ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

ISSN: 1694-7452 **e-ISSN: 1694-8610**

№2/2024, 345-353

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.928.2

DOI: 10.52754/16948610_2024_2_34

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН КВАЗИСЫЗЫКТУУ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЖАКЫНДАШУУСУ

ASYMPTOTIC APPROXIMATIONS OF THE SOLUTIONS TO BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THIRD ORDER SINGULARY PERTURBED QUASILINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Абдувалиев Абдыганы Осмонович
Абдувалиев Абдыганы Осмонович
Abduvaliev Abdygany Osmonovich

к.ф.-м.н., доцент, Ошский государственный университет
ф.-м.и.к., доцент, Ош мамлекеттик университети
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Osh State University
aabduvaliev@oshsu.kg

Абдималик кызы Альбина
Абдималик кызы Альбина
Abdimalik kyzy Albina

магистрант, Ошский государственный университет
магистрант, Ош мамлекеттик университети
Master's Student, Osh State University
abdimalikovnaalbina@gmail.com

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация

В статье рассматриваются краевые задачи для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, которые являются линейными относительно второй производной неизвестной функции. Асимптотические приближения решений строятся в случае, когда коэффициент при второй производной, вычисленной в решении вырожденного уравнения, имеет единственный внутренний нуль.

Ключевые слова: асимптотические приближения, сингулярно возмущенные уравнения, квазилинейное уравнение, краевая задача, малый параметр.

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН КВАЗИСЫЗЫКТУУ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЖАКЫНДАШУУСУ

Аннотация

Макалада белгисиз функциянын экинчи тартиптеги туундусуна карата сызыктуу болгон үчүнчү тартиптеги синулярдуу козголгон квазисызыктуу кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн чектик маселелер каралат. Чечимдердин асимптотикалык жакындашуусу кубулган теңдеменин чечиминде эсептелинген экинчи тартиптеги туундунун коэффициенти жалгыз ички нөлгө ээ болгон учурда тургузулат.

Ачкыч сөздөр: асимптотикалык жакындашуу, сингулярдык козголгон теңдемелер, квазисызыктуу теңдеме, чектик маселе, кичине параметр.

ASYMPTOTIC APPROXIMATIONS OF THE SOLUTIONS TO BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THIRD ORDER SINGULARY PERTURBED QUASILINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

The article considers boundary value problems for singularly perturbed ordinary differential equations of the third order, which are linear with respect to the second derivative of an unknown function. Asymptotic approximations of solutions are constructed in the case when the coefficient for the second derivative calculated in the solution of a degenerate equation has a single internal zero.

Keywords: asymptotic approximations, singularly perturbed equations, quasi-linear equation, boundary value problem, small parameter.

Введение

Пусть дана краевая задача

$$\varepsilon y''' = f(x, y, y')y'' + g(x, y, y'), a < x < b, \qquad (1)$$

$$y(a, \varepsilon) = A_{o,}\, y'(a, \varepsilon) = A_1, y(b, \varepsilon) = B, \qquad (2)$$

где $\varepsilon > 0$-малый параметр, $f(x, y, y')$ и $g(x, y, y')$ - данные функции, а $A_{o,}\, A_{1,}\, B -$ постоянные.

Вырожденное уравнение, которое получается из (1) при $\varepsilon = 0$, имеет вид

$$f(x, u, u')u'' + g(x, u, u') = 0. \qquad (3)$$

Асимптотическое разложение решения краевой задачи (1), (2) ранее построено в случае, когда вырожденное уравнение (3) имеет решение $u = u(x)$, $a \le x \le b$, удовлетворяющее одному из следующих условий:

1) $u(a) = A$, $u(b) = B$, $f(x, u(x), u'(x) < 0$ при $a \le x \le b$;
2) $u(a) = A, u'(a) = A_1$, $f\big(x, u(x), u'(x)\big) > 0$ при $a \le x \le b$

(см. [1]), т.е. функция

$$p(x) \equiv f(x, u(x), u'(x)) \qquad (4)$$

на отрезке $[a, b]$ принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения.

