

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.928

DOI: 10.52754/16947452\_2022\_4\_218

**СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ  
ТОЧКАМИ ПЕРЕВАЛА**

Матанов Шерали Маматжанович,  
преподаватель  
Ошский государственный университет  
Ош, Кыргызстан  
[sheralimatanov@yahoo.com](mailto:sheralimatanov@yahoo.com)

**Аннотация.** В данной работе рассматривается линейное сингулярно возмущенное уравнение при наличии двух точек перевала. Ранее такие классы уравнений не исследованы. Поставлена задача асимптотического исследования решений рассматриваемого уравнения. Для решения поставленной задачи привлечены линии уровня сопряженных гармонических функций. С использованием линий уровня проведены необходимые геометрические построения, что включает в себя покрытые и деление области. Далее выбраны пути интегрирования обеспечивающие ограниченность решений. Показана возможность перехода от одного нуля к другому и зависимость асимптотического поведения решений от начального значения независимой переменной. Доказано существование погранслойных линий, погранслойных и регулярных областей.

**Ключевые слова:** Сингулярное возмущение, асимптотическое поведение, аналитические и гармонические функции, линия уровня, погранслойные линии.

**ЭКИ АШУУ ЧЕКИТКЕ ЭЭ БОЛГОН СИНГУЛЯРДЫК  
КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕ**

Матанов Шерали Маматжанович окутуучу,  
Ош мамлекеттик университети  
Ош, Кыргызстан  
[sheralimatanov@yahoo.com](mailto:sheralimatanov@yahoo.com)

**Аннотация.** Бул макалада биз эки ашуу чекитке ээ болгон сызыктуу сингулярдуу козголгон теңдемени карайбыз. Буга чейин теңдемелердин мындай класстары изилденген эмес. Каралып жаткан теңдеменин чечимдерин асимптотикалык изилдөө маселеси коюлган. Бул маселени чечүү үчүн түгөйлүү гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктары колдонулат. Деңгээл сызыктарды колдонуу менен керектүү геометриялык сүрөттөөлөр колдонулду, алар капталган жана бөлүүчү аймактарды камтыйт. Андан ары чечимдердин чектүүлүгүн көрсөтүүчү интегралдык жолдор тандалат. Бир нөлдөн экинчи нөлгө өтүү мүмкүнчүлүгү жана чечимдердин асимптотикалык жүрүм-турумунун көз карандысыз өзгөрмөнүн баштапкы маанисине көз карандылыгы көрсөтүлгөн. Чек аралык катмар сызыктары, чек аралык катмар жана регулярдуу аймактардын бар экендиги далилденген.

**Ачык сөздөр:** Сингулярдык козголуу, асимптотикалык жүрүм-турум, аналитикалык жана гармоникалык функциялар, деңгээл сызыгы, аймакты бөлүү, чек аралык катмар сызыктары.

## SINGULARLY PERTURBED EQUATION WITH TWO SADDLE POINTS

Matanov Sherali Mamatzhanovich, teacher  
Osh State University  
Osh, Kyrgyzstan  
[sheralimatanov@yahoo.com](mailto:sheralimatanov@yahoo.com)

**Abstract:** In this paper, we consider a linear singularly perturbed equation in the presence of two saddle points. Previously, such classes of equations have not been studied. The problem of an asymptotic study of solutions of the considered equation is posed. To solve this problem, the level lines of conjugate harmonic functions are used. Using level lines, the necessary geometric constructions were carried out, which includes covered and division areas. Further, integration paths are chosen that ensure the boundedness of solutions. The possibility of passing from one zero to another and the dependence of the asymptotic behavior of solutions on the initial value of the independent variable are shown. The existence of boundary-layer lines, boundary-layer and regular regions is proved.

**Keywords:** Singular perturbation, asymptotic behavior, analytic and harmonic functions, level line, boundary layer lines.

**Введение.** В данной работе предлагается геометрический подход построения областей с применением линии уровней гармонических функций порождаемых аналитическими функциями  $F(t)$ . Рассматривается линейное сингулярно возмущенное уравнение при наличии двух точек перевала. Ранее такие классы уравнений не исследованы. Поставлена задача асимптотического исследования решений рассматриваемого уравнения. Для решения поставленной задачи привлечены линии уровня сопряженных гармонических функций.

