ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

ISSN: 1694-7452 **e-ISSN: 1694-8610**

№3/2025, 145-150

МАТЕМАТИКА

УДК: 519.64

DOI: 10.52754/16948610_2025_3_0_11

СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗНЫХ ФОРМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

КӨП ӨЛЧӨМДҮҮ СИНГУЛЯЛДЫК ИНТЕГРАЛДАРДЫН ТҮРДҮҮ ФОРМАЛАРЫНЫН БАЙЛАНЫШЫ

THE RELATIONSHIP BETWEEN DIFFERENT FORMS OF REPRESENTATION OF MULTIDIMENSIONAL SINGULAR INTEGRALS

Джуракулов Рахматжон
Джуракулов Рахматжон
Djurakulov Rakhmatjon

к.ф.-м.н., доцент, Андижанский институт сельского хозяйства и агротехнологий
ф.-м.и.к., доцент, Андижан айыл чарба жана агротехнологиялар институту, Андижан, Өзбекстан
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Andijan Institute of Agriculture and Agrotechnologies, Andijan, Uzbekistan
r.umarov1975@mail.ru
ORCID: 0009-0007-6907-7486

СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗНЫХ ФОРМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аннотация

Многие задачи механики, теории аналитических функции математической физики и т.д. связаны с многомерными сингулярными интегральными уравнениями. Поэтому естественно интересен вопрос о том, какая существует связь между разными формами сингулярных интегралов и в статье изучается именно этот вопрос на примере $\Phi(x)=\iint\limits_{S}\frac{M(x,y)}{r^2}\varphi(y)\,dy$, где $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ - вектор функции, а $M(x,y)$ некоторая матрица, если $x\in S$, то данный интеграл является сингулярным интегралом.

Ключевые слова: вычислительная математика, квадратурная формула, кубатурная формула, сингулярный интеграл, интеграл с ядром Гильберта

Көп өлчөмдүү сингулялдык интегралдардын түрдүү формаларынын байланышы

Аннотация

Көп өлчөмдүү сингулярдуу интегралдык теңдемелер менен механиканын көптөгөн маселелери, математикалык физиканын аналитикалык функцияларынын теориясы жана башкалар байланышкан. Ошондуктан, сингулярдык интегралдардын ар кандай формаларынын ортосунда кандай байланыш бар деген суроо табигый түрдө кызыктуу жана макалада бул суроо $\Phi(x)=\iint\limits_{S}\frac{M(x,y)}{r^2}\varphi(y)\,dy$ мисалында изилденет, мында $\varphi(x)$ жана $\Phi(x)$ функциянын вектору, ал эми $M(x,y)$ кандайдыр бир матрица, эгерде $x\in S$, болсо, анда бул интеграл сингулярдык интеграл болот.

Ачкыч сөздөр: эсептөө математикасы, квадратуралык формула, кубуратура формуласы, сингулярдык интеграл, Гильберт ядросу менен интеграл

The relationship between different forms of representation of multidimensional singular integrals

Abstract

Many problems of mechanics, theory of analytical functions of mathematical physics, etc. are connected with multidimensional singular integral equations. Therefore, naturally the question of what connection exists between different forms of singular integrals is of interest and in the article this question is studied on the example of $\Phi(x)=\iint\limits_{S}\frac{M(x,y)}{r^2}\varphi(y)\,dy$, where $\varphi(x)$ and $\Phi(x)$ are the vector of the function, and $M(x,y)$ is some matrix, if $x\in S$, then this integral is a singular integral.

Keywords: computational mathematics, quadrature formula, cubature formula, singular integral, integral with Hilbert kernel

Введение

Ряд задач механики, теория аналитических функций, математической физики и т.д. тесно связано с многомерными интегральными уравнениями (Мусхелишвили, 1968, с.156). Из чего следует необходимость разработки приближённых методов для вычисления многомерных сингулярных интегралов. Вопрос о построении квадратурных и кубатурных формул для определенных и для сингулярных интегралов также является не только одним из наиболее актуальных разделов вычислительной математики и вызывает своеобразный интерес и поэтому наблюдаем много разнообразных работ в этой области.

Например, в работах В.В. Иванова (Иванов, 1958, с.75; 1972, с. 209.), Б.Г. Габдулхаев (Габдулхаев, 1975, с. 13) и др. подучила значительное развитие теория и практика сингулярных квадратур. В работах (Джуракулов и Исраилов, 1978, с. 7; Джуракулов, 1978, с. 19; Нурматов и Ишкобулов, 2003, с.17; Шешко, 1976, с. 108; Хубежты, 2008, с.61) изучаются разные подходы построения квадратурных и кубатурных формул для интегралов с ядром Коши, а работа (Исраилов и Максудов, 1978, с. 31) посвящена вопросу о построении приближенных интегралов с ядром Гильберта. И естественно интересен вопрос о том, какая существует связь между разными формами сингулярных интегралов таких как, например, интегралы с ядрами типа Коши и типа Гильберта.

С этой целью в этой работе мы пытались изучить этот вопрос на примере следующего интеграла

$$Vf = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(X,\theta)}{r^2} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2, \tag{1}$$

где $\theta = \dfrac{Y - X}{\|Y - X\|}$.