Если функция $p(x)$, определенная формуле (4), имеет нули на отрезке $[a, b]$, то построение асимптотического разложения решения задачи (1), (2) является сложным. Одной из трудностей этого случая является то, что дифференциальные уравнения относительно коэффициентов регулярной части асимптотического разложения имеют особенности в нулях функции $p(x)$. В настоящей статье рассматриваются случаи, когда функция $p(x)$ обращается в нуль в единственной внутренней точке отрезке $[a, b]$. Аналогичный случай для сингулярно возмущенного дифференциального второго порядка рассмотрен в работе [2].

Пусть выполнены следующие предположения:

I. $f(x, y, z)$, $g(x, y, z) \in C^\infty(D)$, где D= $[a, b] \times R^2$.

II. Существует решение $u = u(x) \in C^\infty[a, b]$ вырожденного уравнения (3), удовлетворяющее условиям:

$$u(a) = A, u(b) = B. \qquad (5)$$

Введем функцию

$$q(x) = f_z(x, u(x), u'(x))u''(x) + g_z(x, u(x), u'(x)). \qquad (6)$$

III. $p(x_o) = 0,\ |p(x)| \neq 0$ при $x \in [a,b] - \{x_o\},\ q(x_o) > 0,$ где $x_o \in (a,b)$ $\big(x_o -$ некоторая точка промежутка $(a,b)\big)$, где $p(x)$ и $q(x)$ определены по формулам (4) и (6).

IV. Пусть выполнено одно из условий:

a) $u'(a) = A_1$,

b) $\xi \int_o^{\xi} f\,(a, u(a), u'(a) + s)ds < 0$ при $0 < |\xi| \leq |A_1 - u'(a)|$.

Структура асимптотического разложения решения зависит от знаков чисел $p(a)$ и $p(b)$ (см. (4)).

Рассмотрим всевозможные случаи относительно знаков чисел $p(a)$ и $p(b)$.

1^o. $p(a) < 0,\ p(b) < 0$.

В этом случае, формальное разложение решения задачи (1), (2) ищем в виде

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{m=o}^{\infty} \varepsilon^m\,[\bar{y}_m(x) + \Pi_m(\tau)], \qquad (7)$$

где $\tau = \frac{x-a}{\varepsilon}$, а $\bar{y}_m(x)$ и $\Pi_m(\tau) -$ искомые коэффициенты разложения.

Подставляя (7) в (1) и применяя методы работы [1] получим уравнения относительно коэффициентов $\bar{y}_m(x)$ и $\Pi_m(\tau)$.

$$f(x, \bar{y}_o(x), \bar{y}'_o(x))\,\bar{y}''_o(x) + g(x, \bar{y}_o(x), \bar{y}'_o(x)) = 0, \qquad (8)$$

$$p(x)\bar{y}''_m(x) + q(x)\bar{y}'_m(x) + s(x)\bar{y}'_m = P_m(x), m \geq 1, \qquad (9)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ определяются соответственно по формулам (4) и (6),

$s(x) = f_y(x, \bar{y}_o(x), \bar{y}'_o(x)\bar{y}''_o + g_y\big(x, \bar{y}(x), \bar{y}'_o(x)\big)$,

$P_m(x)$ –определенным образом выражается через функции $\bar{y}_o(x), \bar{y}_1(x), \ldots .\bar{y}_{m-1}(x)$.

Положим, что

$\bar{y}_o(x) = u(x), a \leq x \leq b.$

Тогда из предположения II следует, что $\bar{y}_o(x)$ является решением вырожденного уравнения (3) и удовлетворяет дополнительным условиям:

$$\bar{y}_o(b) = A, \qquad \bar{y}_o(b) = B.$$

Согласно результатом работы [3] при каждом натуральном $m \geq 1$ для любой пары чисел $\beta_{m,}\ \alpha_m$ уравнение (9) имеет единственное решение, удовлетворяющее, условиям: $\bar{y}_m(b) = \beta_m$, $\bar{y}'_m(b) = \alpha_n$ причем это решение принадлежит классу беспоконечно дифференцируемых на отрезе $[a,b]$ функций $(C^{\infty}[a,b])$.

