МАТЕМАТИКА

УДК 517.928
DOI: 10.52754/16947452_2022_4_206

МЕТОД ЛИНИЙ УРОВНЯ В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Алыбаев Курманбек Сарманович,
д.ф.-м.н., профессор,
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Мусакулова Назгул Куралбековна,
преподаватель
Жалал-Абадский государственный университет
kuralbekovna79@inbox.ru
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *В данной работе проведен краткий анализ ранее проведенных исследований по неавтономным и автономным сингулярно возмущенным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Отмечено, основные результаты получены с использованием устойчивости точек покоя для неавтономных уравнений и положений равновесия для автономных уравнений. Поставлен вопрос исследования асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений без привлечения условий устойчивости. Для решения поставленной задачи разработан метод с использованием линий уровня сопряженных гармонических функций, порождаемых заданными аналитическими функциями. Демонстрация метода проведена, для простоты изложения, для линейного скалярного уравнения первого порядка. От правой части требуется только аналитичность в некоторой открытой, односвязной области комплексной плоскости. Метод состоит из двух частей: топологической и аналитической. В первой части с использованием линий уровней сопряженных гармонических функций произведены покрытие и деление области. Во второй части с выбором путей интегрирования осуществлено исследование асимтотического поведения решения заданного уравнения. Исследование проведено без привлечения условий устойчивости. Далее проведен анализ возможных направлений развития метода.*

Ключевые слова: *Сингулярно возмущенные уравнения, невозмущенные уравнения, множество притяжений, устойчивость, гармонические функции, линии уровня, покрытие и деление области, путь интегрирование, асимптотическое поведение.*

СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕЛЕРДИН ТЕОРИЯСЫНДАГЫ ДЕҢГЭЭЛ СЫЗЫКТАР МЕТОДУ

Алыбаев Курманбек Сарманович,
ф.-м.и.д., профессор,
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Мусакулова Назгул Куралбековна,
окутуучусу
kuralbekovna79@inbox.ru
Жалал-Абад мамлекеттик университети
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *Бул жумушта сингулярдык козголгон автономдук эмес жана автономдук кадимки дифференциалдык теңдемелер боюнча жүргүзүлгөн изилдөөлөргө кыскача сереп келтирилген. Алынган негизги жыйынтыктар автономдук эмес теңдемелер үчүн тынч абалдагы чекиттин, ал эми автономдук теңдемелерде тең салмактуулук абалдын туруктуулугун колдонуу аркылуу алынгандыгы белгиленди. Сингулярдык козголгон теңдемелердин асимптотикалык жүрүшүн туруктуулук шартын колдонбостон изилдөө суроосу коюлган. Коюлган маселени чечүү үчүн берилген аналитикалык функциялар жараткан түйүндөш гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктарына негизделген метод иштелтип чыгылган. Жеңилдик үчүн метод биринчи тартиптеги скалярдык теңдеме аркылуу көрсөтүлдү. Теңдеменин оң жак бөлүгүнөн кандайдыр бир ачык, байламталуу областа аналитикалык болушу гана талап кылынат. Метод эки бөлүктөн турат: топологиялык жана аналитикалык. Биринчи бөлүктө түйүндөш гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктары аркылуу област капталган жана бөлүнгөн. Экинчи бөлүктө интегралдоонун жолдору тандалып, берилген теңдеменин чечиминин асимптотикалык жүрүшү изилденген. Изилдөө туруктуулук шартын колдонбостон жүргүзүлгөн. Андан кийин методду колдонуунун мүмкүн болгон багыттарына сереп салынган.*

Ачкыч сөздөр: *сингулярдык козголгон теңдемелер, козголбогон теңдемелер, тартылуу көптүгү, туруктуулук, гармоникалык функциялар, деңгээл сызыктар, областы каптоо жана бөлүү, интегралдоо жолдору, асимтотикалык жүрүш.*

LEVEL LINE METHOD IN THE THEORY OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS

Alybaev Kurmanbek Sarmanovich,
d.ph.-m.s., professor,
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Mussakulova Nazgul Kuralbekovna,
teacher,
kuralbekovna79@inbox.ru
Jalal-Abad State University
Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Abstract. *In this article, we briefly analyze previous studies on non-autonomous and autonomous singularly perturbed ordinary differential equations. It is noted that the main results are obtained using the stability of rest points for non-autonomous equations and equilibrium positions for autonomous equations. The question is raised of the study of the asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed equations without invoking stability conditions. To solve the problem, a method has been developed using the level lines of conjugate harmonic functions generated by given analytic functions. The demonstration of the method was carried out for simplicity of presentation, for a linear scalar equation of the first order. The right side is only required to be analytic in some open, simply connected domain of the complex plane. The method consists of two parts: topological and analytical. In the first part, using the level lines of the conjugate harmonic functions, the covered and division of the region is produced. In the second part, with the choice of integration paths, the study of the asymptotic behavior of the solution of a given equation is carried out. The study was carried out without involving stability* *conditions. Next, an analysis of possible directions for the development of the method is carried out.*

Keywords: *Singularly perturbed equations, unperturbed equation, attraction set, stability, harmonic functions, level lines, covered and division domains, integration path, asymptotic behavior*

Введение. Пусть рассматриваются уравнения

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = f\left(t, x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)\right), \quad y' = g\left(t, x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)\right) \tag{1}$$

или

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = f\left(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)\right), \quad y' = g\left(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)\right), \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x(0,\varepsilon) = x^0, \;\; y(0,\varepsilon) = y^0 \quad , \tag{3}$$

где ε>0 - малый вещественный параметр; $t \in [0, t_0]$, $x\left([0,t_0) \to R^n\right)$, $y\left([0,t_0) \to R^m\right)$.

Уравнения вида (1) – (2) называются сингулярно возмущенными (с.в.у).

(1) – неавтономная, а (2) – автономная. Пологая $\varepsilon = 0$ получим уравнения

$$f\left(t, \xi(t), h(t)\right) = 0, \quad h'(t) = g\left(t, \xi(t), h(t)\right). \tag{4}$$

$$f\left(\xi(t), h(t)\right) = 0, \quad h'(t) = g\left(\xi(t), h(t)\right). \tag{5}$$

Одним из основных проблем в теории с.в.у является: выявить множество к которым притягиваются решение задачи (1), (3) и (2), (3).

Естественно предположить, что такими множествами могут быть множества решений (4), (5).

Истинность предположения в наиболее общем виде для задачи (1), (3) решена А.Н. Тихоновым [1], а для задачи (2), (3) Л.С. Понтрягиным [2-3].

А.Н. Тихонов для решения поставленной задачи использовал устойчивость точки покоя присоединенной системы

$$\frac{du}{d\tau} = f\left(t, u, y^*\right), \tag{6}$$

В (6) t, y^* рассматриваются как параметры.

Корень $u = \varphi\left(t, y^*\right)$ первого уровня (4) является точкой покоя (6).

Л.С. Понтрягин предложил исследование задачи начать с изучения поведения решений, так называемой «Системы быстрых движений»

$$\varepsilon x' = f(t, y), \tag{7}$$

в зависимости от того, каковы стационарные решения системы (7). Стационарными решениями могут быть: положение равновесия или периодические решения. Л.С. Понтрягин решил задачу в предположении, что система (7) имеет положения равновесия. Если система (7) имеет устойчивое положение равновесия, то переменная x быстро устремляется к этому положению равновесия и переменные x и y в системе (2) будут изменяться уже со сравнимыми скоростями, а траектория движения будет происходить плавно, вблизи поверхности $f(t, y) = 0$ (S). Характер движения фазовой точки системы (2) вблизи поверхности (S) сохраняется до тех пор, пока при некотором бифуркационном значении y, сопровождаемое устойчивое положение равновесия исчезнет. После этого фазовая точка быстро устремится в окрестность другого устойчивого положения равновесия системы (7). Может случится так, что в результате последовательных чередований медленных и быстрых движений возникает замкнутая траектория. Тогда соответствующее ей периодическое решение системы (2) называют релаксационным колебанием.

Если при каждом значение y система (2) имеет своими стационарными решениями не только положения равновесия, то возникают многочисленные задачи [4].

