Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.951.2

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_149

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Сопуев Адахимжан, докт. ф.-м. наук, профессор,

sopuev@mail.ru

Нуранов Бактыбек Шермаматович, ст. преподователь,

nuranov2014@mail.ru

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотоция: *Доказана существование и единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного парабало-гиперболического типа третьего порядка с переменными коэффициентами при младших членов. Особенностью данной задачи заключается в том, что смешанный параболо-гиперболический оператор применяется к обыкновенному дифференциальному оператору по переменной x. Методом понижения порядка рассматриваемая задача сводится к задаче Гурса для уравнения гиперболического типа в характеристического треугольника и к первой краевой задаче для уравнения параболического типа в прямоугольнике. Разрешимость задачи сводитс к разрешимости интегрального уравнений Фредгольма второго рода. После определения следа функции и её производной по y, решение задачи польностью определяется в рассматриваемых областей.*

Ключевые слова: *краевые задачи, существование, единственность, функции Грина, интегральные уравнение, резольвента, метод понижения.*

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ КИЧИНЕ МҮЧӨЛӨРҮ БАР АРАЛАШ ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР ЖӨНҮНДӨ

Сопуев Адахимжан, ф.-м.и. докт., профессор,

sopuev@mail.ru

Нуранов Бактыбек Шермаматович, улук окутуучу,

nuranov2014@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Үчүнчү тартиптеги өзгөрмөлүү кичине мүчөлөрү бар аралаш парабола-гиперболалык теңдеме үчүн чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы дадилденген. Бул маселенин өзгөчөлүгү болуп аралаш парабола-гиперболалык оператордун х өзгөрмөсү боюнча алынган кадимки дифференциалдык опреаторго колдонулушу болуп эсептелет. Тартибин төмөндөтүү методу менен маселени чечүү характеристикалык үч бурчтукта гиперболалык типтеги теңдеме үчүн Гурстун маселесини жана тик бурчтукта параболалык типтеги теңдеме үчүн биринчи чек аралык меселеге келтирилет. Маселенин чечилиши Фредгольмдун экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесинин чечилүүчүлүгүнө алып келинет. Изделүүчү функциянын изи жана анын у боюнча туундусу табылгандан кийин маселенин каралып жаткан областтардагы чечимдери толугу менен аныкталат.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, чечимдин жашашы, чечимдин жалгыздыгы, Гриндин функциясы, интегралдык теңдеме, тартибин төмөндөтүү методу, резольвента.*

ON BOUNDARY TASKS FOR THE EQUATION MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE OF THE THIRD ORDER WITH MINOR TERMS

Sopuev Adakhimzhan, Doctor of Physical and Matheatical sciences
sopuev@mail.ru
Nuranov Baktybek, senior teacher
nuranov2014@mail.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem for an equation of a mixed parabalo-hyperbolic type of the third order with variable coefficients at lower terms is proved. A feature of this problem is that the mixed parabolic-hyperbolic operator is applied to an ordinary differential operator with respect to the variable x. By the order reduction method, the problem under consideration is reduced to the Goursat problem for a hyperbolic type equation in a characteristic triangle and to the first boundary value problem for a parabolic type equation in a rectangle. The solvability of the problem is reduced to the solvability of the Fredholm integral equations of the second kind. After* *determining the trace of the function and its derivative with respect to y, the solution of the problem is completely determined in the areas under consideration.*

Keywords: *boundary value problems, existence, uniqueness, functions of Green, integral equation, resolvent reduction method.*

1. Постановка задачи. Пусть $D_1 = \{(x,y): 0 < x < \ell,\ 0 < y < h\}$, $D_2 = \{(x,y): 0 < x < \ell, -h_1 < y < 0\}$, а $D = D_1 \cup D_2$. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих все производные $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s\ (r = 0,1,...,n,\ s = 0,1,...,m)$.

В области D рассмотрим уравнение

$$L_1 L_2 u = 0, \tag{1}$$

где

$$L_1 \equiv \begin{cases} L_{11} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} + c_1(x,y),\ y > 0, \\ L_{12} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} - a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + c_2(x,y),\ y < 0, \end{cases} \qquad L_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

a_2, b_2, c_1, c_2 - заданные функции.

