Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_56

ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЛИНИИ УРОВНЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЬЯХ

Алыбаев Курманбек Сарманович, д. ф-м.н., профессор,

alybaevkurmanbek@rambler.ru

Жалал-Абадский государственный университет

Жалал-Абад, Кыргызстан

Матанов Шерали Маматжанович, преподователь

sheralimatanov@yahoo.com

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Исследование ассимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями в комплексных областьях сводятся к исследованию некоторых специальных функций с малым параметром (наподобие интегралов содержащих большой параметр). Исследование таких функций затрудняется тем, что надо выделить из заданной области некоторую часть и выбрать пути интегрирования, которые обеспечивают ограниченность рассматриваемых функций по малому параметру.*

В данной работе разработан метод основанный на линиях уровней гармонических функций, построения области. Затем доказана достаточные условия ограниченности специальных функций по малому параметру.

Все построения сопровождены соответствующими рисунками. В дальнейшем результаты данной работы можно использовать для теории сингулярно возмущенных уравнений в комплекной области.

Ключевые слова: *Сингулярное возмущение, асимптотическое поведение, геометрический подход, линия уровня, аналитические и гармонические функции, деление области, монотонность, путь интегрирование, ограниченность.*

КОМПЛЕКСТИК ОБЛАСТТАРДАГЫ ГАРМОНИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН ДЕҢГЭЭЛ СЫЗЫКТАРЫН КОЛДОНУУ МЕНЕН АЙМАКТАДЫ АНЫКТОО

Алыбаев Курманбек Сарманович, ф-м.и.д., профессор,

alybaevkurmanbek@rambler.ru

Жалал-Абад мамлекеттик университети,

Жалал-Абад, Кыргызстан,

Матанов Шерали Маматжанович, окутуучу,

sheralimatanov@yahoo.com

Ош мамлекеттик университети

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Комлекстик областтардагы аналитикалык функциялары бар сингулярдуу козголгон теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык өзгөрүшүн изилдөө кээ бир кичинекей параметри бар (чоң параметрди камтыган интегралдар сыяктуу) атайын функцияларды изилдөөгө келтирилет. Мындай функцияларды изилдөөгө белгилүү бир аймактын белгилүү бир бөлүгүн тандап алуу жана каралып жаткан функциялардын кичинекей параметрге карата чектелгендигин камсыздоочу интеграциялык жолдорду тандап алуу кыйынчылык жаратат.Бул макалада биз гармониялык функциялардын деңгээл сызыктарына негизделген ыкманы иштеп чыктык, аймакты аныктадык. Андан кийин кичинекей параметрге карата атайын функциялардын чектелген-дигинин жетиштүү шарттары далилденди. Бардык өзгөртүп түзүүлөр тиешелүү сүрөттөр менен коштолду. Келечекте бул иштин натыйжалары комплекстик областагы сингулярдык козголгон теңдемелердин теориясын өнүктүрүүдө колдонсо болот.*

Ачкыч сөздөр: *Сингулярдык козголуу, асимптотикалык жүрүм-турум, геометриялык ыкма, деңгээл сызыгы, аналитикалык жана гармоникалык функциялар, аймактын бөлүнүшү, монотондуулук, интегрдоо жолу, чектүүлүк.*

CONSTRUCTION OF AREAS USING THE LINE OF LEVEL OF HARMONIC FUNCTIONS IN COMPLEX AREAS

Alybaev Kurmanbek Sarmanovich, doctor of ph. and mathematical sciences, professor,

alybaevkurmanbek@rambler.ru,

Jalal-Abad State University,

Jalal-Abad, Kyrgyzstan,

Matanov Sherali Mamatzhanovich, lecturer,

sheralimatanov@yahoo.com,
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

***Abstract**: The study of the asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed equations with analytic functions in complex domains is reduced to the study of some special functions with a small parameter (like integrals containing a large parameter). The study of such functions is hampered by the fact that it is necessary to select a certain part from a given region and choose integration paths that ensure that the functions under consideration are bounded with respect to a small parameter.*

In this paper, we have developed a method based on the lines of levels of harmonic functions, constructing an area. Then, sufficient conditions for boundedness of special functions with respect to a small parameter are proved. All constructions are accompanied by corresponding figures. In the future, the results of this work can be used for the theory of singularly perturbed equations in the complex domain.

