МАТЕМАТИКА

УДК 517.928.2
DOI: 10.52754/16947452_2022_4_244

БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С БИПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д.ф.-м.н., профессор,
dtursunov@oshsu.kg
Омаралиева Гулбайра Абдималиковна, ст. преп.,
Муса уулу Нур Эгемберди, магистрант
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В статье исследуется задача Коши для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Рассматриваемая задача Коши имеет три особенности: сингулярное присутствие малого параметра; решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка, а задача Коши имеет двойной пограничный слой. Сингулярное присутствие малого параметра порождает классический пограничный слой, а особая точка соответствующего невозмущенного уравнения порождает второй пограничный слой. В результате у нас получится двойной пограничный слой. Для простоты и понимания оригинального метода исследования и понятие двойного пограничного слоя приведем подробное исследование простейшего примера*.

Ключевые слова*: бипограничный слои, задача Коши, особая точка, бисингулярное возмущение, обыкновенное дифференциальное уравнение.*

КОШ ЧЕКТИК КАТМАРГА ЭЭ БОЛГОН БИСИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, ф.-м.и.д., профессор,
dtursunov@oshsu.kg
Омаралиева Гулбайра Абдималиковна, ага окутуучу,
Муса уулу Нур Эгемберди, магистр
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада бисингулярдык козголгон биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Кошинин маселеси изилденет. Каралып жаткан Кошинин маселеси үч өзгөчөлүккө ээ, алар: кичине параметрдин сингулярдуу катышуусу; тиешелүү козголбогон теңдеменин чыгарылышы биринчи тартиптеги уюлга ээ болуусу жана Кошинин маселесинин кош чектик катмарга ээ болуусу. Кичине параметрдин сингулярдуу катышуусу классикалык чектик катмарды пайда кылат, ал эми тиешелүү козголбогон теңдеменин өзгөчө чекити экинчи чектик катмарды пайда кылат. Натыйжада биз кош чектик катмарга ээ болобуз. Оригиналдуу* *изилдөө ыкмасы жана кош чектик катмар түшүнүгү түшүнүктүү болушу үчүн эң жөнөкөй мисалды кеңири толук изилдөөнү келтирдик.*

Ачкыч сөздөр: *кош чектик катмар, Кошинин маселеси, өзгөчө чекит, бисингулярдык козголуу, кадимки дифференциалдык теңдеме.*

BISINGULARLY PERTURBED FIRST-ORDER EQUATION WITH A BIBOUNDARY LAYER

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich,
doctor of physical-mathematical siences, professor,
dtursunov@oshsu.kg
Omaralieva Gulbayra Abdimalikovna, teacher,
Musa uulu Nur Egemberdi, master student
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The paper investigates the Cauchy problem for a bisingularly perturbed linear inhomogeneous ordinary differential equation of the first order. The Cauchy problem under consideration has three features: the singular presence of a small parameter; the solution of the corresponding unperturbed equation has a first-order pole, and the Cauchy problem has a double boundary layer. The singular presence of a small parameter generates the classical boundary layer, and the singular point of the corresponding unperturbed equation generates the second boundary layer. As a result, we get a double boundary layer. For simplicity and understanding of the original research method and the concept of a double boundary layer, we present a detailed study of the simplest example*.

Keywords: *biboundary layers, Cauchy problem, singular point, bisingular perturbation, ordinary differential equation.*

Введение. Дифференциальные уравнения с малым (или большим) параметром появляются там, где имеются неравномерные переходы от одних физических характеристик к другим. При исследовании подобных задач возникают новые различные явления, поэтому методы асимптотического интегрирования их разрабатываются отдельно для различных классов задач. В связи с этим актуальность результатов исследований по данному направлению не вызывает сомнений. Как нам известно, задачи с двойной сингулярностью, т.е. бисингулярно возмущенные задачи, сравнительно сингулярно возмущенным задачам, мало изучены. Как отмечено [1]-[10], в бисингулярно возмущенных задачах одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая – с не гладкостью членов асимптотики. Исследование показало, что в бисингулярно возмущенных задачах может появляется еще дополнительные особенности, например, промежуточные или дополнительные (пограничный или внутренний) слои [11]-[12].

