Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_103

ҮЧ КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫН ЧЫГАРУУ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор,

aijarkyn.osh@mail.ru,

М.М. Адышев атындагы Ош технологиялык университети,

Садыкова Гульхан Курбанбековна, улук окутуучу,

gsadykova.osh@gmail.com,

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Азыркы учурда кошумча аргумент кийирүү усулу өнүгүп жатат, ал ар кандай түрдөгү сызыктуу эмес, жекече туундулуу теңдемелерди интегралдык теңдемелерге келтирүүнүн принципиалдуу мүмкүнчүлүктөрүн берет жана ошону менен бирге, динамикалык системалар теориясындагы маселелердин кеңири классынын чыгарылыштарынын жашоосун далилдейт, муну башка усулдар менен жасоо мүмкүн эмес. Үч көз карандысыз өзгөрмөлүү биринчи тартиптеги сызыктуу эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системасы каралат. Баштапкы маселенин жалгыз чечиминин бар экендиги кошумча аргумент кийирүү ыкмасы менен далилденет. Алынган жыйынтыктар боюнча айкын маселенин чечимин тургузууга болот. Ошондой эле башка жекече туундулуу дифференциалдык тендемелердин системасынын чечимдерин изилдөөдө колдонууга болот.*

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдемелер системасы, сызыктуу эмес, жекече туундулар, кошумча аргумент кийирүү ыкмасы, кысып чагылтуулар принциби.*

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д.,профессор,

aijarkyn.osh@mail.ru,

Ошский технологический университет имени М.М. Адышева,

Садыкова Гульхан Курбанбековна,старший преподаватель,

gsadykova.osh@gmail.com,

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В настоящее время развивается метод дополнительного аргумента, который дает принципиальную возможность сведения различных типов нелинейных уравнений с частными производными к интегральным уравнениям, и в то же время на основе этого метода доказывается существование решений широкого круга задач теории динамических систем. Рассмотрена система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с тремя независимыми переменными. Методом дополнительного аргумента доказано существование единственного решения начальной задачи. На основе полученных результатов можно построить решение конкретной проблемы. Данный метод также можно использовать для изучения решений других систем дифференциальных уравнений.*

Ключевые слова: *Система дифференциальных уравнений, нелинейное, частные производные, метод дополнительного аргумента, принцип сжатых отображений.*

SOLUTION OF A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES WITH THREE INDEPENDENT VARIABLES

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna, d.ph.-m.s. professor,

aijarkyn.osh@mail.ru,

Osh Technological University named after M.M. Adysheva,

Sadykova Gulkhan Kurbanbekovna, Senior Lecturer

gsadykova.osh@gmail.com,

Osh State University,

Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *At present time, the method of an additional argument is being developed, which makes it possible in principle to reduce various types of nonlinear partial differential equations to integral equations, and at the same time, on the basis of this method, the existence of solutions to a wide range of problems in the theory of dynamical systems is proved. There is considered a system of nonlinear partial differential equations of the first order with three independent variables. The existence of a unique solution to the initial problem is proved by the method of an additional argument. Based on the results obtained, it* *is possible to construct a solution to a specific problem. This method can also be used to study solutions to other systems of differential equations.*

Keywords: *System of differential equations, non-linear, partial derivatives, additional argument method, contraction mapping principle.*

Киришүү

Учурда кошумча аргумент кийирүү усулу өнүгүп жатат, ал ар кандай түрдөгү сызыктуу эмес, жекече туундулуу теңдемелерди интегралдык теңдемелерге келтирүүнүн принципиалдуу мүмкүнчүлүктөрүн берет жана ошону менен бирге, динамикалык системалар теориясындагы маселелердин кеңири классынын чыгарылыштарынын жашоосун далилдейт, муну башка усулдар менен жасоо мүмкүн эмес [1, 2].

Изилдөөнүн каражаттары жана ыкмалары.

Кошумча аргумент кийирүү усулу жана башка усулдар менен да изилденбеген, теориялык кызыгууну туудуруучу, жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системаларынын класстары бар. Кошумча аргумент кийирүү усулун жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системаларына жайылтуу жумуштун актуалдуулугун аныктайт.

Маселенин коюлушу.