Постановка задачи и метод исследования:

Теперь поставим такую задачу: Исследовать асимптотическое решение с.в.у без привлечения условий устойчивости.

Для решения поставленной задачи разработан метод, основанный на использование линий уровней сопряженных гармонических функций, порождаемых заданными аналитическими функциями.

Для демонстрации метода рассмотрим уравнение:

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t) x(t, \varepsilon) + b(t) \tag{8}$$

с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0 \tag{9}$$

где $t \in D \subset C -$ множество комплексных чисел, а D односвязная, открытая, ограниченная область; $x(t, \varepsilon) -$ скалярная функция.

Пусть выполняются условия:

У1. $a(t), b(t) \in Q(D) -$ пространство аналитических функций в D.

У2. $\forall t \in D$ $(a(t) \neq 0)$.

У2 накладывается для простоты изложения. При $\varepsilon = 0$ из (8) имеем невозмущенное уравнение

$$a(t)\xi(t) + b(t) = 0.$$

Задача. Сушествует ли область $D_0 \subset D$ и $\forall t \in D_0$ $(x(t,\varepsilon) \to \xi(t)$ по $\varepsilon)$?

Определение 1. Если D_0 существует, то D_0 назовём областью притяжения решения $x(t,\varepsilon)$ к решению $\xi(t)$.

Таким образом задача состоит в доказательстве существования области притяжения.

Решение задачи (8)-(9) представим в виде

$$x = x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} b(\tau) exp\frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} dx, \qquad (10)$$

где $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau \in Q(D)$.

Решение задачи разделим на две части:

1. Топологическая.
2. Аналитическая.

1. Топологическая часть

Согласно У1 функция $A(t)$ в точке $t = t_0$ имеет простой нуль. Других нулей она в области D не имеет.

Введем в рассмотрение функции $ReA(t)$ и $ImA(t)$. $ReA(t)$ и $ImA(t)$ является сопряжено гармоническими функциями. Известно [5] гармонические функции свои заданные значения принимают на некоторых линиях и эти линии не имеют изолированных, концевых точках и точек возврата (рис.1).

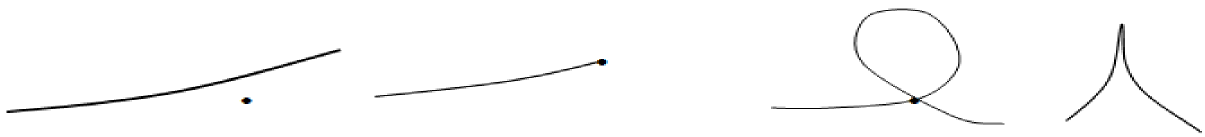

Рис.1 *а) изолированная точка* *б) концевая точка* *в) точка возврата*

Как правило такими линиями являются линии уровня гармонических функций. Линии уровня упираются к границе области, если она ограничена или уходят в бесконечность при неограниченной области.

Определение 2. Множества $(p) = \{t \in D, ReA(t) = p - const\}$, $(q) = \{t \in D, ImA(t) = q - const\}$, назовем линиями уровня функций $ReA(t), ImA(t)$

Если $(p)u(q)$ пересекаются, то в точках пересечения они ортогональны. В силу У1 область D полностью покрывается сетью множеств $\{(p(t))\}$ и $\{(q(t))\}$ (рис. 2).

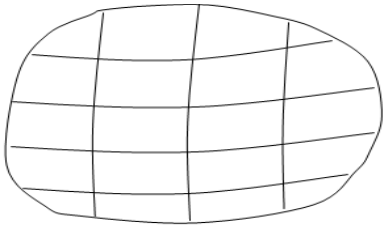

Рис.2 Покрытие области D множествами $\{(p(t))\}$ и $\{(q(t))\}$

Определим линии уровня

$$(p_0)=\{t\in \mathrm{D}, ReA(t)=0\},\ (q_0)=\{t\in \mathrm{D},\ \mathrm{I}mA(t)=0\}.$$

Линия уровня (p_0) делит область D на части D_1 и D_2 (рис.3).

