*МАТЕМАТИКА*

УДК 517.968
DOI: 10.52754/16947452_2022_4_228

# ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ТИТЧМАРША О СВЕРТКЕ НА ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Сраждинов Адил, доцент, к.ф.- м.н.,*
*Кызылкийский гуманитарно-педагогический институт*
*Баткенский государственный университет,*
*Кызыл-Кыя, Кыргызстан*
Srazhidinov.adi@gmail.com

***Аннотоция.*** *Как известно, среди широко известных фактов математического анализа занимает определенное место так называемая теорема Титчмарша о свертке о том, что равенство нули свертки двух функций от одной переменой на конечном отрезке[0,T] влечет за собой обращение их в нуль на соответствующих отрезках с началом в нуле, сумма длин которых равняется длине конечного отрезка [0,T] определения свертки. В данной статье эта теорема обобщается для функций многих переменных. А так же установлен определенный аналог теоремы Гильберта - Шмидта, занимающей фундаментальное значение в теории вполне непрерывных симметричных линейных операторов, действующих в гилбертовом пространстве, о разложении истокообразной функции в ряд Фурье по собственным функциям названного оператора. В рассматриваемом нами случае свертки показана, в отличие от [1] , более точная, а именно, равномерная сходимость ряда к функции свертки против известной сходимости в среднем в гильбертовом пространстве $L_2$. При установлении основных результатов статьи наряду с известными фактами, напоминаемыми выше, из теории операторных уравнений с вполне непрерывными симметричными линейными операторами, использован метод, предложенный автором в работе [1] , так называемый метод перехода для уравнений свертки (метод ПУС).*

***Ключевые слова***: *теорема Титчмарша о свертке, вполне непрерывный симметричный линейный оператор, фундаментальная теорема Гильберта – Шмидта, ее аналог, ряд Фурье, сходимость в среднем, сходимость равномерная, метод перехода для уравнений свертки.*

# ТИТЧМАРШТЫН ТҮЙҮН ЖӨНҮНДӨГҮ ТЕОРЕМАСЫН КӨП ӨЗГӨРМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАРГА ЖАЙЫЛТУУ

*Сраждинов Адил, ф.- м.и.к., доцент*
*Баткен мамлекеттик университетинин*
*Кызыл-Кыя гуманитар-педагогикалык институту,*
*Кызыл-Кыя, Кыргызстан*
Srazhidinov.adi@gmail.com

***Аннотация.*** *Математикалык анализден кеңири маалым болгон теоремалардын катарына кирген Титчмарштын түйүн жөнүндөгү теоремасында бир аргументтүү эки функциянын түйүнү чектүү [0,T] аралыгында нөл болуусу үчүн ал функциялардын нөлдөн баштап нөлгө айлануу аралыктарынын суммасы Т санына барабар болуусу зарыл жана жетиштүү экендиги далилденген. Каралып жаткан иште аталган теорема көп* *аргументттүү функциялар үчүн да орун алары көргөзүлдү. Макалада, фундаменталдык мааниге ээ болгон Гильберт – Шмидттин ядросымал (истокообразная) функциянын гильберт мейкиндигинде симметриялуу толук үзгүлтүксүз сызыктуу оператордун өздүк функциялары боюнча Фурьенин катарына ажырашы жөнүндөгү теоремасын элестеткен окшоштук да негизделди. Мында Фурьенин катарынын $L_2$ – жыйналуучулугу гана эмес, [1] ден өзгөчөлөнуп, бир калыпта жыйналуучулугу далилденди. Макаланын бүтүмдөрүн алууда жогоруда айтылган белгилүү теориядан алынган элементтерден сырткары автор тарабынан сунушталган [1] түйүндүү теңдемелер үчүн өтмөк методу да колдонулду.*

***Ачкыч сөздөр**: Титчмарштын түйүн жөнүндөгү теоремасы, толук үзгүлтүксүз симметриялуу сызыктуу оператор, Гильберт – Шмидттин фундаменталдык теоремасы, анын элеси, Фурье катары, $L_2$– жыйналуучулук, бир калыпта жыйналуучулук, түйүндүү теңдемелер үчүн өтмөк методу.*

## . THE GENERALIZATION OF TITCHMARSH'S CONVOLUTION THEOREM TO FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

*Srashidinov Adil,*
*candidate of physical - mathematical sciences,*
*associate professor,*
*Kyzyl-Kiya Humanitarian-Pedagogica lnstitute*
*Batken State University,*
*Kyzyl-Kiya, Kyrgyzstan*
*Srazhidinov.adi@gmail.com*

***Abstract.** As known, among the widely known facts of mathematical analysis the so-called Tichmarshao convolution theorem that the equality of zeros of functions of one variable on a finite segment entails their vanishing on segments whose sum of lengths equals the length of the end segment of the convolution definition occupies a certain place. In this article, this theorem is generalized to functions of several variables. Also the definite analogue theorems of Gilbert-Schmidt, occupying function into a Fourier series in terms of the eigenfunctions of the named operator is installed. In our case, the convolution is shown to be more accurate, and namely, the uniform convergence of the series to the convolution function against the known convergence in the mean [1], in a Hilbert space $L_2$. When establishing the main results of the article, along with the known facts, recalled above, in the theory of operator equations with completely continuous symmetric linear operators, the method proposed by the author in [1], the so-called transition method for the equations convolutions is used.*

***Keywords**: Tichmarsh convolution theorem, completely continuous symmetrical lineal operator, own functions, own numbers, fundamental theorem 1 of Gilbert -Schmidt, its analogue, Fourier series, transition method for convolution equations*

**Введение**. К интегральным уравнениям сводятся многие практические задачи. Поэтому вопрос единственности решения этих уравнений в том или ином пространстве функций всегда остается актуальным. В частности этот вопрос касается интегральных уравнений свертки

$\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_n} a(x_1-t_1, x_2-t_2,\dots, x_n-t_n)\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)\, dt_n dt_{n-1}\dots dt_1 =$ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $0 \le x_i \le T_i$, где $0 < T_i < \infty$, i=1, 2,…,n, (1)

$a$ и f известные, φ неизвестная функции. Вопрос единственности при n=1 решен итальянским математиком Е. Титчмаршем [1] в 1926 году. Другое доказательство в связи с большой практической и теоретической важности этой теоремы дано Ж. Микусински [2] в 1953 году. Вообще говоря, предложение нового доказательства известной теоремы Титчмарша о свертке при n> 1, представляющего научный или практический интерес также можно отнести , как новый подход к разрешению вопроса о единственности решения уравнения (1). В этом заключается новизна нашей работы об обобщении теоремы Титчмарша о свертке на функции многих переменных. Отметим также, что при n=2 вопрос единственности для уравнения (1) изучен, разумеется другими способами в работах [1].