Объект исследование и постановка задачи.

Объектом исследования будет сингулярно возмущенное уравнение

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon b(t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad (2)$$

где  $0 < \varepsilon$  - малый вещественный параметр;

$t_0, t \in D \subset \mathbb{C}$  - множество комплексных чисел, а  $D$  - односвязная, открытая и ограниченная область. В ранних работах [1 - 3] задача (1)-(2) исследована в предположении, что функция  $a(t)$  в области  $D$  не имеет нулей, а в [4]

рассмотрены случаи, когда  $a(t)$  в области  $D$  имеет единственный нуль, в [5] бисингулярно возмущенные линейное и слабо нелинейные уравнения с применением обобщенного метода погранфункций построены асимптотическое разложение решений.

В данной работе задачу (1)-(2) исследуем, когда функция  $a(t)$  в области  $D$  имеет два нуля.

Рассмотрим случай

$$a(t) = (t - i\alpha)(t - i\beta),$$

где  $\alpha, \beta \in R$  - множество действительных чисел и  $\alpha < \beta$ .

Пусть выполняется условие:

Условие:  $b(t) \in Q(D)$  -пространство аналитических функций и  $b(t)$  не имеет полюсов в  $D$ .

Задача: При сделанных предположениях исследуем асимптотическое поведение решения задачи (1)-(2). С возможностью перехода от одного нуля к другому и определим погранслоиные линии согласно принятым определений в [2].

Решение задачи. Сначала задачу (1)-(2) заменим следующим (для удобства аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$x = x^0 \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^t b(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (3)$$

где  $A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$ .

Исследование асимптотическое поведение функции (3) подразделим на две части:

1. Геометрические построения
2. Аналитическая часть

В первой части с использованием линии уровней гармонических функций  $\operatorname{Re} A(t)$ ,  $\operatorname{Im} A(t)$  в области  $D$  проведем некоторые геометрические построения.

В аналитической части согласно проведенным геометрическим построениям проведем исследование асимптотического поведения функции (3).

1. Геометрические построения.

Функцию  $a(t)$  представим в виде

$$a(t) = (t - i\beta)^2 + i(\beta - \alpha)(t - i\beta), \quad a(t) = (t - i\alpha)^2 + i(\alpha - \beta)(t - i\alpha).$$

и определим функции

$$A_1(t) = \int_i^{\alpha} a(\tau) d\tau = \frac{1}{3}(t - i\alpha)^3 + \frac{1}{2}i(\alpha - \beta)(t - i\alpha)^2,$$

$$A_2(t) = \int_{i\beta}^t a(\tau) d\tau = \frac{1}{3}(t - i\beta)^3 + \frac{1}{2}i(\beta - \alpha)(t - i\alpha).$$

Далее определим  $\operatorname{Re} A_1(t)$  и  $\operatorname{Re} A_2(t)$ . Положим  $t = t_1 + it_2$ ,  $t_1, t_2$  – действительные переменные,  $i$  – мнимая единица.

Имеем

$$\operatorname{Re} A_1(t) = \frac{1}{3}(t_1^3 - 3t_1(t_2 - \alpha))^2 + 3(\beta - \alpha)t_1(t_2 - \alpha),$$

$$\operatorname{Re} A_2(t) = \frac{1}{3}(t_1^3 - 3t_1(t_2 - \beta))^2 - 3(\beta - \alpha)t_1(t_2 - \beta).$$

Введем в рассмотрение линии уровня

$$(p_1) = \{t \in D, \operatorname{Re} A_1(t) = 0\},$$

$$(p_2) = \{t \in D, \operatorname{Re} A_2(t) = 0\}.$$

Имеем

$$\operatorname{Re} A_1(t) = \frac{t_1}{3}(t_1^2 - 3(t_2 - \alpha)^2 + 3(\beta - \alpha)(t_2 - \alpha)) = 0.$$

Отсюда

$$t_1 = 0 \text{ или } t_1^2 - 3(t_2 - \alpha)^2 + 3(\beta - \alpha)(t_2 - \alpha) = 0$$

Согласно общей теории [6,7] линия уровня  $(p_1)$  в точке  $(0; \alpha)$  разветвляется.