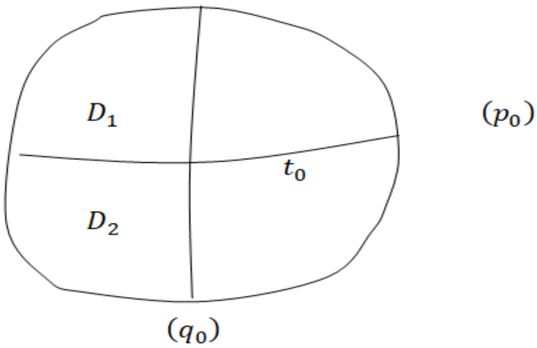

рис.3 Деление области D.

Возьмем произвольную линию (q) , пересекающееся с (p_0). Точку пересечения обозначим через T. $T\in(p_0)$, тогда $ReA(T)=0$.

Рассмотрим функцию $ReA(t)=0$ вдоль линии (q). Вдоль линии $ReA(t)$ строго монотонна [5]. Поскольку $ReA(T)=0$, то справедлива одно из следующих соотношений:

$$\forall t\in D_1\ (ReA(t)\leq 0)\ \text{ или } \forall t\in D_1\ (ReA(t)\geq 0).$$

Причем равенство имеет место только на границе D_1 т. е. на (p_0).

Поскольку эти соотношения равнозначны, то возьмем

$$\forall t\in D_1\big(ReA(t)\leq 0\big).$$

Тогда

$$\forall t\in D_2\ (ReA(t)\geq 0)$$

Далее введем линии уровня

$$p_{0\varepsilon}^{-}=\{t\in D_1,\ ReA(t)=\varepsilon ln\varepsilon\},$$

$$(p_{0\varepsilon}^{+})=\{t\in D_2,\ ReA(t)=-\varepsilon ln\varepsilon\}.$$

Область ограниченный лигиями (p_0) и $(p_{0\varepsilon}^{-})$ обозначим через $\mathcal{D}_{1\varepsilon}$, a (p_0) и $(p_{0\varepsilon}^{+})$ — $\mathcal{D}_{2\varepsilon}$.

Введем обозначения

$$\mathcal{D}_1\backslash\mathcal{D}_{1\varepsilon}=\mathcal{D}_{10},\ \ \mathcal{D}_2\backslash\mathcal{D}_{2\varepsilon}=\mathcal{D}_{20}.$$

При этом считаем $(p_{0\varepsilon}^{-})\in\mathcal{D}_{10}$, $(p_{0\varepsilon}^{+})\in\mathcal{D}_{20}$ (рис. 4).

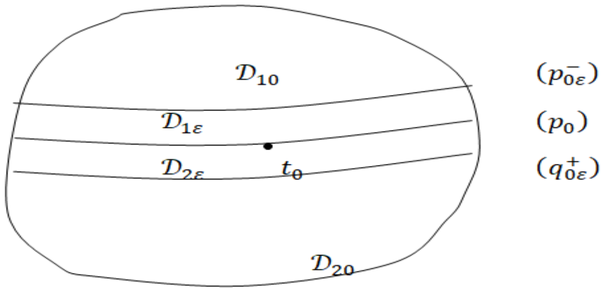

Рис. 4 Области $D_{1\varepsilon}$, D_{10}, $D_{2\varepsilon}$, D_{20}.

2. Аналитическая часть

Для интеграла в (10) выберем пути интегрирования.

Путь состоит из части: (p_0) соединяющего точки t_0, t^*; (q) соединяющего t^* и t.

Линии уровня гармонических функций являются аналитическими кривыми, следовательно, их уравнения можно представить параметрически в виде

$\tau_1=\tau_1(s),\ \tau_2=\tau_2(s),\ 0\le s\le s_0<+\infty$ (уравнение (p_0));

$\tau_1=\tau_1(\sigma),\ \tau_2=\tau_2(\sigma),\ 0\le\sigma\le\sigma_0<+\infty$ (уравнение (q)),

$\tau=\tau_1+i\tau_2\ u\ \tau$ - текущая координата в (10).

