Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.956.6

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_136

РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Сопуев Адахимжан, докт. ф.-м. наук, профессор,

sopuev@mail.ru

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Апаков Юсупжон Пулатович, докт. ф.-м. наук, профессор,

yusupjonapakov@gmail.com.

Академия наук Республики Узбекистан

В.И. Романовский институт математики

Мирзаев Отабек Мирзарахматович,

mirzayevotabek19812304@gmail.com,

Наманганский инженерно- строительний институт,

Наманган, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье изучено решение второй краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области. Найдены условия единственности и существования решения. При y=0 и y=1 заданы значения производных по y, при x=0 заданы значения самой функции и её производных первого и второго порядка по x, а при x=l значения самой функции и её производной по x. Теорема единственности решения задачи доказана методом интегралов энергии. Методом разделения переменных разрешимость задачи сведена к разрешимости краевых задач для уравнения пятого и второго порядков. Решения указанных задач представлены в виде равномерно сходящихся функциональных рядов.*

Ключевые слова: *уравнение с кратными характеристиками, краевая задача, единственность, существование, метод разделения переменных, собст-венное значение, собственная функция, функциональный ряд, равномерная сходимость.*

БЕШИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЭСЕЛҮҮ ХАРАКТЕРИСТИКАСЫ БАР ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЭКИНЧИ ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕНИ ЧЕЧҮҮ

Сопуев Адахимжан, ф.-м.и. докт., профессор,
sopuev@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан
Апаков Юсупжон Пулатович, ф.-м.и. докт., профессор,
yusupjonapakov@gmail.com,
Өзбекстан Республикасынын илимдер Академиясынын
В.И. Романовский атындагы математика институту,
Мирзаев Отабек Мирзарахматович,
mirzayevotabek19812304@gmail.com,
Наманган инженер-курулуш институту,
Наманган, Өзбекстан

Аннотация: *Бул макалада тик бурчтуу областта эселүү характеристикалары бар бешинчи тартиптеги теңдеме үчүн экинчи чек аралык маселенин чечилиши изилденген. Чечимдин жалгыздыгынын жана жашашынын шарттары табылган. y=0 жана y=1 де y боюнча туундулардын маанилери берилет, x=0 болгондо функциянын өзүнүн жана анын x ке карата биринчи жана экинчи тартиптеги туундуларынын маанилери берилген, x=l болгондо функциянын өзүнүн жана анын x ке карата биринчи тартиптеги туундусунун маанилери берилген. Энергиялык интегралдар методу менен маселенин чечиминин жалгыздыгы теоремасы далилденген. Өзгөрмөлөрдү ажыратуу методу менен маселенин чечилиши бешинчи жана экинчи тартиптеги теңдемелер үчүн чек аралык маселелердин чечилүүчүлүгүнө алып келинген. Бул маселелердин чечимдери бир калыпта жыйналуучу функционалдык катарлардын суммалары түрүндө табылган.*

Ачкыч сөздөр: *характеристикасы эселүү болгон теңдеме, чек аралык маселе, жалгыздыгы, жашашы, өзгөрмөлөрдү ажыратуу методу, өздүк маани, өздүк функция, функционалдык катар, бир калыпта жыйналуучулук.*

SOLUTION OF THE SECOND BOUNDARY PROBLEM FOR A FIFTH ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Sopuev Adakhimzhan, Doctor of Physical and Mathematical sciences
sopuev@mail.ru
Osh State University,

Osh, Kyrgyzstan
Apakov Yusupjon Pulatovich, Doctor of Physical and Mathematical sciences
yusupjonapakov@gmail.com,
the Academy of Sciences of the Republic Uzbekistan Institute
of Mathematics named after V. I. Romanovsky
Mirzaev Otabek Mirzarakhmatovich,
mirzayevotabek19812304@gmail.com,
Namangan Civil Engineering Institute,
Namangan, Uzbekistan

Abstract: *In this article, we study the solution of the second boundary value problem for a fifth-order equation with multiple characteristics in a rectangular domain. Conditions for the uniqueness and existence of a solution are found. At y=0 and y=1, the values of the derivatives with respect to y are given, with x=0, the values of the function itself and its derivatives of the first and second order with respect to x are given, and with x=l, the valuesof the function itself and its derivative with respect to x. The uniqueness theorem for the solution of the problem is proved by the method of energy integrals. By the method of separation of variables, the solvability of the problem is reduced to the solvability of boundary value problems for equations of the fifth and second orders. The solutions of these problems are presented in the form of uniformly convergent functional series.*