Отметим, что оператор L_1 представляет собой смешанный параболо-гиперболический оператор [1]. Нетрудно заметить, что прямая $y = const$ - является двукратной, а прямая $x = const$ - однократный характеристикой уравнения (1) [2].

<u>**Задача 1.**</u> Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую условиям:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D) \cap C^{3+2}(D)$;

2) является решением уравнение (1) в области D;

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(\ell,y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\varphi_3(y),\ -h_1\le y\le 0, \tag{3}$$

$$u(x_i-h_1)=\psi(x),\ 0\le x\le \ell$$

(4)

где $\varphi_i(y)\,(i=\overline{1,3}),\ \psi(x)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C^2[0,h],\varphi_3(y)\in C^1[0,h],\psi(x)\in C^1[0,\ell], \tag{5}$$

$$\varphi_1(0)=\varphi_3(0),\psi_1'(0)=\psi_3'(0),\varphi_1''(0)=\psi_3''(0),\varphi_3(-h_1)=\varphi(0). \tag{6}$$

Коэффициенты уравнение (1) удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned}&c_1(x,y)\in C\left(\overline{D_1}\right),\ a_2(x,y),\ a_{2x}(x,y),\ b_2(x,y),\\&b_{2y}(x,y),\ c_2(x,y)\in C\left(\overline{D_2}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Задача 1 при $c_1(x,y)\equiv 0,\ a_2(x,y)=b_2(x,y)=0,\ c_2(x,y)=0,$ где $c-const,$ изучена в работе [3].

Из постановки задачи 1 вытекает следующие условия склеивания

$$\begin{aligned}&u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell,\\&u_{yy}(x,-0)=u_{yy}(x,+0)=\mu(x),0\le x\le\ell,\end{aligned} \tag{8}$$

где $\tau(x),\ \nu(x),\ \mu(x)$ — пока неизвестные функции.

Пусть

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\vartheta(x,y),\ (x,y)\in D, \tag{9}$$

где $\vartheta(x,y)$ - новая неизвестная функция. Тогда, из уравнения (1) имеем

$$L_{11}\vartheta\equiv\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}-\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+c_1(x,y)\vartheta(x,y)\in D_1, \tag{10}$$

$$L_{12}\vartheta\equiv\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial y}-a_2(x,y)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+b_2(x,y)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+c_2(x,y)\vartheta(x,y)\in D_2. \tag{11}$$

Из условия склеивания (8) получим

$$\vartheta(x,-0)=\vartheta(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{12}$$

$$\vartheta_y(x,-0)=\vartheta_y(x,+0)=\mu(x),\ 0\le x\le \ell. \qquad (13)$$

Тогда для определения $\vartheta(x,y)$ в области D придем к следующим задачам.

<u>Задача 2.</u> Найти в области D_2 решение уравнение (11), удовлетворяя условиям

$$\vartheta(0,y)=\varphi_3'(y),\ 0\le y\le h, \vartheta(x,-0)=\nu(x), 0\le x\le \ell, \qquad (14)$$

причем

$$\varphi_3(0)=\nu(0). \qquad (15)$$

<u>Задача 3.</u> Найти в области D_1 решение уравнения (10), удовлетворяю-щая условиям

$$\begin{aligned}&\vartheta(0,y)=\varphi_1'(y),\ \vartheta(\ell,y)=\varphi_2'(y),\ 0\le y\le h,\\ &\vartheta(x,0)=\nu(y),\ 0\le x\le \ell,\end{aligned} \qquad (16)$$

причем

$$\nu(0)=\varphi_1'(0),\ \nu(\ell)=\varphi_2'(0). \qquad (17)$$

2. Соотношения, полученные из областей D_2 и D_1. Из уравнения (11) переходя к пределу при $y\to -0,$ имеем

$$\mu'(x)+a_2(x,0)\nu'(x)+b_1(x,0)\mu(x)+c_1(x,0)\nu(x)=0. \qquad (18)$$

Интеграция уравнение (18) от 0 до x и учитывая при этом условия согласования $\mu(0)=\varphi_1''(0), \nu(0)=\varphi_1(0)$ имеем

$$\mu(x)+\int_0^x b_2(\xi,0)\mu(\xi)\,d\xi+a_2(x,0)\nu(x)+a(\xi)\nu(\xi)\,d\xi=k, \qquad (19)$$