Согласно выбранных путей интегрирования (10) представим в виде

$$x=x^0exp\frac{A(t(\tilde{\sigma}))}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tilde{s}}b(\tau(\tilde{s}))exp\frac{A(t(\tilde{\sigma}))-A(\tau(s))}{\varepsilon}(\tau_1^{'}(s)+i\tau_2^{'}(s))ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tilde{\sigma}}b(\tau(\sigma))exp\frac{A(t(\tilde{\sigma}))-A(\tau(\sigma))}{\varepsilon}(\tau_1^{'}(\sigma)+i\tau_2^{'}(\sigma))d\sigma. \qquad (11)$$

Сначала рассмотрим случай $t=t^*\in(p_0)$, тогда из (11) имеем

$$x = x^0 exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tilde{s}} b\left(\tau(s)\right) exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right) - A\left(\tau(s)\right)}{\varepsilon}\left(\tau_1^{'}(s) + i\tau_2^{'}(s)\right)ds \qquad (12)$$

При $t^* \in (p_0)$ имеем $A\big(t^*(\tilde{s})\big) = iImA\big(t^*(\tilde{s})\big)$.

Тогда выражение $x^0 exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right)}{\varepsilon}$ не имеет предела при $\varepsilon \to 0$, но ограничено по модулю. Интеграл в (12) можно проинтегрировать по частям.

Получим

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tilde{s}} b\left(\tau(s)\right) exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right) - A\left(\tau(s)\right)}{\varepsilon}\left(\tau_1^{'}(s) + i\tau_2^{'}(s)\right)ds =$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tilde{s}} b\left(\tau(s)\right) exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right) - A\left(\tau(s)\right)}{\varepsilon}\left(\tau_1^{'}(s) + i\tau_2^{'}(s)\right)ds =$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tilde{s}} b\left(\tau(s)\right) exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right) - A\left(\tau(s)\right)}{\varepsilon}\left(\tau_1^{'}(s) + i\tau_2^{'}(s)\right)ds =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tilde{s}} \frac{-\varepsilon b\left(\tau(s)\right)}{a\left(\tau(s)\right)\left(\tau_1^{'}(s) + i\tau_2^{'}(s)\right)}\left(\tau_1^{'}(s) + i\tau_2^{'}(s)\right) d exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right) - A\left(\tau(s)\right)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tilde{s}} \frac{-\varepsilon b\left(\tau(s)\right)}{a\left(\tau(s)\right)\left(\tau_1^{'}(s) + i\tau_2^{'}(s)\right)}\left(\tau_1^{'}(s) + i\tau_2^{'}(s)\right) d exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right) - A\left(\tau(s)\right)}{\varepsilon} =$$

$$= -\frac{b\left(t^*(\tilde{s})\right)}{a\left(t^*(\tilde{s})\right)} + \frac{b(t_0)}{a(t_0)} exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right)}{\varepsilon} +$$

$$+ \int_0^{\tilde{s}} b_1\left(\tau(s)\right) exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right) - A\left(\tau(s)\right)}{\varepsilon}\left(\tau_1^{'}(s) + i\tau_2^{'}(s)\right)ds.$$

Полученное выражение показывает, что выражение $\frac{b(t_0)}{a(t_0)} exp\frac{A\left(t^*(\tilde{s})\right)}{\varepsilon}$ не имеет предела, а интеграл имеет порядок ε (для этого достаточно проинтегрировать данный интеграл по частям).

Таким образом

$$\forall t \in (p_0) \;\; (\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) - \text{не существует.}) \qquad (13)$$

Пусть $\forall t \in D_{1\varepsilon}$. В этом случае (11) преобразуем к виду

$$x = exp\frac{A\left(t\left(\tilde{\sigma}\right)\right)-A\left(t^{*}\left(\tilde{s}\right)\right)}{\varepsilon}*$$

$$\left[x_0 exp\frac{A\left(t^{*}\left(\tilde{s}\right)\right)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tilde{s}} b\left(\tau\left(s\right)\right) exp\frac{A\left(t^{*}\left(\tilde{s}\right)\right)-A\left(\tau\left(s\right)\right)}{\varepsilon}\left(\tau_1^{'}\left(s\right)+i\tau_2^{'}\left(s\right)\right)ds.\right]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma} b\left(\tau\left(\sigma\right)\right) exp\frac{A\left(t\left(\tilde{\sigma}\right)\right)-A\left(\tau\left(\sigma\right)\right)}{\varepsilon}\left(\tau_1^{'}\left(\sigma\right)+i\tau_2^{'}\left(\sigma\right)\right)d\sigma. \qquad (14)$$

В (14) выражение, содержащееся в скобке [….], даёт значение функции $x(t,\varepsilon)$ при $t = t^*$.

