Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.95

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_66

ХИМИЯЛЫК РЕАКЦИЯДАГЫ СЕКИРИК ЖӨНҮНДӨ

Алымкулов Келдибай, профессор, ф.-м.и.д.,КР УИАнын мүчө-корр.,
keldibay@mail.ru
Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, профессор, ф.-м.и.д.,
kudaiberdi.kozhobekov@mail.ru
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, ф.-м.и.д., профессор
dtursunov@oshsu.kg
Азимов Бектур Абдырахманович, доцент, ф.-м.и. к.,
azimov@oshsu.kg
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Макалада сызыктуу эмес биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Кошинин маселеси каралат. Каралып жаткан Коши маселесинин дагы бир өзгөчөлүгү бул теңдемеде кичи параметр катышат. Бизден ушул кичи параметр нөлгө умтулганда Коши маселесинин чыгарылышынын асимптотикасын тургузуу талап кылынат. Изилденип жаткан Коши маселеси химиялык реакциянын математикалык модели болот. Коши маселесинин чыгарылышы өзгөчө чекитке ээ, ушул чекитте чыгарылыш бир абалдан экинчи абалга секирип өтөт. Бирок каралып жаткан аралыкта чыгарылышы үзгүлтүксүз болот. Мурда биринчи абалдагы (зонадагы) асимптотикалык чыгарылышы тургузулган эле, азыр экинчи абалдагы (зонадагы) асимптотикалык чыгарылышты тургузабыз.*

Ачкыч сөздөр: *химиялык реакциянын моделдик теңдемеси, Коши маселеси, өзгөчө чекит, асимптотика.*

О ПРЫЖКЕ В ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Алымкулов Келдибай, профессор, д.ф.-м.н., член-корр. НАН КР,
keldibay@mail.ru
Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, профессор, ф.-м.и.д.,
kudaiberdi.kozhobekov@mail.ru
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д.ф.-м.н., профессор
dtursunov@oshsu.kg
Азимов Бектур Абдырахманович, к. ф.- м. н., доцент

azimov@oshsu.kg

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В статье рассматривается задача Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. Дополнительная особенность рассматриваемой задачи Коши состоит в том, что в это уравнение входит малый параметр. Требуется установить асимптотику решения задачи Коши при стремлении этого малого параметра к нулю. Исследуемая задача Коши представляет собой математическую модель химической реакции. Решение задачи Коши имеет особую точку, в которой решение быстро переходит из одного состояния в другое. Однако решение непрерывна в рассматриваемом промежутке. Раньше была построена асимптотическое решение в первой зоне, сейчас мы построим асимптотическое решение на второй зоне.*

Ключевые слова: *Модельное уравнение химической реакции, задача Коши, особая точка, асимптотика.*

ABOUT JUMPING IN A CHEMICAL REACTION

Alymkulov Keldibay professor, doctor of physical- math.sci.,member-corresp.of NAN KR

keldibay@mail.ru

Kozhobekov Kudaiberdi Gaparalievich.G., professor, doctor of physical- math.sci.,

kudaiberdi.kozhobekov@mail.ru

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich, d. p.-m. s., professor

dtursunov@oshsu.kg

Azimov Bektur Abdyrahmanovich, Ph.D., Associate Professor

azimov@oshsu.kg

Osh State University,

Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The article considers the Cauchy problem for an ordinary nonlinear differential equation of the first order. An additional feature of the Cauchy problem under consideration is that this equation contains a small parameter. It is required to establish the asymptotics of the solution of the Cauchy problem as this small parameter tends to zero. The investigated Cauchy problem is a mathematical model of a chemical reaction. The solution of the Cauchy problem has a singular point at which the solution quickly passes from one state to another. However, the solution is continuous in the considered interval. Previously, an asymptotic solution was constructed in the first zone, now we will construct an asymptotic solution in the second zone.*

Keywords*: The model equation of a chemical reaction, Cauchy problem, singular point, asymptotic.*

Төмөнкү сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме үчүн Кошинин маселесин изилдейбиз:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\varepsilon}{\beta}\left(1+\beta-T\right)e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}},\ T(0)=1, \tag{1}$$

мында 0<β - const, 0<ε<<1.

