Математика, физика, техника. 2022, №1

МАТЕМАТИКА

УДК 517. 928
DOI: 10.52754/16947452_2022_1_5

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

Абдилазизова Акбермет Абдижалиловна.
abdilazizovaa@mail.ru.
Ош мамлекеттик университети.
Ош, Кыргызстан.

Аннотация: *Бул жумушта сингулярдык козголгон сызыктуу дифференциалдык теңдеме каралган. Туруктуулук шарты бузулган учурдагы теңдемелерди изилдөө боюнча жүргүзүлгөн дээрлик бардык эмгектерде аралыктын учтарын туташтырган деңгээл сызыктын бутактары (кесилишүүчү) жашаган учурлар каралган. Бул учурларда чексиз областтарда кароонун зарылдыгы болгон эмес. Каралып жаткан кесиндинин оң жак учун туташтыруучу деңгээл сызыктар чексиз алыстатылган чекитте кесилишет, бул чекит чексиз тартиптеги ашуу чекити болот. Чечимге кесиндинин оң жак учуна жакын чекиттерде асимптотикалык баалоону алуу үчүн чексиз областтарды кароого туура келет. Маселе интегралдык теңдемеге келтирип, удаалаш жакындашуулар методунун жардамында чыгарылган.*

Ачкыч сөздөр: *теңдеме, чектелбеген аймак, баштапкы шарт, , ашуу чекити, чечим, асимптотикалык баа.*

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Абдилазизова Акбермет Абдижалиловна.
abdilazizovaa@mail.ru.
Ошский государственный университет.
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В этой работе рассматривается сингулярно возмущенное линейное уравнение. Во всех работах посвященных исследованию уравнений, где нарушается условие устойчивости, рассмотрен случай, когда существуют ветви (пересекающие) линии уровня соединяющие концы отрезка. В этих случаях не было необходимости расматривать бесконечную область. Линии уровня соединяющие концы рассматриваемых отрезков пересекаются в бесконечно удаленной точке, которая является точкой перевала бесконечного порядка. Для получения асимптотической оценки вблизи на правых концах отрезка приходится рассмотреть бесконечную область. Задача приводится к интегральному уравнению, решается с помощью метода последовательных приближений.*

Ключевые слова: *уравнение, бесконечную область, начальное условие, точка перевала, решение, асимптотическая оценка.*

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED FIRST ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Abdilazizova Akbermet Abdijalilovna.

abdilazizovaa@mail.ru.

Osh state university

Osh, Kyrgyzstan.

Abstract: *In this paper, we consider a singularly perturbed linear equation. In all works devoted to the study of equations where the stability condition is violated, the case is considered when there are branches (intersecting) level lines connecting the ends of the segment. In these cases, it was not necessary to consider an infinite region. Level lines connecting the ends of the segments under consideration intersect at an infinitely distant point, which is a pass point of infinite order. To obtain an asymptotic estimate near at the right ends of the segment, one has to consider an infinite domain. The problem is reduced to an integral equation and solved using the method of successive approximations.*

Keywords*: equation, infinite domain, initial condition, saddle point, solution, asymptotic estimate.*

Киришүү. Ашуу чекитинин тартиби чектүү тартипте болгон учурлар жана чектелген аймакта изилдөө [1-5] эмгектерде каралган. Бул учурларда чексиз аймактарда кароонун зарылдыгы болгон эмес. Бул жумушта чектелбеген аймакта изилдөө жүргүзүлөт.

Маселенин коюлушу. Төмөндөгү сингулярдык козголгон сызыктуу теңдемени карайбыз:

$$\varepsilon x'(t) = a(t)x(t) + \varepsilon h(t), \tag{1}$$

теңдеме

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0(\varepsilon), \tag{2}$$

баштапкы шарты менен берилсин, мында $x(t,\varepsilon) -$ белгисиз функция.

(1)-(2) маселе

$$H_0 = \{t \in C,\, t_0 \le t_1 \le T_0,\, -\infty < t_2 < +\infty\},$$

аймагында изилденет.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

Ш 1. $\{t_0 \le t_1 < a_0 \wedge -\infty < t_2 < +\infty\}$ тилкеде $\operatorname{Re} a(t) < 0$,

$\{t_1 = a_0 \wedge -\infty < t_2 < +\infty\}$ түз сызыгында $\operatorname{Re} a(t) = 0$,

$\{a_0 < t_1 \le T_0 \wedge -\infty < t_2 < +\infty\}$ тилкеде $\operatorname{Re} a(t) > 0$ болсун.

Ш 2. $\forall t_0 \in H,\, a(t), h(t) \in \Phi(H_0) \wedge \operatorname{Im} a(t) > 0.$

Ш 3. $t \to \infty$ болгондо $h(t) = \dfrac{1}{|t|^k}, k > 1.$

(1)-(2) маселенин чечиминин асимптотикалык өзгөрүшүн H_0 аймагында изилдөө маселесин карайлы.

