УДК 517.958

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_93

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ПСЕВДО ПАРАБОЛАЛЫК ТEҢДЕМЕ ҮЧҮН ГУРСАНЫН МАСЕЛЕСИНИН САНДЫК ЧЕЧИМИ

Асылбеков Таалайбек Дүкөнбаевич, ф.-м.и.к, доцент,

atd5929@mail.ru

Ош мамлекеттик университети,

Садалов Төлөнбай Ысманович, ф.-м.и.к., доцент,

saadtol_68@mail.ru,

Ош технологиялык университети,

Сыдыкова Бегимай Бактияровна, магистрант,

Bsydykovf748@gmail.com

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Мухамаджан кызы Чолпон, магистрант,

muhamadzankyzycolpon@gmail.com

Жалал-Абад мамлекеттик университети,

Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада төртүнчү тартиптеги псевдо параболалык теңдеме үчүн Гурстун маселесинин сандык чечимин торчо усулунун жардамы менен чечүү каралган. Берилген теңдемедеги катышкан туундулар аппроксимацияланган. Аппроксимацияланган туундунун маанилерин теңдемедеги туундуну алмаштырып торчо теңдеси алынган. Аппроксимациялоо мегилинде аппросимациялоо кадамдарын тандоого да чоң көңүл бурулган. Макаланын негизги максаты торчо усулунун жардамында берилген маселени аппроксимациялоо жолу менен торчо теңдесине алып келүү жана чектүү айрымалардын схемасына башкача айканда сызыктуу алгебралык теңдемелер системасына алып келүү менен коюлган маселенин кррективдүүлүгүн же чечиминин жашашы жана жалгыздыгын далилдөөнү демонстрациялоо болуп саналат.*

Ачкыч сөздөр: *псевдо параболалык теңдеме, торчо усулу, аппроксимация, алгебралык теңдемелер системасы.*

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ПСЕВДО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Асылбеков Таалайбек Дуконбаевич, к.ф.-м.и.н., доцент,
atd5929@mail.ru
Ошский государственный университет,
Садалов Толонбай Ысманович, к.ф.-м.н., доцент,
saadtol_68@mail.ru
Ошский технологический университет,
Сыдыкова Бегимай Бактияровна, магистрант,
Bsydykovf748@gmail.com
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан
Мухамаджан кызы Чолпон, магистрант,
muhamadzankyzycolpon@gmail.com
Жалал-Абадский государственный университет,
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация: *В статье рассматриваются численного решения задачи Гурса для псевдо параболических уравнений четвертого порядка с двукратными характеристиками. С начало с помощью аппроксимации получены конечные разности производных и сеточное уравнение. Используя сеточное уравнение и налагаемых условий получено линейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функции в сетке. Использовано метода конечных разностей. Сущность этого наиболее универсального численного метода состоит в том, что за искомый набор чисел принимается таблица значений решения в точках некоторого множества, называемого обычно сеткой. Для вычисления искомой таблицы используются алгебраические уравнения, приближенно заменяющие дифференциальное.*

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, аппроксимация, метод сеток, система алгебраических уравнений.*

NUMERICAL SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM FOR A PSEUDOPARABOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Asylbekov Taalaybek Dukonbaevich, Ph.D., Associate Professor
atd5929@mail.ru,
Osh State University,
Sadalov Tolonbai Ysmanovich, Ph.D., Associate Professor

saadtol_68@mail.ru,
Osh Technological University,
Sydykova Begimai Bakhtiyarovna, master,
Bsydykovf748@gmail.com,
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan
Mukhamajon kyzy Cholpon, master,
muhamadzankyzycolpon@gmail.com,
Jalal-Abad State University,
Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Abstract: *The article considers numerical solutions of the Goursat problem for pseudo-parabolic equations of the fourth order with twofold characteristics. From the beginning, with the help of approximation, finite differences of derivatives and a grid equation are obtained. Using a grid equation and imposed conditions, a linear system of algebraic equations is obtained with respect to unknown values of the function in the grid. The finite difference method is used. The essence of this most universal numerical method is that the desired set of numbers is taken as a table of solution values at the points of a certain set, usually called a grid. To calculate the required table, algebraic equations are used, which approximately replace the differential equation.*

Keywords: *Pseudo-parabolic equations, approximation, grid method, system of algebraic equations.*

Введение. В связи с проблемами геофизики, океанологии, атмосферы, биофизики, изучением летательных систем, использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики различных неоднородных и в частности стратифицированных систем, которое приводят к различным начально-краевым и краевым задачам для уравнений с частными производными четвертого порядка [1-7]. Локальным и нелокальным краевым задачам для псевдо параболических уравнений четвертого порядка посвящено большое количество работ. Отметим здесь работы А. С. Сопуева [1] и их учеников.