**Материалы и методы исследования.** Критерий единственности для уравнения (1) (Теорема 1) получен применением метода перехода для уравнений свертки (*ПУС*), предложенного автором в [3]. В ходе доказательства Теоремы 1 широко использован математический аппарат, основанный на фундаментальной теореме Гильберта-Шмидта [5]. Итак, рассмотрим уравнение свертки (1) при n=3, т.е.

$$\int_0^{x}\int_0^{y}\int_0^{z} a(x-t, y-s, z-\zeta)\varphi(t,s,\zeta)\, d\zeta ds dt = 0,\ (x,y,z) \in D_0, \quad (2)$$

функций *a(x,y,z)* и *φ(x,y,z)* , суммируемых с квадратом в области $D_0$= [0,1]x [0,1] x[0,1], т.е. *a(x,y,z)* и *φ(x,y,z)* из $L_2(D_0$ . Для n>3 уравнение (1) на единственность исследуется совершенно аналогично. Без ограничения общности можем считать, что *a(x,y,z)* - непрерывно и кроме того, *a(0,y,z)=0* *a(x,0,z) =0, a(x,y,0) =0* . Действительно, из уравнения (2) , интегрируя последовательно по *x*, затем по *y*, а также по *z*, получаем

$$\int_0^{x}\int_0^{y}\int_0^{z} a_1(x-t, y-s, z-\zeta)\varphi(t,s,\zeta)\, d\zeta ds dt = 0,$$

$a_1(x,y,z) = \int_0^{x}\int_0^{y}\int_0^{z} a(t,s,\zeta)\, d\zeta ds dt$ ,$(x,y,z) \in D_0$.Заметим, что $a_1(x,y,z) \in C(D_0)$, $a_1(0,y,z)=a_1(x,0,z) = a_1(x,y,0) =0$ , $C(D_0)$- пространство непрерывных функций в области $D_0$. Поэтому в (2), не ограничивая общности, будем считать, что

$a(x,y,z) \in C(D_0),\ a(0,y,z)= a(x,0,z) = a(x,y,0) =0.$

Докажем основную теорему, т.е. покажем, что справедлива

**Теорема 1 .** Пусть *a(x,y,z)* и *φ(x,y,z)* из $L_2(D_0)$. Тогда эквивалентны уравнение свертки (3) и конечное уравнение

$$a(x-t, y-s, z-\zeta)\varphi(t,s,\zeta)=0,\ 0\le t \le x \le 1,\ 0\le s \le y \le 1,\ 0 \le \zeta \le z \le 1 \quad (3)$$

**Доказательство** теоремы 1. Очевидно, что из (3) следует (2). Поэтому достаточно доказать обратное. Для удобства введем обозначения:

$D_0$= [0,1]x [0,1] x[0,1], $D$= [0,2]x [0,2] x[0,2], $D_1$=(1,2]x [0,1] x[0,1],
$D_2$= [0,1]x (1,2] x[0,1], $D_3$= [0,1]x [0,1] x(1,2], $D_{12}$=(1,2]x(1,2] x[0,1], (4)
$D_{13}=(1,2]$x$[0,1]$ x$(1,2],$, $D_{23}=[0,1]$ x$(1,2]$ x$(1,2]$, $D_{123}=(1,2]$ x$(1,2]$x$(1,2]$.

Следует заметить, что $D$ есть объединение множеств (4), т.е. $D= D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_{12} \cup D_{13} \cup D_{23} \cup D_{123}$, и два любых из них не пересекутся. Согласно методу *ПУС* [1] доопределим функции $a(x,y,z)$ и $\varphi(x,y,z)$ с области $D_0$ на область $D$, положив

$$\omega(x,y,z)=\begin{cases} a(x-1,y-1,z-1), \text{если } (x,y.z)\in D_{123}, \\ 0, \qquad \text{если } (x,y.z)\notin D_{123}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\text{u}(x,y,z)=\begin{cases} \varphi(x,y,z), & \text{если } (x,y,z)\in D_0, \\ \varphi(2-x,y,z), & \text{если } (x,y,z)\in D_1, \\ \varphi(x,2-y,z), & \text{если } (x,y,z)\in D_2, \\ \varphi(x,y,2-z), & \text{если } (x,y,z)\in D_3, \\ \varphi(2-x,2-y,z), & \text{если } (x,y,z)\in D_{12}, \\ \varphi(2-x,y,2-z), & \text{если } (x,y,z)\in D_{13}, \\ \varphi(2-x,2-y,2-z), & \text{если } (x,y,z)\in D_{123}. \end{cases} \tag{6}$$

Из (3) в силу (4), (5) и (6) следует

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|x-t|,|y-s|,|z-\zeta|)\text{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt=0,\ (x,y,z)\in D. \tag{7}$$

Переход из (2) с помощью (5) и (6) к уравнению (7) называется методом перехода для уравнений свертки.

**Результаты и обсуждения.** Прежде чем установить (7), мы рассмотрим сначала оператор

$$\Omega\text{v}=\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|x-t|,|y-s|,|z-\zeta|)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt,(x,y,z)\in D. \tag{8}$$

Заметим, что оператор (9) является вполне непрерывным симметричным линейным оператором из $L_2(D)$ в себя. Преобразуем правую часть (8) с учетом (5) и естественного условия

$a(x,y,z)=0$ при $x\le 0$, или при $y\le 0$, или при $z\le 0$, (9)

имеем

$$\Omega\text{v}=\int_{|x-t|>1}\int_{|y-s|>1}\int_{|z-\zeta|>1} a(|x-t|-1,|y-s|-1,|z-\zeta|-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt=$$
$$=\int_{x-t>1}\int_{y-s>1}\int_{z-\zeta>1} a(x-t-1,y-s-1,z-\zeta-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt+$$
$$+\int_{x-t<-1}\int_{y-s<-1}\int_{z-\zeta<-1} a(t-x-1,s-y-1,\zeta-z-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt+$$
$$\int_{x-t>1}\int_{y-s>1}\int_{z-\zeta<-1} a(x-t-1,y-s-1,\zeta-z-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt,\text{т.е.}$$

$$\Omega\text{v}= \int_0^{x-1}\int_0^{y-1}\int_0^{z-1} a(x-t-1,y-s-1,z-\zeta-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt +$$
$$+\int_{x+1}^{2}\int_{y+1}^{2}\int_{z+1}^{2} a(x-t-1,y-s-1,\zeta-z-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt +$$
$$+\int_0^{x-1}\int_{y+1}^{2}\int_{z+1}^{2} a(x-t-1,s-y-1,\zeta-z-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt +$$
$$+\int_{x+1}^{2}\int_0^{y-1}\int_{z+1}^{2} a(t-x-1,s-y-1,z-\zeta-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt +$$
$$+\int_{x+1}^{2}\int_{y+1}^{2}\int_0^{z-1} a(x-t-1,y-s-1,z-\zeta-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt +$$
$$+\int_0^{x-1}\int_0^{y-1}\int_{z+1}^{z2} a(x-t-1,y-s-1,\zeta-z-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt +$$
$$+\int_0^{x-1}\int_{y+1}^{2}\int_0^{z-1} a(x-t-1,s-y-1,\zeta-z-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt +$$
$$+\int_{x+1}^{2}\int_0^{y-1}\int_0^{z-1} a(t-x-1,y-s-1,z-\zeta-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt, \text{ т.е.}$$

$$\Omega\text{v}=\int_0^{x-1}\int_0^{y-1}\int_0^{z-1} a(x-t-1,y-s-1,z-\zeta-1)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt + \int_0^{1-x}\int_0^{1-y}\int_0^{1-z} a(1-x-t,1-y-s,1-z-\zeta)\text{v}(2-t,2-s,2-\zeta)\,d\zeta ds dt + \int_0^{x-1}\int_0^{1-y}\int_0^{1-z} a(x-t-1,y-1-s,1-z-\zeta)\text{v}(t,2--s,2-\zeta)\,d\zeta ds dt + \int_0^{1-x}\int_0^{y-1}\int_0^{1-z} a(1-x-t,y-1-s,1-z-\zeta)\text{v}(2--t,s,2-\zeta)\,d\zeta ds dt + \int_0^{1-x}\int_0^{1-y}\int_0^{z-1} a(1-x-t,1-y-s,z-1-\zeta)\text{v}(2--t,2-s,\zeta)\,d\zeta ds dt + \int_0^{x-1}\int_0^{y-1}\int_{z+1}^{1-z} a(x-t-1,y-s-1,1-z--\zeta)\text{v}(t,s,2-\zeta)\,d\zeta ds dt + \int_0^{x-1}\int_0^{1-y}\int_0^{1-z} a(x-1-t,1-y-s,1-z--\zeta)\text{v}(t,2-s,2-\zeta)\,d\zeta ds dt + \int_0^{1-x}\int_0^{y-1}\int_0^{z-1} a(1-x-t,y-s-1,z--\zeta-1)\text{v}(2-t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt, \quad (10)$$

другими словами,

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|x-t|,|y-s|,|z-\zeta|)\text{v}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt = \sum_{i=1}^{8} I_i, (x,y,z)\in D \quad (11)$$

где $I_i$, i=1, 2,…,8 , означает i-тое слагаемое суммы правой части (10). Здесь следует заметить, что *a(x,y,z)=0* при *x≤0*, или *y≤0* , или *z≤0*. Теперь установим (7). В (11) заменив произвольную функцию v на u из (6), можно заметить, что каждое $I_i$, i=1, 2,..,8 в правой части (11 ) равняется нулю.

