Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.953.5

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_73

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ, МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Апаков Юсупжон Пулатович, докт. ф.-м. наук, профессор,

Академия наук Республики Узбекистан

имени В.И. Романовский институт математики

yusupjonapakov@gmail.com

Умаров Рахматилла Акрамович,

r.umarov1975@mail.ru,

Наманганский инженерно- строительний институт,

Наманган, Узбекистан

Аннотация: *В работе рассматривается первая краевая задача в прямоугольной области для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с постоянными коэффициентами при младших членах. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Используя метод разделения переменных решение задачи ищется в виде произведения двух функций X(x) и Y(y). Для определения X(x) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с тремя граничными условиями на границе сегмента [a, b], а для Y(y) – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными условиями на границе сегмента [c, d]. Методом функции Грина построены решения указанных задач. Получены оценки резольвенты и функции Грина. При обосновании равномерной сходимости решения используется отличность от нуля “малого знаменателя”.*

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, несимметричное условие, регулярное решение, единственность, существование, функция Грина.*

ГРИНДИН ФУНКЦИЯСЫН ТУРГУЗУУ МЕТОДУ МЕНЕН КИЧИНЕ МҮЧӨЛӨРҮ БАР ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН БИРИНЧИ ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕНИ ЧЕЧҮҮ

Апаков Юсупжон Пулатович, ф.-м.и. докт., профессор,

Өзбекстан Республикасынын илимдер Академиясынын

В.И. Романовский атындагы математика институту,

yusupjonapakov@gmail.com.

Умаров Рахматилла Акрамович,

r.umarov1975@mail.ru,

Наманган инженер-курулуш институту,

Наманган, Өзбекстан

Аннотация: *Иште кичине мүчөлөрүнүн коэффициенттери турактуу болгон бир тектүү эмес үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн тик бурчтуу аймакта биринчи чек аралык маселе каралат. Берилген маселенин чечиминин жалгыздыгы энергетикалык интегралдар методу менен далилденет. Өзгөрмөлөрдү ажыратуу методун колдонуу менен маселенин чечими эки X(x) жана Y(y) функцияларынын көбөйтүндүсү түрүндө изделет. X(x) функциясын аныктоо үчүн [a, b] сегментинде үч чек аралык шарттары бар үчүнчү тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемени алынат, ал эми Y(y) функциясы үчүн [c, d] сегментинде эки чек аралык шарты бар экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме алынат. Бул маселелердин чечимдери Грин функциясы методун колдонуу менен табылат. Резольвента жана Гриндин функциясы үчүн баа алынат. Чечимдин бир калыпта жыйналуучулугун негиздөөдө “кичине бөлүмдүн” нөлдөн айырмаланып турганы колдонулат.*

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдеме, үчүнчү ирет, көп мүнөздөмө, асимметриялык шарт, регулярдуу чечим, уникалдуулук, бар болуу, Грин функциясы.*

SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY PROBLEM FOR A THIRD ORDER EQUATION WITH MINOR TERMS, A METHOD FOR CONSTRUCTING THE GREEN'S FUNCTION

Apakov Yusupjon Pulatovich, Doctor of Physics and Maths sciences

V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the

Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,

yusupjonapakov@gmail.com.

Umarov Rakhmatilla Akramovich,

r.umarov1975@mail.ru,
Namangan Civil Engineering Institute,
Namangan, Uzbekistan

Abstract: *The paper considers the first boundary value problem in a rectangular domain for an inhomogeneous partial differential equation of the third order with constant coefficients at lower terms. The uniqueness of the solution of the stated problem is proved by the method of energy integrals. Using the method of separation of variables, the solution of the problem is sought as a product of two functions X(x) and Y(y). To determine X(x), we obtain a third-order ordinary differential equation with three boundary conditions on the boundary of the segment [a, b], and for Y(y), we obtain a second-order ordinary differential equation with two boundary conditions on the boundary of the segment [c, d]. The Green's function method is used to construct solutions to these problems. Estimates for the resolvent and Green's function are obtained. When substantiating the uniform convergence of the solution, the non-zero "small denominator" is used.*

Keywords: *Differential equation, third order, multiple characteristics, asymmetric condition, regular solution, uniqueness, existence, Green's function.*

I. Введение.

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В совокупности, всех уравнений третьего порядка особое место по специфическому характеру занимают, уравнения с кратными характеристиками.

В работе [2], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = const.$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ описывает плоско-параллельный поток [3].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах H. Block [4], E. Del Vecehio[5].

L. Catabriga в работе [6] для уравнения $D_x^{2n+1}u - D_y^2 u = 0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала.

В работах [7]- [8] построены фундаментальные решения уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдена оценки при $|t| \to \infty$. В работах [9]- [14], рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, используя построенную функцию Грина. Также, отметим работы [15]- [23], в которых, рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка.