(1) - Кошинин маселеси [4]- жумушта изилденген, ал макалада Кошинин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы $t\in[0,1-\varepsilon)$ аралыкта тургузулган. Изилдөөнү улантып, бул макалада (1)- Кошинин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасын t=1 чекиттин чеке-белинде тургузабыз, б.а. $t\in[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

(1)- маселенин чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$T\left(t\right)=\varphi\left(\sigma\right), \tag{2}$$

мында φ жаңы изделүүчү функция, $\sigma=\varepsilon ln\frac{1}{1-t},\ 0\le\sigma<1.$

φ функциясын аныктайбыз, $1-t=e^{-\sigma/\varepsilon},0\le\sigma<1, dt=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\sigma/\varepsilon}d\sigma$ болгондуктан (1)- теңдеме төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varepsilon\frac{d\varphi}{d\sigma}e^{\sigma/\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{\beta}\left(1+\beta-\varphi\right)e^{\frac{\varphi-1}{\varepsilon\varphi}}\ \Rightarrow\frac{d\varphi}{d\sigma}=\frac{1}{\beta}\left(1+\beta-\varphi\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{1}{\varphi}-\sigma\right)}.$$

Айталы

$$\varphi=\frac{1}{1-\sigma}+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+... \tag{3}$$

болсун. Анда (3)тү (1) ге коюуп төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}+\varepsilon\varphi_1'+\varepsilon^2\varphi_2'+...=$$

$$=\frac{1}{\beta}\left(1+\beta-\frac{1}{1-\sigma}-\varepsilon\varphi_1-\varepsilon^2\varphi_2-...\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\sigma-\frac{1}{\frac{1}{1-\sigma}+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+...}\right)},$$

бул жерде

$$e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\sigma-\frac{1}{\frac{1}{1-\sigma}+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\dots}\right)}=e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}+e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}\left(1-\sigma\right)^2\left(\varphi_2-\varphi_1^2+\varphi_1^2\sigma\right)\varepsilon+$$

$$+\frac{1}{2}e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}(-12\varphi_1\varphi_2\sigma^2+4\varphi_1\varphi_2\sigma^3+20\varphi_2\varphi_1^2\sigma^3-10\sigma^4\varphi_2\varphi_1^2+2\sigma^5\varphi_2\varphi_1^2+$$

$$+10\sigma\varphi_2\varphi_1^2-4\varphi_2\varphi_1+12\sigma\varphi_2\varphi_1-20\sigma^2\varphi_2\varphi_1^2-4\sigma\varphi_3-8\sigma^3\varphi_1^3+2\sigma^2\varphi_3+$$

$$+2\sigma^4\varphi_1^3+6\sigma^2\varphi_2^2+15\sigma^4\varphi_1^4-4\sigma^3\varphi_2^2-6\sigma^5\varphi_1^4+\sigma^4\varphi_2^2+\sigma^6\varphi_1^4-8\sigma\varphi_1^3+12\sigma^2\varphi_1^3+$$

$$+\varphi_2^2-2\varphi_2\varphi_1^2-6\sigma\varphi_1^4+15\sigma^2\varphi_1^4-4\sigma\varphi_2^2-20\sigma^3\varphi_1^4+2\varphi_3+2\varphi_1^3+\varphi_1^4\,)\varepsilon^2+O\left(\varepsilon^3\right)$$

экендигин эске алып,

$$\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}+\varepsilon\varphi_1'+\varepsilon^2\varphi_2'+\dots=\frac{1}{\beta}\left(1+\beta-\frac{1}{1-\sigma}-\varepsilon\varphi_1-\varepsilon^2\varphi_2-\dots\right)\times$$

$$\times\left(e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}+e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}\left(1-\sigma\right)^2\left(\varphi_2-\varphi_1^2+\varphi_1^2\sigma\right)\varepsilon+\dots\right),$$

акыркы барабардыктан, кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарлап, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}=\frac{1}{\beta}\left(1+\beta-\frac{1}{1-\sigma}\right)e^{(1-\sigma)^2\varphi_1},$$

мындан

$$\varphi_1=\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}\,ln\frac{\beta}{\left(1-\sigma\right)\left(\left(1+\beta\right)\left(1-\sigma\right)-1\right)}=-\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}\,ln\left(1-\sigma\right)\left(1-\frac{1+\beta}{\beta}\sigma\right)=$$

$$=-\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}\,ln\frac{1+\beta}{\beta}\left(1-\sigma\right)-\frac{1}{\left(1-\sigma\right)^2}\,ln\left(\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma\right),\quad 0\le\sigma<\frac{\beta}{1+\beta},$$

Бул жерде $\varphi_1\left(0\right)=0$ жана

$$\varphi_1\sim-\left(\beta+1\right)^2 ln\left(\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma\right),\ \sigma\to\frac{\beta}{1+\beta}.$$

φ_2 үчүн төмөнкү теңдемени алабыз:

$$\varphi_1'=\frac{1}{\beta}\left(\left(1+\beta-\frac{1}{1-\sigma}\right)e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}\left(1-\sigma\right)^2\left(\varphi_2-\varphi_1^2+\varphi_1^2\sigma\right)-\varphi_1 e^{(1-\sigma)^2\varphi_1}\right),$$

же

$$\varphi_1' = \left(\varphi_2 - \varphi_1^2 + \varphi_1^2\sigma\right) - \frac{\varphi_1}{(1-\sigma)\left((1+\beta)(1-\sigma)-1\right)},$$