Тогда из (14) получим

$$x = x\left(t^{*},\varepsilon\right)\ exp\frac{A\left(t\left(\tilde{\sigma}\right)\right)-A\left(t^{*}\left(\tilde{s}\right)\right)}{\varepsilon}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma} b\left(\tau\left(\sigma\right)\right) exp\frac{A\left(t\left(\tilde{\sigma}\right)\right)-A\left(\tau\left(\sigma\right)\right)}{\varepsilon}\left(\tau_1^{'}\left(\sigma\right)+i\tau_2^{'}\left(\sigma\right)\right)d\sigma. \qquad (15)$$

В этом случае

$$\varepsilon ln\varepsilon < ReA\left(t\left(\tilde{\sigma}\right)\right) \le 0,\ ReA\left(t^{*}\left(\tilde{s}\right)\right) = 0.$$

Функция $\frac{ReA\left(t\left(\sigma\right)\right)}{\varepsilon}$ не может погасить быстрые колебания функции $exp\frac{-iImA\left(t^{*}(\tilde{s})\right)}{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$, также $x\left(t^{*},\varepsilon\right)$ не имеет предела.

Интеграл в (15) исследуется, как и в предыдущем случае. В итоге получим

$$\forall t \in D_{1\varepsilon}\ \left(\lim_{\varepsilon\to 0} x\left(t,\varepsilon\right) - не\, существует\right). \qquad (16)$$

Пусть $\forall t \in D_{10}$. Воспользуемся (15).

Так как $ReA\left(t\left(\tilde{\sigma}\right)\right) \le -\varepsilon ln\varepsilon,$ то $x = x\left(t^{*},\varepsilon\right)\ exp\frac{A\left(t\left(\tilde{\sigma}\right)\right)-A\left(t^{*}\left(\tilde{s}\right)\right)}{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

К интегралу в (15) применяя интегрирование по частям имеем

$$\forall t \in D_{10}\ \left(x\left(t,\varepsilon\right) \to -{b\left(t\right)}\big/{a\left(t\right)}\right). \qquad (17)$$

Нетрудно проверить, что

$$\forall t \in D_{2\varepsilon}\ \left(\lim_{\varepsilon\to 0} x\left(t,\varepsilon\right) - не\, существует\right). \qquad (18)$$

Если $t \in D_{20},$ то из (15) следует

$$x = exp\frac{A\left(t\left(\tilde{\sigma}\right)\right)}{\varepsilon}*$$

$$*\left[x\left(t^{*},\varepsilon\right)exp\frac{-A\left(t^{*}\left(\tilde{s}\right)\right)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{\tilde{\sigma}}b\left(\tau\left(\sigma\right)\right)exp\frac{-A\left(\tau\left(\sigma\right)\right)}{\varepsilon}\left(\tau_{1}^{'}\left(\sigma\right)+i\tau_{2}^{'}\left(\sigma\right)\right)ds.\right]$$

$$\forall t\in D_{10}\ \left(ReA\left(t\left(\tilde{\sigma}\right)\right)\geq-\varepsilon ln\varepsilon\right)\Rightarrow\left|exp\frac{A\left(t\left(\tilde{\sigma}\right)\right)}{\varepsilon}\right|\to+\infty.$$

$\forall t\in D_{10}$(выражение содержащееся в скобке [….] ограничена по модулю).
Таким образом

$$\forall t\in D_{10}\left(\left|x\left(t,\varepsilon\right)\right|\to\infty\right). \qquad (19)$$

Результаты исследований и их обсуждение. Полученные соотношения (13), (16), (17), (18), (19) показывают неоднородность области D по отношению предельного перехода в (10) при $\varepsilon \to 0$.
Область $D_{10} -$ является областью притяжения согласно принятого опреледеления; p_0 погранслойная линия;
$D_{1\varepsilon}, D_{2\varepsilon} -$ погранслойные области;

$D_{20} -$ сингулярная область согласно принятых определений в [6].

