ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

ISSN: 1694-7452 **e-ISSN: 1694-8610**

№4/2024, 145-149

МАТЕМАТИКА

УДК: 514.75
DOI: 10.52754/16948610_2024_4_15

БӨЛҮШТҮРҮҮЛӨРДҮН ТҮГӨЙҮНҮН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШАШЫ

СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ПАРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

EXISTENCE OF QUASI-DOUBLE LINES OF THE PAIR OF DISTRIBUTIONS

Курбанбаева Нуржамал Нажимидиновна
Курбанбаева Нуржамал Нажимидиновна
Kurbanbayeva Nurzhamal Nazhimidinovna

ф.-м.и.к., доцент, Ош мамлекеттик университети
к.ф.-м.н., доцент, Ошский государственный университет
Associate Professor, Osh State University
nkurbanbaeva77@gmail.com
ORCID: 0009-0000-8554-5533

Сейитказыева Гулнара Имамалиевна
Сейитказыева Гулнара Имамалиевна
Seyitkazyeva Gulnara Imamaliyevna

улук окутуучу, Ош мамлекеттик университети
старший преподаватель, Ошский государственный университет
Senior Lecturer, Osh State University
gseiitkazyeva@gmail.com
ORCID: 0009-0005-7945-3153

Сарыгулова Нуркыз Акболушовна
Сарыгулова Нуркыз Акболушовна
Sarygulova Nurkyz Akbolushovna

улук окутуучу, Ош мамлекеттик университети
старший преподаватель, Ошский государственный университет
Senior Lecturer, Osh State University
nsarygulova@mail.ru
ORCID: 0009-0009-1169-1832

Аттокурова Кайыргүл Азизбековна
Аттокурова Кайыргүл Азизбековна
Attokurova Kaiyrgul Azizbekovna

магистрант, Ош мамлекеттик университети
магистрант, Ошский государственный университет
Master's Student, Osh State University
kajyrgul21@gmail.com

БӨЛҮШТҮРҮҮЛӨРДҮН ТҮГӨЙҮНҮН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШАШЫ

Аннотация

$\Omega \subset E_5$ аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген: ар бир $X\in\Omega$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана ω^1 сызыгы өтөт. Ушул сызык үчүн Френенин репери [1] боло тургандай кыймылдуу репер тандалып алынган. Бул репердин координаталык векторлорунун интегралдык сызыктары Френенин торчосун [1] түзүшөт. Ушул торчонун ω^3 сызыгынын жанымасында F_3^2 чекити инварианттык түрдө аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде, F_3^2 чекити өзүнүн $\Omega_3^2 \subset E_5$ аймагын сызып чыгат. Натыйжада $f_3^2(X)=F_3^2$ боло тургандай $f_3^2:\Omega\to\Omega_3^2$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз. $\Delta_3=(X,\vec{e}_2,\vec{e}_4,\vec{e}_5)$ жана $\Delta_3'=f_3^2(\Delta_3)$ бөлүштүрүүлөрүн карайбыз. Аныктама: Эгерде $d\subset \Delta_3$ сызыгынын X чекитиндеги жанымасы жана $\bar{d}=f_3^2(d)$ сызыгынын F_3^2 чекитиндеги жанымасы бир эле үч ченемдүү мейкиндикте ($\vec{e}_2,\vec{e}_4,\vec{e}_5$ векторлоруна керилген) жатышса, анда d жана $\bar{d}$ сызыктары f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунда (Δ_3, Δ_3') түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары деп аталышат. Френенин торчосу Френенин циклдик торчосу болгон учурда $d\subset \Delta_3$ жана $\bar{d}\subset \Delta_3'=f_3^2(\Delta_3)$ сызыктары (Δ_3, Δ_3') түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген.

Ачкыч сөздөр: евклиддик мейкиндик, Френенин репери, Френенин торчосу, бөлүктөп чагылтуу, бөлүштүрүү, квазикошмок сызык

СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ПАРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Аннотация

В области $\Omega \subset E_5$ задано множество гладких линий так, что через каждую точку $X\in\Omega$ проходит одна линия ω^1 заданного множества. Подвижной репер пространства выбран так, чтобы он являлся репером Френе [1] для линии ω^1 заданного множества. Интегральных линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [1]. На касательной к линии ω^3 сети Френе определяется точка F_3^2 инвариантным образом. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_5$. В результате получается частичное отображение $f_3^2:\Omega\to\Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X)=F_3^2$. Рассмотрены трехмерные распределения $\Delta_3=(X,\vec{e}_2,\vec{e}_4,\vec{e}_5)$ и $\Delta_3'=f_3^2(\Delta_3)$. Определение. Если касательная к линии $d\subset \Delta_3$ в точке X и касательная к линии $\bar{d}=f_3^2(d)$ в точке F_3^2 принадлежат одному и тому же трехмерному пространству (натянутому на координатных векторах $\vec{e}_2,\vec{e}_4,\vec{e}_5$), то линии d и $\bar{d}=f_3^2(d)$ называются квазидвойными линиями пары распределений (Δ_3, Δ_3') в частичном отображении f_3^2. В случае, когда сеть Френе является циклической сетью Френе доказаны необходимое и достаточные условия для того, чтобы линии d и $\bar{d}$ являлись квазидвойными линиями пары распределений (Δ_3, Δ_3').

