Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.958

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_126

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ҮЧ МҮНӨЗДӨӨЧҮСҮ БАР ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИН САНДЫК ЧЕЧИМИ

Садалов Төлөнбай Ысманович,ф.-м.и.к., доцент,

saadtol_68@mail.ru

Ош технологиялык университети,

Пирматов Абдыманап Зияйдинович, ф.-м.и.к., доцент

pirmatov@mail.ru

Ош мамлекеттик университети

Ильичбек кызы Айчолпон,магистрант,

aicholpon_ilichbekovna@mail.ru

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Сатимкулов Азизбек Ядигарович, магистрант,

azizbek.satimrulov@ibox.ru

Жалал-Абад мамлекеттик университети,

Жалал-абад, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада төртүнчү тартиптеги үч мүнөздөөчүсү бар гиперболикалык теңдеме үчүн Гурстун маселеси торчо усулунун жардамы чечүү каралган. Берилген теңдемедеги катышкан туундулар аппроксимацияланган. Аппроксимацияланган туундунун маанилерин теңдемедеги туундуну алмаштырып торчо теңдеси алынган. Аппроксимациялоо мегилинде аппросимациялоо кадамдарын тандоого да чоң көңүл бурулган. Макаланын негизги максаты торчо усулунун жардамында берилген маселени аппроксимациялоо жолу менен торчо теңдесине алып келүү жана чектүү айрымалардын схемасына башкача айканда сызыктуу алгебралык теңдемелер системасына алып келүү менен коюлган маселенин кррективдүүлүгүн же чечиминин жашашы жана жалгыздыгын далилдөөнү демонстрациялоо болуп саналат.*

Ачкыч сөздөр: *гиперболикалык теңдеме, торчо усулу, аппроксимация, алгебралык теңдемелер системасы.*

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ТРЕХКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Садалов Толонбай Ысманович,к.ф.-м.н., доцент,
saadtol_68@mail.ru
Ошский технологический университет,
Пирматов Абдыманап Зияйдинович, к.ф.-м.н., доцент
pirmatov@mail.ru
Ошский государственный университет
Ильичбек кызы Айчолпон, магистрант,
aicholpon_ilichbekovna@mail.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан
Сатимкулов Азизбек Ядигарович, магистрант,
azizbek.satimrulov@inbox.ru
Жалал-Абадский государственный университет,
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация: *В статье рассматриваются решение задача Гурса методом сеток для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристи-ками. С начало с помощью аппроксимации получены конечные разности производных и сеточное уравнение. Используя сеточное уравнение и налагаемых условий получено линейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функции в сетке. Использовано метода конечных разностей. Сущность этого наиболее универсального численного метода состоит в том, что за искомый набор чисел принимается таблица значений решения в точках некоторого множества, называемого обычно сеткой. Для вычисления искомой таблицы используются алгебраические уравнения, приближенно заменяющие дифференциальное. Основной целью статьи является продемонстрировать аппроксимуруя и используя методом сеток сведение к разностные схемы, т.е. системе алгебраических уравнением задачу Гурса. Доказаны существование и единственность решений поставленных задач.*

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, аппроксимация, метод сеток, система алгебраических уравнений.*

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A HYPERBOLIC EQUATION OF FOURTH ORDER

Sadalov Tolonbai Ysmanovich, Ph.D., associate professor
saadtol_68@mail.ru
Osh Technological University, Osh, Kyrgyzstan
Pirmatov Abdymanap Ziyaydinovich, Ph.D., associate professor
pirmatov@mail.ru
Ilyichbek kyzy Aicholpon, master,
aicholpon_ilichbekovna@mail.ru
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan
Satimkulov Azizbek Yadigarovich, master,
azizbek.satimrulov@ibox.ru
Jalal-Abad State University, Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Abstract: *The article considers the solution of the Gursa problem by the grid method for a fourth-order hyperbolic equation with three-fold characteristics. From the beginning, with the help of approximation, finite differences of derivatives and a grid equation are obtained. Using a grid equation and imposed conditions, a linear system of algebraic equations is obtained with respect to unknown values of the function in the grid. The finite difference method is used. The essence of this most universal numerical method is that the desired set of numbers is taken as a table of solution values at the points of a certain set, usually called a grid. To calculate the required table, algebraic equations are used, which approximately replace the differential equation. The main purpose of the article is to demonstrate, by approximating and using the grid method, the reduction to difference schemes, i.e., a system of algebraic equations, the Goursat problem. The existence and uniqueness of solutions to the tasks are proved.*