Төмөнкүдөй сызыктуу эмес теңдемелер системасын карайбыз:

$$\begin{cases} D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2),a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]u_1(t,x,y)=\sum\limits_{k=1}^{2}a_{1k}(t,x,y,u_1,u_2)+f(t) \\ D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2),a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]u_2(t,x,y)=b(t,x,y,u_1,u_2), \end{cases} \quad (1)$$

мында

$$(t,x,y)\in G_3(T)=[0,T]\times R^2,$$

жана оператор:

$$D[\omega_1,\omega_2]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega_1\frac{\partial}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial}{\partial y}.$$

(1) системасын төмөнкүдөй баштапкы шарттары менен карайбыз:

$$\begin{aligned} &u_1(0,x,y)=x+y, \\ &u_2(0,x,y)=\varphi(x,y),\ (x,y)\in R^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Коюлган (1), (2) баштапкы маселени чыгаруу үчүн кошумча аргумент кийирүү усулун колдонобуз. (1). (2) маселесин интегралдык теңдемелер системасына келтиребиз. Ал эми интегралдык теңдемелер системасына кысуучу чагылтуулардын принцибин колдонуу менен чыгарылыштардын локалдык жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттарын алабыз.

Бул усулдун өнүгүшү жана колдонулушуна М.И. Иманалиевдин, П.С. Панковдун, А.Ж. Ашырбаеванын бир топ эмгектери арналган [1-3].

Жыйынтыктар жана талкуулар.

[3] деги функциялардын класстарын колдонуу менен төмөнкү теореманы далилдейли.

Теорема. Эгерде $\varphi(x,y))\in C^{(1)}(R^2), a_{ij}(t,x,y,u_1,u_2)\in \overline{C}^{(1)}(G_3(T)\times R^2),$

, $b(t,x,y,u_1,u_2)\in \overline{C}^{(1)}(G_3(T)\times R^2), i,j=1,2.$

Анда $\left(\overline{C}^{(1)}(G_3(T_*))\right)^2$ мейкиндигинде (1)-(2) - маселе жалгыз чыгарылышка ээ боло тургандай, $0<T_*\le T$ саны жашайт.

Далилдөө.

Теореманы далилдөөдө кошумча аргумент кийирүү усулун колдонобуз. [4-6] эмгектеринде аталган усулду жекече туундулуу теңдемелер системасынын класстарына колдонуу каралган.

Адегенде (1) теңдемелер системасынын биринчи теңдемесин чыгарабыз. (1) теңдемесинин биринчи теңдемеси (2) шарты менен төмөнкү интегралдык тендемеге кошумча аргумент кийируу усулу менен келтирилет:

$$\begin{aligned}
u_1(t,x)&=x-\int_0^t a_{11}(\nu,p_1(\nu,t,x,y),p_2(\nu,t,x,y),u_1(\nu,p_1,p_2),u_n(\nu,p_1,p_2))d\nu+\\
&+y-\int_0^t a_{12}(\nu,p_1(\nu,t,x,y),p_2(\nu,t,x,y),u_1(\nu,p_1,p_2),u_n(\nu,p_1,p_2))d\nu+\\
&+\int_0^t a_{11}(\nu,p_1(\nu,t,x,y),p_2(\nu,t,x,y),u_1(\nu,p_1,p_2),u_n(\nu,p_1,p_2))d\nu+\\
&+\int_0^t a_{12}(\nu,p_1(\nu,t,x,y),p_2(\nu,t,x,y),u_1(\nu,p_1,p_2),u_n(\nu,p_1,p_2))d\nu+\int_0^t f(s)ds,
\end{aligned}\qquad(3)$$

мындагы

$p_1(s,t,x,y),\quad p_2(s,t,x,y)$ - төмөнкү интегралдык теңдемелер системасынын чечими

$$\begin{cases} p_1(s,t,x,y) = x - \int\limits_s^t a_{11}(v, p_1(v,t,x,y), p_2(v,t,x,y), \\ u_1(v, p_1, p_2), u_2(v, p_1, p_2))dv, \\ p_2(s,t,x,y) = y - \int\limits_s^t a_{12}(v, p_1(v,t,x,y), p_2(v,t,x,y), \\ u_1(v, p_1, p_2), u_2(v, p_1, p_2))dv, \end{cases} \tag{4}$$

$(s,t,x,y) \in Q_2^2(T),$

мында

$$Q_2^n(T) = \{(t_1, t_2, t_3, .., t_n, x, y) \big| 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_n \le T, (x,y) \in R^2\}.$$

(3) теңдемесинен төмөнкүнү алабыз:

$$u_1(t,x,y) = x + y + \int\limits_0^t f(s)ds. \tag{5}$$

(4) системасы төмөнкү системаны канааттандырган жалгыз чечимге ээ болот:

$$D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2), a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]p_1(s,t,x,y) = 0, \quad p_1(s,s,x,y) = x,$$
$$D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2), a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]p_2(s,t,x,y) = 0, \quad p_2(s,s,x,y) = y.$$

Кошумча аргумент кийирүү усулунун негизинде биз белгисиз $u_1(t,x,y)$ функциясын (5) түрүндө таап алдык.