Ветви определяются уравнениями

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{t_1^2 + \frac{3}{4}(\beta - \alpha)^2}. \quad (4)$$

Аналогично линия уровня  $(p_2)$  разветвляется в точке  $(0; \beta)$  и ветви определяются уравнениями

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{t_1^2 + \frac{3}{4}(\beta - \alpha)^2}. \quad (5)$$

Таким образом, линии уровня  $(p_1)$  и  $(p_2)$  имеют общую ветвь  $t_1 = 0$ , а другими ветвями являются гиперболы с вершинами в точках  $(0; \alpha)$  и  $(0; \beta)$ . Ветвями линии уровней  $(p_1)$  и  $(p_2)$  область  $D$  разделяется на шесть частей. Эти части обозначим  $D_j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) (Рис.1.)

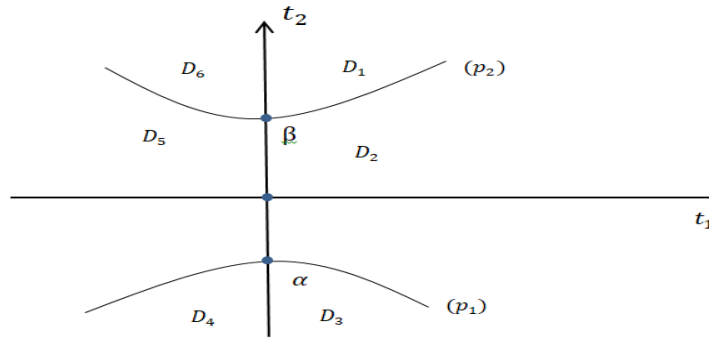


Рис.1 Ветви линии уровней  $(p_1), (p_2)$  и области  $D_j (j=1, \dots, 6)$

Нетрудно проверить следующие соотношения

$$\forall t \in D_1 \cup D_3 \cup D_5 (\operatorname{Re} A_k(t) \leq 0),$$

$$\forall t \in D_2 \cup D_4 \cup D_6 (\operatorname{Re} A_k(t) \geq 0), k = 1, 2.$$

Кривую определяемую (4) обозначим  $(p_0^-)$ , а (5) обозначим  $(p_0^+)$ .

Лучами

$$(p_{12}) = \{t \in C, t_2 = \frac{\alpha + \beta}{2} - q, -\infty < t_1 \leq 0, q > 0\},$$

$$(p_{12}) = \{t \in C, t_2 = \frac{\alpha + \beta}{2} + q, +\infty < t_1 \leq 0, q > 0\}$$

область  $D_5$  разделим на три части, которые обозначим  $D_{51}, D_{52}, D_{53}$  (рис. 2).

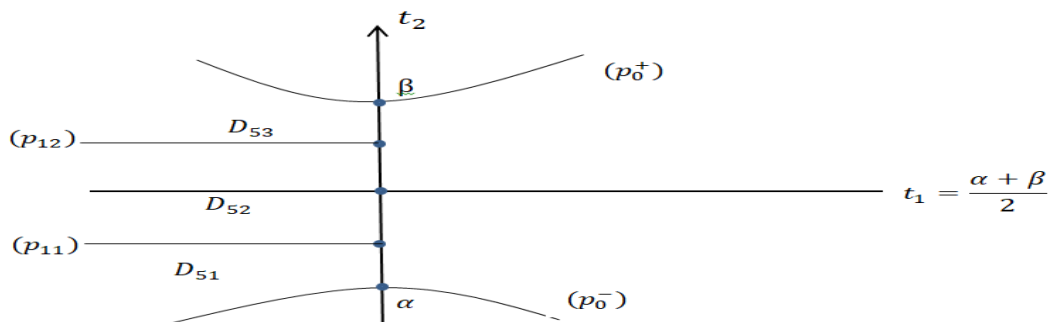


Рис.2 Области  $D_{51}, D_{52}, D_{53}$

Далее введем линии уровня

$$(p_{0\varepsilon}^+) = \{t \in D_1, \operatorname{Re} A_2(t) = -\varepsilon^{\lambda_1}, 0 < \lambda_1 < 1\},$$

$$(p_{0\varepsilon}^-) = \{t \in D_3, \operatorname{Re} A_1(t) = -\varepsilon^{\lambda_1}, 0 < \lambda_1 < 1\}.$$