II. Постановка задачи.

В области $D = \{(x,y): \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < q\}$ рассмотрим следующее уравнения третьего порядка вида

$$L(u) = U_{xxx} - U_{yy} + A_1 U_{xx} + A_2 U_x + A_3 U_y + A_4 U = g_1(x,y), \tag{1}$$

где $A_i, \ p, q \in R, \quad i = 1,2,3,4.$, $g(x,y)$ заданная, достаточно гладкая функция.

Заменой

$$U(x,y) = u(x,y) e^{-\frac{A_1}{3}x + \frac{A_3}{2}y},$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx} - u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u = g(x,y), \tag{2}$$

где $a_1 = A_1 - \dfrac{2A_1^2}{3} + A_2, \quad a_2 = \dfrac{2A_1^3}{27} - \dfrac{A_3^2}{2} - \dfrac{A_1 A_2}{3} + A_4,$

$g(x,y) = g_1(x,y) \cdot e^{-\frac{A_1}{3}x + \frac{A_3}{2}y}$

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$u(x,0) = 0, \qquad u(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p, \tag{3}$$

$$u(0,y)=\psi_1(y),\quad u(p,y)=\psi_2(y),\quad u_x(\text{p},y)=\psi_3(y),\ \ 0\le y\le q, \tag{4}$$

где $\psi_i(y)\in C^3[0,q], i=\overline{1,3},\ \ g(x,y)\in C^{0,1}_{x,y}[0,q]$ заданные функции, причем

$$\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0,\quad g(x,0)=g(x,q)=0,\ i=1,2,3. \tag{5}$$

Отметим, что в работе [9]- [14] рассмотрена случае $a_1=a_2=0$.

III. Единственность решения задачи A

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_2>0$ оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное. Пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в D.

В области D справедливо тождество

$$uL[u]=uu_{xxx}-uu_{yy}+a_1uu_x+a_2u^2=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}a_1u^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2+a_2u^2=0. \tag{6}$$

Интегрируя тождество (6) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q u_x^2(0,y)dy+\int_0^p\int_0^q u_y^2dxdy+a_2\int_0^p\int_0^q u^2dxdy=0. \tag{7}$$

отсюда $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\overline{D}$. Теорема 1доказана.

IV. Существование решения задачи A**.** Решение задачи A ищем в виде

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y), \tag{8}$$

где функция $v(x,y)$ решение задачи

$$\begin{cases} L[v] = v_{xxx} - v_{yy} + a_1 v_x + a_2 v = 0 \\ v(x,0) = 0, v(x,q) = 0, 0 \le x \le p, \\ v(0,y) = \psi_1(y), v(p,y) = \psi_2(y), v_x(\mathrm{p},y) = \psi_3(y), 0 \le y \le q, \end{cases} \tag{9}$$

а функция $w(x,y)$ решение задачи

$$\begin{cases} L[w] = w_{xxx} - w_{yy} + a_1 w_x + a_2 w = g(x,y) \\ w(x,0) = 0, w(x,q) = 0, 0 \le x \le p, \\ w(0,y) = w(p,y) = w_x(\mathrm{p},y) = 0, 0 \le y \le q, \end{cases} \tag{10}$$

Решение задачи (9) ищем в виде

$$v(x,y) = X(x)Y(y). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), разделяя переменные относительно $X(x)$, $Y(y)$ и учитывая граничных условий по переменной y, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda^3 Y(y) = 0 \\ Y(0) = Y(q) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Известно [24], что нетривиальное решение задачи (14), существует только при

$$\lambda^3 = \lambda_n^3 = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2, \ \ n = 1, 2, \ldots .$$

Эти числа являются собственными значениями задачи (14) а соответствующие ими собственные функции имеют вид:

$$Y_n(y) = \frac{2}{q}\sin\frac{\pi n}{q} y, \ \ n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Подставляя (11) в (9), учитывая граничных условий по переменной x, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} X''' + a_1 X' + a_2 X + \lambda_n^3 X = 0 \\ X(0) = \psi_{1n}, \ X(p) = \psi_{2n}, \ X'(p) = \psi_{3n} \end{cases} \tag{16}$$

где $\psi_{in} = \frac{2}{q}\int_0^q \psi_i(\eta)\sin\frac{n\pi}{q}\eta d\eta, \ i = \overline{1,4}$.