Действительно , в силу (6) заметим, что u(2-t,2-s,2-$\zeta$) = u(t,s,$\zeta$), u(t,2-s,2-$\zeta$) = u(t,s,$\zeta$) , u(2-t, s,2-$\zeta$) = u(t,s,$\zeta$), u(2-t,2-s,$\zeta$) = u(t,s,$\zeta$), u(t,s,2-$\zeta$) = u(t,s,$\zeta$), u(t,2-s,$\zeta$) = u(t,s,$\zeta$), u(2-t, s,2-$\zeta$) = u(t,s,$\zeta$). В самам деле, все подынтегральные функции v слагаемых $I_i$, i=1, 2,….,8 с соответствующими аргументами в силу (6) равны одному и тому же решению u(t,s,$\zeta$) = φ (t,s,$\zeta$) и, следовательно, $I_i$=0 , i=1, 2,..,8. Тогда из (11) получаем уравнение (8), т.е. доказана

**Лемма 1**. Любое решение уравнения (2), продолженное на область *D* по формуле (6), является решением уравнения (7).

В дальнейшем используем

**Определение.** Функция f(x,y,z) называется четной в области $D$= [0,2]x [0,2] x[0,2], если она удовлетворяет условиям :

f(x,y,z) = f(2-x,y,z), f(x,y,z)= f(x,2-y,z), f(x,y,z)= f(x,y,2-z) .

Например, функция , определяемая по (6), является четной на $D$.

Теперь переходим к рассмотрению уравнения Ωu = λu, т.е.

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|\,x-t\,|,|\,y-s\,|,|\,z-\zeta\,|)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt = \lambda \mathrm{u}\,(x,y,z), \qquad (12)$$

$(x,y,z)\in D$, сначала в пространстве $L_2(D)$. Так как ядро последнего уравнения (12) симметрично , т.е. при заменах x↔t, y↔s, z↔$\zeta$ значения ядра не изменяются, и оператор, определяемый левой частью (12) , линейный вполне непрерывный из пространства $L_2(D)$ в себя , то существуют счетное число собственных значений и все они действительны [7] . Расположив их по убыванию модулей с учетом их кратности запишем в виде $\lambda_1$, $\lambda_2$,… . Также заметим [6], что каждому собственному числу отвечают ортонормированные собственные функции конечного числа. Ядро $\omega(|\,x-t\,|,|\,y-s\,|,|\,z-\zeta\,|)$, определяемое равенством (5), обладает рядом для нас важных свойств. Приведем их. Пусть число λ – собственное значение и u(*x,y,z*)- ему отвечающая собственная функция. Тогда в (12) произведя замену x→2-x, имеем

$$\lambda \mathrm{u}(2-x,y,z)=\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|\,x-t\,|,|\,y-s\,|,|\,z-\zeta\,|)\mathrm{u}(2-t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt\,,$$

$(x,y,z)\in D$, другими словами, наряду с решением u(*x,y,z*) удовлетворяет этому же уравнению и u*(2-x,y,z )*. Аналогично устанавливаются , что функции

u*(x,2-y,z),* u*(x,y.2-z),* u*(2-x2-,y,z,),* u*(2-x,y,2-z),* u*(x,2-y,2-z* ), u*(2-x,2-y,2-z)*
также удовлетворяют уравнению (12)

Теперь определим в гильбертовом пространстве $L_2(D)$ подпространство *H(D)* как самостоятельное гильбертово пространство с ограничениями :

1) *u(x,y,z)* $\in H(D)$ тогда и только тогда, когда функция *u(x,y,z)* $\in L_2(D)$ четна на области $D$;
2) норма функции u(x,y,z) $\in H(D)$ определяется нормой пространства $L_2(D)$, т.е. $\|\,\mathrm{u}\,\| = \left(\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \mathrm{u}^2(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt\right)^{1/2}$.

Легко заметить, что оператор Ω действует из *H(D)* в *H(D)*. Действительно, пусть u(x,y,z) $\in H(D)$ . Тогда определив

f(x,y,z) = $\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|\,x-t\,|,|\,y-s\,|,|\,z-\zeta\,|)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt$, имеем

f(2-x,y,z) = $\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|\,2-x-t\,|,|\,y-s\,|,|\,z-\zeta\,|)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt$=

$=\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|x-t|,|y-s|,|z-\zeta|)\mathrm{u}(2-t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt=\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|x-$ $-t|,|y-s|,|z-\zeta|)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt$, т.е. f(2-x,y,z) = f(x,y,z).
Аналогично получаем, что f(x,2-y,z ) = f(x,y,z), f(x,y,2-z) = f(x,y,z).

Значить оператор Ω действует из *H(D)* в себя. Выше было отмечено, что Ω является вполне непрерывным симметричным линейным оператором из $L_2(D)$ в себя. Поэтому как ненулевой оператор из гильбертова пространства *H(D)* в себя также является вполне непрерывным симметричным линейным оператором. Тогда [7] в гильбертовом пространстве *H(D)* существует ортонормированная система

$u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$,… (13)

собственных функций, отвечающих собственным значениям, упорядоченным по убыванию модулей с учетом их кратности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, уравнения $\Omega u = \lambda u$, где $\lambda_i$, i=1, 2,..,- действительные числа [7]. Теперь покажем, что имеет место

**Лемма 2.** Сужение любой функции $u_i(x,y,z)$ из (13) в $D_0$ отлична от нуля.

**Доказательство**. Если $u_i(x,y,z)=0$, $(x,y,z)\in D_0$ , то в силу четности $u_i(x,y,z)$ в области *D*, получили бы $u_i(x,y,z)=0$, $(x,y,z)\in D$, что невозможно.

А также справедливо

**Лемма 3.** Сужение любой функции из (13) является решением уравнения

$$\lambda\,\varphi(1-x,1-y,1-z)=\int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-t,y-s,z-\zeta)\varphi(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt,\quad (x,y,z)\in D_0 \qquad (14)$$

и, наоборот, любое решение уравнения (14) , продолженное четным образом с области $D_0$ на область $D$ , является решением уравнения (12).

**Доказательство .** Упомянутое сужение в силу леммы 2 отлично от нуля. Так как функция $u_i(x,y,z)$ четная на $D$, то

$$u_i(x,y,z)=u_i(2-x,2-y,2-z). \qquad (15)$$

Сначала представив правую часть (12) в виде суммы правой части (10) при $v_i(x,y,z)=u_i(x,y,z)$, $(x,y,z)\in D$, затем полагая $(x,y,z)\in D_0$ , из (12) имеем

$$\lambda\, u_i(x,y,z)=\int_0^{1-x}\int_0^{1-y}\int_0^{1-z} a(1-x-t,1-y-s,1-z-\zeta)u_i(2-t,2-s,2-\zeta)\,d\zeta ds dt,\quad (x,y,z)\in D_0. \qquad (16)$$

Произведя замены 1-x→x, 1-y→y, 1-z→z и с учетом равенства (15), получаем из (16) уравнение (14).

