ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

ISSN: 1694-7452 **e-ISSN: 1694-8610**

№2/2024, 354-360

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.928.2
DOI: 10.52754/16948610_2024_2_35

ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТКЕ ЭЭ БОЛГОН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ДИРИХЛЕНИН МАСЕЛЕСИ

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ С ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

SINGULARLY PERTURBED DIRICHLET PROBLEM WITH A SINGULAR POINT

Бекмурза уулу Ыбадылла
Бекмурза уулу Ыбадылла
Bekmurza uulu Ybadylla

аспирант, Ош мамлекеттик университети
аспирант, Ошский государственный университет
Graduate Student, Osh State University
ybekmurzauulu@oshsu.kg

ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТКЕ ЭЭ БОЛГОН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ДИРИХЛЕНИН МАСЕЛЕСИ

Аннотация

Илимдин көптөгөн тармактарында татаал маселелер кичи параметрди кармаган дифференциалдык теңдемелер аркылуу сүрөттөлөт. Белгилүү физиктердин бири: "Эгерде кубулушта кичи параметр жок болсо, анда ал физикалык кубулуш болбойт" деген сөздү айткан. Эң жогорку тартиптеги туунду белгисинин астында кичи параметр катышкан дифференциалдык теңдеме (кадимки же жекече туундулуу) сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдеме деп аталат. Мындай теңдемелер электротехникада, радиотехникада, механикада, гидродинамикада, аэродинамикада ж.б. кездешет. Макала өзгөчө чекитке ээ болгон сингулярдык козголгон Дирихленин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасын тургузууга арналган. Алгач маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасы каралып жаткан кесиндинин бардык чекиттеринде тургузулат, андан соң бул ажыралманын калдык мүчөсү бааланат.

Ачкыч сөздөр: Дирихленин маселеси, кадимки дифференциалдык теңдеме, сингулярдык козголуу, чек аралык катмар, максимум принциби, өзгөчө чекит.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ С ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

Аннотация

Во многих областях науки сложные задачи описываются дифференциальными уравнениями с малым параметром. Одному известному физику приписывается фраза: «Явление не является физическим, если в нем отсутствует малый параметр». Дифференциальное уравнение (обыкновенные или в частных производных) с малым параметром при старшей производной называют сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением. Такие уравнения возникают в электротехнике и радиотехнике, механике, гидра- и аэродинамике и т.д. Статья посвящена построению асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Дирихле с особой точкой. Вначале строится асимптотическое разложение решения задачи на всем отрезке, затем оценивается остаточный член этого разложения.

Ключевые слова: задача Дирихле, обыкновенное дифференциальное уравнение, сингулярное возмущение, пограничный слои, принцип максимума, особая точка.

SINGULARLY PERTURBED DIRICHLET PROBLEM WITH A SINGULAR POINT

Abstract

In many fields of science, complex problems are described by differential equations with small parameters. A famous physicist is credited with the phrase: "A phenomenon is not physical if it lacks a small parameter." Differential equations (ordinary or partial derivatives) with a small parameter at the highest derivative are called singularly perturbed. Such equations arise in electrical and radio engineering, mechanics, hydro and aerodynamics, etc. The article is devoted to the construction of the asymptotics of solving the singularly perturbed Dirichlet problem with a singularly point. First, an asymptotic expansion of the solution of the problem is constructed over the entire interval, then the residual term of this expansion is estimated.

Keywords: Dirichlet problem, ordinary differential equation, singularly perturbed, boundary layer, maximum principle, singular point.

Киришүү

Илимдин көптөгөн тармактарында татаал маселелер кичи параметрди кармаган дифференциалдык теңдемелер аркылуу сүрөттөлөт [1]-[4]. Белгилүү физиктердин бири: "Эгерде кубулушта кичи параметр жок болсо, анда ал физикалык кубулуш болбойт" деген сөздү айткан. Эң жогорку тартиптеги туунду белгисинин астында кичи параметр катышкан дифференциалдык теңдеме (кадимки же жекече туундулуу) сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдеме деп аталат. Мындай теңдемелер электротехникада, радиотехникада, механикада, гидродинамикада, аэродинамикада ж.б. кездешет [4; 11]. Макала өзгөчө чекитке ээ болгон сингулярдык козголгон Дирихленин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасын тургузууга арналган.