Если

$$\varphi(X,\theta) = b(X)\theta = \frac{Y - X}{\|Y - X\|} b(X),$$

то интеграл (1) примет вид:

$$Vf = b(X)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y - X}{\|Y - X\|} \frac{f(y_1, y_2)}{\|Y - X\|^2} dy_1 dy_2,$$

и

$$(Vf)_1 = b(x_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \frac{f(y_1, y_2)}{r^2} dy_1 dy_2, \tag{2}$$

$$(Vf)_2 = b(x_2)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_2 - x_2}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \frac{f(y_1, y_2)}{r^2} dy_1 dy_2, \tag{3}$$

В последних интегралах проведем замену

$$y_1 = i\frac{1 + t_1}{1 - t_1},\ y_2 = i\frac{1 + t_2}{1 - t_2},\ x_1 = i\frac{1 + \tau_1}{1 - \tau_1},\ x_2 = i\frac{1 + \tau_2}{1 - \tau_2},$$

после чего имеем

$$\left(Vf\right)_1 = -4b\left(i\frac{1+\tau_1}{1-\tau_2}\right)\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\frac{\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}}{\sqrt{\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{f\left(i\dfrac{1+t_1}{1-t_1}, i\dfrac{1+t_2}{1-t_2}\right)}{\left[\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right]}\frac{dt_1dt_2}{\left(1-t_1\right)^2\left(1-t_2\right)^2},$$

или

$$\left(Vf\right)_1 = -4b\left(i\frac{1+\tau_1}{1-\tau_2}\right)\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\frac{\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}}{\sqrt{\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{f\left(i\dfrac{1+t_1}{1-t_1}, i\dfrac{1+t_2}{1-t_2}\right)\left(t_1-\tau_1\right)\left(t_2-\tau_2\right)}{\left[\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right]\left(1-t_1\right)^2\left(1-t_2\right)^2}\frac{dt_1dt_2}{\left(t_1-\tau_1\right)\left(t_2-\tau_2\right)}, \tag{4}$$

где γ_1, γ_2 – единичные окружности.

Рассмотрим теперь величины

$$\frac{y_1-x_1}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2}}, \tag{5}$$

$$\frac{y_2-x_2}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2}} \tag{6}$$

из подынтегральных выражений (2) и (3). Они являются ограниченными величинами, то есть можно показать, что

$$\frac{\left|y_1-x_1\right|}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2}} \le 1,$$

$$\frac{\left|y_2-x_2\right|}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2}} \le 1.$$

Кроме того, если одним и тем же законом $y_1 \to x_1$ и $y_2 \to x_2$, то (5) и (6) стремятся к одному и тому же пределу $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Аналогичные рассуждения имеют места и относительно следующих величин:

$$\frac{\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}}{\sqrt{\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}},\quad \frac{t_1-\tau_1}{\sqrt{\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}$$

и

$$\frac{t_2-\tau_2}{\sqrt{\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}.$$

Введя обозначения

$$b\left(t\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)=b_1(\tau_1),$$

$$g_1(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)=\frac{4\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)\,f\left(i\dfrac{1+t_1}{1-t_1},i\dfrac{1+t_2}{1-t_2}\right)}{\left[\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right]^{3/2}(1-t_1)^2(1-t_2)^2},$$

из (4) имеем

$$(Vf)_1=b_1(\tau_1)\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\frac{g_1(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)\,dt_1dt_2}{(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)}, \tag{7}$$

Аналогичным путем получаем, что

$$(Vf)_2=b_2(\tau_2)\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\frac{g_2(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)\,dt_1dt_2}{(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)}, \tag{8}$$

где

$$b_2(\tau_2)=b\left(i\frac{1+\tau_2}{1-\tau_1}\right),$$

$$g_2(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)=\frac{4\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)\,f\left(i\dfrac{1+t_1}{1-t_1},i\dfrac{1+t_2}{1-t_2}\right)}{\left[\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right]^{3/2}(1-t_1)^2(1-t_2)^2}.$$

Таким же образом можно установить связь (Мусхелишвили, 1968, с.156) между интегралами вида (7) и (8) и сингулярными интегралами с ядром Гильберта.

Литература

1. Мусхелишвили, Н.И. (1968). *Сингулярные интегральные уравнения*. Москва: Физматгиз, сс. 513.

2. Габдулхаев, Б.Г. (1975). Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов. *Изв. Вузов. Математика*, №4, сс. 3-13.

3. Иванов, В.В. (1958). Приближённое вычисление сингулярных интегралов. *Научные труды Новочеркасского политехнического института*, 67(81), сс. 75-86.

4. Иванов, В.В. (1972). Об оптимальных алгоритмах вычисления сингулярных интегральный уравнений. *В сб. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа»*. М. Наука, сс. 209-219.

5. Джуракулов, Р., Исраилов М.И. (1980). Построение весовых кубатурных формул для сингулярных интегралов с помощью – сплайн функции. *Изв.вузов, Математика*, №9, 7-12.

6. Джуракулов, Р.О. (1978). Некоторых квадратурных формулах для интегралов типа Коши и сингулярных интегралов специального вида. «*Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып*. 51. Т. сс. 19-25.

7. Исраилов, М.И., Максудов, Т.С., (1974). Квадратурные и кубатурные формули для сингулярных интегралов с ядром Гильберта на классе функций E_S^{α}. *«Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып.* №28. Т. 1974, сс. 31-45.

8. Nurmatov, Z. O., Eshqobulov, O.B. (2003). “Kosh yadroli singulyar integralni taqribiy hisoblash uchun optimal formula qurish”. *Central azian journal of education and innovatsion*. May. с. 178-187.

9. Шешко, М.А. (1976). “О сходимости квадратурного процесса для сингулярного интеграла”. *Изв. вузов. Математика*. №2, сс. 108-118.

10. Хубежты, Ш.С. (2008). “Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши”. *Владикавк. матем. журн*. Том 10, №4, сс. 61-75.