Постановка задачи. В области $D = \{(x, y): 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$L(u) = u_{xxyy} + u_{yy} + cu = f(x, y), c = const. \quad (1)$$

Уравнение (1) по классификации в работе [1] принадлежит псевдо параболическому типу. Прямые $x = const, y = const$ являются действительны-ми двукратными характеристиками.

Уравнение (1) будем изучать в классе функций

$$M_1 = \{u: u \in C^1(\overline{D}), u_{xy}, u_{xx}, u_{xxy}, u_{xyy} \in C(\overline{D}), u_{xxyy} \in C(D)\}.$$

Задача 1.(Дирихле). Требуется найти в области D функцию $u(x,y) \in M_1$, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u_x(0,y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \psi_1(x), u_y(x,0) = \psi_2(x), 0 \le y \le \ell, \tag{3}$$

где $\varphi_i(y), \psi_i(x), (i = 1,2)$ - заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \psi_1'(0) = \varphi_2(0), \varphi_2(0) = \psi_1'(0). \tag{4}$$

Разрешимость задачи доказана методом сеток[8,9]. Аппроксимируя краевые, начальные условия и уравнение (1), задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений. Искомая функция получена в табличном виде.

Аппроксимация. Покроем область D прямоугольной сеткой $x_i = ih_1$,
$y_i = ih_2, (i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots m)$ где $h_1 = {}^1\!/_n, h_2 = {}^1\!/_m, (n, m -$ целые).

Используя равенства

$$u_{xx}(x,y) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + O(h_1^2),$$

$$u_{yy}(x,y) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + O(h_2^2),$$

$$u_{xxyy}(x,y) = (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + 4u_{i+1,j} + 4u_{i,j} -$$

$$-2u_{i-1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1})/h_1^2 h_2^2 + O(h_1^2 + h_2^2),$$

на сетке x_i, y_j приближенно заменим уравнение (1) следующим соответствующим конечно-разностными схемами [8]

$$u_{i+1,j+1} + (h_1^2 - 2)u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + (4 - 2h_1^2)u_{i,j} - 2u_{i-1,j} +$$

$$+u_{i+1,j-1} + (h_2^2 - 2)u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1} + h_1^2 h_2^2 c u_{i,j} = 0. \tag{5}$$

Для граничных условий имеем

$$u(0,y)=u_{0,j}=\varphi_{1,j}, u_x(0,y)=u_{1,j}-u_{0,j}=h_1\varphi_{2,j},$$

$$u(x,0)=u_{i,0}=\psi_{1,i}, u_y(0,y_j)\approx u_{i,1}-u_{i,0}=h_2\psi_{2,i}.$$

Из аппроксимации граничных условий видно, что значения искомой функции $u(x,y)$ в первых двух слоях по обоим направлениям известны. С другой стороны при $i=1, j=1$ из (5) имеем

$$u_{2,2}=(2-h_1^2)u_{1,2}-u_{0,2}+2u_{2,1}+(2h_1^2-4)u_{1,1}+2u_{0,1}-u_{2,0}+$$
$$+(2-h_2^2)u_{1,0}-u_{0,0}-h_2^2cu_{1,1},$$

при $i=1, j=2$,

$$u_{2,3}=(2-h_1^2)u_{1,3}-u_{0,3}+2u_{2,2}+(2h_1^2-4)u_{1,2}+2u_{0,2}-u_{2,1}+$$
$$+(2-h_2^2)u_{1,1}-u_{0,1}-h_2^2cu_{1,2}, \tag{6}$$

$$u_{i+1,j+1}=(2-h_1^2)u_{i,j+1}-u_{i-1,j+1}+2u_{i+1,j}+(2h_1^2-4)u_{i,j}+2u_{i-1,j}-$$

$$-u_{i+1,j-1}+(2-h_2^2)u_{i,j-1}-u_{i-1,j-1}-h_1^2h_2^2cu_{i,j}.$$

Система алгебраических уравнение (6) совместима и имеет единственное решение. Из (6) однозначно определяются неизвестные значения соответствующих узлов.

