УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_119

# ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

*Мамазиаева Эльмира Амановна, к.ф.-м.н., доцент*

*mamaziaeva67@mail.ru*

*Абдазова Угилхан Махамадюсуповна, магистрант,*

*Uabdazova@mail.ru*

*Ошский технологический университет им. М.М. Адышева*

*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация:*** *В данной работе начальная задача дифференциального уравнения в частных производных второго порядка предлагаемым в работе новым способом приводится к виду, удобному для применения метода дополнительного аргумента. Этот метод разработан кыргызскими учеными. Использования этого метода рассмотреныв работах Иманалиева М.И., Панкова П.С., Аширбаева А.Ж. и другие ученых. Этот метод отличается от других методов введением новой дополнительной переменной, с помощью которой сводим задачу к системе интегральных уравнений. Существует много методов исследования решения системы интегральных уравнений.*

*В настоящее время использование метода дополнительного аргумента для класса новых уравнений, представляющих теоретической и практический интерес актуально. Доказано существование единственного решения начальной задачи.*

***Ключевые слова:*** *Дифференциальное уравнение, гиперболический тип, частные производные, метод дополнительного аргумента, начальная задача, интегральное уравнение.*

# ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИЛИШИН ИЗИЛДӨӨ

*Мамазиаева Эльмира Амановна, ф.-м.и.к., доцент*

*mamaziaeva67@mail.ru*

*Абдазова Угилхан Махамадюсуповна, магистрант*
*Uabdazova@mail.ru*
*М.М. Адышев атындагы Ош технологиялык университети*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация:*** *Бул эмгекте экинчи даражадагы жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин баштапкы маселеси сунушталган жаңы ыкма менен кошумча аргумент кийирүү методун колдонуу үчүн ыңгайлуу формага келтирилген.*

*Бул ыкманы кыргызстандык окумуштуулар иштеп чыгышкан. Бул ыкманы колдонууда Иманалиев М.И., Панков П.С., Аширбаева А.Ж. жана башка окумуштуулардын эмгектеринде каралган. Бул ыкма башка ыкмалардан жаңы кошумча өзгөрмө киргизүү менен айырмаланат. Бул изилдөөлөрдө кошумча аргумент кийирүү усулунун башка ошондой теңдемерди изилдөөчү усулдардан өзгөчөлүгү жаңы кошумча аргументти киргизүү менен маселени интегралдык теңдемелер системасына келтирилет. Интегралдык теңдемелер системасынын чечимдерин изилдөөнүн көптөгөн ыкмалары бар.*

*Азыркы учурда теориялык жана практикалык кызыкчылык туудурган жаңы теңдемелердин классы үчүн кошумча аргумент ыкмасын колдонуу актуалдуу болуп саналат. Баштапкы маселенин жалгыз чечиминин бар экендиги далилденген.*

***Ачкыч сөздөр:*** *Дифференциалдык теңдеме, гиперболалык тип, жекече туундулар, кошумча аргумент кийирүү методу, баштапкы маселе, интегралдык теңдеме.*

# INVESTIGATION OF THE SOLUTION OF A SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE

*Mamaziaeva Elmira Amanovna, Ph.D., associate professor*
*mamaziaeva67@mail.ru*
*Abdazova Ugilkhan Makhamadyusupovna, master,*
*Uabdazova@mail.ru*
*Osh Technological University named after M.M. Adysheva*
*Osh, Kyrgyzstan*

***Abstract:*** *In this paper, the initial problem of a second-order partial differential equation is brought to mind by the new method proposed in the paper to a form convenient for applying the method of an additional argument. This method was developed by Kyrgyz scientists. The use of this method is considered in the works of Imanaliev M.I., Pankov P.S., Ashirbaev A.Zh. and other scientists. This method differs from other methods by the introduction of a new additional variable, with the help of which we reduce the problem to a*

*system of integral equations. There are many methods for studying the solution of an integral equations system.*

*At present, the application of the additional argument method for a class of new equations of theoretical and practical interest is relevant. The existence of a unique solution to the initial problem is proved.*

***Keywords:*** *Differential equation, hyperbolic type, partial derivatives, method of additional argument, initial problem, integral equation.*

**Введение.** В данной работе начальная задача дифференциального уравнения в частных производных второго порядка предлагаемым в работе [1-3] новым способом приводится к виду, удобному для применения метода дополнительного аргумента. Использование метода дополнительного аргумента дает возможность исследовать новые классы задач для уравнений в частных производных.

**Постановка задачи.** Рассмотрим дифференциальное уравнение гиперболического типа вида

$$u_{tt} - a^2(t,x)u_{xx} = b(t,x)u_t + c(t,x)u_x + f(t,x), \tag{1}$$

где $(t,x) \in G_2(T)$, $G_2(T)=[0,T]\times R$,

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \tag{2}$$

Исследованию решения задачи (1), (2) методом характеристик, методом функции Римана рассмотрены в работах [4-5] и во многих других работах.