Маселенин коюлушу

Төмөнкү Дирихленин маселесин изилдейбиз

$$\varepsilon y''(x) - xp(x)y'(x) - q(x)y(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$y(0) = a,\ y(1) = b, \tag{2}$$

мында ε – кичи параметр, $p(x), q(x) > 0$: $x \in [0,1]$; $p, q, f \in C^\infty[0,1]$, $a, b - const$, $p(0) = q(0) = 1$.

(1)- теңдемеде $q(x)$ функциясы каралып жаткан $x\in[0,1]$ кесиндиде оң болгондуктан, (1)-(2)- маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз болот. Бизди (1)-(2)- маселенин чыгарылышы каралып жаткан кесиндиде кичи параметр нөлгө умтулгандагы абалы кызыктырат.

Эгерде формалдуу түрдө кичи параметрди нөлгө барабарласак, анда биз козголбогон маселени алабыз:

$$xp(x)y'_0(x) + q(x)y_0(x) = -f(x), \tag{3}$$

$$y_0(0) = a,\ y_0(1) = b. \tag{4}$$

(3)- дифференциалдык теңдеме биринчи тартипте, ошондуктан жалпы учурда ал теңдеменин чыгарылышы (4)- чек аралык шарттарды канааттандырбайт. (1)- теңдемеде $y'(x)$тин коэффициенти $x\in[0,1]$ кесиндиде терс болгондуктан классикалык чек аралык катмар бул кесиндинин оң учунда болот, б.а. x=1 чекиттин чеке белинде [4]-[9].

Бирок (1)- теңдемеде өзгөчө чекит x=0 чекиттин чеке белинде. Ошондуктан, (3)- теңдемени интегралдаганда чектик шарттарга көңүл бурбай, аны чексиз дифференцирленүүчү боло тургандай интегралдайбыз:

$$y_0(x) = -\frac{f(x)}{q(x)} + e^{-Q(x)}\int_0^x \left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)}ds, \quad \text{мында } Q(x) = \int_1^x \frac{q(t)}{tp(t)}dt. \tag{5}$$

Для решения этой проблемы решение первой краевой задачи (1), (2) будем искать в виде:

$$y(x)=V(x)+\Pi(t)+Z(\tau) \tag{6}$$

мында $V(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x),\ \Pi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t),\ \ t=x/\mu,\ Z(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$

$\tau=(1-x)/\varepsilon,\ \mu=\sqrt{\varepsilon}.$

(5)ти (1)-(2)- маселеге коюуп, төмөнкү маселелерди алабыз:

$$\varepsilon V''(x)-xp(x)V'(x)-q(x)V(x)=f(x),\ x\in[0,1],\ V\in C^{\infty}[0,1], \tag{7}$$

$$\Pi''(t)-tp(\mu t)\Pi'(t)-q(\mu t)\Pi(t)=0, \tag{8}$$

$$\pi_0(0)=a-v_0(0),\pi_{2k-1}(0)=0,\ \pi_{2k}(0)=-v_k(0),\lim_{t\to\infty}\pi_{k-1}(t)=0,\ k\in N.$$

$$Z''(\tau)+(1-\varepsilon\tau)p(1-\varepsilon\tau)Z'(\tau)-\varepsilon q(1-\varepsilon\tau)Z(\tau)=0, \tag{9}$$

$$z_0(0)=b-v_0(1),\ z_k(0)=-v_k(1),\ \lim_{\tau\to\infty}z_k(\tau)=0.$$

$V(x)$ функциясын $V(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)$ экендигин эске алып, (7)ден төмөнкү теңдемелерди алабыз:

$$xp(x)v'_0(x)+q(x)v_0(x)=-f(x),$$

$$xp(x)v'_k(x)+q(x)v_k(x)=v''_{k-1}(x),\ k\in N.$$

бул теңдемелерди $v_k\in C^{\infty}[0,1]$ шарты аткарыла тургандай кылып интегралдайбыз, (5) эске алуу менен, төмөнкүлөргөө ээ болобуз:

$$v_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds,\qquad v_0\in C^{\infty}[0,1];$$

$$v_k(x)=\frac{v''_{k-1}(x)}{q(x)}-e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{v''_{k-1}(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds,\qquad v_k\in C^{\infty}[0,1],k\in N;$$

мында $Q(x)=\int_1^x\frac{q(t)}{tp(t)}dt.$

(8)-маселени карайбыз. $\Pi(t)$ функциясы $\Pi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t),$ мында $t=x/\mu$ болгондуктан төмөнкү барабардык орун алат:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi''_k(t)-t\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\sum_{j=0}^{k}t^j p_j\pi'_{k-j}(t)-\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\sum_{j=0}^{k}t^j q_j\pi_{k-j}(t)=0, \qquad (10)$$