Первая часть леммы установлена. Покажем ее вторую часть. Решение $\varphi(x,y,z)\in L_2(D_0)$, продолжим на область $D$ четным образом, т.е. пользуясь формулой (7) , имеем

$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|\,x-t\,|,|\,y-s\,|,|\,z-\zeta\,|)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta dsdt = \int_0^{x-1}\int_0^{y-1}\int_0^{z-1} a(x-t-1,y-s-1,z-\zeta-1)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta dsdt + \int_0^{1-x}\int_0^{1-y}\int_0^{1-z} a(1-x-t,1-y-s,1-z-\zeta)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta dsdt + \sum_{i=3}^{8} I_i$ , (17)

где $I_i$ определены в равенстве (10) лишь заменой v*(x,y,z)* на четное на решение u*(x,y,z)*. Из равенства (17) при (x,y,z) ∈ $D_0$, (x,y,z) ∈ $D_{123}$, получаем , что

$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \omega(|\,x-t\,|,|\,y-s\,|,|\,z-\zeta\,|)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta dsdt = \int_0^{x-1}\int_0^{y-1}\int_0^{z-1} a(x-t-1,y-s-1,z-\zeta-1)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta dsdt$, (x,y,z) ∈$D_{123}$, а при (x,y,z) ∈$D_0$

$\Omega\mathrm{u}=\int_0^{1-x}\int_0^{1-y}\int_0^{1-z} a(1-x-t,1-y-s,1-z-\zeta)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta dsdt.$

Отсюда с учетом (12) имеем λu (*x,y,z*) = (18)

$\int_0^{x-1}\int_0^{y-1}\int_0^{z-1} a(x-t-1,y-s-1,z-\zeta-1)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta dsdt$,(x,y,z) ∈ $D_{123}$,

λu (*x,y,z*) = (19)

$\int_0^{1-x}\int_0^{1-y}\int_0^{1-z} a(1-x-t,1-y-s,1-z-\zeta)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta dsdt$, (x,y,z) ∈ $D_0$.

Учитывая u(*x,y,z*)=u (2-*x*,2-*y*,2-*z*), произведем замену x-1→x, y-1→y, z-1→z, тогда из (18) получаем

$\int_0^{x}\int_0^{y}\int_0^{z} a(x-t,y-s,z-\zeta)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\,d\zeta dsdt = \lambda\mathrm{u}\,(1-x,1-y,1-z),$ (20)

(x,y,z) ∈ $D_0$. Аналогично из (19) можно получить уравнение (20). Для этого достаточно произвести замены 1-x→x, 1-y→y, 1-z→z. Теперь сужение функции u(*x,y,z*), определенной на области *D*= [0,2]x [0,2] x[0,2], в область $D_0$] обозначим φ(*x,y,z*). Тогда уравнение (20) перепишется в виде (14). Поскольку правая часть (14), в силу непрерывности *a(x,y,z)*, есть непрерывная функция, тогда функция φ(*x,y,z*) будет также непрерывной. Доопределим функцию φ(*x,y,z*), (x,y,z) ∈ $D_0$ на область *D* по формуле (6). Итак справедлива

**Лемма 4.** Если λ собственное значение уравнения (12), то λ является собственным значением уравнения (14), т.е. при данном λ уравнение (14) имеет ненулевое решение. И, наоборот, если φ(*x,y,z*) ненулевое решение уравнения (14) в $L_2(D_0)$, то его четное продолжение на *D* при указанном λ является ненулевым решением уравнения (12).

**Доказательство**. Первая часть леммы доказана выше. Покажем справедливость ее второй части. Действительно, доопределенное решение φ(*x,y,z*) уравнения (14) по формуле (6) , обозначив через u(*x,y,z*), затем заменив функцию v(*x,y,z*) в правой части (10) на функцию u(*x,y,z*) , имеем (12).

Действительно, решение φ$(x,y,z)$ уравнения (14), то доопределив его по формуле (6) и обозначив ее через u$(x,y,z)$, затем заменив функцию v$(x,y,z)$ в правой части (10) на функцию u$(x,y,z)$,имеем

$\Omega$u=$I_1$(x-1,y-1,z-1)+ $I_2$(1-x,1-y,1-z)+ $I_3$(x-1,1-y,1-z)+ $I_4$(1-x,y-1,1-z)+ $I_5(1-$ $-x,1-y,z-1)$+ $I_6$(x-1,y-1,1-z)+ $I_7$(x-1,1-y,z-1)+ $I_8$(1-x,y-1,1-z). (21)

Известно, что

$I_1$=$I_1(\mathrm{x}-1,\mathrm{y}-1,\mathrm{z}-1)$, если $(x,y.z) \in D_{123}$; 0, если $(x,y.z) \notin D_{123}$,

$I_2$= $I_2(1-\mathrm{x},1-\mathrm{y},1-\mathrm{z})$, если $(x,y,z) \in D_0$; 0, если $(x,y.z) \notin D_0$,

$I_3$= $I_3(\mathrm{x}-1,1-\mathrm{y},1-\mathrm{z})$, если $(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \in \mathrm{D}_1$; 0, если $(\mathrm{x},\mathrm{y}.\mathrm{z}) \notin \mathrm{D}_1$,

$I_4$= $I_4(1-\mathrm{x},\mathrm{y}-1,1-\mathrm{z})$, если $(x,y,z) \in D_2$; 0, если $(x,y.z) \notin D_2$,

$I_5$=$I_5(1-x,1-y,z-1)$, если $(x,y,z) \in D_3$; 0, если $(x,y.z) \notin D_3$,

$I_6$=$I_6(\mathrm{x}-1,\mathrm{y}-1,1-\mathrm{z})$, если $(x,y,z) \in D_{12}$; 0, если $(x,y.z) \notin D_{12}$,

$I_7$=$I_7(\mathrm{x}-1,1-\mathrm{y},\mathrm{z}-1)$, если$(x,y,z) \in D_{13}$; 0, если $(x,y.z) \notin D_{13}$,

$I_8$=$I_8(1-\mathrm{x},\mathrm{y}-1,1-\mathrm{z})$, *если* $(x,y,z) \in D_{23}$; 0, если $(x,y.z) \notin D_{23}$.

Покажем, что из (21) и последующих формул следуют равенства

$I_1$(x-1,y-1,z-1)= λu(x,y,z), (x,y,z) ∈ $D_{123}$; $I_2$(1-x,1-y,1-z)= λu(x,y,z), (x,y,z) ∈ $D_0$;
$I_3$(x-1,1-y,1-z)=λu(x,y,z),(x,y,z) ∈$D_1$;$I_4$(1-x,y-1,1-z)=λu(x,y,z),(x,y,z) ∈$D_2$; (22)
$I_5$(1-x,1-y,z-1)= λu(x,y,z), (x,y,z) ∈ $D_3$; $I_6$(x-1,y-1,1-z)= λu(x,y,z), (x,y,z) ∈ $D_{12}$; $I_7$(x-1,1-y,z-1)= λu(x,y,z), (x,y,z) ∈ $D_{13}$; $I_8$(1-x,y-1,1-z)= λu(x,y,z), (x,y,z) ∈ $D_{23}$

Уравнение (14) с помощью замены x→1-x, y→1-y, z→1-z имеет вид

λ φ$(x,y,z)$=$\int_0^{1-x}\int_0^{1-y}\int_0^{1-z} a(1-x-t,1-y-s,1-z-\zeta)\varphi(t,s,\zeta)\, d\zeta ds dt.$

Из последнего в силу обозначения (6) и второго из (21), находим

$I_2$(1-x,1-y,1-z)= λu(x,y,z), (x,y,z) ∈ $D_0$. Пусть теперь (x,y,z) ∈ $D_{123}$. Тогда

$\int_0^{x-1}\int_0^{y-1}\int_0^{z-1} a(x-t-1,y-s-1,z-\zeta-1)\varphi(t,s,\zeta)\, d\zeta ds dt = \lambda\varphi\,(2-x,2-y,2-z)$ , (x,y,z) ∈ $D_{123}$.

Отсюда согласно обозначению (6) имеем

$\int_0^{x-1}\int_0^{y-1}\int_0^{z-1} a(x-t-1,y-s-1,z-\zeta-1)\mathrm{u}(t,s,\zeta)\, d\zeta ds dt =$
$\lambda\mathrm{u}\,(x,y,z)$ , (x,y,z) ∈ $D_{123}$, т.е. $I_1$(x-1,y-1,z-1) = λu(x,y,z), (x,y,z) ∈ $D_{123}$.