***Keywords:** Singular perturbation, asymptotic behavior, geometric approach, level line, analytic and harmonic functions, domain division, monotonicity, integration path, boundedness.*

Введение. В данной работе предлагается геометрический подход построения областей с применением линии уровней гармонических функций пораждаемых аналитическими функциями $F(t)$.

Исследование асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями в комплексных областях [1-5] сводятся к исследованию специальных функций вида

$$\mathcal{J}_0(t,\varepsilon) = exp\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon}, \qquad (1)$$

$$\mathcal{J}_1(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) exp\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon} d\tau, \qquad (2)$$

в некоторых комплексных областей при $\varepsilon \to 0$ $(0 < \varepsilon -$ малый параметр).

Трудность асимтотического исследования функций заключается, в том что из заданной области надо выбрать некоторую часть, и пути интегрирования где $\mathcal{J}_0(t,\varepsilon)$ $\mathcal{J}_1(t,\varepsilon)$, будут ограниченными при $\varepsilon \to 0$.

При исследовании функции (1)–(2) оснавная роль принадлежит функции $F(t)$, в предположении, что $\varphi(\tau)$ в рассматриваемой области аналитично и её изменение существенно не влияет на асимптотическое поведение $\mathcal{J}_1(t,\varepsilon)$.

Следовательно далее будем рассматривать только функции $F(t)$.

Пусть задана система функций

$$(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\dots,\lambda_n(t))$$

и выполнены условия:

УС1. $\forall\, \lambda_j(t) \in Q(\mathcal{D}) -$ пространство аналитических функций в $\mathcal{D}$.

УС2. $\forall t \in \mathcal{D} \ \ \left(Im\lambda_j(t) > 0, j = 1,\dots,n\right)$.

Введем в рассмотрение функции

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau)d\tau, j = 1,\dots,n.$$

Поставим задачу: Построить область, $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, где выполняются соотношения:

$\forall t \in \mathcal{D}_0\left(ReF_j(t) \le 0, j = 1,\dots,n\right)$

$\forall t \in \mathcal{D}_0$ существуют пути по которым $Re(F(t) - F(\tau)) \le 0$.

Согласно УС1 решение задачи $F_j(t) \in Q(\mathcal{D})$. Функции $F_j(t)$ порождают гармонические функции $ReF_j(t)$, $ImF_j(t)$.

Определение. Множество $\left(p_j\right) = \{t \in \mathcal{D}, ReF_j(t)\}$ назовём линией уровня функции $ReF_j(t)$.

Линия уровня $ImF_j(t)$ определяется аналогично, и обозначается $\left(q_j\right)$. Заметим, согласно УС2 через любую точку области $\mathcal{D}$ проходит единственная линия уровня функций $ReF_j(t)$, $ImF_j(t)$. Из множества $\left\{p_j\right\}$(j - фиксированное) возьмём линию $\left(p_{0j}\right) = \left\{t \in \mathcal{D}, ReF_j(t) = 0\right\}$.

По определению функции $F_j(t)$, линия (p_{0j}) проходит через точку t_0 и область $\mathcal{D}$ делит (не ограничивая общности можно считать так) на части $\mathcal{D}_{1j}, \mathcal{D}_{2j}$ (Рис. 1).

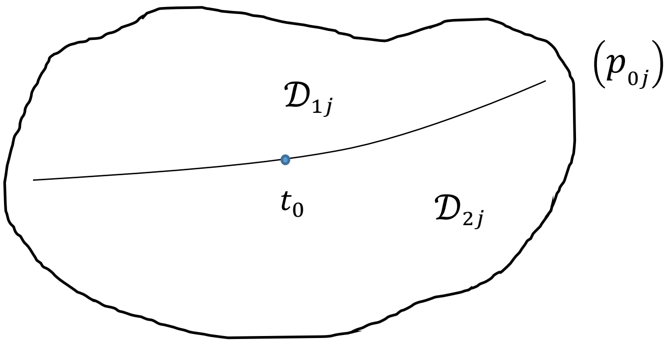

Рисунок 1. Деление области $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}_{1j}$ и $\mathcal{D}_{2j}$.

На линии (p_{0j}) возьмем произвольную точку $\tilde{t} = \tilde{t}_1 + i\tilde{t}_2$ и рассмотрим прямую $(\tilde{q}_j) = \{t \in \mathcal{D},\ t_1 = \tilde{t}_1 - const, -\infty < t_2 < \infty\}$.

Прямая $(\tilde{q}_j)$ проходит через точку $\tilde{t}$.

Лемма 1. Пусть выполняются условия УС1 и УС2. Тогда вдоль прямой $(\tilde{q}_j)$ функция $ReF_j(t)$ строго убывает.