Keywords: *Equations with multiple characteristics, boundary value problem, uniqueness, existence, separated variables method, eigenvalue, Eigen function, functional series, uniform convergence.*

I. Введение и постановка задачи

Теория уравнений с частными производными пятого порядка возникла сравнительно недавно. В совокупности, из всех уравнений пятого порядка особое место по специфическому характеру занимают, так называемые, уравнения с кратными характеристиками. Уравнения пятого порядка с кратными характеристиками

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f\left(t,x,y,z\right),$$

возникают в математических моделях волновых процессов в плазме, слабых ударных волн в диспергирующих диссипативных средах, путем добавления к одномерному уравнению Кортевега-де Фриза диссипативного члена [1,2]. Работы по исследованию уравнений пятого порядка сравнительно мало [3-11].

В области $D=\{(x,y):0<x<1, 0<y<1\}$, рассмотрим уравнение

$$L[u]+\mu^2 u\equiv\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mu^2 u=0, \qquad (1)$$

где $\mu\in R.$

Задача A**.** Найти регулярное решение уравнения (1) в области D из класса $C^{5,2}_{x,y}(D)\bigcap C^{4,1}_{x,y}(\bar{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0)=0,\ u_y(x,1)=0,(2) \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}&u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y), u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\\&u(1,y)=\varphi_4(y),\ u_x(1,y)=\varphi_5(y).\end{aligned} \qquad (3)$$

где $\varphi_i(y)\left(i=\overline{1,5}\right)$– заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что аналогичная задача для уравнения $\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ исследована в работе [8].

II. Единственность решения

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$, тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнения (1) с однородными краевыми условиями.

Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$u\left(u_{xxxxx}-u_{yy}+\mu^2\cdot u\right)=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxxx}-u_x u_{xxx}+\frac{1}{2}u_{xx}^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2+\mu^2\cdot u^2=0. \qquad (4)$$

Интегрируя тождество (4) по области D, имеем:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}[uu_{xxxx} - u_x u_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2]dxdy - \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(uu_y)dxdy +$$

$$+\iint_D u_y^2 dxdy + \mu^2 \iint_D u^2 dxdy = 0,$$

$$\int_0^1 [u(1,y)u_{xxxx}(1,y) - u(0,y)u_{xxxx}(0,y)]dy -$$

$$-\int_0^1 [u_x(1,y)u_{xxx}(1,y)dy - u_x(0,y)u_{xxx}(0,y)]dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \left[u_{xx}^2(1,y) - u_{xx}^2(0,y)\right]dy - \int_0^1 [u(x,1)u_y(x,1) - u(x,0)u_y(x,0)]dx +$$

$$+\iint_D u_y^2 dxdy + \mu^2 \iint_D u^2 dxdy = 0.$$

Учитывая однородные краевые условия задачи A, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(1,y)dy + \iint_D u_y^2 dxdy + \mu^2 \iint_D u^2 dxdy = 0.$$

Отсюда следует, что если $\mu \neq 0$ то $u(x,y) \equiv 0$.

Если $\mu = 0$, тогда $u_y(x,y) = 0$, отсюда $u(x,y) = f(x)$.

Тогда из уравнения (1) имеем $f^{(V)}(x) = 0$, отсюда решение этого уравнения имеет вид

$$f(x) = C_1 x^4 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5.$$

Учитывая краевые условия, получим $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0,$ то есть $f(x) \equiv 0.$ Тогда $u(x,y) \equiv 0.$ Теорема 1 доказана.

III. Существование решения

Решение задачи будем искать в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y). \tag{5}$$

Поставляя (5) в (1) и разделяя по переменные, получим

$$X^{(5)}+(\lambda^2+\mu^2)X=0, \qquad (6)$$

$$Y''+\lambda^2 Y=0. \qquad (7)$$

Из (7) и (2) будем иметь

$$\begin{cases} Y''+\lambda^2 Y=0, \\ Y'(0)=0,\ Y'(1)=0. \end{cases} \qquad (8)$$

Нетривиальные решения задачи (8) существуют при $\lambda \geq 0$, и ее собственные значения равны $\lambda_n^2=(\pi n)^2$, $n=0,1,2,3,...$. [12], а собственными функциями являются

$$Y_n(y)=\begin{cases} 1,\ n=0, \\ \sqrt{2}\cos\pi ny,\ n\in N. \end{cases} \qquad (9)$$

