Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.95

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_29

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физ.-мат. наук, профессор,

ablabekov_63@mail.ru

Жуман кызы Айнура, аспирант

Кыргызский национальный университет имени Жусуп Баласагына,

Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *При исследовании обратных задач математической физики важную роль играет знание решений соответствующей прямой (в данном случае первой начально- краевой) задачи. В настоящей работе исследуется существование и единственность классического решения первой начально-краевой задачи для одномерного неоднородного псевдопараболического уравнения с дробными по времени производной Капуто в замкнутом прямоугольнике с однородными краевыми условиями. Доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Для доказательства существования и единственности решения поставленной задачи применяется метод Фурье. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций. Получено явное классическое решение исследуемой задачи.*

Ключевые слова: *псевдопараболическое уравнение, краевые задачи, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто, дробный интеграл Римана-Лиувилля, метод Фурье, функция Миттаг-Леффлера.*

БИР ӨЛЧӨМДҮҮ БӨЛЧӨКТҮҮ ТУУНДУЛУУ ПСЕВДОПАРАБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ БАШТАПЧЫ-ЧЕК МАСЕЛЕНИН ЧЕЧИМДҮҮЛҮГҮ ЖӨНҮНДӨ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, ф.-м.илим.докт., профессор,

ablabekov_63@mail.ru

Жуман кызы Айнура, аспирант

Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети,

Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *Математикалык физиканын тескери маселелерин изилдөөдө тиешелүү түз (бул учурда биринчи баштапкы чектик) маселенин чечимдерин билүү маанилүү роль ойнойт. Бул эмгекте биз бир тектүү чек ара шарты бар жабык тик бурчтукта убакыт боюнча бөлчөктүү Капуто туундулары менен бир өлчөмдүү бир тектүү эмес псевдопараболикалык теңдеме үчүн биринчи түрдөгү баштапкы- чектик маселенин классикалык чечиминин бар экендигин жана жалгыздыгын изилдейбиз. Каралып жаткан маселени чечүү үчүн бар жана кайталангыстык теоремасы далилденген. Коюлган маселенин чечиминин бар экендигин жана жалгыздыгын далилдөө үчүн Фурье ыкмасы колдонулат. Үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функциялар классында каралып жаткан маселенин бир маанилүү чечилиши үчүн жетиштүү шарттар алынган. Изилдеп жаткан маселенин ачык-айкын классикалык чыгарылышы алынган.*

Ачкыч сөздөр: *псевдопараболикалык теңдеме, чектик маселелер, бөлчөк тартиптеги дифференциалдык теңдеме, Капутонун бөлчөк туундусу, Риман-Лиувилл бөлчөк интегралы, Фурье ыкмасы, Миттаг-Леффлер функциясы.*

ON THE SOLVABILITY OF THE FIRST INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

Ablabekov Baktybai Saparbekovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor,

ablabekov_63@mail.ru

Juman kyzy Ainura, graduate student

Kyrgyz National University Jusup Balasagyna,

Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract: *In the study of inverse problems of mathematical physics, knowledge of the solutions of the corresponding direct (in this case, the first initial boundary value) problem plays an important role. In this paper, we study the existence and uniqueness of the classical solution of the first initial-boundary value problem for a one-dimensional inhomogeneous pseudoparabolic equation with time-fractional Caputo derivatives in a closed rectangle with homogeneous boundary conditions. The existence and uniqueness theorem for the solution of the problem under consideration is proved. The Fourier method is used to prove the existence and uniqueness of a solution to the problem posed. Sufficient conditions are established for the* *unique solvability of the problem under consideration in the class of continuously differentiable functions. An explicit classical solution of the problem under study is obtained.*

Keywords: *pseudoparabolic equation, boundary value problems, fractional order differential equation, Caputo fractional derivative, Riemann-Liouville fractional integral, Fourier method, Mittag-Leffler function.*

Введение

Дифференциальные уравнения с дробными производными естественным образом возникают в ряде областей науки, таких как физика, инженерия, биофизика, явления кровотока, аэродинамика, электронно-аналитическая химия, биология, теория управления и т. д. Более подробную информацию о таких уравнений можно найти в работах [1-4].

Псевдопараболические уравнения с дробными производными возникают при описании процессов фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде, фильтрации жидкости в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин, переноса почвенной влаги в зоне с учетом ее движения против потенциала влажности [4-7]. В связи с этим возникает необходимость исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными и разработки методов их решений.

Задача Коши, начально-краевые задачи для псевдопараболического уравнения, в том числе для уравнения Аллера с дробными производными Римана-Лиувилля были изучены в работах [8-11].

В данной работе изучается первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения уравнения с дробными производными Капуто.

1. Определение дробных проиводных и интегралов.

Введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего исследования.