Доказательство. Обозначим $ReF_j(t) = F_{1j}(t_1, t_2)$. Рассматривая функцию $F_{1j}(t_1, t_2)$ вдоль прямой $(\tilde{q}_j)$ имеем $F_{1j}(\tilde{t}_1, t_2)$.

Тогда $\left(F_{1j}(\tilde{t}_1, t_2)\right)'_{t_2} = -Im\lambda_j(\tilde{t}_1 + it_2) < 0$ (согласно УС2).

Отсюда следует справедливость леммы1.

Следствие 1. Согласно $F_{1j}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) = 0$ и Леммы 1 следует справедливость следующего утверждения

$$\forall t \in \mathcal{D}_{1j}\left(ReF_j(t) \le 0\right) \wedge \forall t \in \mathcal{D}_{2j}\left(ReF_j(t) \ge 0\right). \tag{3}$$

При этом в (3), равенство выполняется только для $t \in (p_{0j})$.

Область $\mathcal{D}_{1j}$ определена рассмотрением только функции $ReF_j(t)$ при фиксированным j. Если рассмотреть систему функций $\{ReF_j(t),\ j = 1, \dots, n\}$ и линий уровня $\{(p_{0j}), j = 1, \dots, n\}$, то получим систему областей $\{\mathcal{D}_{1j},\ j = 1, \dots, n\}$. Возникает вопрос: каково взаимосвязь областей $\mathcal{D}_{1j}$.

Для ответа на этот вопрос рассмотрим систему линии уровней $\{(p_{0j}), j = 1, \dots, n\}$. По определению эта система привязана к точке t_0, то есть все линии $(p_{0j}), j = 1, \dots, n$ проходят через точку t_0. Других сведений относительно этой системы не имеется. Не исключено что линии (p_{0j}) могут взаимно пересекатся в нескольких точках (коме точки t_0). В общем случае определить такие точки практически невозможно и каждый конкретный случай придется рассмотреть отдельно.

В цельях упорядоочения расположения системы $\{(p_{0j}), j = 1, \dots, n\}$ потребуем выполнимость условия:

УС3. Пусть в система $\{(p_{0j}), j = 1, \dots, n\}$ две произвольные линии в области $\mathcal{D}$ не имеют общих точек, кроме t_0.

Через точку $t_0 = t_{10} + it_{20}$ проведем прямую
$(q_0) = \{t \in \mathcal{D},\ t_1 = t_{10}, -\infty < t_2 < \infty\}$.

Прямая (q_0) делит область $\mathcal{D}$ на части Π_1 и Π_2. Возьмем произвольную линию (p_{0j}) (j-фиксированное). Это линия прямую (q_0) пересекает только в одной точке t_0. Дейстаительно, пусть (p_{0j}) пересекает (q_0) ещё в точке t_0'. Возьмём отрезок (q_0) соединяющий точки t_0 и t_0'.

Согласно УС2, функция $ReF_j(t)$ убывает или возрастает на этом отрезке. С другой стороны $ReF_j(t) = 0$, $ReF_j(t_0') = 0$, что противоречит УС2.

Таким образом одна ветвь (p_{0j}) находится в Π_1, а другая в Π_2. Если учесть УС3, то в Π_1 и Π_2 ветви линии уровней системы $\{(p_{0j}), j = 1, \ldots, n\}$ распологаются в определенном порядке(не обязательно в порядковом номере) (Рис. 2).

Лемма 2. Пусть выполняются условия УС1, УС2, УС3. Тогда существует $\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{D}_{1j} = \mathcal{D}_{10}$ и $\forall t \in \mathcal{D}_{10} \left(ReF_j(t) \leq 0, j = 1, \ldots, n\right)$.

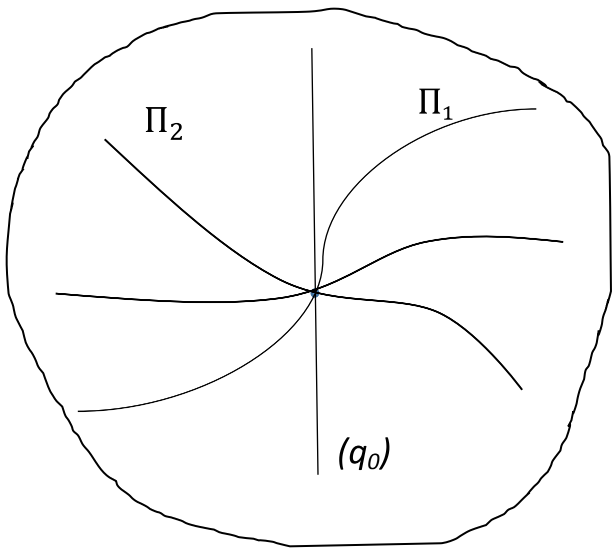

Рисунок 2. Расположение линий системы $\{(p_{0j})\}$.