$t = t_1 + it_2$ болгон учурда $\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds$ функциясынын чыныгы бөлүгүн

$$u(t_1, t_2) = \operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds,$$

түрдө белгилейбиз.

Төмөнкүдөй аныктамаларды келтиребиз:

1-аныктама. $f(t)$ функциясы үчүн t_0 чекитиндеги функциянын туундулары $f'(t_0) = 0, f''(t_0) = 0, \dots, f^{(n)}(t_0) = 0, f^{(n+1)}(t_0) \ne 0$ болсо, анда t_0 чекити n-тартиптеги ашуу чекити деп аталат.

2-аныктама. Эгерде ∞ чекитте $\mathrm{Re}\,F(t)$ жана функциянын чексиз сандагы деңгээл сызыктары кесилишсе, анда бул чекит чексиз тартиптеги ашуу чекити деп аталат.

Каралып жаткан теңдеменин чектелбеген аймакта кароо зарылчылыгын мисалдар аркылуу беребиз.

1-мисал. (1) теңдемеде $a(t)=2(t+i), t\in C$ болсун.

$A(t)$ функциясын төмөндөгүдөй аныктайбыз:

$$A(t)=2\int_{-i}^{t}(\tau+i)d\tau=\left(t+i\right)^2.$$

$\mathrm{Re}\,A(t)=t_1^2-\left(t_2+1\right)^2=c$ деңгээл сызыктарды алалы. $\mathrm{Re}\,A(t)=0$ деңгээл сызык $\left(0,-1\right)$ чекитинде бутактанат жана тегиздикти төрт бөлүккө бөлөт. Бул учурда $(-1,0),(1,0)$ чекиттерин туташтырган бир гана деңгээл сызыктын бутактары (0, -1) чекитинен өтүшү маанилүү жана чексиз аймакты кароонун зарылчылыгы жок. Чокулары (-1, 0), (1,0), (0, -1) болгон үч бурчтукту кароо жетиштүү.

Бул мисалда $t=-i$ чекити экинчи тартиптеги ашуу чекити болот.

2-мисал. (1) теңдемеде $a(t)$ функциясы $a\left(t\right)=-e^{-it}$ түрүндө берилсин. $a\left(t\right)=-\cos t+i\sin t,\ 0\le t\le\pi$ аралыкты карайлы.

(1) теңдеменин тең салмактуулук абалынын туруктуулук шарты $\left[0,\pi\right]$ аралыгында өзгөрөт:

$$0\le t<\frac{\pi}{2}:\mathrm{Re}\,a(t)<0,\quad t=\frac{\pi}{2}:\mathrm{Re}\,a(t)=0,\quad \frac{\pi}{2}\le t<\pi:\mathrm{Re}\,a(t)>0.$$

Бул учурда $A(t)=-\int_{0}^{t}e^{-i\tau}d\tau=\frac{1}{i}\left(e^{-it}+1\right)$ түрүндө аныкталат. Мындан $t=t_1+it_2$ болгондо $\mathrm{Re}\,A(t)=-e^{-t_2}\,\mathrm{s}int_1=u(t_1,t_2)$.

$u(t_1,t_2)=\operatorname{Re}A(t)$ функциясынын деңгээл сызыктарын колдонуу менен изилдөөлөрдү жүргүзүү үчүн, $H_0=\{t\in C,\ 0<t_1<\pi,\ -\infty<t_2<+\infty\}$ чексиз тилкесинде кароого туура келет.

3-мисал. (1) теңдемеде $a(t)$ функциясы $a(t)=-e^{it}$ болсун. Анда $a(t)=-\cos t-i\sin t$ ээ болобуз. $0\le t\le\pi$ аралыгында $\operatorname{Re}a(t)$ өз белгисин терстен оңго өзгөртөт жана $\operatorname{Re}a\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

$u(t_1,t_2)=-e^{-t_2}\sin t_1$ болот.

4-мисал. (1) теңдемеде $a(t)$ функциясы $a(t)=e^{it}$ болсун. $a(t)=\cos t+i\sin t$ болгондуктан, t нын чыныгы маанилери $[\pi,2\pi]$ аралыгында $\operatorname{Re}a(t)$ өз белгисин өзгөртөт.

Биз жогоруда караган 2-4 мисалдарда туруктуулук шарт аткарылбаган кесиндинин учтары аркылуу өткөн деңгээл сызыктын бутактары чексиздикте кесилишет жана бул чекит $u(t_1,t_2)$ функциясы үчүн чексиз тартиптеги ашуу чекити (точка перевала) болот.

Чечим үчүн кесиндинин оң жак учуна жакын чекиттерде асимптотикалык баалоону алуу үчүн чексиз областарды кароого туура келет.

(1)-(2) маселе төмөнкү интегралдык теңдеме менен тең күчтүү болот:

$$x(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)x_0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau, \tag{3}$$

мында $E(t,t_0,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)$, $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)$.