Проведем прямую

$$(p_{13}) = \{t \in C, t_1 = \varepsilon^\lambda, -\infty < t_2 < +\infty, 0 < \lambda < 1\},$$

$$(p_{14}) = \{t \in C, t_1 = -\varepsilon^\lambda, -\infty < t_2 < +\infty, 0 < \lambda < 1\},$$

$$(p_{15}) = \{t \in C, t_2 = \beta + \varepsilon^\lambda, -\infty < t_1 < +\infty, 0 < \lambda < 1\},$$

$$(p_{16}) = \{t \in C, t_2 = \beta - \varepsilon^\lambda, -\infty < t_1 < +\infty, 0 < \lambda < 1\},$$

$$(p_{17}) = \{t \in C, t_2 = \alpha - \varepsilon^\lambda, -\infty < t_1 < +\infty, 0 < \lambda < 1\},$$

$$(p_{18}) = \{t \in C, t_2 = \alpha + \varepsilon^\lambda, -\infty < t_1 < +\infty, 0 < \lambda < 1\}. \text{ (Рис. 1).}$$

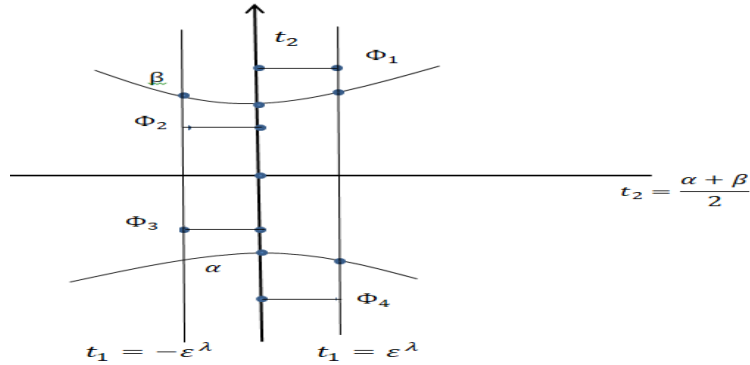


Рис.3 Различные линии

Точки пересечения  $(p_{13})$  и  $(p_{15})$  обозначим  $\Phi_1$ ;  $(p_{14})$  и  $(p_{16}) \rightarrow \Phi_2$ ;  
 $(p_{14})$  и  $(p_{18}) \rightarrow \Phi_3$ ;  $(p_{13})$  и  $(p_{17}) \rightarrow \Phi_4$ .

Данные точки имеют координаты

$$\Phi_1(\varepsilon^\lambda, \beta + \varepsilon^\lambda), \Phi_2(-\varepsilon^\lambda, \beta - \varepsilon^\lambda), \Phi_3(-\varepsilon^\lambda, \alpha + \varepsilon^\lambda), \Phi_4(\varepsilon^\lambda, \alpha - \varepsilon^\lambda).$$

Определим точки  $\Phi_5(0; \alpha), \Phi_6(0; \beta)$  и точки пересечения прямой  $(p_{14})$  с линиями уровней  $(p_{0\varepsilon}^+)$  и  $(p_{0\varepsilon}^-)$ , которые обозначим  $\Phi_7$  и  $\Phi_8$ . Эти точки имеют координаты

$$\Phi_7(\varepsilon^\lambda; \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\varepsilon^{2\lambda} + \frac{3}{4}(\beta - \alpha)^2}),$$

$$\Phi_8(\varepsilon^\lambda; \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\varepsilon^{2\lambda} + \frac{3}{4}(\beta - \alpha)^2}).$$

Далее введем обозначения

$$\Phi_9(0; \alpha - \varepsilon^\lambda), \Phi_{10}(0; \beta + \varepsilon^\lambda).$$

Область с вершинами в точках  $\Phi_5, \Phi_8, \Phi_4, \Phi_9$  обозначим  $\Phi_{1\varepsilon}$ , а область с вершинами в точках  $\Phi_6, \Phi_{10}, \Phi_1, \Phi_7$  обозначим  $\Phi_{2\varepsilon}$  (Рис. 4).

