Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517.956.6

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_20

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

Абдумиталип уулу Кубатбек, преподаватель
kuba@oshsu.kg
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Доказаны существование и единственность решения краевой задачи на плоскости для уравнения четвертого порядка, содержащий произведение смешанного параболо-гиперболический оператора второго порядка и обыкновенного дифференциального оператора первого порядка по x с линией изменения типо y=0. Граничные данные задаются на линиях x=0, x=l и x=-y. Методом понижения порядка уравнения рассматриваемая задача при y>0 сводится к решению первой краевой задачи в прямоугольнике для уравнения теплопроводности, а при y<0 в характеристическом треугольнике к задаче для уравнения колебания струны. В прямоугольнике методом функции Грина получена представление решения задачи в явном виде. Применяя метод общих решений уравнения колебания струны найдена явный вид решение задачи при y<0.*

Ключевые слова: *краевые задачи, параболо-гиперболический оператор, единственность, существование, функция Грина, уравнение четвертого порядка.*

ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛАЛЫК ОПЕРАТОРДУ КАМТЫГАН ТӨРТҮНЧҮ ДАРАЖАДАГЫ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

Абдумиталип уулу Кубатбек, окутуучу
kuba@oshsu.kg
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Тегиздикте өзгөрүү сызыгы y=0 болгон экинчи тартиптеги аралаш параболалык-гиперболалык оператор менен биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык оператордун көбөйтүндүсүнөн турган төртүнчү тартиптеги теңдеме үчүн чекаралык маселенин чечүминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген. Чекаралык шарттары x=0, x=l жана x=-y сызыктарында берилген. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү методун колдонуу менен y>0 үчүн каралып жаткан маселе жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси үчүн тик бурчтуктагы биринчи чек аралык маселени чечүүгө, ал эми y<0 болгондо характеристикалык үч бурчтуктагы маселеге келтирилет. Грин функциясы методу менен тик бурчтукта маселенин чечиминин айкын түрдөгү формасы табылган. Кылдын термелүү теңдемесинин жалпы* *чечимдеринин ыкмасын колдонуу менен y<0 үчүн маселенин чыгарылышынын айкын формасы табылган.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, парабола-гиперболалык оператор, жашашы, жалгыздыгы, Грин функциясы, төртүнчү даражадагы теңдеме.*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A FOURTH-ORDER EQUATION CONTAINING A PARABOLIC-HYPERBOLIC OPERATOR

Abdumitalip uulu Kubatbek, lecturer
kuba@oshsu.kg
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem on the plane for a fourth-order equation containing the product of a mixed second-order parabolic-hyperbolic operator and a first-order ordinary differential operator in x with a variation line like y=0 are proved. Boundary data is set on the x=0, x=l and x=-y lines. Using the method of lowering the order of the equation, the problem under consideration for y>0 is reduced to solving the first boundary value problem in a rectangle for the heat equation, and for y<0 in the characteristic triangle, to the problem for the string vibration equation. In a rectangle, the Green's function method is used to obtain a representation of the solution of the problem in an explicit form. Applying the method of general solutions to the equation of string vibrations, an explicit form of the solution of the problem for y<0 is found.*

Keywords: *boundary value problems, parabolic-hyperbolic operator, uniqueness, existence, Green's function, fourth-order equation.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим в области D, ограниченная отрезками линий $AC: x+y=0, CB: x-y=\ell\,(\ell>0), BB_0: x=\ell,$ $B_0A_0: y=h\,(h>0), A_0A: x=0$ (Рисунок 1) уравнение

$$L_1 L_2 u = 0, \tag{1}$$

где

$$L_1 \equiv \begin{cases} L_{11} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}, y > 0, \\ L_{12} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, y < 0, \end{cases}, \quad L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

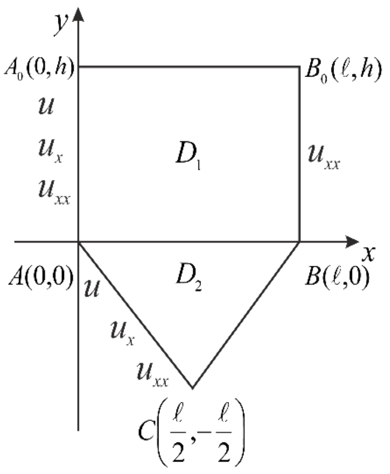

Рисунок 1. Область D.

