Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_112

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, НЕЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ

Мамазиаева Эльмира Амановна, к.ф.-м.н., доцент

mamaziaeva67@mail.ru

Абдазова Угилхан Махамадюсуповна, магистрант,

Uabdazova@mail.ru

Ошский технологический университет им. М.М. Адышева

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В работе рассмотрено применение метода дополнительного аргумента к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, нелинейных относительно неизвестной функции. В этих исследованиях появились преимущества метода дополнительного аргумента перед другими методами исследования подобных уравнений, заключающиеся в том, что система интегральных уравнений, к которой приводится исходная задача, не содержит суперпозиции неизвестных функций.*

Кроме того, решение исходной задачи получается из решения интегральных уравнений при помощи понижения размерности множества аргументов, а не при помощи обращения нелинейного алгебраического оператора. С использованием основных идей метода дополнительного аргумента были исследованы дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевега-де-Фриза, а также нелинейные волновые уравнения. Доказано существование единственного решения.

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение, второй порядок, нелинейное, метод дополнительного аргумента, начальная задача, интегральное уравнение.*

БЕЛГИСИЗ ФУНКЦИЯГА КАРАТА СЫЗЫКТУУ ЭМЕС, ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕ ТУУНДУЛУУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРГЕ КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ МЕТОДУН КОЛДОНУУ

Мамазиаева Эльмира Амановна, ф.-м.и.к., доцент

mamaziaeva67@mail.ru

Абдазова Угилхан Махамадюсуповна, магистрант

Uabdazova@mail.ru

М.М. Адышев атындагы Ош технологиялык университети

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул эмгекте экинчи даражадагы жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин баштапкы маселеси сунушталган жаңы ыкма менен кошумча аргумент кийирүү методун колдонуу үчүн ыңгайлуу формага келтирилген.*

Мында алгачкы маселе келтирилген интегралдык теңдемелер системасы белгисиз функцияга карата суперпозицияны камтыбайт. Мындан сырткары, алгачкы маселенин чечими сызыктуу эмес алгебралык оператордун кайрылуусунун жардамында эмес, аргументтердин көптүгүнүн өлчөмүнүн төмөндөлүшүнүн жардамында интегралдык теңдемелердин чечиминен алынат.

Кошумча аргумент кийирүү усулунун негизги идеяларын колдонуу менен Кортевега-де-Фриз тибиндеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер, ошондой эле сызыктуу эмес толкундук теңдемелер изилденген. Баштапкы маселенин жалгыз чечиминин бар экендиги далилденген.

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдеме, экинчи тартиптеги, сызыктуу эмес, кошумча аргумент кийирүү методу, баштапкы маселе, интегралдык теңдеме.*

APPLICATION OF THE METHOD OF AN ADDITIONAL ARGUMENT TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER, NONLINEAR WITH RESPECT TO AN UNKNOWN FUNCTION

Mamaziaeva Elmira Amanovna, Ph.D., associate professor

mamaziaeva67@mail.ru

Abdazova Ugilkhan Makhamadyusupovna

Uabdazova@mail.ru

Osh Technological University named after M.M. Adysheva,

Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The paper considers the application of the additional argument method to second-order partial differential equations that are nonlinear with respect to an unknown* *function. In these studies, the advantages of the method of additional argument over other methods of studying similar equations appeared, consisting in the fact that the system of integral equations, to which the original problem is reduced, does not contain a superposition of unknown functions. In addition, the solution of the original problem is derived from the solution of integral equations by reducing the set dimension of the arguments, and not by inverting a nonlinear algebraic operator.*

Using the basic ideas of the additional argument method, differential and integro-differential equations in partial derivatives of the Korteweg-de-Vries type, as well as nonlinear wave equations, were studied. The existence of a unique solution is proved.

Keywords: *Differential equation, second order, nonlinear, method of additional argument, initial problem, integral equation.*

Введение. Исследование решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка рассмотрены в работах [4, 5]. В настоящее время развивается метод изучения дифференциальных уравнений в частных производных под названием метод дополнительного аргумента. Иманалиев М.И., Панков П.С., Аширбаева А.Ж. внесли свой вклад в развитие этого метода [3, 6]. С помощью этого метода начальная задача для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных сводится к интегральному уравнению.

Постановка задачи. В данной работе метод дополнительного аргумента распространен для уравнений второго порядка, нелинейных относительно неизвестной функции вида:

$$D[-a(t,x)]D[a(t,x)]u(t,x) = F(t,x;u), \tag{1}$$

$(t,x)\in G_2(T)$, $a(t,x)\in \overline{C}^{(2)}(G_2(T))$, $F(t,x,u)\in \overline{C}^{(1)}(G_2(T)\times R^2)\cap Lip(L|_u)$,

$G_2(T)=[0,T]\times R$, $D[\omega]=\dfrac{\partial}{\partial t}+\omega\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Мы использовали классы функций $\overline{C}^{(k)}(\Omega)$, $Lip(N|_u,M|_v,\ldots)$ –из работы [3].