$t_2=\phi(t_1)$ функциясы $u(t_1,t_2)=at_1+b$ теңдеменин чечими катары аныкталат, мында $a=\frac{c_1-c_2}{t_{01}-T_1}$, $b=\frac{c_2t_{01}-c_1T_1}{t_{01}-T_1}$ ([2] эмгектин 4-леммасы).

$t_2 = \phi(t_1)$ функциясы менен аныкталган ийрини K деп белгилейбиз.

K ийриси $c_1 = \varepsilon \ln \varepsilon, c_2 = 2\varepsilon \ln \varepsilon$ болгон деңгээл сызыктар менен аныкталган аймакты $H_1 \subset H_0$ деп белгилейли. H_1 чектелбеген аймак болот.

$c_1 = -\frac{1}{2}\delta, c_2 = -\delta,$ мында $\delta - const,$ $0 < \delta << 1$ болсун. Бул учурда аймакты $H_2 \subset H_0$ деп кабыл алабыз. H_2 аймагы да чектелбеген болот.

Турактуулар $c_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon, c_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^p$ болсун, мында $0 < p < 1$. Аймакты $H_3 \in H_0$ түрүндө белгилеп алабыз. H_3 аймагы да чектелбеген болот.

$\tilde{K} = \Delta \cup K$ болсун, мында $\Delta = \{(t_1, t_2) : t_0 \le t_1 \le t_{01}, t_2 = 0\}$.

Эгерде $(t_1, t_2) \in \Delta\ (t = t_1, t_2 = 0)$ болсо, анда l жолу $(t_0, 0)$, $(t_1, 0)$ $(t_0 \le t_1 \le t_{01})$ чекиттерин туташтырган сызык болот. Бул учурда $\operatorname{Re} a(t) \le -a_1,\ a_1 > 0 - const$.

(t_1, t_2) чекиттери K ийрисинде жатканда интегралдоо жолун төмөндөгүдөй аныктайбыз: $l = \bigcup_{k=1}^{3} l_k$, мында $l_1 - (t_0, 0)$, $(t_{01}, 0)$ чекиттерин туташтырган кесинди болот,

$l_2 -$ $(t_{01}, 0)$, $\left(t_1, t_2^* = \tilde{\phi}(t_1)\right)$ чекиттер аркылуу өтүүчү сызык,

$l_3 -$ $\left(t_1, t_2^*\right)$ жана (t_1, t_2) чекиттерин туташтырат. Бул жерде $(t_1, t_2) \in K$ болсо, t_1 үчүн $\left(t_1, t_2^* = \phi(t_1)\right)$ болгон жалгыз гана чекит жашайт.

(3) теңдеменин чечимине баалоолорду Ш 2-Ш 3 шарттарды эске алуу менен жүргүзөбүз.

Эсептөөлөрдүн негизинде төмөндөгүдөй теоремалар далилденет:

1-теорема. Ш 1-Ш.3 шарттары аткарылсын, анда $\tilde{K} = \Delta \cup H_1$ аймагында (1) - (2) маселенин жалгыз чечими жашайт жана

$$|x(t,\varepsilon)| \le c\omega(\varepsilon)\frac{1}{1-c\delta_0(\varepsilon)},$$

баалоосу орун алат, мында $\delta_0(\varepsilon) = \dfrac{1}{|\ln\varepsilon|}$, $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, $c - const$.

2-теорема. Ш 1-Ш 3 шарттар аткарылсын, анда $\tilde{K} = \Delta \cup H_2$ аймагында (1) - (2) маселенин жалгыз чечими жашайт жана $|x(t,\varepsilon)| \le c\omega(\varepsilon)$ баалоосу орун алат.

3-теорема. Ш 1-Ш 3 шарттар аткарылса, анда $\tilde{K} = \Delta \cup H_3$ аймагында (1) - (2) маселенин жалгыз чечими жашайт жана $|x(t,\varepsilon)| \le c\varepsilon^{1-p}$ баалоосу орун алат.

Корутунду. Чектелбеген аймакта козголгон жана козголбогон тендеменин чечиминин асимптотикалык жакындыгы көрсөтүлдү.

Литература

1. Акматов, А.А. Исследование решений синглярно возмущенной задачи [Текст] / А.А. Акматов - Вестник ОшГУ. Ош,2021. С 21-27.
2. Алыбаев, К.С. Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости[Текст] / К.С. Алыбаев - Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. - Бишкек, 2001. – 204 с.
3. Каримов, С.К. Равномерное приближение решения сингулярно возмущенной задачи в особо критическом случае[Текст] / С.К. Каримов - Ош, 2019, – 203с.
4. Каримов, С. Асимптотические оценки решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае[Текст] / С. Каримов, А.А. Абдилазизова.// Наука и новые технологии. Бишкек, 2019, № 6. С. 9-16.
5. Каримов, С. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости[Текст] / С. Каримов, А.А. Абдилазизова.// Москва, 2007. №4. С. 13-16.