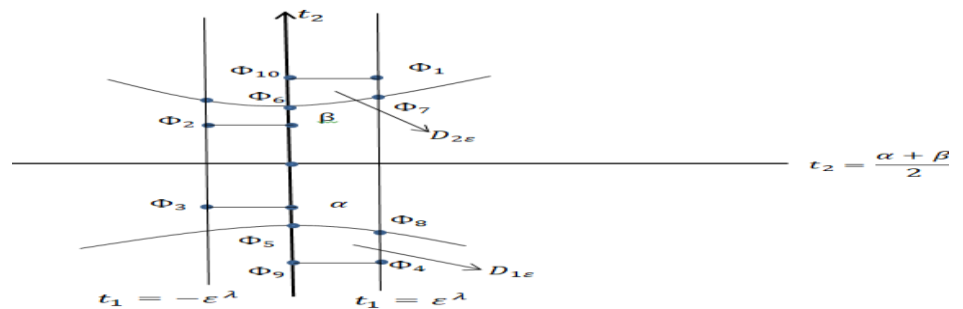


Рис. 4 Области  $D_{1\varepsilon}, D_{2\varepsilon}$

2. Аналитическая часть

Для исследования асимптотического поведения функции (3) определим пути интегрирования. Поскольку для  $t_0$  имеются различные возможности, рассмотрим только случай  $t_0 = i\alpha$ .

В. Для ограниченности функции должно быть  $\text{Re } A(b) \leq 0$  и по выбранным путям интегрирования  $\text{Re } A(t)$  должна быть не возрастающей. Из предложения В вытекает, если  $t_0$  принадлежит отрицательным частям из  $D_i (i=1, \dots, 6)$ , то не существует путей соединяющие  $t_0$  с нулями ( $i\alpha$ ) или ( $i\beta$ ) по которым функция (3) будет ограниченной. Для этого случая путь может идти только вглубь отрицательной части, (рис.3).

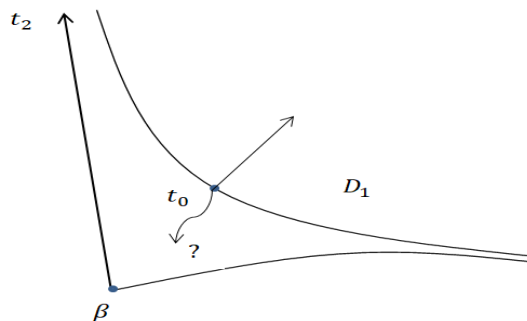


Рис. 5 Случай  $t_0 \in D_1$  и выбор путей интегрирования

Если  $t_0$  принадлежит к положительным частям, то существуют пути соединяющие точки  $t_0$  и нулей ( $i\alpha$ ) или ( $i\beta$ ) по которым функция (3) будет ограниченной, а по путям идущим вглубь этой части функция (3) будет неограниченной (рис. 6).

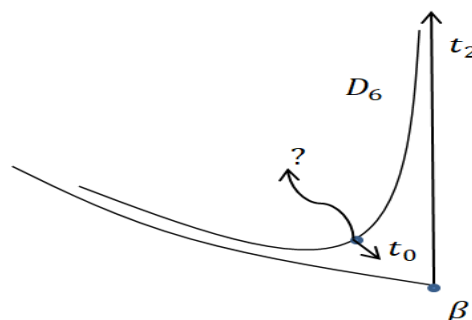


Рис. 6 Случай  $t_0 \in D_6$  и пути интегрирования

Если  $t_0$  принадлежит к одному из ветвей линии уровня ( $p_1$ ) или ( $p_2$ ), то сводится к случаю  $t_0 = \alpha$ , или  $t_0 = \beta$ . Для этого достаточно, по ветви ( $p_1$ ) или ( $p_2$ ), приблизится к нулю ( $i\alpha$ ) или ( $i\beta$ ). По ветви ( $p_1$ ) или ( $p_2$ ), функция  $\text{Re } A(t)$  постоянна и согласна В функция (3) ограничена.

