Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_47

СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛУУГА ЭЭ БОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМИН ИЗИЛДӨӨДӨ ЧЕГЕРИШТЕРДИН ТААСИРИ

Акматов Абдилазиз Алиевич, *улук окутуучу*

abdilaziz_akmatov@mail.ru

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Жумушта сингулярдуу козголууга ээ болгон маселенин бир тектүү эмес бөлүгү* k_1 *эселүү полюска ээ болгон учур каралат. Маселенин өзгөчөлүгү болуп, теңдеменин бир тектүү эмес бөлүгүнүн бөлүмү нөлгө ээ болуусу эсептелет. Козголгон жана ага дал келүүчү козголбогон маселелердин чечимдерин изилдөөдө чегериштерди колдономун. Абалкы жумуштарда мындай учур каралган эмес. Жыйынтыгында баалоолор алынып, козголгон жана козголбогон маселелердин чечимдеринин асимптотикалык жакындыгы далилденген.*

Сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдеменин чечиминин козголууга ээ болбогон теңдеменин чечимине умтулуусунун ылдамдыгына матрица функциянын өздүк маанилеринин өзгөчө чекиттери түздөн түз таасир этет. Мына ошол себептүү чегериштерди эсептөө зарылдыгы келип чыгат.

Ачкыч сөздөр: *уюлдар, дифференциалдык теңдеме, чегериш, өзгөчө чекит, бисингулярдык козголуу, асимптотика, туруктуулук, Коши маселеси.*

ВЛИЯНИЕ ВЫЧЕТЫ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Акматов Абдилазиз Алиевич, *старший преподователь*

abdilaziz_akmatov@mail.ru

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В работе рассматривается задача когда неоднородная часть сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения имели* k_1 *кратные полюсы. Особенностью данной задачи является наличие нулей при знаменателя неоднородной части уравнения. В этом случае применим вычеты для решения возмущенной и невозмущенной задачи. В ранее рассматриваемые работы не рассмотрено этот случай. Получена оценка и доказана асимптотические близость решений возмущенной и невозмущенной задачи.*

Близость решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и невозмущенных уравнений зависеть от особых точек собственных значений матрицы функций. Поэтому появиться необходимости вычисления вычеты собственных значений матрицы функций.

Ключевые слова: *Полюсы, дифференциальные уравнения, вычеты, особые точки, бисингулярные возмущения, асимптотика, устойчивость, задача Коши.*

INFLUENCE OF RESIDUES IN THE STUDY OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Akmatov Abdilaziz Alievich, senior lecturer

abdilaziz_akmatov@mail.ru

Osh State University,

Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The paper considers the problem when the inhomogeneous part of the singularly perturbed differential equations* k_1 *are multiple poles. A feature of this problem is the presence of the inhomogeneous part of the equation. In this case, we apply the residues for solving the perturbed and unperturbed problems. This case was not considered in the previously considered works. An estimate is obtained and the asymptotic closeness of solutions to the perturbed and unperturbed problems is proved.*

The proximity of solutions to singularly perturbed differential equations and unperturbed equations depends on the singular points of the eigenvalues of the matrix of functions. Therefore, it becomes necessary to deduct the values of function parameters.

Keywords: *poles, differential equations, deductions, special points, bisingular perturbations, asymptotic, stability, Cauchy problem.*

