*МАТЕМАТИКА*

УДК 517.928
DOI: 10.52754/16947452_2022_4_199

# АЙРЫМ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ҮЗГҮЛТҮКТҮҮ ЧЕЧИМДЕРИ

*Азимов Бектур Абдырахманович, ф-м.и.к., доцент*
azimov@oshsu.kg
*Турдубеков Бурканбек Токторович, улук окутуучу*
tburkant@gmail.com
*Жумабаева Айпери, магистрант*
aiperi.zhumabaeva@list.ru
*Ош мамлекеттик университети*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация**. Макалада Хопфанын белгилүү моделдик теңдемеси изилденет. Хопфанын теңдемесинин квази сызыктуу биринчи тартиптеги бир тектүү жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме. Хопфанын теңдемеси бөлүкчөлөрү бири-бири менен өз-ара аракеттенбеген газдын кыймылынын бир ченемдүү математикалык модели болот. Хопфанын теңдемесинин өзгөчөлүгү ал теңдеменин баштапкы берилгендери үзгүлтүксүз болсо дагы чыгарылышы үзүлүүгө ээ болот. Эгерде чыгарылыш үзгүлтүксүз болсо, бирок туундусу үзгүлтүктүү болсо, анда ал чыгарылышты алсыз үзүлүүгө ээ болгон чыгарылыш деп атайбыз. Изилдөөнүн максаты – Хопфанын теңдемесинин чыгарылышын изилдөө. Чыгарылыштын алсыз жана күчтүү үзүлүүлөрүн аныктоо. Колдонулуучу усулдар: өзгөртүп түзүү усулу, дивергенттик форма усулу.*

***Ачкыч сөздөр**: Хопфанын теңдемеси, дивергенттик форма, квазисызыктуу теңдеме, жекече туундулуу теңдеме, алсыз үзүлүү, күчтүү үзүлүү.*

# РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

*Азимов Бектур Абдырахманович, к.ф-м.н., доцент*
azimov@oshsu.kg
*Турдубеков Бурканбек Токторович, ст. преподаватель*
tburkant@gmail.com
*Жумабаева Айпери, магистр*
aiperi.zhumabaeva@list.ru
*Ошский государственный университет*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация**. В статье исследуется известное модельное уравнение Хопфа. уравнения Хопфа – квазилинейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Уравнение Хопфа представляет собой одномерную математическую модель движения газа, частицы, которые не взаимодействуют друг с другом. Особенность уравнения Хопфа состоит в том, что даже если исходные данные* *этого уравнения непрерывны, его решение будет разрывным. Если решение непрерывна, но производная разрывная, то решение назовём слабо разрывным. Цель исследования заключалась в исследовании решения уравнения Хопфа. Определит слабые и сильные разрывы решения. Применяемые методы: метод преобразований, метод дивергентных форм.*

***Ключевые слова**: уравнение Хопфа, дивергентная форма, квазилинейное уравнение, уравнение с частными производными, слабый разрыв, сильный разрыв.*

## DISCONTINUOUS SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Azimov Bektur Abdyrahmanovich,*
*candidate of physical and mathematical sciences, associate professor*
*azimov@oshsu.kg*
*Turdubekov Burkanbek Toktorovich,*
*Senior Lecturer*
*tburkant@gmail.com*
*Zhumabaeva Ayperi, master student*
*aiperi.zhumabaeva@list.ru*
*Osh State University*
*Osh, Kyrgyzstan*

**Abstract.** *The article examines the famous model equation of Hopf. Hopf equations - quasiline homogeneous differential equations in private production first order. Equation Hopf represents its own one-dimensional mathematical model of gas motion, particles that do not interact with each other. The specificity of the Hopf equation is that even if the results of this equation are uninterrupted, its solution will be fragmented. If the decision is uninterrupted, but the production is fragmented, then the decision is weakly fragmented. The purpose of the study was to examine the Hoppa equation solution. Determine the weak and strong gaps in the solution. Applicable methods: method of transformations, method of divergent forms.*

***Keywords:** Hopf equation, divergent form, quasilinear equation, partial differential equation, weak discontinuity, strong discontinuity.*

**Киришүү.** Сызыктуу теңдемелер үчүн коюлган баштапкы же чек аралык маселелердин чыгарылыштары үзүлүүгө ээ болушу мүмкүн, эгерде баштапкы же чек аралык шарттарындагы функциялар үзүлүүгө ээ болсо.