Приступаем к выбору путей интегрирования. Далее запись  $K[t_0, t]$  означает часть кривой соединяющей точки  $t_0, t$ .

а) Пусть  $t \in D_3$ . Тогда путь состоит из части:  $(p_0^-)$   $[t_0, \tilde{t}]$ ; части прямой  $(\tilde{p}_1) = \{t \in C, t_1 = \tilde{t}_1, -\infty < t_2 < +\infty\} [\tilde{t}, t]$ .

б)  $t \in D_{51}$ , то путь состоит из части:  $(p_0^-)$  соединяющей точки  $t_0$  и  $\tilde{t}$ ; части прямой  $\{t \in C, t_1 = \tilde{t}_1, -\infty < t_2 < +\infty\}$  соединяющей точки  $\tilde{t}$  и  $t$ .

в)  $t \in D_{52}$ . Путь состоит из части: прямой  $\{t \in C, t_1 = 0, -\infty < t_2 < +\infty\}$  соединяющей точки  $t_0$  и  $\tilde{t}$ ; луча  $\{t \in D_{52}, -\infty < t_1 \leq 0, t_2 = \tilde{t}_2\}$  соединяющей точки  $\tilde{t}$  и  $t$ .

г)  $t \in D_{53}$ . Путь состоит из части: прямой  $\{t \in C, t_1 = 0, -\infty < t_2 < +\infty\}$   $[(0; \alpha), (0; \beta)]$ ;  $(p_0^+)$   $[(0; \beta)$  и  $\tilde{t}]$ ; прямой  $\{t \in C, t_1 = \tilde{t}_1, -\infty < t_2 < +\infty\} [\tilde{t}, t]$ .

д)  $t \in D_1$ . Путь состоит из: отрезка  $[(0; \alpha), (0; \beta)]$ , части  $(p_0^+)[(0; \beta), \tilde{t}]$ ; отрезка  $[\tilde{t}, t = \tilde{t}_1 + it_2]$ .

Ограничимся рассмотрением случая а).

Рассмотрим функцию  $A(t) = \int_t^t a(\tau) d\tau$ . Применяя теорему Коши (независимость значения интеграла от формы путей интегрирования) получим следующие соотношения

$$A(t) = A_1(t) - A_1(t_0), \quad A(t) = A_2(t) - A_2(t_0).$$

В нашем случае  $t_0 = \alpha$ , тогда  $A_1(t_0) = 0$

Согласно выбранного пути интегрирования (3) представим так:

$$x = x^0 \exp \frac{A_1(t)}{\varepsilon} + \int_{(p_0^-)} \exp \frac{A_1(t) - A_1(\tau)}{\varepsilon} b(\tau) d\tau + \int_{(\tilde{p}_1)} b(\tau) \exp \frac{A_1(t) - A_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \quad (6)$$

Если  $t$  меняется вдоль  $(p_0^-)$  или  $(\tilde{p}_2) = \{t_1 = 0, -\infty < t_2 \leq \alpha\}$ , то  $\exp \frac{A_1(t)}{\varepsilon} = \exp \frac{i \operatorname{Im} A_1(t)}{\varepsilon}$  и это выражение не имеет предела по  $\varepsilon$ , а

$$\int_{(\tilde{p}_2) \text{ или } (p_0^-)} b(\tau) \exp \frac{A_1(t) - A_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau = O(\varepsilon^\lambda), \quad (0 < \lambda \leq \frac{1}{2}).$$

Тогда для  $t \in (p_0^-) \cup (\tilde{p}_2)$  функция  $x(t, \varepsilon)$  не имеет предела.

Через точку  $\Phi_4$  проведем линию уровня

$$(p_{0\varepsilon}^-) = \{t \in D_3, \operatorname{Re} A_1(t) = -\varepsilon^{2\lambda} (\frac{2}{3} \varepsilon^\lambda + (\beta - \alpha))\}.$$

Область ограничения  $(p_0^-)$  и  $(p_{0\varepsilon}^-)$  обозначим  $D_{3\varepsilon}$ .