мында $p(x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j x^j,\ p_j=\dfrac{1}{j!}p^{(j)}(0),\ q(x)=\sum_{j=0}^{\infty}q_j x^j,\ q_j=\dfrac{1}{j!}q^{(j)}(0).$

(10)- барабардыкты жөнөкөйлөштүрөбүз:

$$\pi''_k(t)-t\sum_{j=0}^{k}t^j p_j\pi'_{k-j}(t)-\sum_{j=0}^{k}t^j q_j\pi_{k-j}(t)=0,\ k=0,1,...$$

же

$$\pi''_0(t)-t\pi'_0(t)-\pi_0(t)=0,\ t\in(0,\infty), \qquad (11)$$

$$\pi_0(0)=a-v_0(0),\ \lim_{t\to\infty}\pi_0(t)=0; \qquad (12)$$

$$\pi''_k(t)-t\pi'_0(t)-\pi_k(t)=G_k(t,\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1}),\ t\in(0,\infty), \qquad (13)$$

$$\pi_k(0)=0,\ при\ k=2n-1,\ \pi_k(0)=-v_n(0),\ при\ k=2n,\ \lim_{t\to\infty}\pi_k(t)=0,\ k,n\in N, \qquad (14)$$

мында

$$G_k(t,\pi_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1})=t\sum_{j=1}^{k}t^j p_j\pi'_{k-j}(t)+\sum_{j=1}^{k}t^j q_j\pi_{k-j}(t),\ k\in N,$$

Кадимки дифференциалдык теңдемелердин теориясынан бизге белгилүү болгондой, $z''(t)-tz'(t)-z(t)=0$ бир тектүү теңдеменин сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштары $z_1(t)=e^{t^2/2},\ z_2(t)=e^{t^2/2}\int_{\infty}^{t}e^{-s^2/2}ds$, ал эми бул чыгарылыштардын вронскианы $W(z_1,z_2)=e^{t^2/2}$ болот.

Ошондуктан (11)-(12) маселенин чыгарылышы:

$$\pi_0(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(a-v_0(0))e^{t^2/2}\int_{\infty}^{t}e^{-s^2/2}ds \text{ болот, мында } \pi_0(t)=O(t^{-1}),\ t\to\infty.$$

Ал эми бир тектүү эмес

$$z''(t)-tz'(t)-z(t)=f(t),\ t\in(0,\infty),\ z(0)=A,\ \lim_{t\to\infty}z(t)=0$$

маселенин чыгарылышы

$$z(t)=\frac{2A}{\sqrt{\pi}}z_2(t)-z_1(t)\int_0^t f(s)\int_\infty^s e^{-\tau^2/2}d\tau ds+z_2(t)\int_0^t f(s)ds \text{ болот.}$$

Аналогиялуу түрдө (13)-(14) маселелердин чыгарылыштарын жазууга болот. Бул жерде белгилеп кетүү керек, $\pi_k(t)$ чек аралык функциялар чек аралык катмардын сыртында экспоненциалдуу эмес, даражалуу мүнөздө кемийт, андан сырткары $\pi_k(t)\in C^\infty[0,\infty)$, $k\in \boldsymbol{N}_0$.

(9)- маселеден төмөнкү маселелерди түзүп алабыз

$$z_0''(\tau)+p(1)z'_0(\tau)=0,\ \tau\in(0,\infty), \tag{15}$$

$$z_0(0)=b-v_0(1), \lim_{\tau\to\infty} z_0(\tau)=0\ ; \tag{16}$$

$$z_k''(\tau)+p(1)z'_k(\tau)=\tilde{G}_k(\tau,z_0,z'_0,...,z_{k-1},z'_{k-1}),\ \tau\in(0,\infty), \tag{17}$$

$$z_k(0)=-v_k(1),\ \ \lim_{\tau\to\infty} z_k(\tau)=0, k\in N. \tag{18}$$

мында $\tilde{G}_k(\tau,z_0,z'_0,...,z_{k-1},z'_{k-1})=-\sum_{j=1}^{k}\tau^j\tilde{p}_j z'_{k-j}+\tau\sum_{j=0}^{k-1}\tau^j\tilde{p}_j z'_{k-j-1}+\sum_{j=0}^{k}t^j\tilde{q}_j\, z_{k-j-1}$

$$\tilde{p}_j=\frac{(-1)^j}{j}p^{(j)}(1),\ \ \tilde{q}_j=\frac{(-1)^j}{j}q^{(j)}(1), j=0,1,...$$

(15)-(16), (17)-(18) маселелердин чыгарылыштары жашайт жана жалгыз болот [7]:

$$z_0(\tau)=\big(b-v_0(1)\big)e^{-p(1)\tau},$$

$$z_k(\tau)=-v_k(1)e^{-p(1)\tau}+\tau e^{-p(1)\tau}\tilde{H}_k(\tau), k\in N,$$

мында $\tilde{H}_k(\tau)$ – даражасы k га барабар болгон көп мүчөлөр.