Определение 1. Дробным дифференциальным оператором Капуто D_t^{α} порядка $\alpha, 0<\alpha\leq 1$ для дифференцируемой функции f называется оператор, определенная выражением [3,4]:

$$D_t^{\alpha}\left[f\right](t)=I\left[f^{'}(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t f^{'}(\tau)(t-\tau)^{-\alpha}d\tau,\ 0<\alpha<1,\\ f^{'}(t), \qquad\qquad \alpha=1,\end{cases} \tag{1.1}$$

где $\Gamma(z)-$ гамма функция.

Определение 2. Дробным интегральным оператором Римана-Лиувилля $D_{0t}^{-\alpha}$ порядка $\alpha, 0<\alpha\le 1$ для интегрируемой функции f называется оператор, определенная выражением [3,4]:

$$D_{0t}^{-\alpha}f(t)=I^{\alpha}\left[f(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau,\ 0<\alpha<1,\\ \int\limits_0^t f(\tau)d\tau, \qquad\qquad \alpha=1.\end{cases} \tag{1.2}$$

Определение 3. Дву параметрическая функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ определяемое формулой [3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},\ \ (\alpha>0,\quad \beta>0) \tag{1.3}$$

называется функцией Миттаг-Леффлера.

Приведем некоторые соотношения, приведенные в [3]:

$$E_{1,1}(z)=e^z, \qquad\qquad E_{1,1}(z)=\frac{e^z-1}{z}, \tag{1.4}$$

$$E_{2,1}(z)=ch\sqrt{z},\ E_{2,1}(z)=\frac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \tag{1.5}$$

$$E_{1/2,1}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z}erfc(-\sqrt{z}), \tag{1.6}$$

При $\beta=1$ получим одно параметрическую функцию Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\equiv E_{\alpha}(z). \tag{1.7}$$

Обобщение формулы Ньютона-Лейбница, при $\alpha, \quad (0<\alpha\leq 1)$

$$D_{0t}^{-\alpha} D_t^{\alpha} z(t) = z(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z^{(\alpha-1)}(0). \tag{1.8}$$

2. Постановка и основной результат

В области $\Omega_T = \{(x,t): 0<x<l, 0<t\leq T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha} u - D_t^{\alpha} u_{xx} - u_{xx} = 0, 0<x<l, 0<t\leq T\,. \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leq x\leq l, \tag{2.2}$$

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad 0\leq t\leq T. \tag{2.3}$$

где $\varphi(x)$, $f(x,t)-$ заданные функции.

Здесь D_t^{α} −дробная производная Капуто порядка $\alpha\,(0<\alpha\leq 1)$.

Определение 1. Классическим решением задачи (2.1) - (2.3) в области Ω_T назовем функцию $u=u(x,t)$ из класса $D_t^{\alpha}u(x,t)\in C(\Omega_T)$, $u_{xx}(x,t)\in C(\Omega_T)$, $D_t^{\alpha}u_{xx}(x,t)\in C(\Omega_T)$, которая уравнению (2.1) при всех $(x,t)\in\Omega_T$, начальному условию (2.2) при всех $x\in[0,l]$, и краевым условиям (2.3) при всех $t\in[0,T]$.

ТЕОРЕМА. Если $u_0(x)\in C^2\left[0,l\right]$, $u_0'''(x)\in L_1(0,l)$ и $u_0(0)=u_0(l)=0$, $u_0''(0)=u_0''(l)=0.$ то решение задачи (1) -(3) существует и единственно. Это решение представимо в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2}t^{\alpha}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{2.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи (2.1) ,(2.3) ищем в виде

$$u(x,t)=X(x)Y(t). \tag{2.5}$$

Подставляя значения $u(x,t)$ из (2.4) в (2.1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{D_t^\alpha y}{D_t^\alpha y + y} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Отсюда, предполагая, что $D_t^\alpha y + y \neq 0$, и учитывая условие (2.3), получим следующие уравнения относительно функций X, Y:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \tag{2.6}$$

$$D_t^\alpha y + \frac{\lambda}{1+\lambda} y = 0 \tag{2.7}$$

Известно, что задача Штурма-Лиувилля (2.6) имеет следующий вид собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{k\pi}{l} x$$

и образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,l)$.

Дифференциальное уравнение дробного порядка (2.7) при $\lambda = \lambda_n,\ n = 1, 2, \dots$ имеет вид

$$Y_n(t) = C_n E_\alpha\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2 + (n\pi)^2} t^\alpha\right), \tag{2.8}$$

где $E_{\alpha,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$ – функция Миттаг-Леффлера.

Таким образом, все функции

$$u_k(x,t) = C_n E_\alpha\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2 + (n\pi)^2} t^\alpha\right) \sin\frac{n\pi}{l} x$$

удовлетворяют уравнению (2.1) и граничным условиям (2.3).