Бирок квази сызыктуу теңдемелер үчүн баштапкы же чек аралык шарттар үзгүлтүксүз, жылма болушса дагы маселенин чыгарылышы үзүлүүгө ээ болот.

Үзүлүүнүн мүнөзүн изилдөөдө эң жөнөкөй Хопфанын

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ 0<u,\ x,\ t. \qquad (1)$$

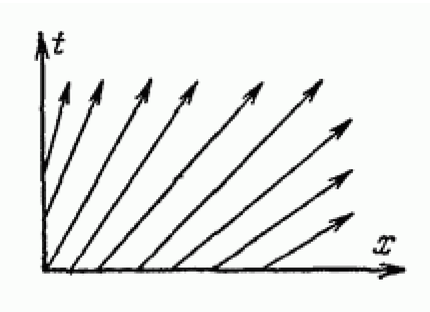
квазисызыктуу теңдемеси ыңгайлуу.

Жөнөкөйлүк үчүн $0<u$ орун алган учурду изилдейбиз. Анда чыгарылыштын $0<x$ жана $0<t$ шарттарын канааттандырган баштапкы жана чек аралык маанилер биринчи квадрантка жайгашат. Бул маанилер $x–ut$=const мүнөздөөчүлөр боюнча алып өтүлөт.

**Изилдөөнүн каражаттары жана ыкмалары:**

**Биринчи учур**. Баштапкы жана чек аралык маанилер үзгүлтүксүз функциялар, u(x,0) монотондуу кемибейт, u(0,t) монотондуу өспөйт, алар үзгүлтүксүз, координата башталышында экөөсүнүн маанилери дал келет.

Мүнөздөөчүлөрдүн $(x,t)$ тегиздиктин ар бир чекитиндеги жантык (кыйшайунун тангенс бурчу) $1/u(x,t)$ га барабар болот.




Бул учурда жантык сол жактан оң жакка карай монотондуу жана үзгүлтүксүз кемийит. Ошондуктан биринчи квадрант мүнөздөөчүлөр менен тыгыз толтурулган. $(x,t)$ тегиздиктин ар бир чекити аркылуу жалгыз гана мүнөздөөчү өтөт.

Бул мүнөздөөчү берилген чекитке чек аралык маанини алып өтөт. Чыгарылыш биринчи квадрантта бир маанилүү аныкталган жана үзгүлтүксүз. Эгерде чек аралык маанилер жылма болсо (жана координата башталышында макулдашылган болушса, б.а. маанилери дал келсе), анда чыгарылыш дагы жылма болот.

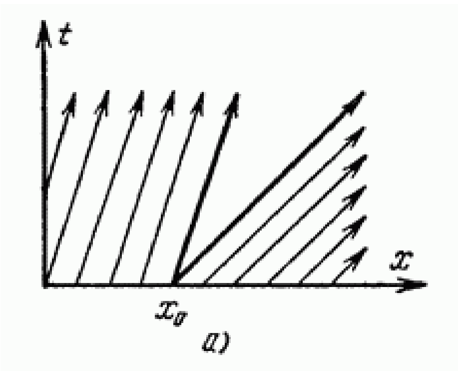
**Экинчи учур.** Чек аралык маанилер жогоруда көрсөтүлгөндөй монотондуу, бирок үзүлүүгө ээ. Жөнөкөйлүк үчүн

$x<x_0$ болгондо: $u(0,t)=a,\ u(x,0)=a$;

$x>x_0$ болгондо: $u(x,0)=b>a$ болсун.