Оператор в (1) имеет вид:

$$D\ [-a(t,x)]D\ [a(t,x)]u(t,x) = u_{tt}(t,x) - a^2(t,x)u_{xx}(t,x) + \\ + u_x(t,x)(a_t(t,x) - a(t,x)a_x(t,x)).$$

Рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями

$$u(0,x)=\psi_0(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\lambda(x), \tag{3}$$

$$\psi_0(x), \quad \lambda(x)\in \overline{C}^{(2)}(R).$$

Используя начальные данные, введем обозначение:

$D\ [a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=\psi_1(x).$

Обозначим через $p(s,t,x)$, $q(s,t,x)-$ соответствующие решения интегральных уравнений:

$$p(s,t,x)=x+\int_s^t a(v,p(v,t,x))dv, \tag{4}$$

$$q(s,t,x)=x-\int_s^t a(v,p(v,t,x))dv, \tag{5}$$

$$(s,t,x)\in Q_2(T)$$

$$Q_n(T)=\{(t_1,t_2,t_2,..,t_n,x)\big|\ 0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_n\le T,\ x\in R\}.$$

Следует отметить, (см. работы [1-3]) интегральные уравнения (4), (5) с $a(t,x)\in\overline{C}^{(1)}(G_2(T))$ имеют единственные решения с условием соответственно $p(s,s,x)=x, \quad q(s,s,x)=x.$

Из (4) и (5) вытекают соответственно соотношения

$$D\ [-a(t,x)]p(s,t,x)=0, \tag{6}$$

$$D\ [a(t,x)]q(s,t,x)=0, \tag{7}$$

Лемма 1. Задача (1), (2), (3) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t,x)=\psi_0(q(0,t,x))+\int_0^t\psi_1(p(0,s,q(s,t,x))ds+$$
$$+\int_0^e\int_0^s F\big(\tau,\ p(\tau,s,q(s,t,x),u(\tau,\ p(\tau,s,q(s,t,x)))\big)d\tau ds. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначая через

$$z(t,x;u)=D[a(t,x)]u(t,x),\quad b(t,x)=-a(t,x),$$

запишем уравнение (1) в виде:

$$D[b(t,x)]z(t,x;u)=F(t,x,u)\,. \qquad (9)$$

Уравнение (9) с условиями (2), (3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x;u)=\psi_1(p(0,t,x))+\int_0^t F(s,p(s,t,x),u(s,p(s,t,x)))ds. \qquad (10)$$

В самом деле, дифференцируя (10), получаем (9):

$$D[b(t,x)]z(t,x;u)=\psi_1'(p(0,t,x))D[b(t,x)]p(0,t,x)+$$
$$+\int_0^t\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right]D[b(t,x)]p(s,t,x))ds+F(t,x,u).$$

Из последнего равенства в силу (6) получаем (8). Полагая $t=0$ в (10), получаем $z(0,x;u)=\psi_1(x).$

Уравнение (10) с условиями (2), (3) сводится к решению интегрального уравнения (8).

Из (8) имеем:

$$D[a(t,x)]u(t,x)=\psi_k'(q(0,t,x))D[a(t,x)]q(0,t,x)+$$
$$+\int_0^t\psi_1'(p(0,s.q(s,t,x)))\frac{\partial p}{\partial x}D[a(t,x)]q(s,t,x)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^s\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial p}{\partial x}D[a(t,x)]q(s,t,x)d\tau ds+z(t,x;u).$$

Следовательно, в силу (7) доказано выполнение (1).

В (8) при $t=0,\quad u(0,x)=\psi_0(x).$

Таким образом, по схеме применения метода дополнительного аргу-мента, приведенной в работе [1-3,6], задача (10), (2), (3) сводится к эквивалентному интегральному уравнению (8).

Лемма 2. Интегральное уравнение (8) имеет единственное решение.

Доказательство. Введем обозначение

$$g(t,x)=\psi_0(q(0,t,x))+\int_0^t \psi_1(p(0,s.q(s,t,x))ds, \tag{11}$$

запишем уравнение (8) в виде оператора

$$Au=g(t,x)+\int_0^t \int_0^s F(\tau,p,u(\tau,p))d\tau ds.$$

Покажем, что оператор является оператором сжатия.

Пусть $u_1(t,x), u_2(t,x)\in C(G_2(T))$.

Тогда

$$|Au_2-Au_1|=\left|\int_0^t\int_0^s F(\tau,p,u_2(\tau,p))d\tau ds-\int_0^t\int_0^s F(\tau,p,u_1(\tau,p))d\tau ds\right|\le$$

$$\le\frac{Lt^2}{2!}\max_{G_2(T)}|u_2(t,x)-u_1(t,x)|.$$

Тогда оператор A будет оператором сжатия $L\frac{T^2}{2!}<1$. По обобщенному принципу сжимающих отображений уравнение (8) имеет одно и только одно решение.

Выводы. Начальная задача для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, нелинейного относительно неизвестной функции сведена к интегральному уравнению. По принципу сжимающих отображений доказано существование единственного решения. Результаты работы можно использовать при решении уравнений других классов.

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Материалове-дение. – Бишкек. - 2013. - № 2. – С. 258-261.

2. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального урав-нения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.

3. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро - дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.

4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.

5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Вла-димиров. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.

6. Иманалиев М.И. Метод дополнительного аргумента в теории нелиней-ных волновых уравнений в частных производных [Текст] / М.И. Имана-лиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. –1995. – Т. 343. – № 5. – С. 596–598.