Введем обозначение

$$V(x)=X(x)-\rho(x), \tag{17}$$

где

$$\rho_n(x)=\psi_{1n}+\left(\frac{2\psi_{2n}-2\psi_{1n}}{p}-\psi_{3n}\right)x+\left(\frac{\psi_{1n}-\psi_{2n}}{p^2}+\frac{\psi_{3n}}{p}\right)x^2. \tag{18}$$

Подставляя (17), (18) в (16) получим задачу

$$\begin{cases} V'''+\lambda_n^3V=\lambda_n^3 f_n(x)-a_1V'-a_2V \\ V(0)=V(p)=V'(p)=0, \end{cases} \tag{19}$$

здесь

$$\begin{aligned} f_n(x)=&-\frac{a_2}{\lambda_n^3}\psi_{1n}-\frac{a_2}{\lambda_n^3}\left(\frac{2\psi_{2n}-2\psi_{1n}}{p}-\psi_{3n}\right)x-\frac{a_2}{\lambda_n^3}\left(\frac{\psi_{1n}-\psi_{2n}}{p^2}+\frac{\psi_{3n}}{p}\right)x^2- \\ &-\psi_{1n}-\left(\frac{2\psi_{2n}-2\psi_{1n}}{p}-\psi_{3n}\right)x-\left(\frac{\psi_{1n}-\psi_{2n}}{p^2}+\frac{\psi_{3n}}{p}\right)x^2- \\ &-\frac{a_1}{\lambda_n^3}\frac{2\psi_{2n}-2\psi_{1n}}{p}+\frac{a_1}{\lambda_n^3}\psi_{3n}-2\frac{a_1}{\lambda_n^3}\left(\frac{\psi_{1n}-\psi_{2n}}{p^2}+\frac{\psi_{3n}}{p}\right)x \end{aligned}$$

Согласно теореме Гильберта, решение задачи (19) ищем следующим образом:

$$\begin{aligned} V_n(x)=\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi-a_1\int_0^p G_n(x,\xi)V_n'(\xi)d\xi- \\ -a_2\int_0^p G_n(x,\xi)V_n(\xi)d\xi \end{aligned}. \tag{21}$$

где $G(x,\xi)$ функция Грина для задачи (19) и имеет вид [13]:

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases} G_{1n}(x,\xi), & 0\le x<\xi, \\ G_{2n}(x,\xi), & \xi<x\le p. \end{cases}$$

здесь

$$G_{1n}(x,\xi)=\frac{1}{\overline{\Delta}}\left\{2e^{-\lambda_n\left(\frac{3}{2}p+x-\xi\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p+\frac{\pi}{6}\right)-2e^{-\frac{\lambda_n}{2}(2x+\xi)}\cdot\right.$$

$$\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)-2e^{-\lambda_n\left(\frac{3}{2}p-\xi-\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(p-x)+\frac{\pi}{6}\right)+$$

$$+2e^{-\frac{\lambda_n}{2}(\xi-x)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)+ \tag{22}$$

$$\left.+4e^{-\frac{\lambda_n}{2}(3p+\xi-x)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(p-\xi)\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n x\right\},\qquad 0\le x\le\xi,$$

$$G_{2n}(x,\xi)=\frac{1}{\overline{\Delta}}\left\{-2e^{-\frac{\lambda_n}{2}(2x+\xi)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)+e^{-\lambda_n(x-\xi)}-\right.$$

$$-2e^{-\lambda_n\left(\frac{3}{2}p-\xi-\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(p-x)+\frac{\pi}{6}\right)+$$

$$\left.+4e^{-\frac{\lambda_n}{2}(3p+\xi-x)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(p-x)+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)\right\},\qquad \xi\le x\le p,$$

где

$$\overline{\Delta}=3\lambda_n^2\left(1-2e^{-\frac{3\lambda_n}{2}p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p+\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

(22) являются функции Грина задачи (19).

Интегрируя по частям второй интеграл в (21), имеем

$$V_n(x)=\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi+\int_0^p\left(a_1G_{n\xi}(x,\xi)-a_2G_n(x,\xi)\right)V_n(\xi)d\xi \tag{23}$$

Для удобство введем обозначения

$$V_{0n}(x)=\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi,$$

$$\overline{G}_n(x,\xi)=a_1G_{n\xi}(x,\xi)-a_2G_n(x,\xi),$$

тогда (23) имеет вид

$$V_n(x)=V_{0n}(x)+\int_0^p\overline{G}_n(x,\xi)V_n(\xi)d\xi \tag{24}$$

являющееся интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Запишем решение (24) с помощью резольвенты в виде

$$V_n(x)=V_{0n}(x)+\int_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi, \tag{25}$$

где

$$R_n(x,\xi)=\bar{G}_{1n}(x,\xi)+\sum_{m=2}^{\infty}\bar{G}_{mn}(x,\xi)$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi)=\int_0^p \bar{G}_{1n}(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds,\ m=2,3,\dots.$$