Характеристическое уравнение, уравнения (6) имеет вид

$$k^5+\tau_n^5=0,$$

где $\tau_n=\sqrt[5]{\left((\pi n)^2+\mu^2\right)},\ n=0,1,2,3,....$

Оно имеет один вещественный

$$k_1=-\tau_n,$$

и четыре комплексных корня

$$k_{2,3}=\tau_n\left(\cos\frac{\pi}{5}\pm i\sin\frac{\pi}{5}\right),\ k_{4,5}=\tau_n\left(\cos\frac{3\pi}{5}\pm i\sin\frac{3\pi}{5}\right).$$

Тогда общее решение уравнения (6) имеет вид

$$X_n(x)=C_{1n}e^{-\tau_n x}+e^{\tau_n\alpha_2 x}\left(C_{2n}\cos\left(\tau_n\beta_2 x\right)+C_{3n}\sin\left(\tau_n\beta_2 x\right)\right)+$$
$$+e^{\tau_n\alpha_1 x}(C_{4n}\cos\left(\tau_n\beta_1 x\right)+C_{5n}\sin\left(\tau_n\beta_1 x\right)),$$

где $\theta=\frac{\pi}{5},\ \alpha_1=\cos\theta,\ \beta_1=\sin\theta,\ \alpha_2=\cos 3\theta,\ \beta_2=\sin 3\theta,$

C_{in} $(i=\overline{1,5})$ - произвольные постоянные, $n=0,1,2,...$.

Учитывая линейность и однородность уравнения (1), а также (5) решение задачи A ищем в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)Y_n(y). \qquad (10)$$

Так как все члены ряда (10) удовлетворяют условиям (2), определяемой рядом (10) также удовлетворяет условиям (2). Предполагая, что ряд (9) и ряды из производных u_{xxxxx}, u_{yy} сходятся равномерно в $\overline{D}$, а также требуя от функции $u(x,y)$, определяемой рядом (10), выполнения краевых условий (3) получим

$$u(0,y)=\varphi_1(y)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{1n}\cos\pi ny,$$

$$u_x(0,y)=\varphi_2(y)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}\cos\pi ny,$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{3n}\cos\pi ny,$$

$$u(1,y)=\varphi_4(y)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{4n}\cos\pi ny,$$

$$u_x(1,y)=\varphi_5(y)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{5n}\cos\pi ny,$$

$$\begin{cases} C_{1n}+C_{2n}+C_{4n}=A_{1n}, \\ -C_{1n}+\cos3\theta C_{2n}+\sin3\theta C_{3n}+\cos\theta C_{4n}+\sin\theta C_{5n}=\dfrac{A_{2n}}{\tau_n}, \\ C_{1n}+C_{2n}\cos6\theta+C_{3n}\sin6\theta++C_{4n}\cos2\theta+C_{5n}\sin2\theta=\dfrac{A_{3n}}{\tau_n^2}, \\ C_{1n}e^{-\tau_n}+C_{2n}e^{\tau_n\alpha_2}\cos\tau_n\beta_2+C_{3n}e^{\tau_n\alpha_2}\sin\tau_n\beta_2+ \\ +C_{4n}e^{\tau_n\alpha_1}\cos\tau_n\beta_1+C_{5n}e^{\tau_n\alpha_1}\sin\tau_n\beta_1=A_{4n}, \\ -C_{1n}e^{-\tau_n}+C_{2n}e^{\tau_n\alpha_2}\cos\left(\tau_n\beta_2+3\theta\right)+C_{3n}e^{\tau_n\alpha_1}\sin\left(\tau_n\beta_2+3\theta\right)+ \\ +C_{4n}e^{\tau_n\alpha_1}\cos\left(\tau_n\beta_1+\theta\right)+C_{5n}e^{\tau_n\alpha_1}\sin\left(\tau_n\beta_1+\theta\right)=\dfrac{A_{5n}}{\tau_n}, \end{cases} \qquad (11)$$