Keywords: *hyperbolic equation, approximation, grid method, system of algebraic equations.*

Введение. Математическое моделирование многих процессов, приводит к изучению краевых задач для уравнений в частных производных. Задачи локальными и нелокальными условиями для гиперболических уравнений четвертого порядка с трехкратными и двукратными характеристиками четвертого порядка рассмотрены в статьях [1, 2, 4, 5, 6]. Локальным и нелокальным краевым задачам для гиперболических уравнений четвертого порядка посвящено большое количество работ. Отметим здесь работы А. С. Сопуева [1] и их учеников.

Исследованию разрешимости задачи Гурса методом сеток для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками и посвящена данная статья.

Постановка задачи. В области $D=\{(x,y):0<x<\ell,\ 0<y<h\}$ для гиперболического уравнения

$$u_{xxxy}(x,y)+u_{xx}(x,y)+cu(x,y)=f(x,y), \tag{1}$$

где $c=const,\ f(x,y)\in C(\bar{D}),$

$M=\{u,\ u_x,u_{xx}\in C(\bar{D}),\ u_y,u_{xy},u_{xxy},u_{xxx},u_{xxxy}\in C(D)\},$ рассмотрим задачу Гурса[3].

Задача 1. Найти в области D решение уравнения(1) из класса M, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),u_x(0,y)=\varphi_1(y),\ u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y), \tag{2}$$

и начальным условиям:

$$u(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{3}$$

условиями согласования:

$$\varphi_1(0)=\psi(0),\ \varphi_2(0)=\psi'(0),\ \varphi_3(0)=\psi''(0). \tag{4}$$

Разрешимость задачи доказана методом сеток. Аппроксимируя краевые, начальные условия и уравнение (1), задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений. Искомая функция получена в табличном виде.

Аппроксимация. Значения функции в узлах (x_i,y_i) обозначим соответственно $u(x_i,y_i)=u_{i,j},f(x_i,y_i)=f_{i,j},i,j=1,\ldots,21.$

Аппроксимации граничных условий получим в виде[7,8]:

$$u_{0,j}=\varphi_{1j},u_x(0,y_j),\ u_x(x,y)\approx u_{1,j}-u_{0,j}=h_1\varphi_{2j},$$

$$u_{xx}(0,y_j),u_{2,j}-2u_{1,j}+u_{0,j}h_1^2\varphi_{3j},\ u(0,x_i)\approx\psi_i, \tag{5}$$

где h_1,h_2 шаг аппроксимации.

Аппроксимируем производную u_{xxxy} в виде:

$$u_x(x_i, y_i) \approx \left(\frac{1}{h_1}\right)\left[u_{i+1,j} - u_{i,j}\right] + O(h_1), u_{xx}(x_i, y_i) \approx \left(\frac{1}{h_1^2}\right)\left[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right] + O\left(h_1^2\right),$$

$$u_{xxx}(x_i, y_i) \approx \left(\frac{1}{h_1^3}\right)\left[u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i,j} - u_{i-1,j}\right] + O\left(h_1^3\right),$$

$$u_{xxxy}(x_i, y_i) \approx \left(\frac{1}{h_1^3 h_2}\right)\left[u_{i+2,j+1} - 3u_{i+1,j+1} + 3u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}\right] -$$

$$-\left(\frac{1}{h_1^3 h_2}\right)\left[u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i,j} - u_{i-1,j}\right] + O\left(h_1^3 + h_2\right),$$

где точность аппроксимации равна $O(h_1^3 + h_2)$.