Ключевые слова: евклидово пространство, репер Френе, сеть Френе, частичное отображение, распределение, квазидвойная линия

EXISTENCE OF QUASI-DOUBLE LINES OF THE PAIR OF DISTRIBUTIONS

Abstract

A family of smooth lines is given in the domain $\Omega \subset E_5$ so that through each point $X\in\Omega$ passes one line ω^1 of the given family. A movable frame is chosen so that it was Frenet's frame for the line ω^1 of the given family. The integral lines of the coordinate vectors fields of this frame form a Frenet's net. On the tangent to the line ω^3 a point F_3^2 is defined in an invariant way. When the point X moves in the domain Ω, the point F_3^2 describes its domain $\Omega_3^2 \subset E_5$. In this way we get the partial mapping $f_3^2:\Omega\to\Omega_3^2$ such that $f_3^2(X)=F_3^2$. It is considered the three dimensional distributions $\Delta_3=(X,\vec{e}_2,\vec{e}_4,\vec{e}_5)$ and $\Delta_3'=f_3^2(\Delta_3)$. Definition. In the tangent to the line $d\subset \Delta_3$ at the point X and the tangent to the line $\bar{d}=f_3^2(d)$ at the point F_3^2 belong to the same three dimensional space (spanned by vectors $\vec{e}_2,\vec{e}_4,\vec{e}_5$), then lines d and $\bar{d}$ are called quasi-double lines of the pair (Δ_3, Δ_3') of distributions in the partial mapping f_3^2. In the case when net of Frenet is cyclic net Frenet it is proved the necessary and sufficient conditions for lines $d\subset \Delta_3$ and $\bar{d}=f_3^2(d)$ to be quasi-double lines of the pair of distributions (Δ_3, Δ_3') in the partial mapping f_3^2

Keywords: euclidean space, Frenet's net, cyclic net of Frenet, partial mapping, distributions, quasi-double line

Киришүү

$\Omega \subset E_5$ мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген. $X \in \Omega$ ар бир чекити аркылуу берилген көптүктүн бирден гана сызыгы өтөт. Ортонормаланган $\Re=(X, \vec{e}_i)$ $(i,j,k=\overline{1,6})$ реперин Ω аймагында бул репер берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери [1], [2] боло тургандай тандап алабыз. $\Re$ реперинин деривациондук формулалары төмөнкүдөй көрүнүштө болушат.

$$\overrightarrow{dX} = \omega^i \vec{e}_i, \ \overrightarrow{de_i} = \omega_i^k \vec{e}_k. \qquad \textbf{(1)}$$

Мындагы ω^i, ω_i^k дифференциалдык формалары евклиддик мейкиндиктин структуралык теңдемелерин канааттандырышат:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

$\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин торчосун [1] Σ_5 түзүшөт. $\Re$ репери Σ_5 торчосунун сызыктарынын жанымаларына тургузулгандыктан, ω_i^k формалары башкы формалар болушат, б.а.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j \qquad \textbf{(3)}$$

(2) формулалардын акыркы барабардыгын эске алсак, анда төмөндөгү келип чыгат:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i \qquad \textbf{(4)}$$

(3) барабардыкты сырттан дифференцирлеп төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j$$

Мындан, (2) формуланы колдонсок, төмөндөгү келип чыгат:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^l \wedge \omega_l^j$$

(3) формуланын негизинде акыркы барабардык төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{jl}^k \omega^l = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_l^j \wedge \omega^l$$

же

$$\Lambda_{jl}^k \omega_i^j \wedge \omega^l = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_l^j \wedge \omega^l.$$

(барабардыктын оң жагындагы экинчи мүчөдө жана индекстеринин ордун алмаштырдык).

Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{il}^k \omega_j^l \wedge \omega^j - \Lambda_{il}^k \omega_i^j \wedge \omega^l = 0$$

же

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{il}^k \omega_j^l - \Lambda_{li}^k \omega_i^l\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Акыркы барабардыкка Картандын леммасын [3] колдонуп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{il}^k \omega_j^l - \Lambda_{li}^k \omega_i^l = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

же

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l\right) \omega^m. \qquad \textbf{(5)}$$

Чоңдуктардын $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ системасы экинчи тартиптеги геометриялык объектти түзүшөт.

Берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин формулалары төмөндөгүдөй көрүнүштө болушат:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2\vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3\vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4\vec{e}_4,$$
$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5\vec{e}_5,$$
$$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4\vec{e}_4,$$

жана $\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^3 = 0,\ \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0,\ \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{51}^1 = 0$ **(6)**

$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{51}^2 = 0,\ \Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0,\ \Lambda_{31}^5 = -\Lambda_{51}^3 = 0.$$

Мындагы $k_1^1 = \Lambda_{11}^2,\ k_2^1 = \Lambda_{21}^3,\ k_3^1 = \Lambda_{31}^4,\ k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = -\Lambda_{51}^4 - \omega^1$ сызыгынын биринчи, экинчи, үчүнчү жана төртүнчү ийриликтери (тиешелеш түрдө), d_1 – ω^1 сызыгы боюнча дифференцирлөөнүн символу.