Новизна данной работы заключается в том, что в конкретной бисингулярной задаче с промежуточным пограничным слоем получено достаточное условие существование промежуточного слоя. С помощью оригинального подхода к решению поставленной задачи построено полное равномерное асимптотическое разложение решения бисингулярной задачи с промежуточным пограничным слоем.

Постановка задачи. Для простоты рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x) + (x+\varepsilon) y_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x),\ x \in (0,T], \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \tag{2}$$

где a – некоторая постоянная не зависящая от малого параметра ε, $f_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(x),\ f_k \in C^\infty[0,T],$ $f_0(0)\neq 0$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Решение начальной задачи существует, единственно и представимо в виде:

$$y_\varepsilon(x) = a e^{-\frac{x^2+2x\varepsilon}{2\varepsilon^3}} + \frac{1}{\varepsilon^3} e^{-\frac{x^2+2x\varepsilon}{2\varepsilon^3}} \int_0^x f_\varepsilon(\xi) e^{\frac{\xi^2+2\xi\varepsilon}{2\varepsilon^3}} d\xi.$$

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение решения начальной задачи (1)-(2) на отрезке $[0,T]$, когда малый параметр стремится к нулю.

Особенности начальной задачи. Первая сингулярность – присутствие малого параметра перед производной искомой функции, т.е. перед $y'_\varepsilon(x)$. Если в уравнении (1) формально считать, что ε=0, то мы получим конечное уравнение:

$$x y_0(x) = f_0(x),\ x \in (0,T],$$

нетрудно заметить, что $y_0(x)$ в общем случае не удовлетворяет начальному условию (2).

Вторая сингулярность – функция $y_0(x) = \frac{f_0(x)}{x}$, при $x \to 0+$ имеет особую точку – полюс первого порядка, так как по условию $f_0(0)\neq 0$.

Третья особенность появление промежуточного пограничного слоя.

Чтобы доказать последнее предложение построим внешнее решение начальной задачи (1)-(2), которое будем искать в виде:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_j(x)\,, \tag{3}$$

где $y_j(x)$ – пока неизвестные функций.

Формально подставляя ряд (3) в дифференциальное уравнение (1) имеем:

$$\varepsilon^3\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y'_j(x)+(x+\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_j(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j f_j(x),$$

в последнем равенстве приравнивая коэффициенты малого параметра при одинаковых степенях можно записать в виде рекуррентных соотношений:

$$xy_0(x)=f_0(x),$$
$$xy_1(x)+y_0(x)=f_1(x),$$
$$xy_2(x)+y_1(x)=f_2(x),$$
$$y'_{j-3}(x)+xy_j(x)+y_{j-1}(x)=f_j(x),\quad j=3,4,...$$

отсюда находим:

$$y_0(x)=\frac{f_0(x)}{x},\ y_1(x)=\frac{f_1(x)-y_0(x)}{x},\ y_2(x)=\frac{f_2(x)-y_1(x)}{x},$$
$$y_j(x)=\frac{f_j(x)-y_{j-1}(x)+y'_{j-3}(x)}{x},\ j=3,4,...$$

Поэтому ряд (3) можно записать в виде

$$y_\varepsilon(x)=\frac{f_0(x)}{x}+\varepsilon\frac{xf_1(x)-f_0(x)}{x^2}+\varepsilon^2\frac{x^2f_2(x)-xf_1(x)+f_0(x)}{x^3}+\dots,$$

нетрудно заметить, что каждое слагаемое этого ряда представимо в виде

$$y_k(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^k\tilde{y}_k(x),\ k\in N_0=N\cup\{0\},\ \ \tilde{y}_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j x^{k-j}f_{k-j}(x).$$

Это означает, что члены ряда (3) обладают свойством “нарастающей особенности”, которое свойственно бисингулярным задачам [3]:

$$y_\varepsilon(x)=\frac{1}{x}\left(f_0(x)+\frac{\varepsilon}{x}\tilde{y}_1(x)+\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2\tilde{y}_2(x)+\dots+\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^j\tilde{y}_j(x)+\dots\right) \tag{4}$$

где $\tilde{y}_j\in C^\infty[0,T],\ j\in N.$

Ряд (4) подсказывает каким должна быть внутренняя переменная в пограничном слое, т.е. $x=\varepsilon t$.