Совершенно аналогично устанавливаются остальные равенства из (22). Например, равенство

$I_3$(x-1,1-y,1-z)= $\int_0^{x-1}\int_0^{1-y}\int_0^{1-z} a(x-1-t,1-y-s,1-z--\zeta)\varphi(t,s,\zeta)\, d\zeta ds dt,$ ( x,y,z) ∈ $D_1$, согласно (16) имеет вид

$\int_0^{x-1}\int_0^{1-y}\int_0^{1-z} a(x-1-t,1-y-s,1-z-\zeta)\varphi(t,s,\zeta)\, d\zeta ds dt$=
$= \lambda\varphi\,(2-x,y,z)$, (x,y,z) ∈ $D_1$.

Правая часть последнего равенства в силу обозначения (6) равна λu(x,y,z) , ( x,y,z) ∈ $D_1$, т.е. $\lambda\varphi\,(2-x,y,z)$= λu(x,y,z) , (x,y,z) ∈ $D_1$.

Отсюда $I_3$(x-1,1-y,1-z)= λu(x,y,z), (x,y,z) ∈ $D_1$, т.е. для $I_3$ также имеет место соответствующее равенство (22) . Далее, так как $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_{12} \cup D_{13} \cup D_{23} \cup D_{123}$ и любая пара из этих множеств не пересекается, то отсюда и из (11) получаем (12) . Лемма доказана.

Как итог вышеприведенных лемм сформулируется следующая

**Основная лемма.** Системы упорядоченных по убыванию модулей с учетом их кратности собственных чисел уравнения (12) в пространстве *H(D )* с одной стороны, и уравнения (14) в пространстве $L_2(D_0)$ с другой стороны, при (x,y,z) ∈ $D_0$ идентичны. Если $\{u_i(x,y,z)\}$ система ортонормированных собственных функций уравнения (12) в *H(D)* , то система их сужений в области $D_0$, умноженных на число $\sqrt{8}$, т.е. $\{\sqrt{8}u_i(x,y,z)\}$, (x,y,z) ∈ $D_0$ , является системой ортонормированных собственных функций уравнения (14) в $L_2(D_0)$.

**Доказательство.** $u_i$(x,y,z)= $u_j$(x,y,z) при (x,y,z) ∈ $D_0$, тогда в силу четности этих функций на $D$, следует $u_i$(x,y,z)= $u_j$(x,y,z) во всей области $D$. Отсюда вытекает равенство соответствующих $\lambda_i$ и их кратности при любых i. Функцию $\varphi_1(t,s,\zeta)$ можно представить в виде (6),или же, в виде u(x,y,z)= $\varphi\,(x,y,z)$+ $\varphi\,(2-x,y,z)+\varphi\,(x,2-y,z)+\varphi\,(x,y,2-z)++\varphi\,(2-x,2-y,z)$+ $\varphi\,(2-x,y,2-z)+\varphi\,(x,2-y,2-z)+\varphi\,(2-x,2--y,2-z)$, (23)
где

$$\varphi\,(x,y,z)=\begin{cases}\mathrm{u}(x,y,z)\,, \text{если } (x,y,z)\in D_0,\\ 0, \qquad\qquad \text{если } (x,y,z)\notin D_0.\end{cases} \qquad (24)$$

Из равенства (23) с учетом (24), находим $u^2$(x,y,z) = $\varphi^2\,(x,y,z)$+ $\varphi^2\,(2-x,y,z)+\varphi^2\,(x,2-y,z)+\varphi^2\,(x,y,2-z)++\varphi^2\,(2-x,2-y,z)$+ $\varphi^2\,(2-x,y,2-z)+\varphi^2\,(x,2-y,2-z)++\varphi^2\,(2-x,2-y,2-z)$.

Интегрируя последнее тождество по области $D$ с учетом (24) , имеем

$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \mathrm{u}^2(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt = 8\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \varphi^2(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt$,т.е.

$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \mathrm{u}^2(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt = 8\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \mathrm{u}^2(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt$,

откуда $\|\,\mathrm{u}\,\|_{H(D)} = \sqrt{8}\,\|\,\mathrm{u}\,\|_{L2(D_0)}$.

Далее, если решения $u_1$(x,y,z) и $u_2$(x,y,z) уравнения (12) в *H(D)* взаимно ортогональны, т.е. $u_1 \perp u_2$, то из (23) получаем $\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \mathrm{u}_1(t,s,\zeta)\mathrm{u}_2(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt = 8\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \varphi_1(t,s,\zeta)\varphi_2(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt$, откуда $\varphi_1 \perp \varphi_2$ в $L_2(D_0)$ , и наоборот, где $\varphi_1(x,y,z)$ и $\varphi_2(x,y,z)$- сужения решений $u_1$(x,y,z) и $u_2$(x,y,z) уравнения (12) в $D_0$. Основная лемма доказана. Нами также используется вытекающая из теоремы Гильберта – Шмидта

**Лемма 5.**Функция u∈ *H(D)* удовлетворяет (7) тогда и только тогда, когда

$u \perp u_i$ , i=1, 2,… (25)

Отсюда с учетом основной леммы непосредственно вытекает

**Лемма 6.** Функция φ из $L_2(D_0)$ является решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда

$\varphi \perp \varphi_i$ , i=1, 2,… , (26)

где $\varphi_1(x,y,z)$ , $\varphi_2(x,y,z)$, …. –ортонормированная система собственных функций уравнения (14) в $L_2(D_0)$.

Так как продолжая функцию φ (x,y,z) и собственные функции $\varphi_I$(x,y,z) с области $D_0$ на область $D$ четно , то получим соответственно функции u(x,y,z) и $u_I$(x,y,z). Тогда имеют место соотношение (25). И, следовательно, u(x,y,z) в силу леммы 5 является решением уравнения (7) в *H(D)*. А сужение которого в области $D_0$ согласно лемме1 будет решением уравнения (2), т.е. функция

φ (x,y,z) из (26) является решением уравнения (2).

**Продолжим** доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi$(x,y,z)є $L_2(D_0)$ - любое фиксированное решение уравнения (2). Покажем, что из уравнения (2) следует

$$\int_0^x\int_0^y\int_0^z \left|a(x-t,y-s,z-\zeta)\right|\varphi(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt=0\,,\ (x,y,z)\in D_0\ , \qquad (27)$$

т.е. любое решение уравнения (2) является также решением уравнения

$$\int_0^x\int_0^y\int_0^z \left|a(x-t,y-s,z-\zeta)\right|\psi(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt=0\,,\ (x,y,z)\in D_0\ , \qquad (28)$$

и, наоборот, т.е. справедлива

**Лемма 7.** Уравнения (2) и (28) в классе $L_2(D_0)$ эквивалентны.

**Доказательство.** Неотрицательные и отрицательные части непрерывной функции $a(1-x,1-y,1-z)$ соответственно обозначим

$a^+(1-x,1-y,1-z)$ и $a^-(1-x,1-y,1-z)$. Так что

$$a(1-x,1-y,1-z)=a^+(1-x,1-y,1-z)+a^-(1-x,1-y,1-z), \qquad (29)$$

$\left|a(1-x,1-y,1-z)\right| = a^+(1-x,1-y,1-z)$- $a^-(1-x,1-y,1-z)$, *x,y,z)* ∈ $D_0$ . А также обозначим $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu_i\}$ - последовательности собственных чисел соответственно уравнений (14) и при $(x,y,z)\in D_0$,

$$\int_0^x\int_0^y\int_0^z \left|a(x-t,y-s,z-\zeta)\right|\psi(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt=\mu\,\psi(1\text{-}x,1\text{-}y,1\text{-}z), \qquad (30)$$

а $\{\varphi_i(x,y,z)\}$ и $\{\psi_i(x,y,z)\}$ - им соответствующие системы ортонормированных собственных функций.