Доказательство. При выполнении условии УС1, УС2, УС3 в частях Π_1, Π_2 ветви линий системы $\{(p_{0j}), j = 1, \ldots, n\}$ упорядочены. Пусть в Π_1 "вверху" (по направлению прямой (q_0)) находится ветвь линий (p_{01}), а в Π_2 ветвь линии $(p_{0k})(1 \leq k \leq n)$. Введем в рассмотрение область $\mathcal{D}_{10}$ ограниченный ветвьями (p_{01}) и (p_{0k}) (Рис. 3).

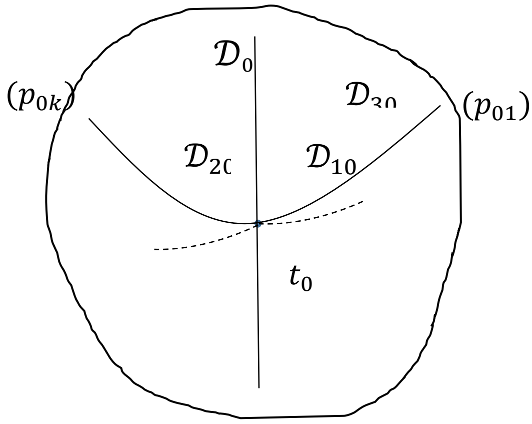

Рисунок 3. Определение области $\mathcal{D}_{10}$

На линии $(p_{0k}) \cup (p_{01})$ возьмём произвольную точку $\tilde{\tilde{t}} = \tilde{t}_1 + \tilde{\tilde{t}}_2$ и проведем прямую $\left(\tilde{\tilde{q}}\right) = \left\{t \in \mathcal{D}, t_1 = \tilde{\tilde{t}}_1, -\infty < t_2 < +\infty\right\}$.

На основании УС2 все функции $ReF_j(t), (j = 1, \dots, n)$ убывают по прямой $\left(\tilde{\tilde{q}}\right)$ (Лемма 1). На ветви (p_{01}), только $ReF_1(t) = 0$, а $ReF_j(t) < 0\ (j = 2, \dots, n)$, на ветви (p_{0k}) только $ReF_k(t) = 0$, $ReF_j(t) < 0\ (j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$.

Тогда $\forall t \in \mathcal{D}_{10} \left(ReF_1(t) \le 0,\ ReF_k(t) \le 0, ReF_j(t) < 0, j = 1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n\right)$, причем $\mathcal{D}_{10} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{D}_{1j}$. Лемма доказана.

Примечание. Если рассмотреть только одну функцию $\lambda_1(t)$, то условия УС2, УС3 можно снять, а условие УС1 заменит на

УС1.1 $\lambda_1(t) \in Q(\mathcal{D}) \wedge \forall t \in \mathcal{D}(\lambda_1(t) \neq 0)$

Действительно, рассмотрим функции

$F_1(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_1(t) d\tau$ и $ReF_1(t), ImF_1(t)$.

Определим линии уровня

$(p) = \{t \in \mathcal{D}, ReF_1(t) = p - const\}$,

$(q) = \{t \in \mathcal{D}, ImF_1(t) = q - const\}$,

Согласно УС1.1 $(p), (q)$ не имеют точек ветвления в области $\mathcal{D}$.

$(p_0) = \{t \in \mathcal{D}, ReF_1(t) = 0\}$.

Как и в предыдущем случае (p_0) область $\mathcal{D}$ делит на части $\mathcal{D}_1$ и$\mathcal{D}_2$. На линии (p_0) возьмём произвольную точку $\tilde{t}$ и проведем линию

$(\tilde{q}) = \{t \in \mathcal{D}, ImF_1(t) = ImF_1(\tilde{t}) = \tilde{q}\}$.