В уравнении (1) сделаем преобразование $x=\varepsilon t$:

$$\varepsilon^2\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+(\varepsilon t+\varepsilon)y_\varepsilon(t)=f_\varepsilon(\varepsilon t)\,, \tag{5}$$

пусть $y_\varepsilon(t)=\dfrac{w_\varepsilon(t)}{\varepsilon}$, тогда (5) примет вид:

$$\varepsilon\frac{dw_\varepsilon(t)}{dt}+(t+1)w_\varepsilon(t)=f_\varepsilon(\varepsilon t) \tag{6}$$

В левой части последнего равенства главным является выражение

$$(t+1)w_\varepsilon(t),$$

в которой отсутствует производная, т.е. при ε=0 из (6) мы получаем конечное уравнение:

$$(t+1)w_0(t)=f_0(0),$$

а не дифференциальное. Но в нашей задаче имеется начальное условие (2), поэтому в окрестности начальной точки x=0 мы должны ввести еще одно растяжение координат, т.е. внутреннюю переменную и с помощью нее мы должны устранят невязку в начальной точке x=0.

В таком случае, функция, удовлетворяющая равенству (6) будет средним (или промежуточным) пограничным слоем между классическим пограничным слоем в окрестности x=0 и внешним решением. Таким образом мы определили, что асимптотическое решение задачи (1)-(2) состоит из трех частей.

Формальное асимптотическое приближение решения задачи (1)-(2) будем искать в виде суммы трех неизвестных функций:

$$y_\varepsilon(x)=v_\varepsilon(x)+w_\varepsilon(t)+\pi_\varepsilon(\tau), \tag{7}$$

где $x=t\varepsilon,\ x=\tau\varepsilon^2$.

Уравнение (1) запишем в виде

$$\varepsilon^3y'_\varepsilon(x)+(x+\varepsilon)y_\varepsilon(x)=f_\varepsilon(x)-h_\varepsilon+h_\varepsilon,\ x\in(0,T], \tag{8}$$

где h_ε – пока неизвестная функция зависящая от малого параметра.

Подставляя (7) в равенство (8) и начальное условие (2) составим задачи:

$$\varepsilon^3v'_\varepsilon(x)+(x+\varepsilon)v_\varepsilon(x)=f_\varepsilon(x)-h_\varepsilon,\ x\in(0,T], \tag{9}$$

$$\varepsilon^2w'_\varepsilon(t)+(t\varepsilon+\varepsilon)w_\varepsilon(t)=h_\varepsilon,\ t\in(0,\varepsilon^{-1}T], \tag{10}$$

$$\varepsilon\pi'_\varepsilon(\tau)+(\tau\varepsilon^2+\varepsilon)\pi_\varepsilon(\tau)=0,\ \tau\in(0,\varepsilon^{-2}T],\ \pi_\varepsilon(0)=y^0-v_\varepsilon(0)-w_\varepsilon(0) \tag{11}$$

Начнем с решения задачи (9). Пусть $v_\varepsilon(x)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^jv_j(x)$ и

$h_\varepsilon=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^jh_j,\ h_j-const$. Тогда равенство (9) можно записать в виде:

$$v'_{j-3}(x)+xv_j(x)+v_{j-1}(x)=f_j(x)-h_j,\ x\in(0,T],\quad j=0,1,... \tag{12}$$

где $v_s(x)\equiv 0,\ s<0.$

Равенство (12) запишем в виде:

$$v_j(x)=\frac{f_j(x)-v_{j-1}(x)-v'_{j-3}(x)-h_j}{x},\ j=0,1,...,\ v_s(x)\equiv 0, s<0.$$