По оценке $G_n(x,\xi)$ из работы [13] имеем

$$|G_n(x,\xi)|\le\begin{cases}\dfrac{10}{3}\dfrac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_n p}}{\lambda_n^2}+\dfrac{2}{3}\dfrac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_n\delta_1}}{\lambda_n^2},\ 0\le x\le\xi,\ \ 0<\delta_1<\xi-x,\\ \dfrac{8}{3}\dfrac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_n p}}{\lambda_n^2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_n\delta_2}}{\lambda_n^2},\ \xi\le x\le l,\ \ 0<\delta_2<x-\xi,\end{cases}$$

отсуда получим следующую оценку

$$|G_n(x,\xi)|\le\frac{4}{\lambda_n^2},$$

тогда

$$|G_{n\xi}(x,\xi)|\le\frac{4}{\lambda_n}.$$

Введем обозначие $N=\max\{|a_1|,|a_2|\}$, используя равенству

$$\bar{G}_n(x,\xi)=a_1G_{n\xi}(x,\xi)-a_2G_n(x,\xi)$$

имеем оценку $\bar{G}_n(x,\xi)$ в виде

$$|\bar{G}_n|\le|a_1||G_{n\xi}|+|a_2||G_n|\le\left(\frac{1}{\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n^2}\right)4N.$$

Оценим решение (25). Из

$$R_n(x,\xi)=\bar{G}_{1n}(x,\xi)+\bar{G}_{2n}(x,\xi)+\dots+\bar{G}_{mn}(x,\xi)+\dots$$

найдем оценку

$$|R_n(x,\xi)|\le|\bar{G}_{1n}(x,\xi)|+|\bar{G}_{2n}(x,\xi)|+\dots+|\bar{G}_{mn}(x,\xi)|+\dots$$

Для правой части этого неравенство составим мажорирующий ряд. Введя обозначение

$$J = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) 4N,$$

находим

$$\left| \bar{G}_{1n}(x,\xi) \right| \le \left| \bar{G}_n(x,\xi) \right| \le 4N \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \le J,$$

$$\left| \bar{G}_{2n}(x,\xi) \right| \le \int_0^p \left| \bar{G}_{1n}(x,s) \right| \left| \bar{G}_{1n}(s,\xi) \right| ds \le J^2 p,$$

$$\left| \bar{G}_{3n}(x,\xi) \right| \le \int_0^p \left| \bar{G}_{1n}(x,s) \right| \left| \bar{G}_{2n}(s,\xi) \right| ds \le J^3 p^2,$$

…………………………………………………………….

$$\left| \bar{G}_{mn}(x,\xi) \right| \le \int_0^p \left| \bar{G}_{1n}(x,s) \right| \left| \bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi) \right| ds \le J^m p^{m-1}, \; i = 2,3,\ldots,$$

………………………………………………….

Тогда мажорирующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} (Jp)^m$$

Если справедливо неравенство $Jp < 1$, то этот ряд является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Тогда должно выполняться соотношение

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) 4N < \frac{1}{p}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 + 1} > 4Np.$$

После некоторых преобразований получим

$$\left(\frac{3\pi}{2q} \right)^2 > (4Np + 1)^3.$$

Существуют ряд значении числа p, q, N которые удовлетворяют этому неравенству. Например, если $p=1, q=1$, то имеем $N<0,19$.

В этом случае для резольвенты находим оценку

$$|R(x,\xi)| \le \frac{J}{1-Jp}. \tag{26}$$

Подставляя $G_n(x,\xi) = -\frac{1}{\lambda_n^3} G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi)$ в $V_{0n}(x)$ и интегрируя имеем

$$V_{0n}(x) = -f_n(x) + f_n(0)G_{2n\xi\xi}(x,0) - f_n(p)G_{1n\xi\xi}(x,p) + \int_0^p G_{n\xi\xi}(x,\xi)\, f_n'(\xi)\, d\xi.$$

Учитывая условия (4), интегрируем по частям ψ_{in} три раза находим оценку

$$\psi_{in} \le \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \frac{|\Psi_{in}|}{n^3},\ i=1,2,3,$$

где $\Psi_{in} = \frac{2}{q}\int_0^q \psi_i'''(\eta)\cos\frac{n\pi}{q}\eta\, d\eta$.

