Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.956

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_38

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ БИР ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕДЕГИ БУЛАК ФУНКЦИЯСЫН АНЫКТОО ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, ф.-м.илим.докт., профессор,

ablabekov_63@mail.ru

Жороев Автандил Кемелович, аспирант

joroev1962@mail.ru

Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети,

Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада үчүнчү даражадагы сызыктуу гиперболалык теңдеме үчүн чыгарылышты жана убакытка көз каранды болгон белгисиз булак функциясын аныктоо тескери маселесин изилдейбиз. Тескери маселелерде баштапкы шарттар менен бирге (биздин учурда) кошумча маалымат берилет. Тескери маселени чечүү үчүн кошумча маалымат катары ички чекиттеги маселенин чыгарылышынын мааниси берилген. Дифференциалдык теңдеменин оң тарабын аныктоо тескери маселелери кээ бир физикалык процесстерди математикалык моделдөөдө сырткы булактардын аракетин калыбына келтирүүнү талап кылынган учурда келип чыгат. Тескери маселени чыгарылышынын жашашы жана жалгыэдыгы тууралуу теорема далилденген. Далилдөө маселени экинчи түрдөгү Вольтерра тибиндеги сызыктуу интегралдык теңдемелер системасына келтирүү жана анын бир маанилүү чыгарымдуулугун далилдөөгө негизделген.*

Ачкыч сөздөр: *гиперболалык теңдеме, тескери маселе, жалгыздык жана жашоо теоремасы, Вольтерра теңдемеси, кыймылсыз чекит теоремасы.*

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА В ОДНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физ.-мат. наук, профессор,

ablabekov_63@mail.ru

Жороев Автандил Кемелович, аспирант

joroev1962@mail.ru

Кыргызский национальный университет имени Жусуп Баласагына

Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *В данной работе исследуется обратная задача определения решения и неизвестного источника, зависящей от времени для линейного гиперболического уравнения третьего порядка. В обратных задачах вместе с начальными данными (в нашем случае) задается дополнительная информация. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи задаются значения решения задачи во внутренней точке. Обратные задачи определения правой части дифференциального уравнения возникают при математическом моделировании некоторых физических процессов, в случае когда требуется восстановить действие внешних источников. Доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи. Доказательство основано на выводе линейной системы интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода и доказательстве его разрешимости.*

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, обратная задача, единственность, существование, уравнение Вольтерра, теорема о неподвижной точке.*

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE SOURCE IN ONE HYPERBOLIC EQUATION THIRD ORDER

Ablabekov Baktybai Saparbekovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor,

ablabekov_63@mail.ru

Zhoroev Avtandil Kemelovich, postgraduate student

joroev1962@mail.ru

Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyna

Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract: *In this paper, we study the time-dependent inverse problem of determining a solution and an unknown source for a third-order linear hyperbolic equation. In inverse problems, along with the initial data (in our case), additional information is given. As additional information for solving the inverse problem, the values of the solution of the problem at the interior point are given. Inverse problems of determining the right side of a differential equation arise in the mathematical modeling of some physical processes, in the case when it is required to restore the action of external sources. An existence and uniqueness theorem for the solution of the inverse problem is proved. The proof is based on the* *derivation of a linear system of integral equations of the Volterra type of the second kind and the proof of its solvability.*

Keywords: *hyperbolic equation, inverse problem, uniqueness, existence, Volterra equation, fixed point theorem.*

Введение

В работе рассматривается обратная задача нахождения неизвестного источника в гиперболическом уравнении третьего порядка. Такого рода обратные задачи возникают в геофизике, теории фильтрации. Доказываются теоремы о существовании и единственности решения обратной задачи на основе ее редукции системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Обратные задачи для гиперболических уравнений второго порядка изучались в работах М. М. Лаврентьева, В.Г.Романова, С. И. Кабанихина и других. Например, в монографиях В. Г. Романова [1; 2], С. И. Кабанихина [3; 4] исследовались коэффициентные обратные задачи для гиперболических уравнений, в которых неизвестный коэффициент является функцией от пространственных переменных.

Обратные задачи для псевдопараболических, псевдогиперболических уравнений третьего порядка изучены в работах [5, 6].

Для гиперболических уравнений третьего порядка известны некоторые результаты. Например, обратная задача определения неизвестного коэффициента зависящего от времени для гиперболического уравнения третьего порядка исследована в работе [7], а в работе [8] изучена обратная задача определения источника, зависящего от времени.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}= f(t)h(x),\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ u_t(x,0)=\varphi_1(x),\ u_{tt}(x,0)=\varphi_2(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

где функции $\varphi_i(x), i=0,1,2$ заданные функции, $\alpha>0-$ заданное число. Обозначим через $\Delta_T=\{(x,t):-(T-t)\le x\le (T-t), 0<t\le T\}$.