В частности,

$$v_0(x)=\frac{f_0(x)-h_0}{x};\ v_1(x)=\frac{f_1(x)-v_0(x)-h_1}{x};\ v_2(x)=\frac{f_2(x)-v_1(x)-h_2}{x},$$

$$v_3(x)=\frac{f_3(x)-v_2(x)-v'_0(x)-h_3}{x}.$$

Пусть

$$h_0=f_0(0),\ h_1=f_1(0)-v_0(0),\ h_2=f_2(0)-v_1(0),$$
$$h_j=f_j(0)-v_{j-1}(0)-v'_{j-3}(0),\ j=3,4,...$$

тогда особенность функций $v_j(x)$ исчезнеть:

$$v_j(x)=\frac{f_j(x)-v_{j-1}(x)-v'_{j-3}(x)-f_j(0)+v_{j-1}(0)+v'_{j-3}(0)}{x},\ j=0,1,...,\ v_s(x)\equiv 0, s<0,$$

и $v_j\in C^\infty[0,T],\ j=0,1,...$

Перейдем теперь к задаче (10). Решение этой задачи будем искать в виде ряда, $w_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w_j(t)$. Подставим это выражение в (10):

$$\varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w'_j(t)+(t+1)\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w_j(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j h_j,\ t\in(0,\varepsilon^{-1}T],$$

приравнивая коэффициенты малого параметра с одинаковыми степенями, получим:

$$w_0(t)=\frac{h_0}{t+1};\ w_1(t)=\frac{h_1-w'_0(t)}{t+1},\ w_j(t)=\frac{h_j-w'_{j-1}(t)}{t+1},\ j=0,1,...$$

Заметим, что функций $w_k(t)$ убывают степенным характером при $t\to\infty$.

Решение начальной задачи (11) ищем в виде ряда $\pi_\varepsilon(\tau)=\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\pi_j(\tau)$, подставляя этот ряд в задачу (11) получим следующие задачи:

$$\pi'_0(\tau)+\pi_0(\tau)=0,\quad \tau\in(0,\varepsilon^{-2}T], \tag{13}$$

$$\pi'_j(\tau)+\pi_j(\tau)=-\tau\pi_{j-1}(\tau),\quad \tau\in(0,\varepsilon^{-2}T],\ j=1,2,..., \tag{14}$$

$$\pi_0(0)=-w_0(0);\quad \pi_1(0)=a-v_0(0)-w_1(0);\ \pi_j(0)=-(v_{j-1}+w_j(0)),\ j=2,3,... \tag{15}$$

Лемма. Решение задачи

$$z'(\tau)+z(\tau)=e^{-\tau}\left(c_0+c_1\tau+...+c_j\tau^j\right),\ \ \tau\in(0,\infty),\ z(0)=z^0$$

существует, единственно и представимо в виде

$$z(\tau)=e^{-\tau}z^0+e^{-\tau}\left(c_0\tau+c_1\frac{\tau^2}{2}+...+c_j\frac{\tau^{j+1}}{j+1}\right).$$

Доказательство. Уравнение: $z'(\tau)+z(\tau)=e^{-\tau}\left(c_0+c_1\tau+...+c_j\tau^j\right)$,

запишем в виде: $\left(z(\tau)e^{\tau}\right)'=\left(c_0+c_1\tau+...+c_j\tau^j\right)$, полученное выражение интегрируем по переменной τ, учитывая начальное условие:

$$z(\tau)=e^{-\tau}z^0+e^{-\tau}\left(c_0\tau+c_1\frac{\tau^2}{2}+...+c_j\frac{\tau^{j+1}}{j+1}\right).$$ Лемма доказана.

На основании доказанной леммы решения задач (13)-(15) существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\tau\to\infty$.

Таким образом, нами определены все слагаемые (7). Перейдем к оценке остаточного члена разложения

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j v_j(x)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w_j(t)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\pi_j(\tau).$$

Оценка остаточного члена формального разложения. Пусть

$$y_\varepsilon(x)=y_{s,\varepsilon}(x)+R_{s,\varepsilon}(x),$$

где $y_{s,\varepsilon}(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j v_j(x)+\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{s+1}\varepsilon^j(w_j(t)+\pi_j(\tau))$,

$R_{s,\varepsilon}(x)$ – остаточный член разложения.