Известно что, если матрица СЛАУ (6) невырожденная, то СЛАУ имеет единственное решение. Из СЛАУ однозначна определяются значения функции соответствующих слоев.

Итак, доказана

Теорема 1. Если матрица системы линейных алгебраических уравнений (6) невырожденная матрица, то решение задачи 1 существует и единственно.

Для удобства рассмотрим пример для модельного уравнения четвертого порядка псевдо параболического типа задачу Гурса.

Пример. Рассмотрим задачу Гурса для модельного уравнения четвертого порядка с конкретными данными:

В области $D=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$ рассмотрим уравнение

$$L(u)=u_{xxyy}+u_{yy}=0. \tag{7}$$

Задача 2. (Гурса). Найти в области D решение уравнения (7) удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y)=y^2, u_x(0,y)=\varphi_2(y)=y^3, 0\le y\le 1, \quad (8)$$

$$u(x,0)=\psi_1(x)=1-cosx,\ u_y(x,0)=\psi_2(x)=xsinx,\ 0\le y\le 1. \quad (9)$$

Методом сеток численное решение построим в квадрате

$$D=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$$

Покроем область D прямоугольной сеткой $x_i=ih_1, y_i=jh_2$,

($i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}, h_1=1/n, h_2=1/m$, ($n,m$-целые).

Используя аппроксимации на сетке x_i, y_j приближенно заменим уравнение (7) следующим соответствующим конечно-разностным уравнением [8, 9]

$$u_{i+1,j+1}+(h_1^2-2)u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}-2u_{i+1,j}+(4-2h_1^2)u_{i,j}-2u_{i-1,j}+$$

$$+u_{i+1,j-1}+(h_2^2-2)u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}=0. \quad (10)$$

Для граничных условий имеем

$$u(0,y)=u_{0,j}=\varphi_{1,j}=y_j^2, u_x(0,y)=u_{1,j}-u_{0,j}=h_1y_j^3,$$

$$u(x,0)=u_{i,0}=\psi_{1,i}=1-cosx_i,$$

$$u_y(0,y_j)\approx u_{i,1}-u_{i,0}=1-cosx_i+h_2x_isinx_i.$$

Из аппроксимации граничных условий видно, что значения искомой функции $u(x,y)$ в первых двух слоях по обоим направлениям известны. С другой стороны при $i=1, j=1$ из (10) имеем

$$u_{2,2}=(2-h_1^2)u_{1,2}-u_{0,2}+2u_{2,1}+(2h_1^2-4)u_{1,1}+2u_{0,1}-u_{2,0}+$$
$$+(2-h_2^2)u_{1,0}-u_{0,0},$$

при $i=1, j=2$,

$$u_{2,3}=(2-h_1^2)u_{1,3}-u_{0,3}+2u_{2,2}+(2h_1^2-4)u_{1,2}+2u_{0,2}-u_{2,1}+$$
$$+(2-h_2^2)u_{1,1}-u_{0,1}, \quad (11)$$

$$u_{i+1,j+1}=(2-h_1^2)u_{i,j+1}-u_{i-1,j+1}+2u_{i+1,j}+(2h_1^2-4)u_{i,j}+2u_{i-1,j}-$$

$$-u_{i+1,j-1}+(2-h_2^2)u_{i,j-1}-u_{i-1,j-1}.$$

Легко можно показать, что погрешность аппроксимации при этом не превышает $O(h_1^2 + h_2^2)$.

Составлена программа в среде VBA и получена график, таблица искомой функции в виде таблица 1.

Вывод. В статье рассмотрены задача Гурса для псевдо параболических уравнений четвертого порядка. Методом сеток доказаны существование и единственность решение задачи. Составлена программа в среде VBA и с помощью Maple 7 искомая функция получена в виде таблицы. Оценены погрешности аппроксимации и метода.

