Математика, физика, техника. 2022, №1

УДК 517. 956

DOI: 10.52754/16947452_2022_1_12

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Абдумиталип уулу Кубатбек, преподаватель
kuba@oshsu.kg
Асылбеков Таалайбек Дүкөнбаевич, к. ф.- м. н., доцент
atd5929@mail.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Доказаны существование и единственность решения краевой задачи в прямогульнике для параболического уравнения четвертого порядка с переменным коэффициентом при младшом члене. Прямая y=const является четырехкратной характеристикой заданного уравнения. Методом понижения порядка уравнения, рассматриваемая задача сводится к первой краевой задаче для уравнения теплопроводности и краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. С помощью функции Грина получены представления решения рассматриваемых задач. Для доказательства единственности решения второй краевой задачи использован метод интегралов эн ергии. Приведен пример, в котором указана явный вид построенной функции Грина.*

Ключевые слова: *краевые задачи, существование, единственность, функция Грина, параболическое уравнение, уравнение четвертого порядка.*

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ПАРАБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕ

Абдумиталип уулу Кубатбек, окутуучу
kuba@oshsu.kg
Асылбеков Таалайбек Дүкөнбаевич, доцент, ф.-м.и. к.,
atd5929@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Өзгөрмөлүү кенже мүчөсү бар төртүнчү тартиптеги параболалык теңдеме үчүн тик бурчтукта чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген. y=const түз сызыгы берилген теңдеменин төрт эселүү характеристикасы болот. Теңдеменин даражасын төмөндөтүү методу менен каралып жаткан маселе жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси үчүн биринчи чек аралык маселеге жана кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн чек аралык маселеге келтирилген. Гриндин функциясы методун колдонуу менен каралуучу маселелердин чечимдеринин көрүнүштөрү алынган. Экинчи маселенин чечиминин жалгыздыгын далилдөөдө* *интегралдар энергиясы методу колдонулган. Гриндин функциясынын айкын түрдөгү көрүнүшү так аныкталган мисал келтирилген.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, жашашы, жалгыздыгы, Грин функциясы, параболалык теңдеме, төртүнчү даражадагы теңдеме.*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A FOURTH ORDER PARABOLIC TYPE EQUATION

Abdumitalip uulu Kubatbek, lecturer
kuba@oshsu.kg
Asylbekov Taalaibek Dukonbaevich, Ph.D., Associate Professor
atd5929@mail.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem in a rectangle for a fourth-order parabolic equation with a variable coefficient at the lowest term are proved. The straight line y=const is a quadruple characteristic of the given equation. By the method of lowering the order of the equation, the problem under consideration is reduced to the first boundary value problem for the heat equation and the boundary value problem for the second order ordinary differential equation. With the help of the Green's function, representations of the solution of the problems under consideration are obtained. To prove the uniqueness of the solution of the second boundary value problem, the method of energy integrals is used. An example is given in which the explicit form of the constructed Green's function is indicated.*

Keywords: *Boundary value problems, existence, uniqueness, Green's function, parabolic equation, fourth order equation.*

В области $D_1 = \{(x,y): 0 < x < \ell,\ 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$L_1 L_2 u = 0, \tag{1}$$

где

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c(x,y),$$

а $c(x,y)$ - заданная функция.

Уравнение (1) по классификации работы [1] называется уравнением параболического типа, так как уравнение характеристик $(dy)^4 = 0$ имеет четырех кратный действительный корень и характеристика которого является прямая $y = const$.

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y) \in C^{2+0}\left(\overline{D_1}\right) \cap C^{2+1}\left(D_1\right) \cap$, $\cap C^{4+0}\left(D_1\right)$ удовлетворяющее в области D_1 уравнению (1), краевым условиям

$$u(0,y) = \tau(y),\ u(\ell,y) = \varphi_1(y),\ 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,y) = \mu(y),\ u_{xx}(\ell,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \tag{3}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{4}$$

Причем выполняются следующие условия гладкости

$$\begin{gathered} \tau(y),\ \mu(y),\ \varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C[0,h], \\ c(x,y) \in C\left(D_1\right),\ \psi\left(x\right) \in C^2\left[0,\ell\right] \end{gathered} \tag{5}$$

и условия согласования

$$\tau(0) = \psi(0),\ \varphi_1(0) = \psi(\ell),\ \mu(0) = \psi''(0),\ \varphi_2(0) = \psi''(\ell). \tag{6}$$

Краевые задачи для уравнения $L_2 L_1 u = 0$ в прямоугольнике D_1 изучены в работах [2, 3].