Мында үзүлүү жогорудагы монотондуулук шартын бузбайт.

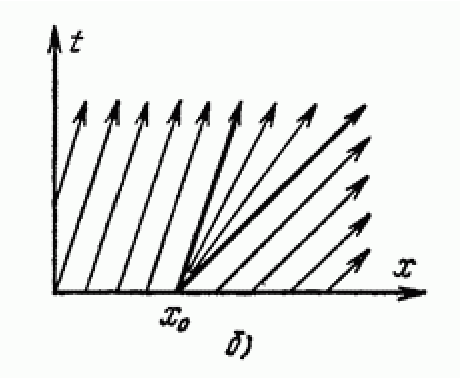
$(x,t)$ тегиздигинде үзүлүү мүнөздөчүдөн сол жакта кыйшаюу (жантык) $1/a$ га барабар болот; ал эми үзүлүү мүнөздөчүдөн оң жакта кичинерек кыйшаюу (жантык) $1/b$ болот.




Баштапкы берилгендердин үзүлүү чекитинен эки мүнөздөөчү жүргүзөбүз. Чиймеде жоорак кылып көрсөтүлгөн:

Сол жактагы стрелканын сол жагында жана оң жактагы стрелканын оң жагында тегиздиктин ар бир чекити аркылуу бир гана мүнөздөөчү өткөн. Б.а. чыгарылыш аныкталган жана жалгыз. Эки жоон стрелканын арасында бир дагы мүнөздөөчү өткөн эмес жана чыгарылыш аныкталган эмес.

Маселенин коррективдүүлүгүн талап кылабыз, б.а. баштапкы берилгендердин жетишээрлик кичи козголуусуна карата чыгарылыштын туруктуулугун. Бул талап чыгарылышты улантууга мүмкүнчүлүк берет. Баштапкы берилгендердин үзүлүүсүн жалгаштырабыз, б.а. чексиз кичине интервалда монотондуу үзгүлтүксүз функция менен алмаштырабыз. Ошондо бош бурчтун ичинде мүнөздөөчүлөр пайда болот жана ар бир мүнөздөөчүнүн кыйшаюуусу мүнөздөөччүдөгү чыгарылыштын маанилерин аныктайт.




Улантылган чыгарылыш (доопределенное решение) төмөнкү көрүнүшкө ээ болот:

$$x - x_0 \le at: \quad u(x,t) = a;$$
$$at \le x - x_0 \le bt: \quad u(x,t) = (x - x_0)/t;$$
$$bt \le x - x_0: \quad u(x,t) = b$$

Ошондуктан ал ($x_0$,0) чекиттен башка бүт тегиздикте үзгүлтүксүз.

Демек, баштапкы берилгендердин мындай үзүлүүсү убакыттын өтүүсү менен жалгаштырылат экен. Бирок үзүлүүнүн изи калып калат: Чийимедеги жоон мүнөздөөчүлөрдө чыгарылыштын туундусу үзгүлтүктүү боюнча калат. Калган бардык чекиттерде чыгарылыш жылма болот, эгерде баштапкы берилгендер жылма болушса.

Эгерде чыгарылыш үзгүлтүксүз болсо, бирок туундусу үзгүлтүктүү болсо, анда ал чыгарылыш **алсыз үзүлүүгө** (слабый разрыв) ээ болгон чыгарылыш деп аталат.

Алсыз үзүлүүлөр сызыктуу теңдемелердегидей квазисызыктуу теңдемелерде дагы мүнөздөөчүлөр боюнча таралат.