Как показывает проведенное исследование для доказательства возможности предельного перехода не привлечена устойчивость точек покоя или положения равновесия.

Отметим, если D_{10} область притяжения содержит отрезок действительной оси, где $Rea\left(t\right)$ меняет знак с отрицательного на положительное т.е. $\left[t_0,T\right]\subset D_{10}$ и

$$Rea\left(t\right)<0\ \ при\ \ \ t_0\leq t_1<T_0,\ \ Rea\left(T_0\right)=0,$$

$$Rea(t) > 0\ \ при\ t_0 \leq t_1 < T, (t_0 = 0),\ \text{то}$$

предельный переход происходит на всем отрезке $[t_0,T]$, хотя в части $[T_0,T]$ точка покоя неустойчива.

Это явление получило название «затягивание потери устойчивости». Предложенный метод впервые использован в [7] для исследования с.в.у на явления "затягивание потери устойчивости". Там были введены, при определенных дополнительных условиях, специальные множества названные размаченными.

В данной работе предложен более простой метод, без дополнительных условий, основанный только на использование линии уровней сопряженных гармонических функций, которые порождаются заданными аналитическими функциями.

Выводы. Предложный метод ранее использован авторами [7,8] для выявления "затягивание потери устойчивости". В [9] с исползованием этого метода введены новые понятия "погранслойная линия", "погранслойная область" и "регулярные и сингулярные области". Работа [10] посвящена исследованию некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений в случаях, когда соответствующие им вырожденные уравнения имеют два, четыре решения. Доказано существование областей притяжений, но их взаимосвязь не исследована. В [11] существование областей притяжения и их взаимосвязь исследованы для широких классов сингулярно возмущенных уравнений.

Есть основание считать, что применяя разработанный метод можно исследовать широкий класс сингулярно возмущенных уравнений с точками перевала и поворота не привлекая условий устойчивости.

Литература

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных [Текст] / А.Н. Тихонов // Математический сборник. – 1952. – Т. 31 (73), № 3. – С. 575-586.
2. Понтрягин Л.С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных [Текст] / Л.С. Понтрягин // Известия АН СССР. – 1957. – Т. 21, №5. – С. 605-626.
3. Понтрягин Л.С. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром [Текст] / Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко // Труды МИАН. – 1985. – Т. 169. – С. 99-188.
4. Мищенко Е.Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания [Текст] / Е.Ф. Мишенко, Н.Х. Розов. – Москва: Наука, 1975 – 248 с.
5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] /М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – Москва: Наука, 1973. – 739 с.
6. Панков П.С. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных уравнений с аналитическими функциями [Текст]| / П.С. Панков., К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров, М.Р. Нарбаев // Вестник ОшГУ, 2013. – №1(специальный выпуск). – 227-231 с.
7. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст] / К.С. Алыбаев //Вестник КГНУ, сер. 3, вып. 6. Бишкек, 2001.
8. Турсунов Д. А Асимптотитическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют n-кратный полюс [Текст] / Д.А. Турсунов. дисс. канд. физ.-мат. наук. :01.01.02. – Ош, 2005. – 110 с.

9. Тампагаров К.Б Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / К. Б. Тампагаров. дисс. док. физ.-мат. наук. :01.01.02. – Жалал-Абад , 2017. – 218 с.
10. Мурзабаева А. Б Исследование сингулярно возмущенных уравнений с разделением множеств при вырождении : -дисс. канд. физ.-мат. наук. :01.01.02. – Ош, 2019. – 120 с.
11. Нарымбетов Т. К Существования и связь областей притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / Т. К. Нарымбетов. дисс. канд. физ.-мат. наук. :01.01.02. – Ош, 2022. – 114 с.