Бул жерде $z_k(\tau)$ чек аралык функциялар x=1 четки чекиттин чеке белинде экспоненциалдуу мүнөздө кемийт жана $z_k(\tau)\in C^\infty[0,\infty)$, $k\in \boldsymbol{N}_0$.

Ошентип биз (6)- чыгарылыштын бардык мүчөлөрүн аныктап алдык. Эми тургузулган (6)-катардын калдык мүчөсүн баалайбыз.

Мейли $y(x)=V_n(x)+\Pi_{2n}(t)+Z_n(\tau)+R_n(x)$ болсун, мында $V_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x), \Pi_{2n}(t)=\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t),\quad Z_n(\tau)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau),$

$R_n(x)$ – калдык мүчө.

Калдык мүчөгө карата төмөнкү чек аралык маселени алабыз:

$$\varepsilon R_n''(x)-xp(x)R'_n(x)-q(x)R_n(x)=O(\varepsilon^{n+1/2}), \varepsilon\to 0,\ 0\le x\le 1, \tag{19}$$

$$R_n(0)=0, R_n(1)=0. \qquad (20)$$

(19)-(20) маселеге максимум принцибин [10] колдонобуз:

$$R_n(x)=O(\varepsilon^{n+1/2}), \ \ \varepsilon\to 0, x\in[0,1].$$

Натыйжада биз төмөнкү теореманы далилдедик:

Теорема. (1)-(2)- өзгөчө чекитке ээ болгон Дирихленин маселесинин чыгарылышы үчүн $x\in[0,1]$ кесиндиде

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau)+O\left(\varepsilon^{n+1/2}\right),$$

асимптотикалык ажыралма орун алат, мында $t=x/\mu, \tau=(1-x)/\varepsilon, \mu=\sqrt{\varepsilon}.$

Колдонулган адабияттар

1. Shiromani R., Shanthi V., Ramos H. A computational method for a two-parameter singularly perturbed elliptic problem with boundary and interior layers // Mathematics and Computers in Simulation. 2023, Vol. 206, pp. 40–64.
2. Liu Z., Wei J., Zhang J. A new type of nodal solutions to singularly perturbed elliptic equations with supercritical growth // Journal of Differential Equations. 2022. Vol. 339. pp. 509–554.
3. Smith J. Singular Perturbation Theory (Cambridge University press, Cambridge, 1985).
4. Nayfeh A.H. Perturbation Methods, Pure and Applied Mathematics (Wiley-Inter science Series of Texts, Monographs and Tracts, New York, 1973).
5. Tursunov D. A. and Bekmurza uulu Ybadylla Asymptotic Solution of the Robin Problem with a Regularly Singular Point // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 613–620.
6. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 271–281.
7. Bekmurza uulu Ybadylla, Kozhobekov K.G., Tursunov D.A. Asymptotics of solutions of boundary value problems for the equation εy'' +xp(x)y' – q(x)y = f // EURASIAN MATHEMATICAL JOURNAL. Vol. 13, No 3 (2022), 82 – 91.
8. Kozhobekov K.G., Tursunov D.A. Asymptotic solution of a singularly perturbed Cauchy problem with a turning point // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Т. 254. № 6. С. 788-792.
9. Kozhobekov K.G., Tursunov D.A., Omaralieva G.A. Asymptotics of the solution of bisingular boundary value problems with a biboundary layer // Журнал Лобачевского по математике. 2023. Т. 43. № 11. С. 3198-320.
10. Protter M.H., Weinberger H.F., Maximum-Principles in Differential Equations (Diff.Equat.Ser. Prentice-Hall, Inc. X, N. J., 1967).
11. Бекмурза Уулу, Ы. Өзгөчө чекитке ээ болгон сингулярдык козголгон чектик маселенин чыгарылышынын асимптотикасы / Ы. Бекмурза Уулу // Вестник Ошского государственного университета. – 2023. – No. 4. – P. 87-95. – DOI: 10.52754/16948610_2023_4_10. – EDN: DQLNIP.