Введем новую неизвестную функцию $\vartheta(x,y)$ следующим образом:

$$L_3 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\left(x,y\right)u = \vartheta(x,y),\ (x,y) \in D_1. \tag{7}$$

Тогда для $\vartheta(x,y)$ получаем первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0,\ (x,y) \in D_1, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \vartheta(0,y) = \chi_1(y),\ \vartheta(\ell,y) = \chi_2(y), 0 \le y \le h, \\ \vartheta(x,0) = \psi_1(x),\ 0 \le x \le \ell, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\chi_1(y)=\mu(y)+c(0,y)\tau(y),\ \chi_2(y)=\varphi_2(y)+c(\ell,y)\varphi_1(y),$$
$$\psi_1(x)=\psi''(x)+c(x,0)\psi(x).$$

Отметим также, что из (6) вытекает следующие условия согласования:

$$\chi_1(0)=\psi_1(0),\ \chi_2(0)=\psi_1(\ell).$$

Решение задачи (8), (9) известно, и представимо в виде [4]

$$\vartheta(x,y)=\int_0^y G_\xi\left(x,y;0,\eta\right)\chi_1\left(\eta\right)d\eta-\int_0^y G_\xi\left(x,y;\ell,\eta\right)\chi_2\left(\eta\right)d\eta+ \\ +\int_0^\ell G_\xi\left(x,y;\xi,0\right)\psi_1\left(\xi\right)d\xi, \tag{10}$$

где $G\left(x,y;\xi,\eta\right)$ - функция Грина, которая имеет вид

$$G\left(x,y;\xi,\eta\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\left(y-\eta\right)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left(-\frac{\left(x-\xi+2n\ell\right)^2}{4\left(y-\eta\right)}\right)-\exp\left(-\frac{\left(x+\xi+2n\ell\right)^2}{4\left(y-\eta\right)}\right)\right]$$

После определения $\vartheta(x,y)$, задача 1 сводится к решению следующей задаче.

Задача 2. Найти решение уравнения (7), удовлетворяющее краевым условиям (2).

Сначала докажем единственность решения задачи 2. Имеет место теорема.

Теорема 1. Если

$$\forall(x,y)\in\overline{D_1}:c(x,y)\le 0, \tag{11}$$

тогда решение задачи 2 единственно.

Для доказательство теоремы 1, рассмотрим однородную задачу:

$$L_3u=0,\ \left(x,y\right)\in D_1, \tag{12}$$

$$u(0,y)=0,\ u(\ell,y)=0,\ 0\le y\le h. \tag{13}$$

Умножая уравнение (12) на $u(x,y)$ и проинтегрируя полученное равенство по x в пределах от 0 до ℓ имеем

$$\int_0^{\ell} uL_3u\,d\xi \equiv \int_0^{\ell}\left[u_x^2(x,y)-c(x,y)u^2(x,y)\right]dx \equiv 0\,. \qquad (14)$$

При выполнении условия (11) из тождества (14) заключаем, что $u(x,y)=A(y)$, где $A(y)$ - произвольная функция. Отсюда заключаем, что для выполнения условия (13), должно быть $\forall y\in[0,h]: A(y)\equiv 0.$ Следовательно $\forall (x,y)\in\overline{D_1}: u(x,y)\equiv 0.$ Теорема доказана.

Для доказательства существования решения задачи 2 введем новую неизвестную функцию $w(x,y)$, следующим образом:

$$w(x,y)=u(x,y)-u_0(x,y), \qquad (15)$$

где

$$u_0(x,y)=\frac{\ell-x}{\ell}\tau(y)+\frac{x}{\ell}\varphi_1(y).$$

Нетрудно заметить, что $u_0(x,y)$ является решением уравнения (12), удовлетворяющее краевым условиям (2).

Тогда для определения $w(x,y)$ получаем следующую задачу

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}+c(x,y)w(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in D_1 \qquad (16)$$

$$w(0,y)=0,\ w(\ell,y)=0,\ 0\le y\le h, \qquad (17)$$

где

$$f(x,y)=\vartheta(x,y)-c(x,y)u_0(x,y).$$

Решение задачи (16), (17) представим в виде

$$w(x,y)=\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,y)f(\xi,y)\,d\xi, \qquad (18)$$

где $G_1(x,\xi,y)$ - функция Грина [5], удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\forall \xi \in (0,\ell): G_1(x,\xi,y)$ удовлетворяет уравнению $L_{3x}G_1(x,\xi,y)=0, 0<x<\ell;$

2) $G_1(x,\xi,y)$ удовлетворяет краевым условиям $G_1(0,\xi,y)=0,\ G_1(\ell,\xi,y)=0,\quad \forall \xi \in [0,\ell], \forall y \in [0,h];$