Киришүү. Белгилүү болгондой сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин баалоосуна биртектүү эмес бөлүктүн таасири бар экендиги белгилүү. Ушул багыттагы жумушта [12] бир тектүү эмес бөлүгү k эселүү нөлдөргө ээ болгон учурда изилдөө жүргүзүлүп баалоолор алынган. Ошодой эле [6, 7, 9, 10, 12] жумуштарда да аналогиялуу учурлар каралып, бирок ал жерде бир тектүү эмес бөлүккө абсалюттук чоңдуу боюнча кандайдыр бир туруктуудан кичине болуу шартын коюшкан. Бул шарт өз учурунда каралуучу маселенин чечимин баалоону жеңилдетет. Абалкы каралган жумуштардын баарында $D(t) \neq 0$ шарты алынган. Бул жумушта болсо, $D(t) = 0$, болгон учурду карайбыз. Ошону менен бирге чегериштерди [3] колдонуу менен баалоо алабыз. Мындай учур өзгөчө, себеби [4] белгилүү болгондой козголбогон маселенин чечиминин бөлүмү нөлгө теңделиши жалпыланган функцияларга келип калат. Жумушта $D(t)$ матрица-функциясы эки эселүү өздүк маанилерге ээ болгон учур каралып, чечим комплекстик аймакта изилденет. Жумушта баалоону чыныгы аймакта жүргүзүү мүмкүн эмес. Эгерде маселени мейкиндиктин формасын өзгөртүү менен карасак, анда чыныгы аймакта регуляризациялоо усулун[4] колдонуу менен алууга болор эле.

Маселенин коюлушу. Төмөнкүдөй маселени карайлы

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = D(t)y(t,\varepsilon) + \left[f(t) + \varepsilon B(t)y(t,\varepsilon)\right], \tag{1}$$

$$y(t_0,\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

мында $D(t) = diag(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t))$, матрицанын өздүк маанилери

$\lambda_1(t) = \lambda_3(t) = (t+i)^{k_2}$, $\lambda_2(t) = \lambda_4(t) = (t-i)^{k_2}$,

$y(t,\varepsilon) = colon(y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon), y_3(t,\varepsilon), y_4(t,\varepsilon))$, $t \in \Omega \subset C$, $0 < \varepsilon$ - кичине параметр,

$f(t) = colon\left((t+i)^{k_1}, (t-i)^{k_2}, (t+i)^{k_1}, (t-i)^{k_2}\right)$, $k_1, k_2 \in N$, $k_1 + k_2 = k$, $k \in N$, $k_1 > 1$,

$[t_0, T]$ - чыныгы октогу кесинди, $t_0 < T$, $B(t) = (b_{mj}(t))_1^4$, $m, j = \overline{1,4}$, y^0 – туруктуу сан, $Q(\Omega)$ - аналитикалык функциялардын мейкиндиги, мында C - комплекстик тегиздик.

Эгерде формалдуу түрдө $\varepsilon = 0$ деп алсак:

$$D(t)\tilde{y}(t,0) = f(t). \tag{3}$$

Анда $t=\pm i$ чекиттериндеги чечими

$$\tilde{y}(t)=0. \tag{4}$$

Төмөнкү теоремага ээ болобуз.

Теорема 1. Козголбогон (3) маселе $t=\pm i$, чекиттеринде (4) көрүнүштөгү чечимге ээ болот.

Далилдөө. Каралуучу (1), (2) маселедеги $D(t)$ матрица функциясы $\lambda_1(t)=\lambda_3(t)=(t+i)^{k_2}$, $\lambda_2(t)=\lambda_4(t)=(t-i)^{k_2}$ жана бир тектүү эмес бөлүгү болгон $f(t)$ $f_1(t)=f_3(t)=\dfrac{1}{(t+i)^{k_1}}$, $f_2(t)=f_4(t)=\dfrac{1}{(t-i)^{k_1}}$. Мындан көрүнгөндөй козголбогон маселенин вектордук формада жазылган чечими, $\tilde{y}(t)=\dfrac{f(t)}{D(t)}=\dfrac{1}{(t\pm i)^k}$, $k=k_1+k_2$. Чечим $t=\pm i$ чекиттеринде k - эселүү уюлга ээ болот. Козголбогон (3) системаны скалярдык көрүнүштө жазалы

$$\begin{cases} (t+i)^{k_2}\tilde{y}_1(t)-\dfrac{1}{(t+i)^{k_1}}=0, \\ (t-i)^{k_2}\tilde{y}_2(t)-\dfrac{1}{(t-i)^{k_1}}=0, \\ (t+i)^{k_2}\tilde{y}_3(t)-\dfrac{1}{(t+i)^{k_1}}=0, \\ (t-i)^{k_2}\tilde{y}_3(t)-\dfrac{1}{(t-i)^{k_1}}=0. \end{cases} \tag{5}$$