Таблица №1

x =	y =	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
0		0	0	0,0625	0,140625	0,25	0,390625	0,5625	0,765625	1
0,083333		0,00347	0,004337	0,063802	0,14502	0,260417	0,41097	0,597656	0,821452	1,083333
0,166667		0,013857	0,017313	0,075058	0,160532	0,282878	0,444042	0,645971	0,890611	1,179909
0,25		0,031088	0,038819	0,096153	0,187	0,317155	0,489521	0,707001	0,972497	1,288911
0,333333		0,055043	0,068676	0,126881	0,22415	0,362891	0,546943	0,780143	1,066331	1,409346
0,416667		0,085557	0,106636	0,166946	0,271601	0,419603	0,6157	0,86464	1,171172	1,540043
0,5		0,122417	0,152382	0,215965	0,328864	0,486685	0,695052	0,959589	1,285921	1,679673
0,583333		0,165369	0,205532	0,273468	0,39535	0,563416	0,784127	1,063946	1,409335	1,826755
0,666667		0,214113	0,265644	0,338908	0,470374	0,648965	0,881936	1,176541	1,540035	1,979673
0,75		0,268311	0,332215	0,411663	0,553162	0,742401	0,987377	1,296085	1,676523	2,136688
0,833333		0,327588	0,40469	0,491038	0,642857	0,8427	1,099247	1,421184	1,817194	2,295959
0,916667		0,391531	0,482462	0,576277	0,738529	0,948753	1,216258	1,550354	1,960351	2,455558
1		0,459698	0,564882	0,666568	0,839181	1,059382	1,337042	1,682032	2,104225	2,613491

Таблица №2

x =	y =	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
0		0	0,015625	0,0625	0,140625	0,25	0,390625	0,5625	0,765625	1

0,083333		0,00347	0,020071	0,068788	0,150598	0,266475	0,417396	0,604336	0,82827	1,090173
0,166667		0,013857	0,033045	0,084995	0,17165	0,294954	0,456852	0,659287	0,904203	1,193545
0,25		0,031088	0,054441	0,110973	0,203582	0,335167	0,508627	0,726863	0,992772	1,309255
0,333333		0,055043	0,08408	0,146482	0,246081	0,386714	0,572214	0,806415	1,093152	1,43626
0,416667		0,085557	0,121714	0,191191	0,29873	0,449073	0,646963	0,897143	1,204357	1,573346
0,5		0,122417	0,16703	0,244686	0,361002	0,521598	0,732091	0,9981	1,325243	1,719138
0,583333		0,165369	0,219649	0,306466	0,432275	0,60353	0,826687	1,1082	1,454525	1,872114
0,666667		0,214113	0,279131	0,375954	0,51183	0,694004	0,929723	1,226234	1,590783	2,030616
0,75		0,268311	0,344979	0,4525	0,598862	0,792053	1,040061	1,350874	1,732481	2,192868
0,833333		0,327588	0,416642	0,535382	0,692484	0,89662	1,156465	1,480692	1,877976	2,356991
0,916667		0,391531	0,493519	0,623822	0,791738	1,006569	1,277613	1,61417	2,025541	2,521024
1		0,459698	0,574967	0,716982	0,895604	1,120693	1,40211	1,749717	2,173374	2,682942

Графики численного и аналитического решений задачи Гурса

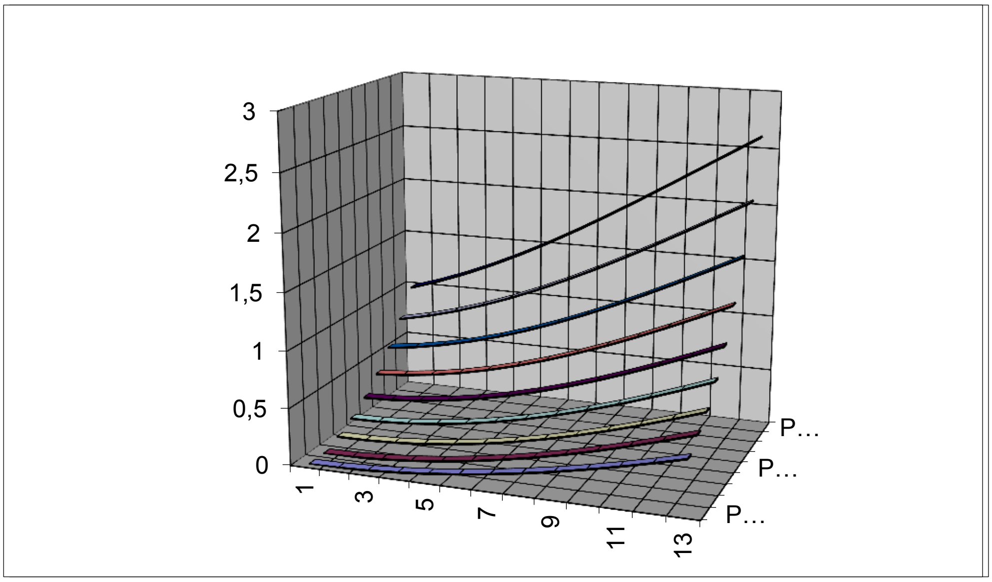

Рисунок 3. График численного решения (MS Excel 7.0)