Табылган $u_1(t,x,y)$ *функциясын (1) системасынын экинчи теңдемесине коюп,* $u_2(t,x,y)$ белгисиз функциясы үчүн төмөнкү теңдемени алабыз:

$$D[\tilde{a}_{21}(t,x,y,u_2), \tilde{a}_{22}(t,x,y,u_2)]u_2(t,x,y) = \tilde{b}(t,x,y,u_2), \tag{6}$$

мында

$$\tilde{a}_{2i}(t,x,y,u_2) = a_{2i}(t,x,y,x+y+\int\limits_0^t f(s)ds, u_2),$$

$$\tilde{b}(t,x,y,u_2) = b_1(t,x,y,x+y+\int\limits_0^t f(s)ds, u_2), \quad i = 1,2.$$

(6), (2) маселесине кошумча аргумент кийирүү усулун колдонуп, төмөнкү интегралдык теңдемелер системасына келтиребиз:

$$\begin{cases} u_2(t,x,y) = \phi(q_1(0,t,x,y), q_2(0,t,x,y)) + \\ + \int\limits_0^t \tilde{b}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), \\ u_2(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y)) d\nu, \\ q_1(s,t,x,y) = x - \int\limits_s^t \tilde{a}_{21}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), \\ u_2(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y))) d\nu, \\ q_2(s,t,x,y) = y - \int\limits_s^t \tilde{a}_{22}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), \\ u_2(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y))) d\nu, \end{cases} \tag{7}$$

$(s,t,x,y) \in Q_2^2(T).$

$q_1(s,t,x,y), q_2(s,t,x,y)$ - функциялары төмөнкү теңдемелерди канааттандыраарын көрүүгө болот:

$$D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2), a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]q_1(s,t,x,y) = 0, \quad q_1(s,s,x,y) = x,$$
$$D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2), a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]q_2(s,t,x,y) = 0, \quad q_2(s,s,x,y) = y.$$

(7) системасында t өзгөрүлмөсүн s менен, x өзгөрүлмөсүн $q_1(s,t,x,y)$ функциясы менен, y өзгөрүлмөсүн $q_2(s,t,x,y)$ функциясы менен алмаштыралы жана [3] жумушунда берилген $a_{21}(t,x,y,u_1,u_2), a_{22}(t,x,y,u_1,u_2) \in \overline{C}^{(1)}(G_3(T) \times R^2)$ функциялары үчүн төмөнкү барабардыктар далилденген:

$$\begin{aligned} & q_1(s,\tau,q_1(\tau,t,x,y), q_2(\tau,t,x,y)) = q_1(s,\tau,x,y), \\ & q_2(s,\tau,q_1(\tau,t,x,y), q_2(\tau,t,x,y)) = q_2(s,\tau,x,y), \\ & (s,t,x,y) \in Q_2^3(T). \end{aligned} \tag{8}$$

(8) барабардыгынын жардамында (7) системасынан төмөнкү интегралдык теңдемелер системасын алабыз:

$$
\begin{cases}
\omega(s,t,x,y)=\phi(q_1(0,t,x,y),q_2(0,t,x,y))+ \\
+\int\limits_0^t \tilde{b}_1(\nu,q_1(\nu,t,x,y),q_2(\nu,t,x,y),\omega(\nu,t,x,y))d\nu, \\
q_1(s,t,x,y)=x-\int\limits_s^t \tilde{a}_{21}(\nu,q_1(\nu,t,x,y),q_2(\nu,t,x,y),\omega(\nu,t,x,y))d\nu, \\
q_2(s,t,x,y)=y-\int\limits_s^t \tilde{a}_{22}(\nu,q_1(\nu,t,x,y),q_2(\nu,t,x,y),\omega(\nu,t,x,y))d\nu,
\end{cases} \tag{9}
$$

Мындагы

$$\omega(s,t,x,y)=u_2(s,q_1(s,t,x,y),q_2(s,t,x,y)).$$

(9) системасын бир вектордук барабардык түрүндө жазып алабыз:

$$\theta = A\theta, \tag{10}$$

мында $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ - вектор-функция, анын компоненттери белгисиз функциялар $\theta_1=\omega(s,t,x,y)$, $\theta_2=q_1(s,t,x,y)$, $\theta_3=q_2(s,t,x,y)$, ал эми $A=(A_1,A_2,A_3)$ операторунун компоненттери:

$$
\begin{cases}
A_1\theta=\phi(\theta_2(0,t,x,y),\theta_3(0,t,x,y))+ \\
+\int\limits_0^t \tilde{b}_1(\nu,\theta_2(\nu,t,x,y),\theta_3(\nu,t,x,y),\theta_1(\nu,t,x,y))d\nu, \\
A_2\theta=x-\int\limits_s^t \tilde{a}_{21}(\nu,\theta_2(\nu,t,x,y),\theta_3(\nu,t,x,y),\theta_1(\nu,t,x,y))d\nu, \\
A_3\theta=y-\int\limits_s^t \tilde{a}_{22}(\nu,\theta_2(\nu,t,x,y),\theta_3(\nu,t,x,y),\theta_1(\nu,t,x,y))d\nu,
\end{cases} \tag{11}
$$

(10) системасы $G_2(T)$ областында $T<T_*$ үчүн $\|\theta-\theta_0\|\le M$ барабарсыздыгын канааттандырган жалгыз, үзгүлтүксүз чечимге ээ болот.

Норма төмөнкү барабардык менен аныкталат:

$$\|\theta\|=\max_{0\le i\le 3}\max_{(t,x)\in G_3(T)}\left\{|\theta_i|, \quad i=1,2,3\right\}.$$

Анда:

$$|A_1\theta-\varphi|\le M_0T,$$

$$|A_2\theta-x|\le M_1T,$$

$$\left|A_3\theta - y\right| \le M_2 T\ ,$$

$$\left|\tilde{b}_1(t,x,y,u_2)\right| \le M_0 = const, \qquad \left|a_{2ii}(t,x,y,u_2)\right| \le M_i = const, \quad i = 1{,}2.$$

A оператору $S(\theta_0, M)$ шарынын элементтеринин ортосундагы аралыкты кысып тураарын далилдейбиз.

Төмөнкү барабарсыздыктар орун алат:

$$\left|A_1\theta^1 - A_1\theta^2\right| \le \Omega_1(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$$

$$\left|A_2\theta^1 - A_2\theta^2\right| \le \Omega_2(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$$

$$\left|A_3\theta^1 - A_3\theta^2\right| \le \Omega_3(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$$

мында

$$\Omega_1(T) = L_1 + L_2 + (K_1 + K_2 + K_3)T,$$

$$\Omega_2(T) = (N_1 + N_2 + N_3)T,$$

$$\Omega_3(T) = (H_1 + H_2 + H_3)T,$$

$$\varphi(x,y) \in Lip(L_1\big|_x, L_2\big|_y), \quad L_1, L_2 \ge 0, \quad L_1, L_2 - const,$$

$$\tilde{b}_1(t,x,y,u_2) \in Lip(K_1\big|_x, K_2\big|_y, K_3\big|_{u_2}), \quad K_1, K_2, K_3 \ge 0, \quad K_1, K_2, K_3 - const,$$

$$\tilde{a}_{21}(t,x,y,u_2) \in Lip(N_1\big|_x, N_2\big|_y, N_3\big|_{u_2}), \quad N_1, N_2, N_3 \ge 0, \quad N_1, N_2, N_3 - const,$$

$$\tilde{a}_{22}(t,x,y,u_2) \in Lip(H_1\big|_x, H_2\big|_y, H_3\big|_{u_2}), \quad H_1, H_2, H_3 \ge 0, \quad H_1, H_2, H_3 - const.$$

$\Omega_i(T) = 1, i = 1{,}2{,}3$ теңдемелеринин чечимдерин тиешелүү түрдө T_1, T_2, T_3 менен белгилейли.

Мындан биз $T < T^* = \min\{T_1\ , T_2, T_3\}$ учурда , кысып чагылтуу принцибинин негизинде (10) теңдемесин жалгыз чечимге ээ болот.

Теорема далилденди.

Корутунду

Жогорудагы алынган жыйынтыктар боюнча айкын маселенин чечимин тургузууга болот. Ошондой эле башка жекече туундулуу дифференциалдык тендемелердин системасынын чечимдерин изилдөөдө колдонууга болот.

Адабияттар

1. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М.И. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. –112 с.
2. Иманалиев М.И. К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега - де Фриза [Текст] / М.И. Имана-лиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 342. – № 1. – С.17–19.
3. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
4. Аширбаева А.Ж. Решение системы интегро-дифференциальных уравне-ний методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж. И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. Специальный выпуск – Ош, 2013. – № 1. -С. 91–94.
5. Аширбаева А.Ж. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Естественные и ма-тематические науки в современном мире. Новосибирск, 2017. - № 1(48). - С.111-124.
6. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими пере-менными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Междуна-родный научно-исследовательский журнал. 2018. – № 3(69). – С. 6-10.