Полосу  $\{t \in D_3, 0 \leq t_1 < \varepsilon^\lambda, -\infty < t_2 \leq \alpha - \varepsilon^\lambda\} \Pi_{1\varepsilon}$  (рис.7).

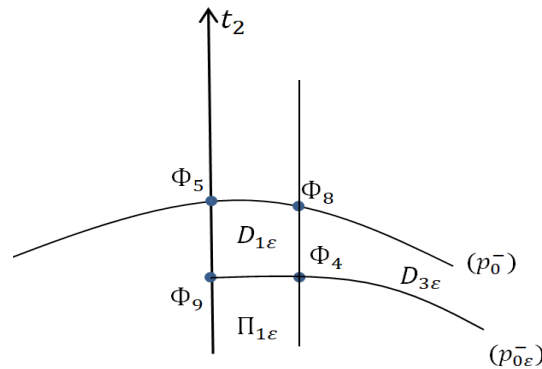


Рис.7 Области  $\Pi_{1\varepsilon}$  и  $D_{3\varepsilon}$

Теперь нетрудно доказать, что  $D_{1\varepsilon} \cup D_{3\varepsilon} \cup \Pi_{1\varepsilon}$  является погранслойной областью, а остающаяся часть  $D_3$  является регулярной областью, согласно принятых определений в [2].

Аналогичным образом могут быть исследованы оставшиеся случаи, согласно выбранных путей. Только заметим ветвь линии уровня  $\{t \in C, t_1 = 0, -\infty < t_2 < +\infty\}$  позволяет переход от одного нуля к другому.

Таким образом ветви линии уровней  $(p_1), (p_2)$  являются погранслойными линиями, а прилегающие области (типа  $\Pi_{1\varepsilon}$ ) являются погранслойными областями.

Заметим, добавление в (1) нелинейных функций по  $x(t, \varepsilon)$  (при условии, что это функция аналитична в некоторой области переменных  $t, x$ ) существенно не меняет асимптотическое поведение решения рассматриваемой задачи. Только в этом случае для доказательства существования и ограниченности надо применить метод последовательных приближений или принцип отображение пространство в себе.

**Выводы:** По итогам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Линия уровня  $(p_0)$ , проходящая через начальные значения  $t_0$  является погранслойной линией.
2. Область  $D_{1\varepsilon}$  — является погранслойной областью.
3. Часть ветвей  $(p_{01}), (p_{02})$  также являются погранслойными линиями, отделяющие области, где решение имеет неоднородные оценки по  $\varepsilon$ .
4. Под влиянием точки перевала рассматриваемая область разделяется на несколько подобластей, в каждом из которых решение имеет неоднородные оценки по  $\varepsilon$ .

5. Исследования показывают, что погранслойные линии появляются под влиянием точек перевала, и такие линии являются новыми видами погранслойных линий.

#### Литература

1. Алыбаев К.С. Метод погранслойных линий построения регулярно и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLVII международной научно-практической конференции. № 10 (45). Россия, Новосибирск: СиБАК, 2016. 59-66 с.
2. Панков П.С. Явление погранслойных линий, и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / Панков П.С, Алыбаев К.С, Тампагаров К.Б, Нарбаев М.Р // Вестник Ошского государственного университета. 2013. Т. 1. с. 227.
3. Алыбаев К. С. Зависимость областей притяжений от начальных значений и расширение смежных областей притяжений [Текст] / Алыбаев К.С., Мурзабаева А.Б. / Известия Ошского технологического университета. 2019. № 3. с. 174-180.
4. Алыбаев К. С, Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений с точками перевала (ЕНО)
5. Турсунов Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений [Текст]/ дисс. ...док.физ-мат.наук:01.01.02/ Д.А. Турсунов.-Ош, 2014.- 192 с.
6. Федорюк М. В. Метод перевала [Текст]/ М.В. Федорюк.-Москва: Наука,1977. -368с.
7. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного [Текст]/ М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат.-Москва: Наука, 1973.-739 с.