Пусть $D_1 = D \cap (y > 0), D_2 = D \cap (y < 0)$. C^{n+m} означает класс функции, имеющие непрерывные все производные

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}\left(r = 0,1,...,n; s = 0,1,...,m\right)[1].$$

Отметим что уравнение

$$L_{11}L_2 u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \left(x, y\right) \in D_1 \tag{2}$$

имеет четырехкратную действительную характеристику $y = const$, а уравнение

$$L_{12}L_2 u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \left(x, y\right) \in D_2 \tag{3}$$

имеет двукратную характеристику $y = const$ и две а уравнение характеристику $x + y = const, x - y = const[2]$.

Для уравнения (1) в области D рассматривается следующая

<u>**Задача 1.**</u> Требуется найти в области $D \setminus (y = 0)$ решение уравнения (1), удовлетворяющая условиям:

1) $u, u_x, u_{xx} \in C\left(\overline{D}\right) \cap C_1\left(D\right) \cap \left[C^{2+1}\left(D_1\right) \cup C^{2+2}\left(D_2\right)\right]$;

2) $$u\big|_{x=0} = \varphi_1(y), u_x\big|_{x=0} = \varphi_2(y), 0 \le y \le h, \tag{4}$$

$$u_{xx}\big|_{x=0} = \varphi_3(y), u_{xx}\big|_{x=\ell} = \varphi_4(y), 0 \le y \le h, \tag{5}$$

$$u\big|_{x=-y} = \psi_1(y), -\frac{\ell}{2} \le y \le 0, \tag{6}$$

$$u_x\big|_{x=-y}=\psi_2(y),\ -\frac{\ell}{2}\le y\le 0, \tag{7}$$

$$u_{xx}\big|_{x=-y}=\psi_3(y),\ -\frac{\ell}{2}\le y\le 0, \tag{8}$$

где $\varphi_i(y)(i=\overline{1,4}),\psi_i(y)(j=\overline{1,3})$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{gathered}\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C^2[0,h],\varphi_3(y),\varphi_4(y)\in C[0,h],\\ \psi_i(y)\in C^2\left[-\frac{\ell}{2},0\right](i=1,2),\psi_3(y)\in C^4\left[-\frac{\ell}{2},0\right];\end{gathered} \tag{9}$$

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \varphi_2(0)=\psi_2(0),\varphi_3(0)=\psi_3(0). \tag{10}$$

Краевые задачи для уравнения

$$L_2L_1u=0$$

изучены в работах [3, 4].

Из постановки задачи 1 вытекает следующие условия склеивания:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),0\le x\le \ell, \tag{11}$$

$$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\nu(x),0\le x\le \ell, \tag{12}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$– пока неизвестные функции.

Для решения задачи 1, рассмотрим следующие вспомогательные задачи 2 и 3.

Задача 2. Требуется найти в области D_1 решение уравнения (2), удовлетворяющая условиям (4), (5) и (11), причем

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau'(0)=\varphi_2(0),\tau''(0)=\varphi_3(0). \tag{13}$$

Задача 3. Требуется найти в области D_2 решение уравнения (3), удовлетворяющая условиям (6) — (8) и (11), причем

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau'(0)=\varphi_2(0), \tag{14}$$

$$\tau''(0)=\varphi_3(0),\tau''(\ell)=\varphi_4(0). \tag{15}$$

2. Решение задачи 3. Введем обозначение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\vartheta\left(x,y\right),\,\left(x,y\right)\in D_2, \tag{16}$$

где $\vartheta\left(x,y\right)-$ новая неизвестная функция. Тогда из (3), (8) и (11) для определения $\vartheta\left(x,y\right)$ придем к следующей задаче:

$$\vartheta_{xx}-\vartheta_{yy}=0,\,\left(x,y\right)\in D_2, \tag{17}$$

$$\vartheta(x,0)=\tau''(x),0\le x\le \ell, \tag{18}$$

$$\vartheta(-y,y)=\psi_3(y),-\frac{\ell}{2}\le y\le 0. \tag{19}$$

Из общего решения

$$\vartheta\left(x,y\right)=F_1(x+y)+F_2(x-y) \tag{20}$$

Уравнения (17), где F_1,F_2-произвольные функции из класса C^2, с учетом условий (18) и (19), имеем

$$\begin{aligned}&F_1(x)+F_2(x)=\tau''\left(x\right),0\le x\le \ell,\\&F_1(0)+F_2(-2y)=\psi_3\left(y\right),-\frac{\ell}{2}\le y\le 0.\end{aligned} \tag{21}$$