Воспользовавшись обобщенным принципом суперпозиции, запишем решение задачи (2.1), (2.3) в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n E_\alpha\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2 + (n\pi)^2} t^\alpha\right) \sin\frac{n\pi}{l} x. \tag{2.9}$$

Для нахождения неизвестных постоянных C_n, воспользуемся начальным условием (2.2). Тогда из (2.9) имеем

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (2.10)$$

Рассматривая это равенство как разложение $\varphi(x)$ в ряд Фурье, найдем коэффициенты Фурье

$$\varphi_n=C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi. \qquad 2.11)$$

Подставив найденные C_n в (2.9), получим формальное решение задачи (2.1)-(2.3):

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n E_\alpha\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2}t^\alpha\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (2.12)$$

Теперь покажем, что найденная функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи (2.1)-(2.3).Сначала покажем непрерывность функции $u(x,t)$ в области Ω_T. Из условий, наложенных на функции $\varphi(x)$, следует, что

$$|\varphi_n|\le\frac{const}{n^2}. \qquad (2.13)$$

Отсюда следует, что ряд (2.12) с коэффициентами C_n, определяемым по формулам (2.12), равномерно и абсолютно сходится к функции $\varphi(x)$.

Далее покажем, что формально построенное решение (2.4) является классическим, т.е. регулярным при $0<x<l,\ 0<t<T,$ непрерывным по x при $0\le x\le l$ и удовлетворяет дополнительным условиям (2.1), (2.3).

Используя неравенство (2.13) и то, что

$$E_\alpha(-z)\le\frac{M}{1+z}\le M,\quad z\ge 0,\quad 0<\alpha<1,$$

из формулы (2.11) , имеем

$$|u(x,t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|\left|E_\alpha\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2}t^\alpha\right)\right|\left|\sin\frac{n\pi}{l}x\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}<+\infty. \qquad (2.14)$$

Поэтому функция $u(x,t),$ определяемая рядом (2.12), непрерывна в области $\bar{\Omega}_T$ и удовлетворяет начальному условию (2.2) и граничным условиям (2.3).

Остается показать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) в области Ω_T . Для этого достаточно показать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_t^{\alpha} u_n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 D_t^{\alpha} u_n}{\partial x^2}.$$

Формально дифференцируя ряд (2.12), находим

$$D_t^{\alpha} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n D_t^{\alpha} E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right) \sin\frac{n\pi}{l} x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} \varphi_n E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right) \sin\frac{n\pi}{l} x,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \varphi_n E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right) \sin\frac{n\pi}{l} x,$$

$$\frac{\partial^2 D_t^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 D_t^{\alpha} u_k}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \varphi_n E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right) \sin\frac{n\pi}{l} x.$$

Поскольку

$$|\varphi_n| \le \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \left|\varphi_n''\right|,$$

то

$$\left|D_t^{\alpha} u(x,t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2}\right| |\varphi_n| \left|E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} < +\infty,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \varphi_n E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right) \sin\frac{n\pi}{l} x\right| \le$$

$$\le M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n''\right| < +\infty. \tag{2.15}$$

$$\left|\frac{\partial^2 D_t^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right| |\varphi_n| \left|E_{\alpha}\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+(n\pi)^2} t^{\alpha}\right)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n''\right| < +\infty.$$

Из оценок (2.15) заключаем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} D_t^{\alpha} u_n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 D_t^{\alpha} u_n}{\partial x^2}.$

сходятся равномерно к $D_t^\alpha u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 D_t^\alpha u(x,t)}{\partial x^2}$ соответственно. Теорема доказана.

Литература

1. Kilbas, A. A. “Theory and Applications of Fractional Differential Equations” [Текст] / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo // *North-Holland Mathematics Studies,* Vol. 204, 2006.

2. Miller, K. S. “An Introduction to the Frac- tional Calculus and Fractional Differential Equations,” [Текст] / K. S. Miller, B. Ross // John Wiley, New York, 1993.

3. Podlubny, I. “Fractional Differential Equations,” [Текст] / I. Podlubny // Aca- demic Press, San Diego, New York, London, 1999.

4. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения [Текст] / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

5. Джарбашян, М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области [Текст] / М.М. Джарбашян - М., 1966.-672с.

6. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение [Текст] / А.М.Нахушев - М.: Физматлит, 2003. 272 с.

7. Учайкин, В.В. Метод дробных производных [Текст] / В.В. Учайкин - Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

8. Псху, А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка [Текст] / А.В. Псху - М.: Наука. 2005. 199 с.

9. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Б.С. Аблабеков - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.

10. Аблабеков, Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи [Текст] / Б.С. Аблабеков // Наука и новые технологии. –1999.- №4. – С. 12– 19.

11. Макаова, Р.Х. Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера [Текст] / Р.Х. Макаова // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1 (16). С. 45–49.

12. Макаова, Р.Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана-Лиувилля [Текст] / Р.Х. Макаова // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 3. С. 35–38.