Очевидно, что возможен только один из двух случаев:

а) все $\varphi_i$ (0,0,0) ($\psi_i$ (0,0,0)) равны нулю, т.е. $\varphi_i$(0,0,0)=0 ($\psi_i$(0,0,0)=0), i=1, 2,..:

б) для некоторого i $\varphi_i$ (0,0,0)≠0 ($\psi_i$(0,0,0)≠0) .

Рассмотрим случай а). Тогда для любого i имеют место равенства

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a(1-t,1-s,1-\zeta)\ \ \varphi_i\,(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt=0, i=1,2,\ldots \qquad (31)$$

В случае а) в силу леммы 6 заключаем, что $a(1-t,1-s,1-\zeta)$ - решение уравнения (2). Поэтому из (31) следует, что

$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a^2(1-t,1-s,1-\zeta)\ d\zeta ds dt$=0 , т.е. $a^2(t,s,\zeta)=0,\quad (t,s,\zeta)\in D_0$ . Значит в случае а) эквивалентность (2) и (28) очевидна.

Рассмотрим случай б). Пологая x=1, y=1, z=1 из равенства (17) имеем

$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a(1-t,1-s,1-\zeta)\varphi_i(t,s,\zeta)\ d\zeta ds dt=\lambda_i i\ \varphi_i\ (0,0,0),$ (32)

т.е. $a_i=\lambda_i\ \varphi_I\ (0,0,0)$, $a_i$– коэффициенты Фурье функции $a(1-t,1-s,1-\zeta)$. Здесь следует заметить, что в силу непрерывности $a$(x,y,z) на $D_{0,}$ , левая часть (19) непрерывна на $D_{0,}$ следовательно, правая часть (19) так же непрерывна на $D_{0,.}$ Так что равенства $a_i=\lambda_i\ \varphi_i\ (0,0,0)$, i = 1,2, …, вполне оправданы. Так как для некоторого i $\varphi_i$ (0,0,0)≠0, то $a$(x,y,z) не может быть решением (2). Пусть

$a(1-t,1-s,1-\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i\ \varphi_i\ (t,s,\zeta)-\varphi_0(t,s,\zeta), (t,s,\zeta))\in D_0,$ (33)

где $a_i$ – коэффициенты Фурье функции $a(1-t,1-s,1-\zeta)$, $\varphi_0(t,s,\zeta)$ – некоторая функция ортогональная ко всем $\varphi_i(1-t,1-s,1-\zeta)$, значит $\varphi_0(1-t,1-s,1-\zeta)$ – решение уравнения (2). Теперь умножая обе части (32) на коэффициенты $a_i$, получим

$$\sum_{i=1}^{N} a_i^2=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a(1-t,1-s,1-\zeta)\sum_{i=1}^{N} a_i\ \varphi_i\ (t,s,\zeta) d\zeta ds dt \qquad (34)$$

Из (33) при N-→∞ в пространстве $L_2$ следует , что

$\sum_{i=1}^{N} a_i\ \varphi_i\ (1-t,1-s,1-\zeta)\dashrightarrow a(1-t,1-s,1-\zeta)+\varphi_0(1-t,1-s,1-\zeta)$.

Левая часть (34) сходится к $a_1^2+a_2^2+\ldots$, тогда , переходя к пределу при N-→∞, получим $a_1^2+a_2^2+\ldots=$

$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a(1-t,1-s,1-\zeta)\ (\ a(1-t,1-s,1--\zeta)+\varphi_0(t,s,\zeta))d\zeta ds dt.$

Так как $\varphi_0(t,s,\zeta)$ – решение уравнения (2), то отсюда

$$a_1^2+a_2^2+\ldots=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a^2(1-t,1-s,1-\zeta)d\zeta ds dt, \text{ т.е.}$$

$$a_1^2+a_2^2+\ldots=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a^2(t,s,\zeta)d\zeta ds dt\ . \qquad (35)$$

В силу равенства (33) находим

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots,)+\|\ \varphi_0\ \|^2=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a^2(t,s,\zeta)\ d\zeta ds dt. \qquad (36)$$

Из равенств (35) и (36) следует, что $\varphi_0(t,s,\zeta)$=0, $(t,s,\zeta)\in D_0$, следовательно,

$a(1-t,1-s,1-\zeta)=a_1\varphi_1(t,s,\zeta)+a_2\varphi_2(t,s,\zeta)+\ldots,\quad (t,s,\zeta)\in D_0.$ (37)

Тогда из (29), (30) и (37) получаем

$a_1\ \varphi_1(t,s,\zeta)+a_2\ \varphi_2(t,s,\zeta)+\ldots=a(1-t,1-s,1-\zeta)=\boldsymbol{a}^+(1-t,1-s,1-\zeta)+\boldsymbol{a}^-(1-t,1-s,1-\zeta)=[\sum_{i=1}^{\infty}\ \alpha_i\,\varphi_i\ (t,s,\zeta)+\varphi_{10}(t,s,\zeta)\ ]+[\sum_{i=1}^{\infty}\ \beta_i\ \varphi_i\ (t,s,\zeta)+\varphi_{20}\,(t,s,\zeta)]=\sum_{i=1}^{\infty}\ (\alpha_i+\beta_i)\varphi_i\ (t,s,\zeta)+[\ \varphi_{10}(t,s,\zeta)+\varphi_{20}(t,s,\zeta)],$ (38)

где $\varphi_{10}(t,s,\zeta)$ и $\varphi_{20}(t,s,\zeta)$ ортогональны к $\varphi_i(t,s,\zeta)$, следовательно, $\varphi_{10}(t,s,\zeta)$ и $\varphi_{20}(t,s,\zeta$ - решения (2), $\alpha_i$, $\beta_i$ – коэффициенты Фурье $\alpha^+(1-t,1-s,1-\zeta)$ и $\alpha^-(1-t,1-s,1-\zeta)$ соответственно. Из (38) определяем $a_i$= $\alpha_i+\beta_i$ , i=1,2, …, и

$$\varphi_{10}(t,s,\zeta)+\varphi_{20}(t,s,\zeta)=0,(\ t,s,\zeta)\in D_0. \qquad (39)$$

Так как функции $\alpha^+(1-t,1-s,1-\zeta)$ и $\alpha^-(1-t,1-s,1-\zeta)$ взаимно ортогональны, то $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots=$
$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a^+(1-t,1-s,1-\zeta)\big(a^-(1-t,1-s,1-\zeta)\big)\,d\zeta ds dt=0$, поэтому
$a_1^2+a_2^2+\ldots,=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a^2(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt=(\alpha_1^2+\beta_1^2)+(\alpha_2^2+\beta_2^2)+\ldots$, т.е.
$\|\alpha(1-t,1-s,1-\zeta)\|^2=(\alpha_1^2+\beta_1^2)+(\alpha_2^2+\beta_2^2)+\ldots.$ (40)
Аналогично, $\left|a(1-t,1-s,1-\zeta)\right|=a^+(1-t,1-s,1-\zeta)-a^-(1-t,1-s,1-\zeta)$, $\big|a(1-t,1-s,1-$
$-\zeta)\big|=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma i\,\varphi_i(t,s,\zeta)+\varphi_0(t,s,\zeta)=[\sum_{i=1}^{\infty}\alpha i\,\varphi_i(t,s,\zeta)+\varphi_{10}(t,s,\zeta)]-$
$-[\sum_{i=1}^{\infty}\beta i\,\varphi_i(st,s,\zeta)+\varphi_{20}(t,s,\zeta)]=[\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha i-\beta i)\,\varphi_i(t,s,\zeta)+[\varphi_{10}(t,s,\zeta)-$
$-\varphi_{20}(t,s,\zeta)].$ (41)
Из последних цепочек с учетом (39) имеем
$\|a(1-t,1-s,1-\zeta)\|^2=[(\alpha_1-\beta_1)^2+(\alpha_2-\beta_2)^2+\ldots]+4\,\|\varphi_{10}(t,s,\zeta)\|^2,$
$\|\,|a(1-t,1-s,1-\zeta)|\,\|^2=(\alpha_1^2+\beta_1^2)+(\alpha_2^2+\beta_2^2)+\ldots+4\|\varphi_{10}(t,s,\zeta)\|^2.$ (42)
Из (40) и (42) следует, что $\varphi_{10}(t,s,\zeta)=0,(t,s,\zeta)\in D_0$. Отсюда с учетом (41)
$\left|a(1-t,1-s,1-\zeta)\right|=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma i\,\varphi_i(t,s,\zeta),$ (43)
где $\gamma_i$ – коэффициенты Фурье функции $\left|a(1-t,1-s,1-\zeta)\right|$.