Из третьего из условий (2) следует, что $\beta_m \ = 0$. Поэтому, мы берем решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям

$$\bar{y}_m(b) = 0, \qquad \bar{y'}_m(b) = \ \alpha_m\ , m \geq 1, \tag{10}$$

где $\alpha_m -$ пока неизвестный параметр. Тогда решение уравнения (9), при каждом натуральном $m \geq 1$, удовлетворяющее условиям (10) будет зависет от параметра α_m:

$$y_m = \bar{y}_m(x, \alpha_m\ ), m \geq 1. \tag{11}$$

Теперь перейдем к нахождению функций $\Pi_m(\tau) \equiv \Pi_m\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right), m \geq 1.$

Требуем, чтобы функции $\Pi_m(\tau)$ являлись погранслойными функциями [1].

Из второго из условий (2) имеем, что

$$\frac{d\Pi_o}{d\tau}(0) = 0.$$

Поэтому достаточно положить $\quad \Pi_o(\tau) \equiv 0.$

Применяя методы работы [1] получим уравнения для $\Pi_m(\tau)\ , m \geq 1$:

$$\frac{d^3\Pi_1}{d\tau^3} = f\left(a, u(a), u'(a) + \frac{d\Pi_1(\tau)}{d\tau}\right)\frac{d^2\Pi_1}{d\tau^2}, \tag{12}$$

$$\frac{d^3\Pi_m}{d\tau^3} = f\left(a, u(a), u'(a) + \frac{d\Pi_1(\tau)}{d\tau}\right)\frac{d^2\Pi_m}{d\tau^2} + S_m(\tau), \qquad m \geq 2, \tag{13}$$

где $S_m(\tau)$ определенным образом выражается через $\Pi_1(\tau), \dots . \Pi_{m-1}(\tau)$ (см. [1]).

Из условия $y'(a, \varepsilon) = A$ (см.(2)) получаем, что

$$\frac{d\Pi_1}{d\tau}(0) = A_1 - \bar{y'}_o(a), \tag{14}$$

$$\frac{d\Pi_1}{d\tau}(0) = \bar{y'}_{m-1}(a), \ \ m \geq 2. \tag{15}$$

Введем обозначения

$$\frac{d\Pi_m(\tau)}{d\tau} \equiv v_m(\tau), \ m \geq 1.$$

Тогда уравнения (12), (13) и условия (14), (15) переходят к следующим уравнениям и условиям:

$$\frac{d^2v_1}{d\tau^2} = f\big(a, u(a), u'(a) + v_1(\tau)\big)\frac{dv_1}{d\tau}, \tag{16}$$

$$\frac{d^2v_m}{d\tau^2} = f\big(a, u(a), u'(a) + v_1(\tau)\big)\frac{dv_m}{d\tau} + P_m(b), \qquad m \geq 1, \tag{17}$$

$$v_1(0) = \mathrm{A}_1 - \bar{\mathrm{y}}'_{\mathrm{o}}(0), \tag{18}$$

$$v_m(0) = -\bar{y}'_{m-1}(a), m \geq 1. \qquad (19)$$

Потребуем еще выполнения условий

$$v_m(\tau) \to 0 \text{ при } \quad \tau \to +\infty, \qquad (20_m)$$

которые означают, что функции $v_m(\tau)$, $\mathrm{m} \geq 1$, являются пограничными функциями.

Из результатов работы [4] следует, что при выполнении предположения IV задача (16), (18), (20_1) имеет единственное решение, причем это решение и его производные являются погранслойными функциями. Из определения функции $v_1(\tau)$, $\mathrm{m} \geq 1$, следует, что

$$\Pi_1(\tau) = c + \int_o^\tau v_1, d\tau, \ \mathrm{m} \geq 1,$$

где $c - const$. Здесь c выбирается единственным образом так, что функции $\Pi_1(\tau)$ является погранслойной функцией.