Тогда учитывая полученные выше выражения для функций $v_j(x),\ w_j(t),\ \pi_j(\tau)$ для остаточного члена имеем следующую начальную задачу

$$\varepsilon^3 R'_{s,\varepsilon}(x)+(x+\varepsilon)R_{s,\varepsilon}(x)=-\varepsilon^{s+1}\Phi,\ \ x\in(0,T],\quad R_{s,\varepsilon}(0)=0, \tag{16}$$

$$\Phi_\varepsilon=v_s(x)+v'_{s-2}(x)+\varepsilon v'_{s-1}(x)+\varepsilon^2 v'_s(x)+\varepsilon w'_{s+1}(t)+\varepsilon\tau\pi_{s+1}(\tau)-\tilde f_\varepsilon(x),$$

$$\tilde f_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_{s+1+k}(x).$$

Явное решение задачи (16) имеет вид:

$$R_{s,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^{s-2})e^{-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^x(s+\varepsilon)ds}\int_0^x e^{\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\xi(s+\varepsilon)ds}d\xi=O(\varepsilon^{s-2})e^{-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^x(s+\varepsilon)ds}\int_0^x\frac{\varepsilon^3}{\xi+\varepsilon}de^{\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\xi(s+\varepsilon)ds}=$$

$$=O(\varepsilon^{s-2})e^{-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^x (s+\varepsilon)ds}\left(\frac{\varepsilon^3}{x+\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^x (s+\varepsilon)ds}-\varepsilon^2\right)+O(\varepsilon^{s+1})e^{-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^x (s+\varepsilon)ds}\int_0^x \frac{1}{(\xi+\varepsilon)^2}e^{\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\xi (s+\varepsilon)ds}d\xi.$$

Отсюда имеем $R_{s,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^s),\ \varepsilon\to 0.$ Нами доказана

Теорема. Асимптотическое решение задачи Коши (1)-(2) на отрезке $[0,T]$ при стремлении малого параметра к нулю представимо в виде асимптотического ряда в смысле Эрдей:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j v_j(x)+\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{s+1}\varepsilon^j(w_j(t)+\pi_j(\tau))+O(\varepsilon^s),\ \varepsilon\to 0.$$

Литература

1. Chen H., Zou G. Discussion on the applicability of static asymptotic solutions in dynamic fracture Harbin Gongcheng Daxue Xuebao. Journal of Harbin Engineering University. 2020. V. 41. No 6. pp. 824-831.
2. Yang R., Yang X.-G. Asymptotic stability of 3D Navier–Stokes equations with damping Applied Mathematics Letters. 2021.
3. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009, 248 с.
4. Nikishkin V. On the asymptotics of the solution of the Dirichlet problem for a fourth-order equation in a layer. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. V.54. pp. 1214-1220.
5. Lian W., Bai Z. A class of fourth order nonlinear boundary value problem with singular perturbation Applied Mathematics Letters. 2021. V. 115.
6. Benameur J., Abdallah S.B. Asymptotic behavior of critical dissipative quasi-geostrophic equation in Fourier space. JMAA. 2021. V. 497. No 1.
7. Rehak P. Asymptotics of perturbed discrete Euler equations in the critical case. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2021. V. 496. No 2.
8. Liu L.-B., Liang Y., Bao X., Fang, H. An efficient adaptive grid method for a system of singularly perturbed convection-diffusion problems with Robin boundary conditions. Advances in Difference Equations. 2021. V. 2021. No. 1.
9. Lian, W., Bai, Z. A class of fourth order nonlinear boundary value problem with singular perturbation Applied Mathematics Letters. 2021. V. 115.
10. Nayfeh A. H. Introduction to Perturbation Techniques (New York, Toronto, 1981).
11. Tursunov D.A. Asymptotic Solution of Linear Bisingular Problems With Additional Boundary Layer. Russian Mathematics. Vol. 62, No. 3, 60–67 (2018).
12. Tursunov D.A. The Asymptotic Solution of the Three-Band Bisingularly Problem. Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 38, No. 3, 542–546 (2017).