где $a(\xi)=a_{2\xi}(\xi,0)-c_1(\xi,0),\ k=a_2(0,0)\varphi_1'(0)+\varphi_1''(0).$

Представим уравнение (19) в виде

$$\mu(x)=\int_0^x K_1(\xi)\mu(\xi)+f(x), \qquad (20)$$

где

$$K_1(\xi)=-b_2(\xi,0),\ f(x)=-a_2(x,0)\nu(x)+\int_0^x a(\xi)\nu(\xi)d\xi+k.$$

Считая, что $f(x)$ - известная функция решение интегрального уравнение (20) запишем в виде [4].

$$\mu(x)=f(x)+\int_0^x R_1(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad (21)$$

где

$$R_1(x,\xi)=K_1(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,\xi), \qquad K_2(x,\xi)=\int_\xi^x K_1(t)K_1(\xi)dt,$$

$$K_3(x,\xi)=\int_\xi^x K_1(t)K_2(t,\xi)dt,\ \dots,\ K_n(x,\xi)=\int_\xi^x K_1(t)K_{n-1}(t,\xi)d\xi,\ \dots$$

Далее, подставляя значение $f(x)$ в (21), имеем

$$\mu(x)=-a_2(x,0)\nu(x)+\int_0^x N_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi+f_1(x), \quad (22)$$

где

$$N_1(x,\xi)=a(\xi)\left[1-R(x,\xi)+\int_\xi^x R_1(x,s)ds\right],\ f_1(x)=k\left[1+\int_0^x R_1(x,\xi)d\xi\right].$$

Устремляя $y\to+0$ из уравнения (10) имеем соотношение, полученное из области D_1:

$$\nu''(x)+c_1(x,0)\nu(x)=\mu(x), 0<x<\ell. \quad (23)$$

3. Сведение задачи к интегральному уравнению. Исключая $\mu(x)$ из (22) и (23), придем к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\nu''(x)+c(x)\nu(x)=\int_0^x N_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi+f_1(x), \quad (24)$$

где

$$c(x) = a_2(x,0) + c_1(x,0).$$

Считая, что правая часть уравнения (24) известной и учитывая краевых условия (17) имеем

Пусть

$$v(x) = \varphi_1'(0) + \frac{x}{\ell}\left[\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0)\right] + v_1(x), \tag{25}$$

где $v_1(x)$ - новая неизвестная функция. Тогда для определения $v_1(x)$ придем к следующей задачу:

$$v_1''(x) + c(x)v_1(x) = F_1(x), \tag{26}$$

$$v_1(0) = 0,\ v_1(\ell) = 0 \tag{27}$$

где

$$F_1(x) = \int_0^x N_1(x,\xi)v_1(\xi)\,d\xi + f_1(x),$$

$$f_2(x) = f_1(x) - c(x)\left\{\varphi_1'(0) + \frac{x}{\ell}\left[\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0)\right]\right\} +$$

$$+\int_0^x N_1(x,\xi)\left\{\varphi_1'(0) + \frac{\xi}{\ell}\left[\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0)\right]\right\}d\xi\ .$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$v_1''(x) + c(x)v_1(x) = 0. \tag{28}$$

Теорема 1. Если

$$\forall x \in [0,\ell] : c(x) \le 0, \tag{29}$$

то задача (28), (27) имеет единственное решение.