Акыркы (5) системанын чечими $\tilde{y}_1(t)=\tilde{y}_3(t)=(t+i)^{-k}$, $\tilde{y}_2(t)=\tilde{y}(t)=(t-i)^{-k}$. Аныкталган (5) системанын $t=\pm i$ чекиттериндеги чечимдери k эселүү нөлгө ээ болот. Ал чекиттердеги $\tilde{y}_1(t)$, $\tilde{y}_2(t)$, $\tilde{y}_3(t)$, $\tilde{y}_4(t)$ функцияларынын чегериштерин эсептейли. Анда $\tilde{y}_1(t)=\tilde{y}_3(t)$, жана $\tilde{y}_2(t)=\tilde{y}_4(t)$ экендигин эске алуу менен

$$\operatorname*{Res}_{t=-i}\tilde{y}_1(t)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{t\to -i}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left[\frac{1}{(t+i)^k}\times(t+i)^k\right]=0, \tag{6}$$

$$\operatorname*{Res}_{t=i}\tilde{y}_2(t)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{t\to i}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left[\frac{1}{(t-i)^k}\times(t-i)^k\right]=0. \tag{7}$$

Демек, (6), (7) барабардыктар (4) көрүнүштөгү чечимдин жашоосун далилдейт. Теорема далилденди.

Мейли төмөнкү шарттар аткарылсын:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(t) \in Q(\Omega),\ \lambda_2(t) \in Q(\Omega),\ \forall t \in \Omega\left(\lambda_m(t) \neq 0,\ m=1,2\right), \\ &f(t) = colon((t+i)^{k_1}, (t-i)^{k_2}). \end{aligned} \tag{8}$$

Белгилөөлөрдү кийирели:

$$\Omega = \left\{(t_1, t_2) : u_m(t_1, t_2) \le 0,\ m=1,2\right\}. \tag{9}$$

мында $u_m(t_1, t_2) = \operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds$, $(m=1,2)$, $t_1, t_2 \in R$, $\Omega \subset C$ -комплекстик тегиздик.

Теорема орун алат.

Теорема 2. Мейли (8) шарт аткарылсын. Анда (1), (2) маселе жалгыз чечимге ээ болуп, ал чечим үчүн

$$\|y(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) \tag{10}$$

баалоосу орун алат. Мында $\delta(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0$, $t \in C$, $\tilde{C}$ - туруктуу сан.

Далилдөө. Каралуучу (1), (2) маселени ага тең күчтүү болгон маселеге алмаштыралы:

$$y(t,\varepsilon) = y^0 E(t,t_0,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\left[\frac{1}{\varepsilon} f(\tau) + B(t)y(\tau,\varepsilon)\right]d\tau, \tag{11}$$

мында $E(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} D(s)ds\right)$.

Алынган (11) теңдемеге удаалаш жакындашуу усулун колдонобуз:

$$\begin{aligned} &y^{(0)}(t,\varepsilon) \equiv 0, \\ &y^{(1))}(t,\varepsilon) = y^0 E(t,t_0,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) f(\tau)d\tau, \\ &y^{(n)}(t,\varepsilon) = y^{(1)}(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)y^{(n-1)}(\tau,\varepsilon)d\tau. \end{aligned} \tag{12}$$

бул жерде $E(t,t_0,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} D(s)ds\right)$, $n \in N$.

Каалаган n жакындашуу үчүн $(t_0,0)$ чекитин $(t_1;t_2)$ чекити менен туташтыруучу l_n, $\tilde{l}_n$, ($n\in N$), интегралдоо жолдорун тандап алабыз. Ар бир жакындашууда интегралдоо жолдору $l_n = l_n^j, (j=\overline{1,n})$ кесиндилеринен турат. Ошондой эле $\tilde{l}_n$ интегралдоо жолу l_n интегралдоо жолуна симметриялуу тандалат.