Рассмотрим функцию $ReF_1(t)$ вдоль линии $(\tilde{q})$. Известно [6], вдоль линии $(\tilde{q})$ функция $ReF_1(t)$строго монотонна. Тогда выполняется только один из следующих соотношений

$$\forall t \in \mathcal{D}_1(ReF_1(t) \le 0) \wedge \forall t \in \mathcal{D}_2(ReF_1(t) \ge 0), \qquad (4)$$

или

$$\forall t \in \mathcal{D}_1(ReF_1(t) \ge 0) \wedge \forall t \in \mathcal{D}_2(ReF_1(t) \le 0), \qquad (5)$$

Так как соотношения (4) и (5) равноправны, то можно взять любую из них. Высказанное утвеждение доказано.

Рассмотрим неявные уравнения

$$ReF_1(t) = 0, \qquad ReF_k(t) = 0$$

Согласно условия УС2 из данных уравнений определяются функции

$$t_2 = \varphi_1(t_1), \quad t_{10} \le t_1 \le \alpha_1,$$

$$t_2 = \varphi_k(t_1), \quad \alpha_2 \le t_1 \le t_{10},$$

где $\alpha_1 \alpha_2 -$ некоторые постоянные.

Пусть выполнятся условия:

УС4. $\left[ReF_j\left(t_1 + i\varphi_1(t_1)\right)\right]'_{t_1} < 0,\ j = 2, \dots, n,$

$$\left[ReF_j\left(t_1 + i\varphi_k(t_1)\right)\right]'_{t_1} < 0,\ j = 1,2, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

Теперь решение поставленной задачи можно выразить следующей теоремой.

Теорема. Пусть выполняются условия УС1 – УС4. Тогда существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и выполняются соотношения:

$\forall t \in \mathcal{D}_0(ReF_j(t) \le 0 \wedge$ существуют пути $\gamma(t_0, t) -$ соединяющие точки t_0 и t по котором $Re(F(t) - F(\tau)) \le 0$, где $\tau -$ промежуточная переменная.

Доказательство. При выполнение условий УС1 – УС3, согласно Леммы 2 существует область $\mathcal{D}_0$ и $\forall t \in \mathcal{D}_0\left(ReF_j(t) \le 0\right)$.

Докажем вторую часть теоремы.

Пусть $t \in \mathcal{D}_0$. Область $\mathcal{D}_0$ прямой (q_0) разделяется на части $\mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{20}$ (Рис. 3) Если $t \in \mathcal{D}_{10}$, то путь $\gamma_1(t_0, t)$ состоит из части $(p_{01}) -$ соединящего точки t_0 и $\tilde{t} \in (p_{01})$ и прямолинейного отрезка соединящего точки $\tilde{t} = t_1 + i\tilde{t}_2,\ t = t_1 + it_2$.

Если $t \in \mathcal{D}_{20}$, то $\gamma_2(t_0, t)$ состоит из части $(p_{0k}) -$соединяющего точки t_0 и $\tilde{t} \in (p_{0k})$ и прямолинейного отрезка соединяющего точки $\tilde{t} = t_1 + i\tilde{t}_2,\ t = t_1 + it_2$.

Теперь согласно определения области и условия УС4 нетрудно проверить справедливость соотношения

$\forall t \in \mathcal{D}_0\left(ReF_j(t) - ReF_j(\tau) \le 0\right)$. Теорема доказана

Литература

1. Алыбаев, К.С. Метод погранслойных линий построения регулярно и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с

аналитическими функциями [Текст] / К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLVII международной научно-практической конференции. № 10 (45). Россия, Новосибирск: СиБАК, 2016. - С. 59-66.

2. Нарымбетов, Т.К. Асимптотический анализ решений слабо нелинейных сингулярно возмущенных уравнений первого порядка в комплексных областях [Текст] / К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов // Вестник Ошского государственного университета: Серия «Физика, математика, информационные технологии, экономика, технические науки». – Ош, 2020. – №1. – С. 96-103.

3. Нарымбетов, Т.К. Анализ исследований сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях [Текст] / Т.К. Нарымбетов // Вестник Ошского государственного университета. – Ош, 2021. – №1 (1). – С. 74-89.

4. Алыбаев, К.С. Геометрическая теория сингулярно возмущенного уравнения бернулли с точкой перевала [Текст] / К.С. Алыбаев, Ш.М. Матанов // Международный научный журнал «Наука. Образование. Техника. Ош: КУУ,2021.- №3 (72). Декабрь - С. 40-50.

5. Вазов, В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В. Вазов – М.: Мир, 1968. – 464 с.

6. Федорюк, М.В. Метод перевала [Текст] / М.В. Федорюк - М.: Наука, 1977. – 464 с.