Теперь из условии $y(a, \varepsilon) = A_o$ (см.(2)) и (11) получим, что

$$\bar{y}_1(a, \alpha_1) + \Pi_1(0) = 0. \qquad (21)$$

Из того, что дифференциальные уравнения (9) являются линейными, уравнение (21) такие является линейной относительно параметра α_1 и может быть представлено в виде

$$k\alpha_1 = \gamma_1, \qquad (22)$$

где k и γ_1 $-$определенные числа.

Для того , чтобы из (22) однозначно определить α_1 мы требуем выполнения следующего предположния.

V. $\quad k \neq O.$

Тогда из (21) (или из (22)) однозначно определим значение параметра α_1 и окончательно определим функцию $\bar{y}_1(x)$.

Далее из уравнений (17) и из условий (19), (20_m) при $m = 2$ однозначно определяем $v_2(\tau)$, затем $\Pi_2(\tau)$. Причем по результатам работы [4] функция $\Pi_2(\tau)$ и ее производные являются погранслойными функциями.

Значение параметра α_2 (см.11)) определяется из условие

$$\bar{y}_2(a, \alpha_2) + \Pi_2(0) = 0.$$

Это уравнение может быть представлено в виде $k\alpha_2 = \gamma_2$, где k – определено выше (см. (22)), а $\gamma_2 -$ некоторое число. По предположенно V это уравнение имеет единственное решение.

Подставляя найденное значение α_2 в (11) при $m = 2$ окончательно определим функцию $\bar{y}_2 = \bar{y}_2(x, \alpha_2)$.

Продолжая этот процесс можем построить любые коэффициенты разложения (7).

Ведем обозначение

$$\Upsilon_n(x,\varepsilon) = \sum_{m=o}^{n} \varepsilon^m \left[\bar{y}_m(x) + \Pi_m\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)\right], a \le t \le b\,, \qquad (23)$$

Теорема 1. Пусть выполнены предположения $I - V$. Тогда найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для всякого $\varepsilon\epsilon(0.\varepsilon_0)$ существует решение y=$y(x,\varepsilon)$ краевой задач (1), (2) такое, что это решение и его первая производная имеют асимптотические представления:

$$y(x,\varepsilon) = \Upsilon_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), a \le x \le b,$$

$$y\,'(x,\varepsilon) = \Upsilon_n{}'(x,\varepsilon) + \ O(\varepsilon^n), a \le x \le b.$$

Доказательство теоремы проводится с построением барьерных функций [5].

2^0. $p(a) < 0, \qquad p(b) > 0.$

В этом случае, решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$y(x,\varepsilon) = \varepsilon^m[\bar{y}_m(x) + \Pi_m(\tau) + Q_m(\xi)], \qquad (24)$$

где $\tau = \frac{x-a}{\varepsilon}, \xi = \frac{x-b}{\varepsilon}$, а $\bar{y}_m(x), \Pi_m(\tau)$, и $Q_m(\xi)$- искомые коэффициенты разложения. Для коэффициентов $\bar{y}_m(x)$, m=0,1,2,.., получим те же уравнения (8) и (9) , что и в случае 1^0.

И в этом случае положим $\bar{y}_o(x) \equiv u(x)$ (см. предположение II).

Используя результаты работы [3] получим, что при каждом натуральном $n \ge 1$ для любого числа α_m уравнение (9) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$\bar{y}'_m(b) = \alpha_m. \qquad (25)$$

Причем, это решение принадлежит классу $C^\infty[a,b]$.

Решение уравнения (9), удовлетворяеющее условию (25) обозначим через

$$\bar{y}_m = \bar{y}_m(x, \alpha_m), \mathrm{m} \ge 1. \qquad (26)$$

Как и в случае 1^0 положим , что

$$\Pi_o(\tau) \equiv 0 \text{ и } Q_o(\xi) \equiv 0.$$

Функция $\Pi_1(\tau) -$ определится точно также, как и в случае 1^0.