Учитывая аппроксимации производных и шаги аппроксимации, получим сеточное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} &u_{i+2,j+1} - 3u_{i+1,j+1} + 3u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} - \left[u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right] + h_1 h_2\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right] + \\ &+\left(h_1^3 h_2 c - 3 - 2h_1 h_2\right)u_{i,j} = h_1^3 h_2 f_{i,j}, \end{aligned} \tag{6}$$

Разрешимость задачи. Из формул (5), (6) при $j = 0$ получим разностную схему в виде:

$$u_{i+2,1} - 3u_{i+1,1} + 3u_{i,1} - u_{i-1,1} = p_{i,0}, \tag{7}$$

$$p_{i,0} = u_{i+2,0} - 3u_{i+1,0} - u_{i-1,0} - h_1 h_2\left[u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right] + \left(h_1^3 h_2 c - 3 - 2h_1 h_2\right)u_{i,0} + h_1^3 h_2\left(\psi_i + \varphi_{1,0}\right),$$

где $u_{0,j} = \varphi_{1,j}, u_{1,j} = u_{0,j} + h_1\varphi_{2j}, u_{2,j} = 2u_{1,j} - u_{0,j} + h_1^2\varphi_{3,j}, u\left(0, x_i\right) \approx \psi_i,$

из (7) при $i = 1, 2, 3, ..., 21$ получим систему линейных алгебраических уравнений в виде:

$$\begin{gathered} i = 1, u_{3,1} - 3u_{2,1} + 3u_{1,1} - u_{0,1} = p_{1,0}, \\ i = 1, u_{3,1} - 3u_{2,1} + 3u_{1,1} - u_{0,1} = p_{1,0}, \\ i = 2, u_{4,1} - 3u_{3,1} + 3u_{2,1} - u_{1,1} = p_{2,0}, \\ \text{-------------------------------------} \\ i = 19, u_{21,1} - 3u_{02,1} + 3u_{19,1} - u_{18,1} = p_{19,0}. \end{gathered} \tag{8}$$

Система алгебраических уравнение (8) совместима и имеет единственное решение. Из (8) однозначно определяются неизвестные значения $u_{3,1}, u_{4,1}, u_{5,1}, \ldots, u_{21,1}$.

Используя значения функции в нижних слоях и формулу

$$u_{i+2,j+1} - 3u_{i+1,j+1} + 3u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} = p_{i,j}, \qquad (9)$$

где

$$p_{i,j} = u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - h_1 h_2 \left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} \right] + (h_1^3 h_2 c - 3 - 2h_1 h_2) u_{i,j} + h_1^3 h_2 f_{i,j}, \quad (10)$$

при $j = 1, 2, 3, ...$ последовательно определим значения функции второго, третьего, и т. д. слоев.

Итак, доказана

Теорема 1. Если матрица системы линейных алгебраических уравнений (8) невырожденная матрица, то решение задачи 1 существует и единственно.

Для удобства рассмотрим пример для модельного уравнения четвертого порядка гиперболического типа задачу Гурса.

Пример. Рассмотрим задачу Гурса для модельного уравнения четвертого порядка с конкретными данными:

$$u_{xxxy}(x, y) + cu(x, y) = x + y, \qquad (11)$$

найти в области $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ решение уравнения(11) из класса *M*, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = y, u_x(0, y) = 1 + y,\ u_{xx}(0, y) = y^2, \qquad (12)$$

и начальным условиям:

$$u(x, 0) = x. \qquad (13)$$

Методом сеток численное решение построим в квадрате

$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Покроем область D прямоугольной сеткой

$x_i = ih_1, y_i = jh_2, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}, h_1 = 1/n, h_2 = 1/m,$ (*n*,*m*-целые).