3) $G_1(x,\xi,y)$ непрерывна в области $[0,\ell]\times[0,\ell]\times[0,h],$ а производная по x терпит разрыв при $x=\xi$:

$$\begin{aligned} &G_1(\xi+0,\xi,y)=G_1(\xi-0,\xi,y),\\ &G_{1x}(\xi+0,\xi,y)-G_{1x}(\xi-0,\xi,y)=1. \end{aligned}$$

Функция Грина представимо в виде [4]

$$G_1(x,\xi,y)=\begin{cases} \dfrac{y_1(x,y)\cdot y_2(\xi,y)}{\omega(\xi,y)},\ 0\le x\le \xi,\\ \dfrac{y_1(\xi,y)\cdot y_2(x,y)}{\omega(\xi,y)},\ \xi\le x\le \ell, \end{cases}$$

где $y_1(x,y)$ и $y_2(x,y)$ - линейно независимые решения однородного уравнения (16), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &y_1(0,y)=0, y_1(\ell,y)\neq 0,\\ &y_2(0,y)\neq 0, y_2(\ell,y)=0, \end{aligned}$$

а $W(\xi,y)-$ определитель Вронского:

$$W(\xi,y)=y_1(\xi,y)y_2'(\xi,y)-y_1'(\xi,y)y_2(\xi,y)\neq 0.$$

Тогда решение задачи 1 имеет вид

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int_0^\ell G_1(x,\xi,y)f(\xi,y)\,d\xi. \tag{19}$$

Теорема 2. Если выполняются условия (5), (6) и (11), тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Пример 1. Пусть $c(x,y)=-\lambda^2(y+1)^2,\ \lambda\neq 0.$ Тогда условие (11) выполняется. Функцию Грина будем искать в виде

$$G_2\left(x,\xi,y\right)=\begin{cases} A_1\,y_1(x,y),\ 0\le x\le \xi, \\ A_2\,y_2(x,y),\ \xi\le x\le \ell, \end{cases}$$

где $y_1(x,y)=sh\left[\lambda\left(y+1\right)x\right],\ y_2(x,y)=sh\left[\lambda\left(y+1\right)\left(x-\ell\right)\right],$ а A_1, A_2 – произвольные константы. Так как

$$y'_{1x}(x,y)=\lambda\left(y+1\right)ch\left[\lambda\left(y+1\right)x\right],$$
$$y'_{2x}(x,y)=\lambda\left(y+1\right)ch\left[\lambda\left(y+1\right)\left(x-\ell\right)\right],$$

то определитель Вронского имеет вид

$$\forall\, y\in[0,h]: W(y)=\lambda\left(y+1\right)sh\left[\lambda\left(y+1\right)\ell\right]\neq 0.$$

Следовательно, функция Грина представимо в виде

$$G_2\left(x,\xi,y\right)=\begin{cases} \dfrac{sh\left[\lambda\left(y+1\right)x\right]sh\left[\lambda\left(y+1\right)\left(\xi-\ell\right)\right]}{\lambda\left(y+1\right)sh\left[\lambda\left(y+1\right)\ell\right]},\ 0\le x\le\xi, \\ \dfrac{sh\left[\lambda\left(y+1\right)\xi\right]sh\left[\lambda\left(y+1\right)\left(x-\ell\right)\right]}{\lambda\left(y+1\right)sh\left[\lambda\left(y+1\right)\ell\right]},\ \xi\le x\le\ell. \end{cases}$$

Тогда решение задачи 1, согласно формуле (19), имеет вид

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int_0^{\ell} G_2(x,\xi,y)f(\xi,y)\,d\xi,$$

где $u_0(x,y)=\dfrac{\ell-x}{\ell}\tau(y)+\dfrac{x}{\ell}\varphi_1(y),\quad f(x,y)=\vartheta(x,y)-\lambda^2\left(y+1\right)^2u_0(x,y)$,

$$\vartheta(x,y)=\int_0^y G_\xi\left(x,y;0,\eta\right)\chi_1\left(\eta\right)d\eta-\int_0^y G_\xi\left(x,y;\ell,\eta\right)\chi_2\left(\eta\right)d\eta+$$

$$+\int_0^{\ell} G_\xi\left(x,y;\xi,0\right)\psi_1\left(\xi\right)d\xi,\quad \psi_1(x)=\psi''(x)-\lambda^2\psi(x)$$

$$\chi_1(y)=\mu(y)-\lambda^2\left(y+1\right)^2\tau(y),\quad \chi_2(y)=\varphi_2(y)-\lambda^2\left(y+1\right)^2\varphi_1(y).$$

Литература

1. Джураев, Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

2. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев - Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.

3. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов - Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

4. Полянин, А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д. Полянин – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. -576 с.

5. Денисов, А.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / А.М. Денисов, А.В Разгулин – М.: МГУ, 2009. -114 с.