Пусть $u_k(x) \in \overline{C}^{(2-k)}(R), (k = 0,1),\ b(t,x), c(t,x), f(t,x) \in \overline{C}^{(2)}(G_2(T)),$

$\overline{C}^{(k)}(\Omega)$ - класс функций непрерывных и ограниченных в $\Omega$. Обозначим через $p(s,t,x),\ q(s,t,x)$ – соответствующие решения интегральных уравнений:

$$p(s,t,x) = x + \int_s^t a(v, p(v,t,x))dv, \tag{3}$$

$$q(s,t,x) = x - \int_s^t a(v, p(v,t,x))dv, \tag{4}$$

$(s,t,x)\in Q_2(T)$

$Q_n(T)=\{(t_1,t_2,t_2,..,t_n,x)|\ 0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_n\le T,\, x\in R\}.$

Из (3) и (4) вытекают соответственно соотношения

$$D\ [-a(t,x)]p(s,t,x)=0,$$

$$D\ [a(t,x)]q(s,t,x)=0,$$

$$D[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial x}.$$

Воспользуемся следующими обозначениями:

$$\vartheta(t,x)=D[-a(t,x)]u(t,x), \tag{5}$$

$$g(t,x)=\frac{1}{a(t,x)}[c(t,x)-a_t(t,x)-a(t,x)a_x(t,x)],$$

$$\beta_1(t,x)=b(t,x)+g(t,x),\quad \beta_2(t,x)=b(t,x)-g(t,x),\quad \beta_3(t,x)=D[a(t,x)]\beta_1(t,x).$$

**Лемма 1.** Задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\vartheta(t,x)&=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}\beta_1(t,x)u+\frac{1}{2}\int_0^t\ \beta_2(s,q)\vartheta(s,q)ds-\\&-\frac{1}{2}\int_0^t\ \beta_3(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t\ f(s,q)ds,\end{aligned} \tag{6}$$

$$u(t,x)=u_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t\vartheta\big(s,p(s,t,x)\big)ds, \tag{7}$$

где

$$\big[2\vartheta(t,x)-\beta_1(t,x)u(t,x)\big]_{t=0}=\varphi_1(x).$$

**Доказательство**. Пусть $\vartheta(t,x),\ u(t,x)$ - решение системы интеграль-ных уравнений (6)-(7).

Непосредственным дифференцированием из (6) имеем:

$$\vartheta_t(t,x)+a(t,x)\vartheta_x(t,x)=b(t,x)u_t(t,x)+a(t,x)g(t,x)u_x(t,x)+f(t,x). \tag{8}$$

Принимая во внимание обозначение (5), из (8) получаем справед-ливость уравнения (1).

Таким образом, мы доказали, что решение системы уравнений (6)- (7) удовлетворяет уравнению (1). Такое решение удовлетворяет и начальному условию (2).

Теперь покажем, что, в свою очередь, решение задачи (1), (2) является решением системы интегральных уравнений (6)-(7). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$D[a(t,x)]z(t,x;u) = \beta_2(t,x)\vartheta(t,x) - \beta_3(t,x)u + 2f(t,x), \tag{9}$$

где $z(t,x;u) = 2\vartheta(t,x) - \beta_1(t,x)u(t,x)$.

Решение задачи (9), (2) методом дополнительного аргумента сводится к интегральному уравнению (6). Из обозначения (5) следует справедливость (7)

В уравнение (6), подставляя (7), получаем интегральное уравнение относительно $\vartheta(t,x)$

$$\begin{aligned}\vartheta(t,x) = A(t,x;\vartheta) \equiv \frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}\beta_1(t,x)\left(u_0\big(p(0,t,x)\big) + \int_0^t \vartheta\big(s,p(s,t,x)\big)ds\right) + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \beta_2(s,q)\vartheta(s,q)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_3(s,q)\left(u_0\big(p(0,s,q)\big) + \int_0^s \vartheta\big(\nu,p(\nu,s,q)\big)d\nu\right)ds + \\ + \int_0^t f(s,q)ds.\end{aligned} \tag{10}$$

**Лемма 2.** Существует такое $T^* > 0,$ что интегральное уравнение (10) имеет единственное решение в $\overline{C}(G_2(T^*))$.

Доказательство. Покажем, что уравнение (10) имеет в области $G_2(T)$ при $T < T_*$ единственное, непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\|\vartheta - \phi\| \le M.$$

Покажем, что при $T < T_*$ оператор *A* является оператором сжатия

$$\|A\vartheta - \phi\| \le M_0 KT + NK\frac{T^2}{2} = \Omega_0(T),$$

где $\|\vartheta\| \le \|\varphi\| + M = K, \left|\beta_i(t,x)\right| \le M_0 = const,\ i = 1,2, \quad \beta_3(t,x) \le N = const.$

Обозначим через $T_0 -$ положительный корень уравнения

$\Omega_0(T) = M.$

Нам остается показать, что оператор $A$ сжимает расстояние между элементами.

Справедлива следующая оценка

$$\|A_1\vartheta^1 - A_1\vartheta^2\| \le \Omega_1(T)\|\vartheta^1 - \vartheta^2\|,$$

где $\Omega_1(T) = M_0 T + \dfrac{NT^2}{2}$.

Обозначим через $T_1$ - положительный корень уравнения $\Omega_1(T) = 1.$

Отсюда следует, что оператор $A$ при $T < T^* = \min\{T_0, T_1\}$ осуществляет сжатое отображение. Тогда уравнение определяет единственное решение, принадлежащее этому шару. Это решение может быть получено методом последовательных приближений.

**Выводы.** Используя предложенную схему сведения к интегральному уравнению, можно построить решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с заданными начальными условиями.

**Литература**

1. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.

2. Аширбаева А.Ж. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Материаловедение. – Бишкек. - 2013. - № 2. – С. 258-261.

3. Мамазиаева Э.А. Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Известия ОшТУ. – 2015. – № 1. С. 87–90.

4. Соболев С.Л. Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. – Москва: Наука, 1966. – 443 с.

5. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 736 с.