Тогда имеем оценки

$$|f_n(x)| \le \frac{F_1}{n^3},\quad |f_n(0)| \le \frac{F_2}{n^3},\quad |f_n(p)| \le \frac{F_3}{n^3},\quad |f_n'(x)| \le \frac{F_4}{n^3},\quad |G_{2n\xi\xi}(x,0)| \le 4,$$

$$|G_{1n\xi\xi}(x,p)| \le 4,\quad |G_{1n\xi\xi}(x,\xi)| \le 4.$$

Тогда имеем

$$|V_{0n}(x)| \le \frac{H_0}{n^3}. \tag{27}$$

Здесь $H_0 = F_1 + 4(F_2 + F_3 + F_4) < \infty$,

$$F_1 = \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \left[\left(4 + \frac{2N}{\lambda_n^3} + \frac{6N}{\lambda_n^3 p}\right)|\Psi_{1n}| + \left(3 + \frac{6N}{\lambda_n^3 p} + \frac{N}{\lambda_n^3}\right)|\Psi_{2n}| + \right.$$
$$\left. + \left(2p + \frac{2pN + 3N}{\lambda_n^3}\right)|\Psi_{3n}|\right] < \infty$$

$$F_2=\left(\frac{q}{\pi}\right)^3\left(\left(1+\frac{4N+Np}{\lambda_n^3 p}\right)\left|\Psi_{1n}\right|+\frac{4N}{\lambda_n^3 p}\left|\Psi_{2n}\right|+\frac{N}{\lambda_n^3}\left|\Psi_{3n}\right|\right)<\infty$$

$$F_3=\left(\frac{q}{\pi}\right)^3\left(\left(\frac{N}{\lambda_n^3}+\frac{6N+Np}{\lambda_n^3 p}\right)\left|\Psi_{1n}\right|+\left(1+\frac{6N+Np}{\lambda_n^3 p}\right)\left|\Psi_{2n}\right|+\frac{3N+2Np}{\lambda_n^3}\left|\Psi_{3n}\right|\right)<\infty$$

$$F_4=\left(\frac{q}{\pi}\right)^3\left[\left(\frac{4}{p}+\frac{2N+2Np}{\lambda_n^3 p^2}\right)\left|\Psi_{1n}\right|+\left(\frac{4}{p}+\frac{2N+2Np}{\lambda_n^3 p^2}\right)\left|\Psi_{2n}\right|+\right.$$
$$\left.+\left(3+\frac{2N+3Np}{\lambda_n^3 p}\right)\right]<\infty.$$

Из (26) ва (27) получим оценку

$$\left|V_n(x)\right|\le\left|V_{0n}(x)\right|+\int_0^p\left|R(x,\xi)\right|\left|V_{0n}(\xi)\right|d\xi\le\frac{1}{n^3}\frac{H_0}{1-Jp}.$$

В силу (11) и (17) решение задачи (9) имеет вид

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(V_n(x)+\rho_n(x)\right)\sin\frac{n\pi}{q}y.$$

Проверим это решение на сходимость.

$$\left|v(x,y)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|V_n(x)\right|+\left|\rho_n(x)\right|\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{H_0}{1-Jp}+T_0\right)<\infty.$$

Здесь

$$\left|\rho_n(x)\right|\le\frac{T_0}{n^3},\ \ T_0=\left(\frac{q}{\pi}\right)^3\left(3\left|\Psi_{1n}\right|+3\left|\Psi_{2n}\right|+(1+p)\left|\Psi_{3n}\right|\right)<\infty.$$

Легко можно показать сходимость $v_x(x,y)$ и $v_{xx}(x,y)$. Покажем сходимость $v_{xxx}(x,y)$. В

$$V_n'''(x)=V_{0n}'''(x)+\int_0^p R_{nxxx}(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi$$

интегруя по частям $V_{0n}'''(x)$ и после некоторых упрошенный находим оценки

$$\left|V_{0n}'''(x)\right|\le\frac{\lambda_n^3}{n^3}H_0. \qquad (28)$$

$$\left|R_{nxxx}(x,\xi)\right| \le \lambda_n^3\left(1+\frac{N}{\lambda_n^2}+\frac{N}{\lambda_n^3}\right)\frac{J}{1-Jp} \tag{29}$$

В силу (27), (28) и (29) получим оценку

$$\left|V_n'''(x)\right| \le \left|V_{0n}'''(x)\right| + \int_0^p \left|R_{nxxx}(x,\xi)\right|\left|V_{0n}(\xi)\right| d\xi \le \frac{\lambda_n^3}{n^3}\left(H_0 + H_1\left(1+\frac{N}{\lambda_n^2}+\frac{N}{\lambda_n^3}\right)\frac{J}{1-Jp}\right)$$

А после подстановки значеня H_0 и H_1 имеем следующее неравенство,

$$\left|V'''(x)\right| \le \frac{1}{n}\left(M_1\left|\Psi_{1n}\right| + M_2\left|\Psi_{2n}\right| + M_3\left|\Psi_{3n}\right|\right),$$

где M_1, M_2, M_3 – известные числа.