2. Свойства решения задачи Коши (1), (2)

В этом разделе мы рассмотрим некоторые свойства решения задачи (1)-(2). Начнем с доказательства леммы 1, которое устанавливает однозначную разрешимость задачи (1)-(2). В процессе доказательства будут выведены интегральные уравнения, которые будут использованы в дальнейшем

Лемма 1. Пусть $\varphi_i(x)\in C^{(3-i)}[-T,T]$, $i=0,1,2$, $f(t)\in C[0,T]$, $h(x)\in C[-T,T]$. Тогда существует единственное классическое решение задачи (1), (2), принадлежащее классу $u(x,t)\in C^{(3)}(\Delta_T)$. Кроме того, это решение непрерывно, зависит от начальных данных $u_i(x)$, $i=0,1,2$ и их производных до второго порядка включительно.

Доказательство. Уравнение (1) перепишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+(1-\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(t)h(x),\ (x,t)\in\Delta_T. \quad (3)$$

Из (4), обращая оператор $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\right)$ и учитывая, то, что

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x,0)=\varphi_2(x)-\varphi_0''(x),$$

имеем

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)u(x,t)=\left[\varphi_2(x)-\varphi_0''(x)\right]e^{-\alpha t}-\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\left[(1-\alpha)u_{\tau\tau}-f(\tau)h(x)\right]d\tau. \quad (4)$$

Проинтегрировав два раза по частям интеграл стоящей в правой части (4), получим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)u(x,t)=v_0(x,t)-(1-\alpha)\left[u_t(x,t)-\alpha u(x,t)\right]-$$
$$-(1-\alpha)\alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}u(x,\tau)d\tau, \tag{5}$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\, u_t(x,0)=\varphi_1(x), \tag{6}$$

где

$$v_0(x,t)=\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)h(x)d\tau+\left[\varphi_2(x)-\varphi_0''(x)\right]e^{-\alpha t}+(1-\alpha)\left[\varphi_1(x)+\alpha\varphi_0(x)\right]e^{-\alpha t}.$$

Из задачи (5), (6), после применения формулы Даламбера, получим

$$u(x,t)=v_1(x,t)-(1-\alpha)\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left[u_\tau(\xi,\tau)-\alpha u(\xi,\tau)\right]d\xi d\tau-$$
$$-(1-\alpha)\alpha^2\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-\tau_1)}u(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1 d\tau, \tag{7}$$

где

$$v_1(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x+t)+\varphi_0(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_1(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}v_0(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

В равенство (7) входит неивестная функция $u_t(x,t)$. Продифференцировав (7) по переменной t, получим

$$u_t(x,t)=v_{1t}(x,t)-(1-\alpha)\int_0^t\left[(u_\tau-\alpha u)(x+t-\tau,\tau)+\right.$$
$$\left.+(u_\tau-\alpha u)(x-t+\tau,\tau)\right]d\xi d\tau-$$
$$-(1-\alpha)\alpha^2\int_0^t\int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-\tau_1)}\left[u(x+(t-\tau),\tau_1)+u(x-(t-\tau),\tau_1)\right]d\tau_1 d\tau. \tag{8}$$

Таким образом, относительно функций $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ получили линейную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными ядрами и правых частей. Эта система имеет единственное непрерывное в области Δ_T решение, которое можно найти методом последовательных приближений.

Следовательно, если функция $u(x,t)$ является решением задачи (1) -(2), то функции $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ удовлетворяет систему линейных интегральных уравнений (7), (8).

Справедливо и обратное утверждение. Пусть функции $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ являются непрерывным решением системы уравнений (7), (8). Тогда из этой ситемы уравнений и условий леммы 1 следует, что что эти функции имеют в Δ_T непрерывные производные до третьего порядка и это решение является классическим решением задачи (1), (2). Единственность непрерывного решения системы уравнений (7), (8) следует из леммы Гронуолла-Беллмана.Лемма 1 доказана

3. Существование решения обратной задачи.

Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть функции $\varphi_i(x)$, $i=0,1,2$, $h(x)$ и постоянная $\alpha>0$ заданы, а функция $f(t)$ неизвестна. Требуется найти пару функций (u,f) из условий (1)-(2) по дополнительной информации

$$u(0,t)=g(t), \qquad 0\le t\le T. \tag{9}$$

Определение. Решением обратной задачи (1)-(2),(8) называется пара функций $(u,f)\in C^{(3)}(\Delta_T)\times C([0,T])$, удовлетворящее условиям (1)-(2), (9).