Параметр α_1 определяется из алгебраического уравнения (21). Из предположения V получим, что уравнения (21) относительно неизвестного параметра α_1 имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_1^0$. Подставляя найденное значение параметра в (26) при $m = 1$, окончательно находим

$\bar{y}_1 = \bar{y}_1(x, \alpha_1^0)$.

Теперь определим теперь функцию $Q_1(\tau)$. Относительно этой функции получим уравнение

$$\frac{d^3Q_1}{d\xi^3} = f\left(b, u(b), u'(b) + \frac{dQ_1}{d\xi}\right)\frac{d^2Q_1}{d\xi^2}, \qquad (27)$$

и условия

$$Q_1(0) = -\bar{y}_1(b, \alpha_1), \qquad (28)$$

$$Q_1(0) \to 0 \text{ при } \xi \to -\infty. \qquad (29)$$

Введем обозначение

$$w(\xi) \equiv \frac{dQ_1(\xi)}{d\xi}.$$

Тогда уравнение (27) переходит к уравнению:

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} = f(b, u(b), u'(b) + w)\frac{dw}{d\xi}. \qquad (30)$$

Это уравнение рассмотрим с дополнительными условиями

$$w(o) = \delta, w(\xi) \to o \text{ при } \xi \to -\infty. \qquad (31)$$

где $\delta -$ неизвестный параметр, который будет определен ниже.

Согласно результатам работы [4] задача (30), (31) для любого параметра δ имеет единственное решение $w = w(\xi, \delta)$, которое является погранслойной функцией.

Для каждого фиксированного значения параметра δ существует единственная функция $Q_1(\xi, \delta)$ такая, что

$\frac{dQ_1(\xi,\delta)}{d\xi} \equiv w(\xi, \delta)$ и $Q_1(\xi, \delta) \to o$ при $\xi \to -\infty$.

Значение параметра δ выберим из условия (28):

$$Q_1(o, \delta) = -\bar{y}_1(b, \alpha_1^0). \qquad (32)$$

VI. Предположим, что уравнения (32) имеет решение $\delta = \delta_o$ и

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \delta}(o, \delta_o) \neq o.$$

При выполнении предположения VI, пологая $\delta = \delta_o$ окончательно находим функцию $Q_1 = Q_1(\tau, \delta_o)$.

Аналогично определяются $Q_2(\tau)$, $Q_3(\tau)$, ...

Таким образом определены все коэффициенты ряда (24), который является формальным асимптотическим разложением решения задач (1)-(2).

Введем обозначение

$$\Upsilon_n(x, \varepsilon) = \sum_{k=o}^{n} \varepsilon^k \left[\bar{y}_k(x) + \Pi_k\left(\frac{t-a}{\varepsilon}\right) + Q_k\left(\frac{t-b}{\varepsilon}\right)\right]. \qquad (33)$$

Теорема 2. Пусть выполнены предположения I $-$ VI. Тогда для функции (33) выполняется заключение теоремы 1.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. –М.: наука, 1973, 272 с.
2. Абдувалиев А.О. Розов Н.Х., Сушко В.Г. Асимптотические представления решений некоторых сингулярно возмущенных задач. –ДАН СССР-1989-т. 304, №4, с.777-780.
3. Абдувалиев А.О. Асимптотические приближения решений краевых задач для системы Линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при одной из производных. Известия АН Кирг, ССР. Физ-техн. и матем. науки-1988, №2, с 12-15.
4. Howes F. A. and O’Malley, Jr.R.E. Singular perturbations of semilinear second order systems. –“lect. Notes Math.”, 1980, #827, p.131-150.
5. Розов Н.Х., Сушко В.Г. Барьерные функции и асимптотические решения сингулярно возмущенных краевых задач. Росс. Акад. Наук, Докл.,т.332(1993), №3.
6. Абдилазизова, А.А. Чектелбеген аймакта сызыктуу эмес маселенин өзгөчө учурдагы асимптотикалык баасы / А. А. Абдилазизова // Вестник Ошского государственного университета. – 2021. – Vol. 3, No. 1. – P. 4-9. – DOI: 10.52754/16947452_2021_3_1_4. – EDN: WVDXMR.