Используя аппроксимации на сетке x_i, y_j приближенно заменим уравнение (7) следующим соответствующим сеточным уравнением [7, 8]

$$u_{i+2,j+1} - 3u_{i+1,j+1} + 3u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} - \left[u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right] + \left(h_1^3 h_2 c - 3\right)u_{i,j} = h_1^3 h_2 \left(x_i + y_j\right), \quad (14)$$

Из (14) при $j = 0$ получим разностную схему:

$$u_{i+2,1} - 3u_{i+1,1} + 3u_{i,1} - u_{i-1,1} = p_{i,0}, \quad (15)$$

$$p_{i,0} = u_{i+2,0} - 3u_{i+1,0} - u_{i-1,0} - \left(h_1^3 h_2 c - 3\right)u_{i,0} + h_1^3 h_2 \left(x_i + y_0\right), \quad (16)$$

где

$$u_{0,j} = y_j, u_{1,j} = u_{0,j} + h_1\left(1 + y_j\right), u_{2,j} = 2u_{1,j} - u_{0,j} + h_1^2 y_j^2, u\left(0, x_i\right) = x_i,$$

из (16) при $i = \overline{1,21}$ получим систему

$$\begin{aligned}
& i = 1, u_{3,1} - 3u_{2,1} + 3u_{1,1} - u_{0,1} = p_{1,0}, \\
& i = 2, u_{4,1} - 3u_{3,1} + 3u_{2,1} - u_{1,1} = p_{2,0}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& i = 19, u_{21,1} - 3u_{20,1} + 3u_{19,1} - u_{18,1} = p_{19,0},
\end{aligned} \quad (17)$$

из (17) однозначно определяются неизвестные значения $u_{3,1}, u_{4,1}, u_{5,1}, \ldots, u_{21,1}$.

Используя значения функции в нижних слоях и формулу

$$u_{i+2,j+1} - 3u_{i+1,j+1} + 3u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} = p_{i,j}, \quad (18)$$

где

$$p_{i,j} = u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - \left(h_1^3 h_2 c - 3\right)u_{i,j} + h_1^3 h_2 \left(x_i + y_j\right). \quad (19)$$

Для численных значений переменных x, y области D, используя программу, созданную на языке VBA и приведенную в приложении. Соответствующие значения функции и её производной приведены в таблице № 1.

Выводы. В статье рассмотрены задача Гурса для гиперболических уравнений четвертого порядка с трехкратными характеристиками. Методом сеток доказаны существование и единственность решение задачи. Составлена программа в среде VBA и искомая функция получена в виде таблицы. Оценены погрешности аппроксимации и метода.