Совершенно аналогично из уравнения (30) получаем равенства
$a(1-t,1-s,1-\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\,\psi_i(t,s,\zeta),$ (44)
$\left|a(1-t,1-s,1-\zeta)\right|=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\,\psi_i(t,s,\zeta),\ (t,s,\zeta)\in D_0,$
где $b_i$ и $c_i$ коэффициенты Фурье функций $a(1-t,1-s,1-\zeta)$ и $\left|a(1-t,1-s,1-\zeta)\right|$, т.е.

$$b_i=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a(1-t,1-s,1-\zeta)\,\psi_i(t,s,\zeta)d\zeta ds dt,\ \mathrm{i}=1,2,\ldots,$$
$$c_i=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|a(1-t,1-s,1-\zeta)\right|\,\psi_i(t,s,\zeta)d\zeta ds dt,\ \mathrm{i}=1,2,\ldots,$$

$\{\psi_i(t,s,\zeta)\}-$ ортонормированая система собственных функций уравнения (30). Итак из уравнения (14) получим (43). Пусть $\varphi\ (x,y,z)$ – любое решение уравнения (3), то при любых параметрах $(\tau,\sigma,\eta)\in D_0$ функция

$$g(t,s,\zeta)=\begin{cases}\varphi\,(t-\tau,s-\sigma,\zeta-\eta)\ \text{при}\ (t,s,\zeta)\in D_0,\\ \qquad 0\ \text{при}\ (t,s,\zeta)\notin D_0,\end{cases}$$

также является решением того же (2). Что видно из следующих цепочек:
$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 a(1-t,1-s,1-\zeta)\ g(t,s,\zeta)d\zeta ds dt=\int_\tau^1\int_\sigma^1\int_\eta^1 a(1-t,1-s,1-\zeta)\,\varphi\,(t-\tau,s-\sigma,\zeta-\eta)d\zeta ds dt=\int_0^{1-\tau}\int_0^{1-\sigma}\int_0^{1-\zeta}a(1-\tau-t,1-\sigma-s,1-\eta-\zeta)\ \varphi\,(t,s,\zeta)d\zeta ds dt=\int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-t,y-s,z-\zeta)\varphi(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt=0,$
где $x=1-\tau,y=1-\sigma,z=1-\eta.$
Поэтому если $\varphi\,(t,s,\zeta)$ – решение уравнения (2), то в силу леммы 6 $\varphi\perp\varphi_{\mathrm{I}}$, i=1,2,… , имеем из (43) $\left|a(1-t,1-s,1-\zeta)\right|$ также ортогонально функции

$\varphi\,(t,s,\zeta)$. Отсюда в силу доказанного выше $\varphi\,(t,s,\zeta)$ является решением уравнения (27). Аналогично, из уравнения (30) следует равенство (44). Если же $\psi\,(t,s,\zeta)$ – любое решение уравнения (30), то в силу (44), как показано выше , оно удовлетворяет (2). Лемма 7 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Запишем (27) в виде

$$\int_0^x\int_0^y\int_0^z \left|a(t,s,\zeta)\right|\varphi(x-t,y-s,z-\zeta)d\zeta ds dt=0,\quad (x,y,z)\in D_0. \qquad (45)$$

В силу только что доказанного уравнения (45) эквивалентно равенству

$$\int_0^x\int_0^y\int_0^z \left|a(t,s,\zeta)\right|\left|\varphi(x-t,y-s,z-\zeta)\right|d\zeta ds dt=0, (x,y,z)\in D_0.$$

Отсюда непосредственно получаем конечное равенство (3). Теорема доказана.

**Замечание 1.** По ходу доказательства теоремы установлено, что условия $\varphi_I\,(0,0,0)=0$, i=1, 2, ..., имеют место тогда, и только тогда, когда *a(x,y,z) =0.*

А также справедлива

**Лемма 8.** Свертка двух функций из $L_2(D_0)$ будет непрерывной на $D_0$.

Действительно, пусть $a(x,y,z)$ и $\varphi(x,y,z)$ из $L_2(D_0)$ и

$$f(x,y,z)=\int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-t,y-s,z-\zeta)\varphi(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt, (x,y,z)\in D_0. \qquad (46)$$

Выберем последовательность $\{\varphi_n(t,s,\zeta)\}$ из $C(D_0)$ такая, что $\parallel \varphi_n(t,s,\zeta)-\varphi(t,s,\zeta)\parallel\to 0$ при $n\to\infty$. Пусть

$$f_n(x,y,z)=\int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-t,y-s,z-\zeta)\varphi_n(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt, \qquad (x,y,z)\in D_0.$$

Очевидно, что последняя функция будет непрерывной на $D_0$. Далее, имеем

$$\left|f(x,y,z)-f_n(x,y,z)\right|\le\int_0^x\int_0^y\int_0^z \left|a(x-t,y-s,z-\zeta)\right|\,\left|\varphi(t,s,\zeta)-\varphi_n(t,s,\zeta)\right|d\zeta ds dt\le\left(\int_0^x\int_0^y\int_0^z a^2(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^x\int_0^y\int_0^z\left(\varphi(t,s,\zeta)-\varphi_n(t,s,\zeta)\right)^2 d\zeta ds dt\right)^{\frac12}\le\parallel a(t,s,\zeta)\parallel\parallel\varphi_n(t,s,\zeta)-\varphi(t,s,\zeta)\parallel,$$ т. е.

$$\left|f(x,y,z)-f_n(x,y,z)\right|\le\parallel a\parallel\,\parallel\varphi_n-\varphi\parallel, (x,y,z)\in D_0. \qquad (47)$$

Так как правая часть (47) независимо от $(x,y,z)\in D_0$ стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е. непрерывные функции $f_n(x,y,z)$, n=1, 2,..., равномерно на $D_0$ стремится к $f(x,y,z)$ при $n\to\infty$, поэтому из (47) заключаем, что $f(x,y,z)$ непрерывно. Для истокообразной функции (46) справедливо утверждение, напоминающее классическую теорему Гильберта – Шмидта [7,8], т.е.