где

$$A_{in}=\int_0^1\varphi_i(y)Y_n(y)dy,\ i=\overline{1,5}. \qquad (12)$$

Решив систему (11), получим

$$C_{in}=\frac{\Delta_i}{\Delta(\tau_n)},\ i=\overline{1,5}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \cos 3\theta & \sin 3\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ 1 & \cos 6\theta & \sin 6\theta & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ e^{-\tau_n} & e^{\tau_n\alpha_2}\cos\tau_n\beta_2 & e^{\tau_n\alpha_2}\,\mathrm{Sin}\,\tau_n\beta_2 & e^{\tau_n\alpha_1}\cos\tau_n\beta_1 & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\tau_n\beta_1 \\ -e^{-\tau_n} & e^{\tau_n\alpha_2}\cos\left(\tau_n\beta_2+3\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_2}\sin\left(\tau_n\beta_2+3\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_1}\cos\left(\tau_n\beta_1+\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\left(\tau_n\beta_1+\theta\right) \end{vmatrix},$$

Следует заметить, что $\Delta\left(\tau_n\right)\neq 0.$ Действительно, предположим обратное, пусть $\exists\tau^*,\Delta\left(\tau^*\right)=0,$ тогда однородная система (11) будет иметь нетривиальное решение $c_i\left(\tau^*\right), i=1,...,5.$ Отсюда функция вида

$$u^*\left(x,y\right)=\sqrt{2}\cos\left(\lambda^* y\right)X^*\left(x\right),$$

где

$$\left(\lambda^*\right)^2=\left(\tau^*\right)^5-\mu^2,$$

$$X^*(x)=C_1\left(\tau^*\right)e^{-\tau^* x}+e^{\tau^*\alpha_2 x}\left(C_2\left(\tau^*\right)\cos\left(\tau^*\beta_2 x\right)+C_3\left(\tau^*\right)\sin\left(\tau^*\beta_2 x\right)\right)+$$
$$+e^{\tau^*\alpha_1 x}\left(C_4\left(\tau^*\right)\cos\left(\tau^*\beta_1 x\right)+C_5\left(\tau^*\right)\sin\left(\tau^*\beta_1 x\right)\right),$$

будет нетривиальным решением однородной задачи $A,$ что противоречит теореме 1.

Детерминант системы запишем в виде:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_{3\times3} & B_{3\times2} \\ C_{2\times3} & D_{2\times2} \end{vmatrix},$$

где

$$A_{3\times3}=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ 1 & \cos 6\theta & \sin 6\theta \end{Vmatrix},\quad B_{3\times2}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{Vmatrix},$$

$$C_{2\times3}=\begin{Vmatrix} e^{-\tau_n} & e^{\tau_n\alpha_2}\cos\tau\beta_2 & e^{\tau_n\alpha_2}\sin\tau\beta_2 \\ -e^{-\tau_n} & e^{-\tau_n\alpha_2}\cos\left(\tau\beta_2+3\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_2}\sin\left(\tau\beta_2+3\theta\right) \end{Vmatrix},$$

$$D_{2\times 2}=\left\|\begin{matrix} e^{\tau_n\alpha_1}\cos\tau\beta_1 & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\tau\beta_1 \\ e^{\tau_n\alpha_1}\cos\left(\tau\beta_1+\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\left(\tau\beta_1+\theta\right)\end{matrix}\right\|.$$

Найдем самую большую степень экспоненты в значении Δ. Так как в матрице $D_{2\times 2}$ у всех экспонент степени положительны, то, очевидно, самая большая степень экспонентов имеется в произведении следующих определителей:

$$\det A_{3\times 3}\cdot\det D_{2\times 2}.$$

Вычислим каждый определитель в отдельности:

$$\det A_{3\times 3}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ 1 & cos 6\theta & \sin 6\theta\end{vmatrix}=4\sin 3\theta\cos^2\frac{3\theta}{2},$$

$$\det D_{2\times 2}=\begin{vmatrix} e^{\tau_n\alpha_1}\cos\tau\beta_1 & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\tau\beta_1 \\ e^{\tau_n\alpha_1}\cos\left(\tau\beta_1+\theta\right) & e^{\tau_n\alpha_1}\sin\left(\tau\beta_1+\theta\right)\end{vmatrix}=e^{2\tau_n\alpha_1}\sin\theta.$$

Отсюда

$$\Delta=e^{2\tau_n\alpha_1}K+f\left(\tau_n\right),$$

где

$$K=4\sin\theta\sin 3\theta\cos^2\frac{3\theta}{2},$$

$$f\left(\tau_n\right)=O\left(e^{\tau_n\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}\right),\quad \tau_n=\sqrt[5]{\left(\left(\pi n\right)^2+\mu^2\right)},\ n=0,1,2,\ldots \text{ при } n\to\infty.$$