Σ_5 торчосунун ω^i сызыгынын жанымасындагы F_i^J $(i\neq j)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус – вектор менен аныкталат:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i \qquad \textbf{(7)}$$

Ар бир $(\vec{X}, \vec{e}_i)$ жанымасында төрттөн псевдофокус жашайт:

(X, $\vec{e}_1$) жанымасында – $F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5$,
(X, $\vec{e}_2$) жанымасында – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5$,
(X, $\vec{e}_3$) жанымасында – $F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5$,
(X, $\vec{e}_4$) жанымасында – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_5^4$,
(X, $\vec{e}_5$) жанымасында – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4$.

$\Omega \subset E_5$ аймагындагы Σ_5 торчосу Френенин циклдык торчосу деп аталат, эгерде төмөндөгү реперлер бир учурда ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5 сызыктары үчүн (тиешелеш түрдө) Френенин реперлери болушса:

$$\Re_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5),\quad \Re_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1),$$
$$\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2),\quad \Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3),$$
$$\Re_5 = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4).$$

Σ_5 торчосу Френенин циклдик торчосу болсун деп эсептейли жана аны $\tilde{\Sigma}_5$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

Изилдөөнүн материалдары.

$F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3. \qquad \textbf{(8)}$$

X чекити $\Omega \subset E_5$ аймагында кыймылга келгенде, F_3^2 чекити өзүнүн $\Omega_3^2 \subset E_5$ аймагын "сызып" чыга. Натыйжада $f_3^2(X) = F_3^2$ болот тургандай

$f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз.

Ω_3^2 аймагында $\Re' = (F_3^2, \vec{c}_i)$ кыймылдуу реперин бириктиребиз, мында $\vec{c}_i$ төмөндөгүдөй көрүнүшкө ээ болушат [5] :

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_2 = \vec{e}_2 + \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_3 = \left[1 + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\right]\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4; \qquad \textbf{(9)}$$

$$\vec{c}_4 = -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 + \vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_5 = -\frac{\Lambda_{35}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{35}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4 + \vec{e}_5;$$

$\Delta_{245}= (X, \vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон d түз сызыгынын жаныма вектору $\vec{d} = d^2\vec{e}_2 + d^4\vec{e}_4 + d^5\vec{e}_5$ көрүнүнүшүндө болот. $f_3^2(d) = \bar{d}$ түз сызыгынын жаныма векторун табалы: $\vec{\bar{d}}=d^2\vec{c}_2 + d^4\vec{c}_4 + d^5\vec{c}_5$.

Мындан (9) формулаларды эске алсак төмөндөгү келип чыгат:

$\vec{\bar{d}}=(d^2 + d^4c_4^2 + d^5c_5^2)\vec{e}_2 + (d^2c_2^3 + d^4c_4^3 + d^5c_5^3)\vec{e}_3 + (d^2c_2^4 + d^4 + d^5c_5^4)\vec{e}_4 + d^5\vec{e}_5,$

Мында c_i^j–$\vec{c}_i$ векторунун j- координатасы.

$\vec{d}, \vec{\bar{d}} \in \Delta_{(245)}$ шартынан төмөндөгүнү алабыз.:

$$d^2c_2^3 + d^4c_4^3 + d^5c_5^3 = 0$$

Акыркы барабардыкка (9) формулалардагы координаталардын ордуна койсок төмөндөгү келип чыгат:

$$d^2c_{322}^2 + d^4c_{324}^2 + d^5c_{325}^2 = 0. \qquad \textbf{(10)}$$

Тескерисинче, эгерде (10) шарт орун алса, анда d, $\bar{d}$ сызыктары f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунда $(\Delta_{(245)}, \Delta'_{(245)})$ түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары болушат. Жогорудагылардын негизинде төмөндөгүдөй теорема далилденди.

Теорема. d⊂$\Delta_{(245)}$ жана $\bar{d} = f_3^2(d)$ сызыктары f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунда $(\Delta_{(245)}, \Delta'_{(245)})$ түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары болушу үчүн d сызыгынын жаныма векторунун координаталары (10) шартты канааттандырышы зарыл жана жетиштүү.

Адабияттар

1. Рашевский П.К., Риманева геометрия и тензорный анализ // Москва: наука, 1967- с. 482
2. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст]/ Схоутен И.А., Д. Дж. Стройк.//М.ИЛ.1948.Т.II-348.
3. Фиников С.П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст]/ С.П. Фиников//М-Л.: Госттехиздат, 1948.-342.
4. Матиева Г., Курбанбаева Н.Н., Абдуллаева Ч.Х. E_6 евклиддик мейкиндигинде f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашы жөнүндө// Вестник ОшГУ. Математика, Физика, Техника. 2023. №1-с. 141-152
5. Матиева Г.// Геометрия частичных отображений сетей и распределений евклидова пространства. Ош-2003, 151с.