Для обратной задачи (1) -(2), (9) справедлива

ТЕОРЕМА 1. Если $\varphi_i(x)\in C^{(3-i)}[-T,T]$, $i=0,1,2$, $h(x)\in C^{(2)}[-T,T]$, $h(0)\neq 0$, $g(t)\in C^{(3)}[0,T]$, и выполнены условия согласования $\varphi_i(0)=g^{(i)}(0)$, $i=0,1,2$, то в области Δ_T существует единственное решение обратной задачи (1)-(2), (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f(t)$ является решением обратной задачи (3), (2), (9).

Обращая оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, из задачи (3), (2) имеем,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\right)u(x,t)=u_0(x,t)-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}u_{\tau\tau}(s,\tau)dsd\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}f(\tau)h(s)dsd\tau,\quad (x,t)\in\Delta(0,T). \tag{10}$$

где $u_0(x,t)-$ решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=0,\ u_0(x,0)=\varphi_1(x)+\alpha\varphi_0(x),\ u_{0t}(x,0)=\varphi_2(x)+\alpha\varphi_1(x).$$

Дифференцируя (10) по переменной t, имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=u_{0t}(x,t)-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_0^t\left[u_{\tau\tau}(x+t-\tau,\tau)+u_{\tau\tau}(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[h(x+t-\tau)+h(x-t+\tau)\right]d\tau,\quad (x,t)\in\Delta(0,T). \tag{11}$$

Положим в формуле (11) $x=0$ и воспользуемся данными (9). При этом получим равенства

$$g''(t)+\alpha g'(t)=u_{0t}(0,t)-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_0^t\left[u_{\tau\tau}(t-\tau,\tau)+u_{\tau\tau}(-t+\tau,\tau)\right]d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[h(t-\tau)+h(-t+\tau)\right]d\tau. \tag{12}$$

Еще раз дифференцируя уравнение (12), имеем

$$g'''(t)+\alpha g''(t)=u_{0tt}(0,t)-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_0^t\left[u_{\xi\tau\tau}(t-\tau,\tau)-u_{\xi\tau\tau}(-t+\tau,\tau)\right]d\tau+$$
$$-(1-\alpha)g''(t)+h(0)f(t)+\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[h'(t-\tau)-h'(-t+\tau)\right]d\tau$$

или

$$f(t)+\frac{1}{2h(0)}\int_0^t f(\tau)\left[h'(t-\tau)-h'(-t+\tau)\right]d\tau-$$
$$-\frac{(1-\alpha)}{2h(0)}\int_0^t\left[u_{\xi\tau\tau}(t-\tau,\tau)-u_{\xi\tau\tau}(-t+\tau,\tau)\right]d\tau=\psi(t), \qquad (13)$$

где

$$\psi(t)=\left[g'''(t)+g''(t)-u_{0tt}(0,t)\right]/\,h(0).$$

Чтобы получить замкнутую систем уравнений продифференцируем уравнение (7) по переменной x:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)u_x(x,t)=u_{0tx}(x,t)-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_0^t\left[u_{\tau\tau x}(x+t-\tau,\tau)+u_{\tau\tau x}(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[h'(x+t-\tau)+h'(x-t+\tau)\right]d\tau, \quad (x,t)\in\Delta(0,T). \qquad (14)$$

Таким образом, получили замкнутую систему интегральных уравнений (7), (13), (14) типа Вольтерра относительно функций $u(x,t)$, $u_{ttx}(x,t)$, $f(t)$. Следовательно, эта система имеет единственное решение. Теорема 1 доказана.

Литература

1. Романов, В.Г. Обратные задачи математической физики [Текст] / В.Г. Романов - М.: Наука, 1984. -254с.1

2. Романов, В.Г. Устойчивость в обратных задачах [Текст] / В.Г. Романов - М.: Научный Мир, 2005. -295с.

3. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи: Учебник для студентов высших учебных заведений [Текст] / С. И. Кабанихин - Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008.

4. Кабанихин, С.И., Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений [Текст] / С.И. Кабанихин, К.Т. Искаков // Казахский нац. педгог.ун-т им. Абая, Алматы, 2007. – 330 с.

5. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Б.С. Аблабеков - Бишкек., Илим, 2001. 183 с.

6. Аблабеков, Б.С., Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А.Р. Асанов, А.К. Курманбаева - Бишкек: Илим, 2011. – 156 с.

7. Аблабеков, Б.С., О разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Евразийское Научное Объединение. 2019.Т. 1. № 5 (51).

8. Аблабеков, Б.С. Об определении источника зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Евразийское Научное Объединение. 2021. Т. 1. №7 (77), С.1-3.

9. Аблабеков, Б.С. Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев //Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 34. № 1. С. 9-18.