Пологая $-2y=t,$ из второго уравнения (21) имеем

$$F_2(t)=\psi_3\left(-\frac{t}{2}\right)-F_1(0).$$

Тогда из первого уравнения (21) имеем

$$F_1(x)=\tau''\left(x\right)-\psi_3\left(-\frac{x}{2}\right)+F_1(0).$$

Следовательно, из (20) получаем решение задачи (17)—(19), в виде

$$\vartheta(x,y)=\tau''\left(x+y\right)-\psi_3\left(-\frac{x+y}{2}\right)+\psi_3\left(\frac{y-x}{2}\right). \tag{22}$$

Интегрируя дважды по x в пределах от $-y$ до $x,$ учитывая при этом граничные условия (6)—(7) из (22) получаем решение задачи 3 в виде:

$$\begin{aligned}u(x,y)=\tau\left(x+y\right)+\left(x+y\right)\left[\psi_2\left(y\right)-\psi_2\left(0\right)\right]+\psi_1\left(y\right)-\psi_1\left(0\right)+\\+\int_{-y}^{x}\left(x-\xi\right)\left[\psi_3\left(\frac{y-\xi}{2}\right)-\psi_3\left(-\frac{y+\xi}{2}\right)\right]d\xi.\end{aligned} \tag{23}$$

Про дифференцируя (23) по y и пологая $y=0$ получаем соотношение из области D_2:

$$\nu\left(x\right)=\tau'\left(x\right)+\psi\left(x\right),0\leq x\leq \ell, \tag{24}$$

где

$$\psi\left(x\right)=x\varphi_2'\left(0\right)+\psi_1'\left(0\right)+\int_0^x\left(x-\xi\right)\psi_3'\left(-\frac{\xi}{2}\right)d\xi.$$

3. Соотношение, полученное из области D_1. Переходя к пределу при $y\to+0$ из уравнения (1) имеем соотношение из области D_1 в виде

$$\tau^{IV}(x)-\nu''(x)=0,0\leq x\leq \ell. \tag{25}$$

Исключая $\nu(x)$ из (24) и (25), получим уравнение

$$\tau^{IV}(x)-\tau'''(x)=0,0\leq x\leq \ell. \tag{26}$$

Пологая

$$\tau''(x)=z(x) \tag{27}$$

Из (26) имеем

$$z''(x)-z'(x)=\psi''\left(x\right),0\leq x\leq \ell, \tag{28}$$

из (15) получим краевые условия для $z(x)$:

$$z(0)=\varphi_3(0),z(\ell)=\varphi_4(0). \tag{29}$$

Введем новую функцию $\theta(x)$ следующим образом:

$$z(x)=\varphi_3(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_4(\ell)-\psi_3(0)\right]+\theta(x). \tag{30}$$

Тогда из (28) и (29) придем к следующей краевой задаче:

$$\begin{gathered}\theta''(x)-\theta'(x)=g(x),\\ \theta(0)=0,\theta(\ell)=0,\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$g(x) = \psi''(0) + \frac{1}{\ell}\left[\varphi_4(0) - \varphi_3(0)\right].$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\theta''(x) - \theta'(x) = 0, \tag{32}$$

общее решение которого имеет вид

$$\theta(x) = c_1 + c_2 e^x, \tag{33}$$

где $c_1, c_2 -$ произвольные действительные числа.

