c_1 и c_2 подберем так чтобы выполнялись краевые условия (17).

Заметим, что однородная краевая задача

$$L\pi_0 \equiv \pi''_0(t) + t\pi'_0(t) - 2\pi_0(t) = 0, \;\; 0 < t < 1/\mu, \; \pi'_0(0) = 0, \; \pi'_0(\mu^{-1}) = 0$$

имеет единственное тривиальное решение $\pi_0(t) \equiv 0$.

С помощью этой леммы 2 доказывается существование и единственность решения уравнений (13)-(15) с краевыми условиями (12).

Перейдем к оценке остаточного члена. Пусть

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k w_k(x) + \sum_{k=0}^{2n+1} \mu^k \pi_k(t) + R_{n+1,\varepsilon}(x), \tag{18}$$

где $R_{n+1,\varepsilon}(x)$ остаточный член формального асимптотического разложения.

Подставляя (18) в (1)-(2) имеем:

$$\varepsilon R''_{n+1,\varepsilon}(x) + xp(x)R'_{n+1,\varepsilon}(x) - q(x)R_{n+1,\varepsilon}(x) = G(x,t,\varepsilon), \quad 0 \le x \le 1 \qquad (19)$$

$$R_{n+1,\varepsilon}(0) = 0, \quad R_{n+1,\varepsilon}(1) = 0, \qquad (20)$$

где $G(x,t,\varepsilon) = \mu^{2n+2}\left(t\tilde{q}(\mu t)\pi_{2n+1}(t) - t^2\tilde{p}(\mu t)\pi'_{2n+1}(t)\right) - \varepsilon^{n+1}w''_n(x)$.

Учитывая свойств функций $\tilde{q}(\mu t),\ \pi_{2n+1}(t),\ \tilde{p}(\mu t),\ \pi'_{2n+1}(t), w''_n(x)$ получаем асимптотические оценки:

$$G(x,t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 1/\sqrt{\varepsilon},$$

$$R_{n+1,\varepsilon}(0) - h_1 R'_{n+1,\varepsilon}(0) = O(\varepsilon^{n+1/2}),\ \varepsilon \to 0.$$

Для задачи (19), (20) применяя теорему [1, с. 116], получаем оценку для $R_{n+1,\varepsilon}(x)$: $R_{n+1,\varepsilon}(x) = O(\varepsilon^{n+1/2}), \quad \varepsilon \to 0, \quad 0 \le x \le 1.$

Нами доказана теорема

Теорема. Для решения задачи (1)-(2) на отрезке $0 \le x \le 1$ справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k w_k(x) + \sum_{k=0}^{2n+1} \sqrt{\varepsilon}^k \pi_k(x\mu^{-1}) + O\left(\varepsilon^{n+1/2}\right),\ \varepsilon \to 0.$$

Литература

1. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе [Текст] / А.М. Ильин, А.Р. Данилин М.- ФИЗМАТЛИТ, 2009. 248 с.

2. Алымкулов, К. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / К. Алымкулов, Т.Д. Асылбеков, С.Ф. Долбеева // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 4. С. 484-487.

3. Алымкулов, К. Равномерное приближение решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка в случае, когда невозмущенное уравнение имеет регулярную особую точку [Текст] / К. Алымкулов, А.З. Зулпукаров // Исслед. по инт.-дифф.уравнениям. –Бишкек: Илим. 2004. Вып. 33. С.118-123.

4. Tursunov, D. A. Asymptotic Solution of the Robin Problem with a Regularly Singular Point [Текст] / D. A. Tursunov, Bekmurza uulu Ybadylla // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 613–620.

5. Турсунов, Д.А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем [Текст] / Д.А. Турсунов // Изв. вузов. Математика. 2018. № 3. С. 70–78. DOI: 10.3103/S1066369X18030088.

6. Турсунов, Д.А. Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена [Текст] / Д.А. Турсунов // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 10–21. DOI 10.17377/semi.2017.14.002

7. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота [Текст] / Д.А. Турсунов // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 271–281.