Демек, [11] белгилүү болгондой $h_1(\tau)$ функциясы Ω аймагында $\tau=-i$ чекитинен башка бардык чекиттеринде, ошондой эле аналитикалык болбогон чекитти курчап турган l - чек арасында да аналитикалык болот. Оң багыт боюнча ориентирленген туюк интеграл $\oint\limits_l h_1(\tau)d\tau = 2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{\tau=-i} h_1(\tau)$, $h_1(\tau)=E(t,\tau,\varepsilon)\times f_1(\tau)$. Калган $h_2(\tau)$, $h_3(\tau)$, $h_4(\tau)$ функциялары үчүн да бул туюк интеграл орун алат.

Интегралдоо жолдорун эске алуу менен удаалаш жакындашууларды баалайлы. Биринчи жакындашуу $y^{(1)}(t,\varepsilon)=y^0E(t,t_0,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{l_1}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau$. Каралуучу (1), (2) маселенин чечиминин баалоосу $\|y^{(1)}(t,\varepsilon)\|\le \tilde{C}\delta(\varepsilon)$, мында $\tilde{C}$ -кандайдыр бир турактуу сан. Экинчи жакындашуу үчүн баалоо $\|y^{(2)}(t,\varepsilon)\|\le \tilde{C}\delta(\varepsilon)+\left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^2$ мында $\tilde{C}$-кандайдыр бир турактуу сан. Каалаган жакындашуу үчүн баалоонунун тууралыгын божомолдойлу $\|y^{(n)}(t,\varepsilon)\|\le \tilde{C}\delta(\varepsilon)+(\tilde{C}\delta(\varepsilon))^2+\ldots+(\tilde{C}\delta(\varepsilon))^n$, $\tilde{C}$ - кандайдыр бир турактуу сан, $n\in N$. Демек, (10) баалоонун тууралыгы далилденди.

Кийинки кадамда удаалаш жакындашуулардын жыйналуучулугун далилдейли. Анда $\|y^{(1)}(t,\varepsilon)\|\le \tilde{C}\delta(\varepsilon)<1$, $\|y^{(2)}(t,\varepsilon)-y^{(1)}(t,\varepsilon)\|\le\left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^2<1$. Демек, мындан $\|y^{(n-1)}(t,\varepsilon)-y^{(n-2)}(t,\varepsilon)\|\le\left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^{n-1}<1$ барабарсыздыгынын аткарылышын божомолдойлу. Айырма катары жазылган

$\left\| y^{(n)}(t,\varepsilon) - y^{(n-1)}(t,\varepsilon) \right\|$ баалоонун тууралыгын далилдейли. Бул жерде $\left\| y^{(n)}(t,\varepsilon) - y^{(n-1)}(t,\varepsilon) \right\| \le \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^n < 1$. Катар түзөлү

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(y^{(k)}(t,\varepsilon) - y^{(k-1)}(t,\varepsilon) \right). \tag{13}$$

Эгерде (13) катар бир калыпта жыйналса, анда $\left\{ y^{(n)}(t,\varepsilon) \right\}$ удаалаштыгы да бир калыпта жыйналат.

Акыркы (13) катардын бир калыпта жыйналуучулугун далилдейли. Анда

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(y^{(k)}(t,\varepsilon) - y^{(k-1)}(t,\varepsilon) \right) \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left\| y^{(k)}(t,\varepsilon) - y^{(k-1)}(t,\varepsilon) \right\| = \left\| y^{(1)}(t,\varepsilon) - y^{(0)}(t,\varepsilon) \right\| +$$
$$+ \left\| y^{(2)}(t,\varepsilon) - y^{(1)}(t,\varepsilon) \right\| + \ldots + \left\| y^{(n)}(t,\varepsilon) - y^{(n-1)}(t,\varepsilon) \right\| + \ldots = \tilde{C}\delta(\varepsilon) + \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^2 +$$
$$+ \ldots + \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^n + \ldots = \tilde{C}\delta(\varepsilon) \times \left(\frac{1 - \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^{n+1}}{1 - \left(C\delta(\varepsilon) \right)} \right).$$

Каралуучу аймакта $\left\| y^{(n)}(t,\varepsilon) \right\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) \times \left(\dfrac{1 - \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^{n+1}}{1 - \tilde{C}\delta(\varepsilon)} \right)$ болуп, жана $n \to \infty$ умтулганда $\left\| y(t,\varepsilon) \right\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon)$ алабыз. Теорема далилденди.