Согласно общей теории [5] из (33) выберем решения, удовлетворяющие условиям

$$\theta_1(0) = 0, \theta_1'(0) \neq 0; \theta_2(\ell) = 0, \theta_2'(\ell) \neq 0,$$

следующим образом

$$\theta_1(x) = c_1\left(1 - e^x\right), \theta_2(x) = c_2\left(e^x - e^\ell\right).$$

Тогда функцию Грина можно представить в виде

$$G_1\left(x, \xi\right) = \begin{cases} c_1\left(1 - e^x\right), 0 \leq x \leq \xi, \\ c_2\left(e^x - e^\ell\right), \xi \leq x \leq \ell. \end{cases} \tag{34}$$

По определению функция Грина должно быть выполнено следующие условия

$$\begin{aligned} &G_1\left(\xi + 0, \xi\right) - G_1\left(\xi - 0, \xi\right) = 0, \\ &G_{1x}\left(\xi + 0, \xi\right) - G_{1x}\left(\xi - 0, \xi\right) = 1. \end{aligned} \tag{35}$$

Тогда из (35) для определения c_1 и c_2 приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \left(1 - e^x\right)c_1 - \left(e^x - e^\ell\right)c_2 = 0, \\ e^x c_1 + e^x c_2. \end{cases} \tag{36}$$

Определитель системы (36) $\Delta = e^\xi(1 - e^\ell) \neq 0,$ так как $\ell > 0.$ Методом определителей из (36) находим c_1 и c_2:

$$c_1=\frac{1}{\Delta}\left(e^{\xi}-e^{\ell}\right), c_2=\frac{1}{\Delta}\left(1-e^{\xi}\right).$$

Следовательно, функцию Грина можно представить в виде

$$G_1\left(x,\xi\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}\left(e^{\xi}-e^{\ell}\right)\left(1-e^{x}\right), 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{1}{\Delta}\left(1-e^{\xi}\right)\left(e^{x}-e^{\ell}\right), \xi\le x\le\ell.\end{cases}$$

Тогда решение задачи (31) представимо в виде

$$\theta\left(x\right)=\int_0^{\ell}G_1\left(x,\xi\right)g\left(\xi\right)d\xi. \tag{37}$$

По формуле (30) определяем $z\left(x\right)$. Тогда интегрируя равенства (27) по x дважды в пределах от 0 до x, имеем

$$\tau\left(x\right)=\varphi_1\left(0\right)+\varphi_2\left(0\right)x+\int_0^{x}\left(x-t\right)z\left(t\right)dt, 0\le x\le\ell. \tag{38}$$

4. Решение задачи 2. Введя обозначение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=w\left(x,y\right), \left(x,y\right)\in D_1, \tag{39}$$

из уравнения (3) имеем

$$w_{xx}-w_{yy}=0, \left(x,y\right)\in D_1, \tag{40}$$

К уравнению (40) присоединяем следующие условия:

$$\begin{aligned}&w(0,y)=\varphi_3(y), w(\ell,y)=\varphi_4(y), 0\le y\le h,\\ &w(x,0)=\varphi_3(y),\ 0\le x\le\ell.\end{aligned} \tag{41}$$

Решение задачи (40), (41) представимо в виде [6]

$$\begin{aligned}w(x,y)=&\int_0^{y}G_{\xi}\left(x,y;0,\eta\right)\varphi_3(\eta)d\eta-\int_0^{y}G_{\xi}\left(x,y;\ell,\eta\right)\varphi_4(\eta)d\eta+\\ &+\int_0^{\ell}G\left(x,y;\xi,0\right)\tau''(\xi)d\xi,\end{aligned} \tag{42}$$

где

$$G_1\left(x,\xi;\xi,\eta\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\left(y-\eta\right)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left(-\frac{\left(x-\xi+2n\ell\right)^2}{4\left(y-\eta\right)}\right)-\exp\left(-\frac{\left(x+\xi+2n\ell\right)^2}{4\left(y-\eta\right)}\right)\right]-$$

функция Грина.

Далее, интегрируя по x дважды равенство (39) в пределах от 0 до x и учитывая при этом условия (4), получаем решение задачи 2 в виде

$$u(x,y)=\varphi_1(y)+x\varphi_2(y)+\int_0^x (x-\xi)w(\xi,y)d\xi,(x,y)\in D_1. \qquad (43)$$

Таким образом доказона.

Теорема. Пусть выполняются условия (9), (10).

Тогда решение задачи 1 существует, единственно и представимо по формулам (23) и (43).

Литература

1. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка [Текст] / В.И. Жегалов, Е.А. Уткина // Изв. вузов. Математика. – 1999. №10, с.73-76.
2. Джураев, Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
3. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев - Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
4. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов - Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
5. Денисов, А.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / А.М. Денисов, А.В Разгулин – М.: МГУ, 2009. -114 с.
6. Полянин, А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д. Полянин – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. -576 с.