**Теорема 2.** Пусть функций $a(x,y,z)$ и $\varphi(x,y,z)$ из $L_2(D_0)$. Тогда разложение свертки (46) в ряд Фурье по системе $\{\varphi_i\,(1-x,1-y,1-z)\}$ равномерно на $D_0$ сходится свертке (46), т.е. ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i\,\varphi_i(1-x,1-y,1-z),\ (x,y,z)\in D_0, \qquad (48)$$

равномерно сходится к функции $f(x,y,z)$, где $\{\varphi_i\,(x,y,z)\}$ – ортонормированная система решений уравнения (15), а

$$f_i=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(1-t,1-s,1-\zeta)\ \varphi_i(t,s,\zeta)d\zeta ds dt,\ i=1,2,....$$

**Доказательство 1.** 1) Абсолютная и равномерная сходимость ряда (46), а также его 2) сходимость в среднем к предельной функции (45), вытекают из общей теоремы Гильберта – Шмидта [7,с.100]. Далее, в силу леммы 8 функция (46) непрерывна. Поэтому с учетом утверждения 2) ряд (48) равномерно сходится к функции (46). Однако для удобства читателю считаем не излишним провести и следующее

**Доказательство 2.** Пусть в свертке (46) функции *a(x,y,z)* и $\varphi(x,y,z)$ из $L_2(D_0)$. Тогда их свертка (46) в силу леммы 8 непрерывна на $D_0$. Разложим $\varphi\,(t,s,\zeta)$ в ряд Фурье :

$$\varphi\,(t,s,\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\, \varphi_i(t,s,\zeta) + \varphi_0(t,s,\zeta), (t,s,\zeta) \in D_0\,, \tag{49}$$

где $\varphi_i$ - коэффициенты Фурье функции $\varphi\,(t,s,\zeta)$, а $\varphi_0(t,s,\zeta)$ – решение уравнения

$$\int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-t,y-s,z-\zeta)\,\varphi_0(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt=0,\ (x,y,z)\ \in D_0.$$

Подставляя разложения (49) в правую часть (46), в пространстве $L_2(D_0)$ имеем

$$f\,(x,y,z)= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, \varphi_i\, \varphi_i(1-x,1-y,1-z),\ (x,y,z)\ \in D_0\,. \tag{50}$$

Теперь покажем , что правая часть (50) равномерно сходится на $D_0$ к функции $f(x,y,z)$. Обозначим

$f_i=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(1-t,1-s,1-\zeta)\ \varphi_i(t,s,\zeta)d\zeta ds dt.$ Тогда $f_i = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(t,s,\zeta)\ \varphi_i(1-t,1-s,1-\zeta)d\zeta ds dt = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \varphi_i(1-t,1-s,1-\zeta)\int_0^t\int_0^s\int_0^\zeta a(t-\tau,s-\sigma,\zeta-\eta)\varphi(\tau,\sigma,\eta)\ d\eta d\sigma d\tau\ d\zeta ds dt = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_\tau^1\int_\sigma^1\int_\eta^1 a(t-\tau,s-\sigma,\zeta-\eta)\ \varphi_i(1-t,1-s,1-\zeta)\varphi(\tau,\sigma,\eta)d\zeta ds dt d\eta d\sigma d\tau = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^{1-\tau}\int_0^{1-\sigma}\int_0^{1-\eta} a(1-t-\tau,1-s-\sigma,1-\zeta-\eta)\ \varphi_i(t,s,\zeta)\varphi(\tau,\sigma,\eta)d\zeta ds dt d\eta d\sigma d\tau = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \lambda_i\ \varphi_i(t,s,\zeta)\ \varphi(t,s,\zeta)d\zeta ds dt = \lambda_i\,\varphi_i$, т.е.

$$f_i= \lambda_i\,\varphi_i,\ \ i=1, 2,\ldots, \tag{51}$$

где $\varphi_i$- коэффициенты Фурье функции $\varphi(t,s,\zeta)$ в разложении (49). Положим

$$S_N\,(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, \varphi_i\, \varphi_i(1-x,1-y,1-z)\,. \tag{52}$$

Функция $S_N$ (x,y,z также в силу леммы 8 непрерывна на $D_0$. Тогда с учетом (49), (50) и (51) последовательно имеем $\left|f(x,y,z) - S_N\,(x,y,z)\right| = \left|\int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-t,y-s,z-\zeta)\varphi(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt - \sum_{i=1}^{N}\varphi_i\int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-t,y-s,z-\zeta)\,\varphi_i(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt\ \right| = \left|\int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-t,y-s,z-\zeta)\big(\varphi(t,s,\zeta)-\varphi_0(t,s,\zeta)\big)d\zeta ds dt - \sum_{i=1}^{N}\varphi_{\ i}\int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-t,y-s,z-\zeta)\,\varphi_i(t,s,\zeta)\,d\zeta ds dt\ \right| =$

$\left|\int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-t,y-s,z-\zeta)\left(\sum_{i=1}^{N}\varphi_{\ i}\,\varphi(t,s,\zeta)\right)d\zeta ds dt - \int_0^x\int_0^y\int_0^z a(x-\right.$

$t, y-s, z-\zeta) \sum_{i=1}^{N} \varphi_{\ i}\ \ \varphi_i(t,s,\zeta)\, d\zeta ds dt + \int_0^x \int_0^y \int_0^z a(x-t, y-s, z-$
$\zeta)\left(\sum_{=N+1}^{\infty} \varphi_{\ i}\, \varphi(t,s,\zeta)\right) d\zeta ds dt \ \Big| =$
$\Big| \int_0^x \int_0^y \int_0^z a(x-t, y-s, z-\zeta)\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_{\ i}\, \varphi(t,s,\zeta)\right) d\zeta ds dt \ \Big| \leq$
$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \Big| a(x-t, y-s, z-\zeta) \sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_{\ i}\, \varphi(t,s,\zeta) \Big|\, d\zeta ds dt \leq \| a \| *$
$[\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_{\ i}\, \varphi(t,s,\zeta)\right)^2 d\zeta ds dt]^{1/2} \quad \leq \| a \| \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_{\ i}^{\ 2}\right)^{1/2}$ ,
т.е. $\big| \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) - S_N\, (\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \big| \leq \| a \| \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_{\ i}^{\ 2}\right)^{1/2}$ , $(x,y,z) \in D_0$. (53)

Далее, так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{\ i}^{\ 2}$ сходится, то правая часть неравенства (53) стремится к нулю при $N \to \infty$. Следовательно, частичная сумма (52) равномерно на $D_0$ стремится к функции $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$. Теорема 2 доказана.

**Выводы.** Разумеется, приведение достаточного условия единственности решения в $L_2(D_0)$ уравнения свертки (2). Как было отмечено выше, является одним из важных вопросов, ибо Теорема 1 обеспечивает единственность решения , а именно из конечного уравнения (4) заключаем, что если для любого числа $\delta \in (0,1)$ функция $a(x,y,z) \neq 0$ почти всюду при $0 \leq x \leq \delta$, $0 \leq y \leq \delta$, $0 \leq z \leq \delta$, то $\varphi(x,y,z)=0$ почти всюду при $(x,y,z) \in D_{0.}$, т.е. уравнение свертки (3) имеет в $L_2(D_0)$ только нулевое решение.

А в теореме 2, в отличие от общих известных теорем о разложении в пространстве $L_2$ истокообразной функции в ряд Фурье по собственным функциям соответствующего симметричного ядра, утверждается, что разложение в ряд Фурье (49) сходится в $L_2(D_0)$, причем на $D_0$ равномерно - к f(x,y,z), а не только в среднем.

**Литература**

1. Сражидинов А. Метод перехода для уравнений свертки и некоторые его применения [Текст] / А.Сражидинов // Известия вузов Кыргызстана.– 2021.- №3. - С.14-22.

2. Titchmarsh E.C. The zeros of certain integral functions / E.C. Titchmarsh //Proc.London Math.Soc.-1926. Vol.25, №2.-P.283-302

3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье [Текст] / Е Титчмарш – М., Л.:ОГИЗ, 1948. – 480 с.

4. Микусинский Я. Операторное исчисление [Текст] / Я.Микусинский М.: ИЛ, 1956. - 311с.

5.Lions J.L. Supports de produits de composition/J.L.Lions //C.r.Acad.sci.Ser.A.-1951.-Vol.232.-P.1530-1532.

6. Mikusinski J. G. Un theoreme sur le produit de composition des fonctions de plusieurs variables/ J. G. Mikusinski, C.Ryll-Nardzewski //Studia Mathemat. L3 1953,- P. 62-68.

7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. :Учеб. для мат. спец.ун-тов, -3-е изд., перераб. [Текст] /А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин– М.:Наука , 1972. -496 с.

8.Петровский И.Г.Лекции по теории интегральных уравнений [Текст] / И.Г Петровский. – М.: ФИЗ.МАТ.ЛИТ., 2009,-136 с