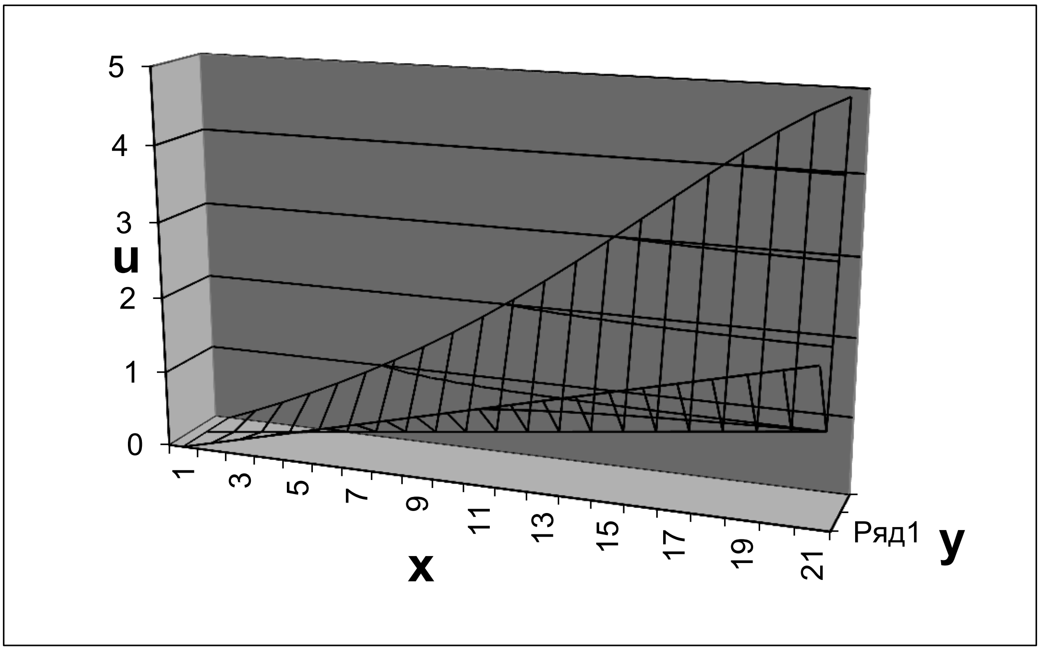
Таблица № 1

c	x	y	u	u_{xxxy}	$u_{xxxy}+cu$	x+y
2	0,1	0,05	0,155012	-0,16002	0,15	0,15
	0,2	0,1	0,320186	-0,34037	0,3	0,3
	0,3	0,15	0,495904	-0,54181	0,45	0,45
	0,4	0,2	0,68273	-0,76546	0,6	0,6
	0,5	0,25	0,881345	-1,01269	0,75	0,75
	0,6	0,3	1,092464	-1,28493	0,9	0,9
	0,7	0,35	1,316749	-1,5835	1,05	1,05
	0,8	0,4	1,554716	-1,90943	1,2	1,2
	0,9	0,45	1,806622	-2,26324	1,35	1,35
	1	0,5	2,072347	-2,64469	1,5	1,5
	1,1	0,55	2,351263	-3,05253	1,65	1,65
	1,2	0,6	2,642091	-3,48418	1,8	1,8

Таблица № 2

c	x	y	u	uxxxy	uxxxy+cu	x+y
5	1	3	61,875	-57,875	4	4
	0,50	2,5	25,51432	-22,5143	3	3
	0	2	10	-8	2	2
	-0,50	1,5	2,558594	-1,55859	1	1
	-1	1	-2,70833	2,708333	0	0
	-1,50	0,5	-7,16797	6,167969	-1	-1
	-2	0	-10	8	-2	-2
	-2,50	-0,5	-10,5404	7,540365	-3	-3
	-3	-1	-10,625	6,625	-4	-4
	-3,50	-1,5	-16,9336	11,93359	-5	-5
	-4	-2	-43,3333	37,33333	-6	-6
	-4,50	-2,5	-113,223	106,2227	-7	-7
	-5	-3	-261,875	253,875	-8	-8
	-5,50	-3,5	-538,783	529,7826	-9	-9
	-6	-4	-1010	1000	-10	-10
	-6,50	-4,5	-1760,49	1749,488	-11	-11
	-7	-5	-2896,46	2884,458	-12	-12
	-7,50	-5,5	-4547,71	4534,715	-13	-13
	-8	-6	-6870	6856	-14	-14

График №1



Литература

1. Сопуев, А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: [Текст] / А. Сопуев // Дис. …докт. физ.–мат. наук: 01.01.02.-Бишкек, 1996.-249 с.

2. Асылбеков, Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: [Текст] / Т.Д. Асылбеков // Дис. …канд. физ. –мат. наук: 01.01.02.-Бишкек, 2003.-130 с.

3. Асылбеков, Т. Д. Задача Гурса для гиперболических уравнений четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Асылбеков // Тезисы докл. I региональной науч. конф. «Проблемы алгебры, геометрии и их приложений». –Ош: ОшГУ, 1996.-С.47-49.

4. Асылбеков, Т.Д. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами [Текст] / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Республиканский научно-теоретический журнал “Наука, новые техгологии и инновации Кыргызстана”, № 3 – Бишкек, 2019. №3. с. 11-17.

5. Асылбеков, Т.Д. Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для модельного гиперболического уравнения четвертого с трехкратными характеристиками [Текст] / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Республиканский научно-теоретический журнал “Наука, новые техгологии и инновации Кыргызстана”, № 3 – Бишкек, 2019. №3. с. 22-29.

6. Асылбеков, Т.Д. “Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения четвертого с разрывными коэффициентами” [Текст] /

Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Наука. Образование. Техника.-Ош: КУУ, 2019.-№2.-С. 106-115.

7. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем [Текст] / А.А. Самарский - 'М.,1971.

8. Самарский, А.А. Введение в численные методы[Текст] / А.А. Самарский - М.,1982.