А отсюда окончательно имеем

$$\left|v_{xxx}(x,y)\right| \le M_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{1n}\right|}{n} + M_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{2n}\right|}{n} + M_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{3n}\right|}{n}$$

Используя неравенства Коши-Буняковского и Бесселя:

$$\left|v_{xxx}(x,y)\right| \le M_1\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{1n}\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + M_2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{2n}\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + M_3\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{3n}\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \le$$

$$\le \left(M_1\left|\Psi_{1n}\right| + M_2\left|\Psi_{2n}\right| + M_3\left|\Psi_{3n}\right|\right)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty.$$

Здесь $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{in}\right|^2 \le \left\|\psi_i'''\right\|_{L_2(0,q)}^2$, $i = 1,2,3$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Учитывая неравенство

$$\left|v_{yy}(x,y)\right| \le \left|v_{xxx}(x,y)\right| + \left|a_1\right|\left|v_x(x,y)\right| + \left|a_2\right|\left|v(x,y)\right|$$

Можно заключить что и v_{yy} тоже сходится.

Теперь решение задачи (10) ищем в виде

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_n(x)\sin\frac{n\pi}{q}y. \tag{30}$$

Разложим $g(x,y)$ в ряд Фурье по $\sin\frac{n\pi}{q}y$:

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)\sin\frac{n\pi}{q}y \tag{31}$$

где $g_n(x)=\frac{2}{q}\int_0^q f(x,\eta)\sin\frac{n\pi}{q}\eta d\eta$. Поставим найденные в (10) и имеем следующую задачу:

$$\begin{cases}\chi_n'''(x)+\lambda_n^3\chi_n(x)=g_n(x)-a_1\chi_n'(x)-a_2\chi_n(x)\\ \chi_n(0)=\chi_n(p)=\chi_n'(p)=0.\end{cases}$$

Напишем решение этой задачи в виде

$$\chi_n(x)=\int_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)d\xi-\int_0^p G_n(x,\xi)\left(a_1\chi_n'(\xi)+a_2\chi_n(\xi)\right)d\xi$$

Интегрируя по частям второй интеграл находим

$$\chi_n(x)=\int_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)d\xi+\int_0^p \chi_n(\xi)\left(a_1G_{n\xi}(x,\xi)-a_2G_n(x,\xi)\right)d\xi$$

Введя обозначения

$$\chi_{0n}(x)=\int_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)d\xi,$$

$$\bar{G}_n(x,\xi)=a_1G_{n\xi}(x,\xi)-a_2G_n(x,\xi),$$

имеем уравнение

$$\chi_n(x)=\chi_{0n}(x)+\int_0^p \bar{G}_n(x,\xi)\chi_n(\xi)d\xi\,. \tag{32}$$

Которое является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Напишем решение (32) в виде

$$\chi_n(x)=\chi_{0n}(x)+\int_0^p R_n(x,\xi)\chi_{0n}(\xi)d\xi\,, \tag{33}$$

где

$$R_n(x,\xi)=\bar{G}_{1n}(x,\xi)+\sum_{m=2}^{\infty}\bar{G}_{mn}(x,\xi),$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi)=\int_0^p \bar{G}_{1n}(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds,\ m=2,3,....$$

Учитывая условия (5), интегрируем по частям $g_n(x)$ имеем

$$g_n(x)=\frac{2}{n\pi}\int_0^q g_\eta(x,\eta)\cos\frac{n\pi}{q}\eta d\eta .$$

и в силу

$$G_n(x,\xi)=-\frac{G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi)}{\lambda_n^3},$$

находим

$$\chi_{0n}(x)=-\frac{1}{n\lambda_n^3}\int_0^p G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi)g_n(\xi)d\xi .$$

Интегрируя по частям и имея в виду $G_{1n\xi\xi}(x,x)-G_{2n\xi\xi}(x,x)=-1$ находим

$$\chi_{0n}(x)=\frac{1}{n\lambda_n^3}\left(-g_n(x)+g_n(0)G_{2n\xi\xi}(x,0)-g_n(p)G_{1n\xi\xi}(x,p)+\int_0^p G_{n\xi\xi}(x,\xi)g_n{}'(\xi)d\xi\right).$$

Тогда получим следующую оценку

$$\left|\chi_{0n}(x)\right|\le\frac{H_2}{\lambda_n^3 n} \tag{34}$$

где $H_2=F_5+4\left(F_6+F_7+F_8 p\right)$.

$$F_5=C\left|g_{n\eta}(x)\right|,\ F_6=C\left|g_{n\eta}(0)\right|,\quad F_7=C\left|g_{n\eta}(p)\right|,\quad F_8=C\left|g_{n\eta}{}'(x)\right|.$$

В силу (27) и (34) окончательно получим оценку

$$\left|\chi_n(x)\right|\le\frac{1}{\lambda_n^3 n}\frac{H_2 J}{1-Jp}$$

Решение задачи (10) имеет вид

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n(x)\sin\frac{n\pi}{q}y$$

Это решение сходится, потому что

$$\left|w(x,y)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\chi_n(x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^3 n}\frac{H_2 J}{1-Jp}<\infty.$$

Покажем равномерную сходимость $w_x(x,y)$. После некоторых вычислений находим, что

$$\left|\chi_{0n}{}'(x)\right|\le\frac{H_3}{\lambda_n^2 n} \tag{35}$$

где $H_3=4\left(F_6+F_7+F_8 p\right)$.