Оценим Δ:

$$\left|\Delta\right|=e^{2\tau_n\alpha_1}\left|K+e^{-2\tau_n\alpha_1}f\left(\tau_n\right)\right|,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}e^{-2\tau_n\alpha_1}f\left(\tau_n\right)=0,$$

то

$$\forall\varepsilon\in(0,K),\quad \exists N_1\left|\forall n>N_1\Rightarrow\left|e^{-2\tau_n\alpha_1}f\left(\tau_n\right)\right|<\varepsilon\right..$$

Отсюда при $n > N_1$ выполняется неравенство

$$\left|K + e^{-2\tau\alpha_1} f\left(\tau_n\right)\right| > K - \left|e^{-2\tau\alpha_1} f\left(\tau_n\right)\right| > K - \varepsilon .$$

Обозначим

$$K_1 = \min_{n=\overline{1,N_1}} \left|K + e^{-2\tau_n\alpha_1} f\left(\tau_n\right)\right|.$$

отсюда

$$\frac{1}{|\Delta|} \le \frac{1}{Me^{2\tau_n\alpha_1}} \Rightarrow |\Delta| \ge Me^{2\tau_n\alpha_1},$$

где

$$M = \min\left\{K_1; K - \varepsilon\right\}.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание условие, $\varphi_i'\left(0\right) = \varphi_i'\left(1\right) = 0, \left(i = \overline{1,5}\right)$ из (12) получим

$$A_{in} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\pi n\right)^3} \int_0^1 \varphi_{in}'''\left(y\right) \sin \pi n y dy.$$

Отсюда

$$\left|A_{in}\right| \le \frac{\sqrt{2}}{\left(\pi n\right)^3} \left|\int_0^1 \varphi_{in}'''\left(y\right) \sin \pi n y dy\right| \le \frac{M_i}{n^3},\ i = \overline{1,5}.$$

Теперь получим оценки для $C_{in},\ i = \overline{1,5},\ n \in N$. Вычисления показывают, что справедливы следующие оценки для определителей $\left|\Delta_i\right|$, $i = \overline{1,5}$:

$$\left|\Delta_1\right| \le M_1 e^{2\tau_n\alpha_1} \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|, \quad \left|\Delta_2\right| \le M_2 e^{2\tau_n\alpha_1} \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|, \quad \left|\Delta_3\right| \le M_3 e^{2\tau_n\alpha_1} \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|,$$

$$\left|\Delta_4\right| \le M_4 e^{\tau_n\alpha_1} \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|, \quad \left|\Delta_5\right| \le M_5 e^{\tau_n\alpha_1} \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|,$$

Отсюда для коэффициентов C_{in} получим следующие оценки:

$$\left|C_{1n}\right| = \frac{\left|\Delta_1\right|}{|\Delta|} \le M_1 \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|, \ \left|C_{2n}\right| = \frac{\left|\Delta_2\right|}{|\Delta|} \le M_2 \sum_{i=1}^{5} \left|A_{in}\right|,$$

$$\left|C_{3n}\right| = \frac{\left|\Delta_3\right|}{\left|\Delta\right|} \le M_3 \sum_{i=1}^{5}\left|A_{in}\right|, \quad \left|C_{4n}\right| = \frac{\left|\Delta_4\right|}{\left|\Delta\right|} \le \frac{M_4 \sum_{i=1}^{5}\left|A_{in}\right|}{e^{\tau_n \alpha_1}},$$

$$\left|C_{5n}\right| = \frac{\left|\Delta_5\right|}{\left|\Delta\right|} \le \frac{M_5 \sum_{i=1}^{5}\left|A_{in}\right|}{e^{\tau_n \alpha_1}},$$

где $M_i = const > 0, \ i = \overline{1,5}.$

Теперь докажем равномерную сходимость ряда (11) в области $\overline{D}$.

$$\left|u\left(x,y\right)\right| \le M_0 + M\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left|A_{1n}\right|}{n^3} + \frac{\left|A_{2n}\right|}{n^3} + \frac{\left|A_{3n}\right|}{n^3} + \frac{\left|A_{4n}\right|}{n^3} + \frac{\left|A_{5n}\right|}{n^3}\right) < \infty,$$

Из (11) имеем $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^5} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n^{(5)}\left(x\right)Y_n\left(y\right)$.