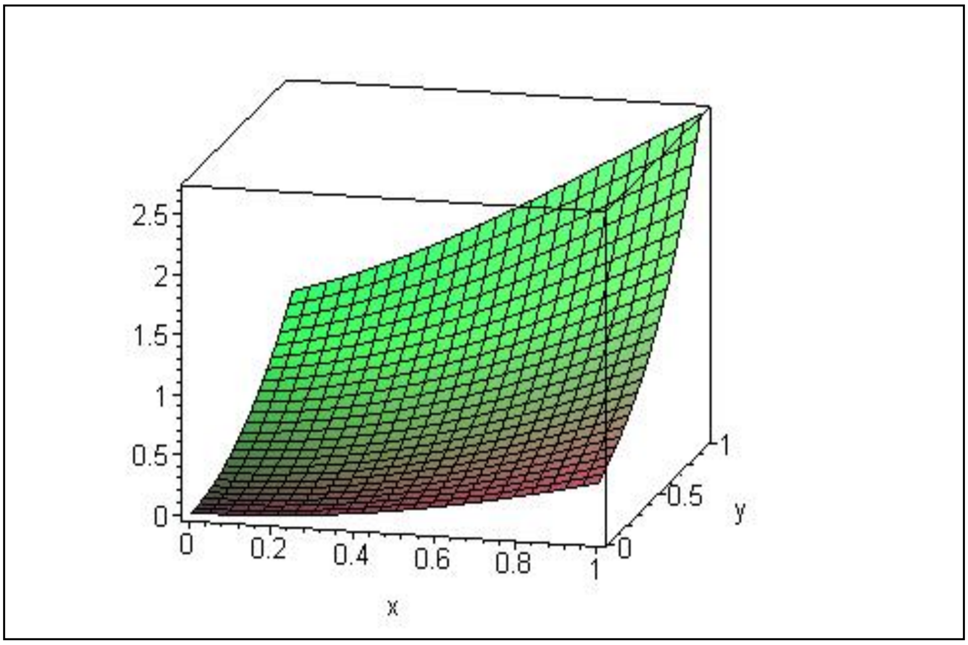

Рисунок 4. График аналитического решения (Maple 7)

Литература

1. Сопуев, А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: [Текст] / А. Сопуев // Дис. …докт. физ.–мат. наук: 01.01.02.-Бишкек, 1996.-249 с.

2. Асылбеков, Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: [Текст] / Т.Д. Асылбеков // Дис. …канд. физ. –мат. наук: 01.01.02.-Бишкек, 2003.-130 с.

3. Сопуев, А.С. Задача Дирихле для уравнения Буссинеска-Лява [Текст] / А. Сопуев, А.Б. Осмоналиев // Научные труды ОшГУ. Физико-математические науки.- Ош:ОшГУ,. № 5 . 2002.- С.105-110

4. Асылбеков, Т. Д. Задача Гурса для гиперболических уравнений четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Асылбеков // Тезисы докл. I региональной науч. конф. «Проблемы алгебры, геометрии и их приложений». –Ош: ОшГУ, 1996.-С.47-49.

5. Асылбеков, Т.Д. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами [Текст] / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Республиканский научно-теоретический журнал “Наука, новые техгологии и инновации Кыргызстана”, № 3 – Бишкек, 2019. №3. с. 11-17.

6. Асылбеков, Т.Д. Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для модельного гиперболического уравнения четвертого с трехкратными

характеристиками [Текст] / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Республиканский научно-теоретический журнал “Наука, новые техгологии и инновации Кыргызстана”, № 3 – Бишкек, 2019. №3. С. 22-29.

7. Асылбеков, Т.Д. “Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения четвертого с разрывными коэффициентами” [Текст] / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Наука. Образование. Техника.-Ош: КУУ, 2019.-№2.-С. 106-115.

8. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем [Текст] / А.А. Самарский. - 'М.: Наука, 1971. - 553 с.

9. Самарский, А.А. Введение в численные методы[Текст] / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1982. - 269 с.