Доказательство умножая уравнение на $v_1(x)$ и интеграция по x от 0 до ℓ, имеем

$$\int_0^\ell \left[v_1''(x) + c(x)v_1(x)\right]v_1(x)dx = \int_0^\ell \left[v_1(x)v_1''(x)\right]_x dx + \int_0^\ell \left\{-\left[v_1'(x)\right]^2 + c(x)v^2{}_1(x)\right\}dx = 0.$$

Отсюда, учетные условия (27) получаем

$$\int_0^\ell \left\{ \left[v_1'(x) \right]^2 + c(x) v^2{}_1(x) \right\} dx = 0. \tag{30}$$

В силу условия (29) из (30) заключаем, что

$$\forall x \in [0,\ell]: v_1(x) = 0,\ v_1'(x) \equiv 0.$$

Из последнего тождества имеем, что $v_1(x) = const.$ С учетом условия (27), заключаем, что $v_1(x) \equiv 0.$ Теорема доказана.

Исходя из теоремы 1 заключаем, что единственное решение задача (26), (27) представимо в виде

$$v_1(x) = \int_0^\ell G(x,\xi) F_1(\xi) d\xi, \tag{31}$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина [5], обладающая следующими свойствами:

1) определена и непрерывна в области при $0 \le x \le \ell, 0 \le \xi \le \ell;$

2) является решением уравнения

$$G_{xx}(x,\xi) + c(x) G(x,\xi) = 0,\ 0 < x < \xi,\ \xi < x < \ell,$$

3) $$G_x(\xi + 0,\xi) - G_x(\xi - 0,\xi) = 1;$$

4) удовлетворяет условиям

$$G(0,\xi) = 0,\ G(\ell,\xi) = 0.$$

Подставляя значение $F(x)$ в (31) имеем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$v_1(x) = \int_0^\ell K(x,\xi) v_1(\xi) d\xi + F_1(x), \tag{32}$$

где

$$K(x,\xi) = \int_\xi^\ell G(x,t) N_1(t,\xi) dt, \quad F(x) = \int_0^\ell G(x,\xi) f_1(\xi) d\xi.$$

Пусть $\|K\| = \max\limits_{\substack{0 \le x \le \ell \\ 0 \le \xi \le \ell}} |K(x,\xi)|.$ Имеет место следующая теореме.

Теорема 2. Если

$$\|K\| < 1, \tag{33}$$

тогда уравнение (32) имеет единственное решение, представимое через резольвенту $R(x,\xi)$ в виде [5]:

$$\nu_1(x) = F_1(x) + \int_0^{\ell} R(x,\xi) F_1(\xi) d\xi.$$

Функция $\nu(x)$ определяется по формуле (25). После определения $\nu(x)$, перейдем к решению задача 2 и 3.

Задача 2 является задачей Гурса для уравнения (11). Решение этой задачи строится методом последовательных приближений [6]. Решение задачи 3 строится методом функции Грина [7].

Теперь перейдем к решению задачи 1. Интегрируя уравнение (9) от 0 до y имеем

$$u(x,y) = \tau(x) + \int_0^{y} \vartheta(x,t) dt\,. \tag{34}$$

Учитывая условия (4) из (34) найдем $T(x)$:

$$\tau(x) = \psi(x) + \int_{-h_1}^{0} \vartheta(x,t) dt.$$

Тогда из (34) получим предствление решение задачи 1 в виде

$$u(x,y) = \psi(x) + \int_{-h_1}^{y} \vartheta(x,t) dt, (x,y) \in D.$$

Литература

1. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнение смешанно-составного типа [Текст] / Т.Д. Джураев - Ташкент: Фан, 1973. - 240 с.

2. Джураев, Т.Д. Классификация и приведение к каноническому виду уравнение с частными производными третьего порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, Я.О. Попёлок // Дифференциальное уравнение. -1991. - Т .27. - №10. - С. 1734-1745.

3. Сопуев, А. Краевые задачи для уравнение смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Б.Ш. Нуранов // Вестник Ошского государственного университета. - 2021. №2. - С. 93-101.

4. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями [Текст] / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко - М: Комкнига, 2007. – 192 с.

5. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы [Текст] / М.А Наймарк. - М.: Наука, 1969. – 528 с.

6. Соболев, С.Л. Уравнение математической физики [Текст] / С.Л. Соболев - М.: Наука, 1966. – 444 с.

7. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнение второго порядка параболического типа [Текст] / А.М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник - УМН, 1962. - Т. 17. - Вып. 3 - С. 3-141.