Для $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^5}$ имеем оценки:

$$\left|\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right| \le M_0 + M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\left|A_{1n}\right| + \left|A_{2n}\right| + \left|A_{3n}\right| + \left|A_{4n}\right| + \left|A_{5n}\right|\right).$$

используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя получим

$$\left|\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right| \le M_0 + M\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left|A_{1n}\right|^2}\sqrt{\frac{1}{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left|A_{2n}\right|^2}\sqrt{\frac{1}{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left|A_{3n}\right|^2}\sqrt{\frac{1}{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left|A_{4n}\right|^2}\sqrt{\frac{1}{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left|A_{5n}\right|^2}\sqrt{\frac{1}{n^2}}\right] \le$$

$$\le M_0 + M\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\left(\left\|\varphi_1'''\left(y\right)\right\| + \left\|\varphi_2'''\left(y\right)\right\| + \left\|\varphi_3'''\left(y\right)\right\| + \left\|\varphi_4'''\left(y\right)\right\| + \left\|\varphi_5'''\left(y\right)\right\|\right) < \infty,$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{in}'''\right| = \left\|\varphi_{in}'''\right\|_{L_2\left(0,1\right)}^2, \ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}.$

Для $u_{yy}(x,y)$ имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pi n\right)^2 X_n(x)Y_n(y),$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^2 X_n(x) Y_n(y)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^2 \left|u(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^2 \frac{A_{in}}{n^3} =$$

$$= N\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{in}}{n} \le N\pi^2 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|A_{in}\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \le N\pi^2\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\left\|\varphi_{in}'''\right\| \le \frac{N\pi^3}{\sqrt{6}}\left\|\varphi_{in}'''\right\|.$$

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 2. Если $\varphi_i(y) \in C^3[0,1]$ и $\varphi_i'(0) = \varphi_i'(1) = 0,\ \left(i = \overline{1,5}\right)$, то решение задачи A существует и представляется рядом (10).

Литература

1. Булаф, Р. Солитоны [Текст] / Р. Булаф, Ф. Кодри -М.: Мир,1983. 408 с.
2. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения [Текст] / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Морисс -М.: Мир, 1988.-694 с
3. Вахрушев, В.А. Краевая задача для уравнения пятого порядка [Текст] / В.А. Вахрушев // Труды СКГМИ (ГТУ), 2008, № 15, - С.28-31.
4. Дерендяев, Н.В. К задаче о колебаниях упругих систем с малым внутренним трением [Текст] / Н.В. Дерендяев, В.В. Новиков // В сб. «Теория колебания, прикладная математика и кибернетика». Горький, 1974. –С.29.
5. Засорин, Ю.В. Асимптотические и полугрупповые свойства решения задачи коши для одного уравнения математической физики [Текст] / Ю.В. Засорин // Вестник ВГУ, Сер. Физика. Математика. - Воронеж, 2005. -№ 1. - С. 171-173.
6. Уринов, А.К. Канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка [Текст] / А.К. Уринов, А.Т. Абдукодиров // Материалы второй Международный Российско-Узбекский Симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» -Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2012. -С. 151-154.
7. Апаков, Ю.П. О разрешимости краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в конечной области [Текст] / Ю.П. Апаков, А.Х. Жураев // Узбекский математический журнал. 2011. №2.- С. 40-47.
8. Апаков, Ю.П. Вторая краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю.П. Апаков, А.Х. Жураев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14. № 1. - С. 22-27.
9. Апаков, Ю.П. О единственности решения одной краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю.П. Апаков, О.М. Мирзаев // Материалы научной-практической конференции «Применение математики в

экономических и технических задач и проблемы обучение» 9 апрель 2021. АндМИ.-Андижан.-С.26-29

10. Апаков, Ю.П. О единственности решения первой краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю.П. Апаков, О.М. Мирзаев // Материалы научно-практической конференции «Наука и образование в современном мире: вызовы XXI века» 15 март 2022. Нурсултан. -С.42-44

11. Мирзаев, О.М. О единственности решения второй краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристками [Текст] / О.М. Мирзаев // Материалы научной-практической конференции «Теоретические основы и прикладные задачи современной математики» 28 март 2022. АГУ.-Андижан. -С.245-247

12. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский -М.: «Наука», - С.1966.-724.