Согласно (34) и (35) получим

$$\left|\chi_n'(x)\right| \le \left|\chi_{0n}'(x)\right| + \int_0^p \left|R_{nx}(x,\xi)\right|\left|\chi_{0n}(\xi)\right| d\xi \le \frac{1}{\lambda_n^2 n}\left(H_3 + \frac{JH_2}{1-Jp}\right).$$

Тогда имеем оценку

$$\left|w_x(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\chi_n'(x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2 n}\left(H_3 + \frac{JH_2}{1-Jp}\right) < \infty.$$

Также можно показать сходимость $w_{xx}(x,y)$.

Покажем равномерную сходимость $w_{xxx}(x,y)$. После некоторых вычислений находим оценку

$$\left|\chi_{0n}'''(x)\right| \le \frac{H_3}{n} \tag{36}$$

где $H_3 = 4\left(F_6 + F_7 + F_8 p\right) < \infty$.

Согласно (28), (29) и (36) получим оценку

$$\left|\chi_n'''(x)\right| \le \frac{1}{n}\left(H_3 + H_2\left(1 + \frac{J}{4\lambda_n}\right)\frac{Jp}{1-Jp}\right)$$

Тогда имеем

$$\left|w_{xxx}(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\chi_n'''(x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(H_3 + H_2\left(1 + \frac{J}{4\lambda_n}\right)\frac{Jp}{1-Jp}\right)$$

После некоторых упрошении получим следуюшее неравенство

$$\left|w_{xxx}(x,y)\right| \le L_4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g_{n\eta}(x)\right|}{n} + L_5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g_{n\eta}(0)\right|}{n} + L_6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g_{n\eta}(p)\right|}{n} + L_7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g_{n\eta}'(x)\right|}{n},$$

здесь L_4, L_5, L_6, L_7 - известные постоянная.

Для правой части этого неравенство, используем неравенства Коши-Буняковского и Бесселя

$$\left|w_{xxx}(x,y)\right| \le L_4\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|g_{n\eta}(x)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + L_5\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|g_{n\eta}(0)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} +$$

$$+L_6\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|g_{n\eta}(p)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + L_7\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|g_{n\eta}'(x)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \le$$

$$\le \pi\sqrt{\frac{1}{3q}}\left(L_4\left\|f_\eta(x)\right\| + L_5\left\|f_\eta(0)\right\| + L_6\left\|f_\eta(p)\right\| + L_7\left\|f_\eta'(x)\right\|\right) < \infty.$$

Здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{n\eta}(x)\right|^2 \le \frac{2}{q}\left\|f_\eta(x)\right\|^2_{L_2(0,q)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{n\eta}(0)\right|^2 \le \frac{2}{q}\left\|f_\eta(0)\right\|^2_{L_2(0,q)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{n\eta}(p)\right|^2 \le \frac{2}{q}\left\|f_\eta(p)\right\|^2_{L_2(0,q)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{n\eta}'(x)\right|^2 \le \frac{2}{q}\left\|f_\eta'(x)\right\|^2_{L_2(0,q)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая слудующего неравенство будет

$$\left|w_{yy}(x,y)\right| \le \left|w_{xxx}(x,y)\right| + |a_1|\left|w_x(x,y)\right| + |a_2|\left|w(x,y)\right|,$$

и заключаем,что и w_{yy} также сходится.

Из решении задач (11) и (12) получим решение задачи A в явном виде:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^p G_n(x,\xi)\left(\lambda_n^3 f_n(\xi) + g_n(\xi)\right)d\xi \sin\frac{n\pi}{q}y +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^p R_n(x,\xi)\int_0^p G_n(x,s)\left(\lambda_n^3 f_n(s) + g_n(s)\right)ds\,d\xi\right)\sin\frac{n\pi}{q}y +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{1n} + \left(\frac{2\psi_{2n} - 2\psi_{1n}}{p} - \psi_{3n}\right)x + \left(\frac{\psi_{1n} - \psi_{2n}}{p^2} + \frac{\psi_{3n}}{p}\right)x^2\right)\sin\frac{n\pi}{q}y$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если выполняется следующие условия

1) $\psi_i(y) \in C^3[0,q], i = \overline{1,3}, g(x,y) \in C^{0,1}_{x,y}\left(\overline{\Omega}\right)$,

2) $\psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi_i''(0) = \psi_i''(q) = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad g(x,0) = g(x,q) = 0,$

3) $N < \dfrac{\lambda_1^2}{4p(\lambda_1 + 1)}\left(1 - 2e^{-\frac{3\lambda_1}{2}p}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1 p + \dfrac{\pi}{6}\right)\right)$,

то решение задачи *A* существует. Здесь $N = \max\left\{|a_1|, |a_2|\right\}$, $\lambda_1 = \sqrt[3]{\left(\dfrac{\pi}{q}\right)^2}$.