Корутунду. Жыйынтыгында $\left\{ y^{(n)}(t,\varepsilon) \right\}$ удаалаштыгы кандайдыр бир (1), (2) маселенин чечими болуп саналган $y(t,\varepsilon)$ функциясына бир калыпта жыйналат деп айта алабыз. Козголбогон маселенин чечими нөлгө барабар болгон учур мурда каралган, бирок ал жумуштарда $D(t) \ne 0$ шарты бар болчу. Бул учурда $D(t) = 0$ болуп, чегериштердин тийгизген таасиринин негизинде козголбогон маселенин чечими нөлгө барабар болуп калды. Ал учур далилденген теорема 1 ден көрүнүп турат. Изилдөөдөн көрүнгөндөй эгерде аналитикалык функцияга кичине параметр катышпаса, анда ал функциянын мааниси анын өзгөчө чекиттеринин таасиринде гана аныкталат. Тактап айтканда аналитикалык функциянынын чыныгы бөлүгү терс же оң болуусу мааниге ээ эмес. Кичине параметр катышса анда терс болгон бөлүгү чечимдин асимптотикасын аныктап калат. Чыныгы бөлүктүн теңдеш нөлгө барабар болуусу өзгөчө учур катары сыпатталат.

Бирок [1, 2] жумуштарда комплекстик тегиздикке көчүү менен бул учурда да баалоо алуу мүмкүнчүлүгү келип чыккан. Өздүк маанилер жалан гана жорума бөлүктөн турса, анда ал прикладдык [5, 8] мааниге ээ болот. Чегериштердин тийгизген таасири астында (1), (2) жана (3) маселелердин чечимдеринин асимптотикалык жакындыгы бир байламталуу комплекстик Ω аймагында далилденген.

Адабияттар

1. Акматов, А.А. Асимптотическое представление интегралов Френеля в комплексной плоскости [Текст] / А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. – Ош. 2021. – С. 21-27.

2. Акматов, А.А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи [Текст] / А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. - Ош. 2021. – С. 28-35.

3. Акматов, А.А. Применение вычеты при исследовании решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [Текст] / А.А. Акматов // Журнал Евразийское научное объединение. №1. - Москва. 2022. – С. 1-3.

4. Акматов, А.А. Метод регуляризации решений бисингулярно возмущенной задачи в пространстве обобщенных функций [Текст] / А.А. Акматов // Журнал Бюллетень науки и практики. №2. - Москва. 2022. – С. 10-17. https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01

5. Акматов, А.А., , Применение метода возмущений в теории оптики [Текст] / А.А. Акматов, Н. Замирбек кызы, К.К. Шакиров // Вестник Жалал-Абадского государственного университета 2021. №3 (48). - С. 205-210.

6. Алыбаев, К.С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст] / К.С. Алыбаев // Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.02.02. – Жалал-Абад. 2001. - 376 с.

7. Каримов, С. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений имеющих условную устойчивость [Текст] / С. Каримов, А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. – Ош. 2021. – С. 61-69.

8. Мурзабаева, А.Б. Исследование диффракции света в ближной зоне с помощью математического моделирование [Текст] / А.Б. Мурзабаева, А.А. Акматов // Вестник Жалал-Абадского государственного университета 2021. №2 (47). - С. 35-43.

9. Каримов, С. Более точные оценки решения сингулярно возмущенной задачи [Текст] / С. Каримов, Г.М. Анарбаева, А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. - Ош. 2015. – С. 133-138.

10. Каримов, С. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости [Текст] / С. Каримов, А.А. Акматов // II. Естественные и технические науки №2. Москва. 2006. – С. 14-18.

11. Маркушевич, А.И. Введение в теорию аналитических функций [Текст] / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич // Просвещение. – Москва. 1977. – С. 202-211.

12. Турсунов, Т.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений [Текст] / Т.А. Турсунов // Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ош. 2013. – С. 9-92.