мындан

$$\varphi_2 = \varphi_1' + \frac{\varphi_1}{(1-\sigma)\left((1+\beta)(1-\sigma)-1\right)} + \varphi_1^2(1-\sigma), \quad \varphi_2(0) = \frac{1-2\beta}{\beta}$$

демек,

$$\varphi_2 \sim (\beta+1)^2 \frac{1}{\frac{\beta}{1+\beta} - \sigma}.$$

Аналогиялуу түрдө φ_3 тү аныктайбыз:

$$\varphi_3 \sim \varphi_2^2 = \left((\beta+1)^2 \frac{1}{\frac{\beta}{1+\beta} - \sigma} \right)^2.$$

Натыйжада төмөнкү катарды алабыз:

$$\varphi = \frac{1}{1-\sigma} + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots = \frac{1}{1-\sigma} - \varepsilon c_1 \ln\left(\frac{\beta}{1+\beta} - \sigma\right) +$$

$$+\varepsilon^2 \frac{c_2}{\frac{\beta}{1+\beta} - \sigma} + \varepsilon^3 c_3 \left(\frac{1}{\frac{\beta}{1+\beta} - \sigma}\right)^2 + \ldots, 0 \le \sigma < \frac{\beta}{1+\beta} < 1.$$

Ошентип, ажыралма төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{1-\sigma} - \varepsilon c_1 \ln(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon^2 \frac{c_2}{\sigma_0 - \sigma} + \varepsilon^3 c_3 \left(\frac{1}{\sigma_0 - \sigma}\right)^2 +$$

$$+\varepsilon^4 c_4 \left(\frac{1}{\sigma_0 - \sigma}\right)^3 + \ldots\ldots, \tag{4}$$

мында $\sigma_0 = \frac{\beta}{1+\beta}$.

Теорема 1. (4)- катар $\sigma_0 - \sigma = \varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon \to 0,$ болгондо асимптотикалык катар болот.

Эми (4)тө

$$\sigma = \xi + \varepsilon\sigma_1(\xi) + \varepsilon^2\sigma_2(\xi) + \dots \qquad (5)$$

өзгөртүү жүргүзөбүз, мында $\sigma_i(\xi)$ - белгисиз функциялар.

Анда (4)төн төмөнкүнү алабыз:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{1-\xi} + \varepsilon\sigma_1(\xi) + \varepsilon(1+\beta)ln(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon\frac{c_2}{\xi}ln\rho + \varepsilon^3 c_3\frac{1}{\rho^2} + $$
$$+\varepsilon^4 c_4\left(\frac{1}{\rho}\right)^3 + \dots, \rho = \sigma_0 - \xi, \sigma_2 = \rho^{-1} \qquad (6)$$

Эгерде $\sigma_1 = -(1+\beta)ln\rho$ десек, анда

$$\sigma = \xi - \varepsilon(1+\beta)ln\rho + \varepsilon c_2\frac{1}{\rho} + \dots \qquad (7)$$

Эгерде (7)де $\sigma \to \sigma_0$, анда

$$\rho \sim \varepsilon(1+\beta)ln\rho \;\Leftrightarrow\; \rho = \varepsilon(1+\beta)ln\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon \to 0$$

$$\rho \sim \varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon \to 0$$

(5), (6) катарлар асимптотикалык болушат. Далилдөөсү мажорант методу менен жүргүзүлөт.

Натыйжада (1)- Кошинин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы t=1 чекиттин чеке-белинде тургузулду.

Адабияттар

1. Ashwani, K. Kapila Asymptotic Treatment of Chemically Reacting Systems [Text] / K. Ashwani, 1983.

2. Алымкулов, К. The method of uniformization and justification of Lighthill method (in Russian) [Text] / К. Алымкулов // Izvestia AN Kyrg. SSR, 1981, № 1. pp. 35-38.

3. Alymkulov, K. Perturbed Differential Equations with Singular Points in book “ Recent Studies in Perturbation Theory” [Text] / K. Alymkulov, D.A. Tursunov // Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov, Publisher InTech, 2017.

4. Алымкулов, К. Асимптотика решения задачи химической реакции со стационарной достижимостью [Текст] / К. Алымкулов, К.Г. Кожобеков // Вестник Жалал Абадского университета, 2019. – № 3 (42). – С. 128-133.

5. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе [Текст] / А.М. Ильин, А.Р. Данилин – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 248 с.

6. Коул, Дж. Методы возмущений в механике жидкости [Текст] / Дж. Коул – М.: Мир, 1972. – 276 с.

7. Carrier, C.F. Boundary lave problems in applied mathematics [Text] / C.F. Carrier // Comm. Appl. Math. – 1954. – V.7. – P.11-17.

8. Kevorkian, J. Perturbation methods in applied mathematics [Text] / J. Kevorkian, J.D Cole // Springer, (1985).

9. Де Брейп, Н. Г. Асимптотические методы в анализе [Текст] / Н.Г. Де Брейп – М.: ИЛ, 1961. 247 с.