Литература

1. Юлдашев, Т.К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредголма в частных производных третьего порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - № 1(34). - С.56-65.

2. Рыжов, О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа [Текст] / О.С. Рыжов // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

3. Диесперов, В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения [Текст] / В.Н. Диесперов // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.

4. Block, H. Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples [Текст] / H. Block // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21),- pp. 1-30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.

5. Del Vicchio, E. Sulleequazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$ [Текст] / E. Del Vicchio // Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.

6. Cattabriga, L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple [Текст] / L. Cattabriga // Rendiconti del seminario matimatico della univ. di Padava. - 1961, 31. - pp. 1-45.

7. Джураев, Т.Д, Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Т.Д. Джураев, Ю.П. Апаков // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007. - № 2(15). - С.18-26.

8. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени [Текст] / Т.Д. Джураев, Ю.П. Апаков // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, том 62. № 1.- С. 40-51.

9. Apakov, Yu. P. Construction of Green's Function for One Problem of Rectangular Region [Текст] / P. Yusufjon Apakov // Malaysian Journal of Mathematical Sciences, - Kuala-Lumpur, 2010. - Vol. 4(1). - № 1. - pp. 1-16.

10. Apakov, Yu. P. On a Method for Solving Boundary Problems for Third-order Equation with Multiple Characteristics [Текст] / P. Yusufjon Apakov // Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations. Operator Theory: Advances and Applications, Springer. -Basel, 2011. -Vol. 216, - P. 65-78.

11. Apakov, Yu.P. On Unique Solvability of Boundary-Value Problem for a Viscous Transonic Equation [Текст] / P. Yusufjon Apakov // Lobachevski Journal of Mathematics.2020 Vol, 41, № 9, -pp. 1754-1761.

12. Apakov, Yu.P., On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics Nonlinear Analysis: Modeling and Control. -Vilnius, 2011. - Vol. 16. -№ 3. - pp. 255-269.

13. Апаков, Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю.П. Апаков // Украинский математический журнал. -Киев. 2012. Т.64. № 1. С. 1-11.

14. Апаков, Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина [Текст] / Ю.П. Апаков, А.Х. Жураев // Узбекский математический журнал. 2011, №3, - С.36-42.

15. Apakov, Yu.P. Third boundary-value problem for a third-order diferential equation with multiple characteristics [Текст] / P. Yusufjon Apakov, A. Kh. Zhuraev. // Ukrainian Math-ematical Journal. Springer, New York, febuary, 2019 -Vol. 70, № 9. -P. 1467-1476.

16. Yuldashev, T.K. Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel [Текст] / T.K. Yuldashev, P. Yusufjon Apakov, A. Kh. Zhuraev. // Lobachevski Journal of Mathematics. 2021 Vol, 42, № 6, -pp. 1316-1326.

17. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений араболо - гиперболического типа [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов // Ташкент: ФАН, 1986. - 220 с.

18. Сабитов, К.Б. Задача Дирихле для уравнение смешанного типа третьего порядка [Текст] / К.Б. Сабитов //ДАН России. – Москва. 2009.-Т.427.-№5.-С.593-596.

19. Балкизов, Ж.А. О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ж.А. Балкизов, А.Х. Кадзаков // Известия Кабардино - Балкарского научного центра РАН. - Нальчик, 2010 . - № 4. - С. 64-69.

20. Лукина, Г.А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега - де Фриза [Текст] / Г.А. Лукина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Матем. модел. ипрограм. - Челябинск, 2011. - № 17 (234), - С. 52-61.

21. Шубин, В.В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрыв-ным коэффициентом [Текст] / В.В. Шубин // Вестник НГУ. Сер. Матем., мех., информ. - Новосибирск, 2012. -Т. 12. -№ 1. - С. 126-138.

22. Ashyraliev, A. Boundary value problem for a third order partal differential equation [Текст] / A. Ashyraliev, N. Aggez, F. Hezenci // First international conference on analysis and applied mathematics. ICAAM 2012. Gumshoe, Turkey. 18-21 October. 2012. - pp.130-133.

23. Кожанов, А.И. Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] / А.И. Кожанов, А.В. Дюжева // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.- мат. науки, 2020. Т. 24, № 4. С. 607–620.

24. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский - М.: «Наука». 1966 г. 724 стр.