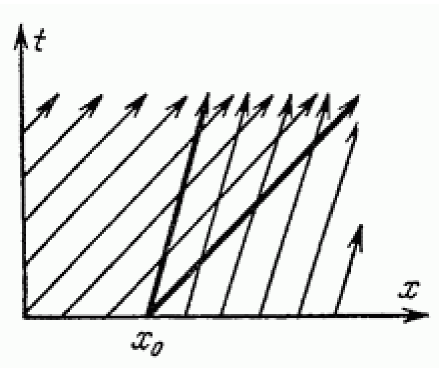
**Үчүнчү учур**. Айталы жогорудагы монотондуулук шарты аткарылбасын. Жөнөкөйлүк үчүн төмөнкүнү алалы

$x<x_0$ болгондо: $u(0,t) = a,\ u(x,0) = a$;

$x>x_0$ болгондо: $u(x,0) = b$, бирок $a > b > 0$ болсун.

Бул учурда мүнөздөөчүлөр төмөнкү көрүнүшкө ээ болушат

Жоон мүнөздөөчүлөр пайда кылган бурчтун арасында ар бир чекит аркылуу эки даана мүнөздөөчү өтөт. Бул мүнөздөөчүлөрдө



функциянын маанилери ар түрдүү болот. Жоон мүнөздөөчүлөр пайда кылган бурчтун сыртында чыгарылыш бир маанилүү аныкталган, ал эми бурчтун ичинде бир маанилүү эмес аныкталган.

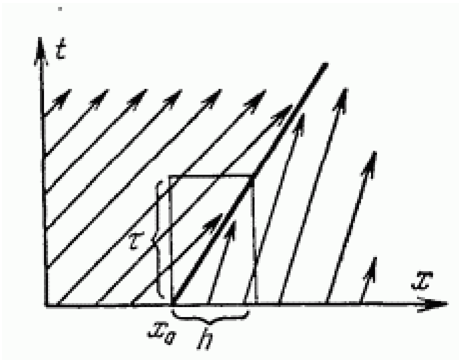
Бул учурда үзгүлтүксүз чыгарылышты тургузууга болбойт. Баштапкы берилгендерди жалгаштыруу жардам бербейт. ($x_0$,0) чекиттен алыстаганда деле мүнөздөөчүлөрдүн абалы өзгөрбөйт, ошондуктан бир маанилүү эместик сакталат. Ошондуктан бир маанилүү чыгарылыш үзгүлтүктүү болот, б.а. ал дифференциалдык теңдеменин жалпыланган чыгарылышы болот.

Жалпыланган чыгарылыш кандайдыр бир интегралдык теңдемени канааттандыарт. Бул интегралдык теңдеме берилген дифференциалдык теңдемеден эквиваленттүү өзгөртүп түзүү менен алынат.

Бир эле теңдеменин ар түрдүү дивергенттик формасы ар түрдүү үзгүлтүктүү чыгарылыштарды берет. Бирок жылма чыгарылыштар ар түрдүү дивергенттик формага жалгыз болот. Дивергенттик форма физиканын сакталуу законуна туура келет, ал туура чыгарылышты аныктайт.

Төмөнкү дивергенттик форманы жазып алсак: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0.$

Жалгыз үзүлүүгө ээ болгон чыгарылышын издейбиз. Мейли үзүлүү сызыгынын кыйшаюуусу $D$ ылдамдыгына туура келсин. Б.а. үзүлүү толкун сыяктуу “чуркасын”.




Мүнөздөөчүлөрдүн абалы боюнча изделүүчү чыгарылыш төмөнкү көрүнүшкө ээ болот.

$$x - x_0 < Dt: \qquad u(x,t) = a; \qquad x - x_0 > Dt: \qquad u(x,t) = b.$$

$\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0$ барабардыкты жактары τ жана $h$=$D$τ болгон тик бурчтуктун аянты боюча интегралдайбыз:

$$\int(\hat{u} - u)dx + \frac{1}{2}\int(u_{он}^2 - u_{сол}^2)dt = (a-b)h + \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\tau = 0.$$

Мындан үзүлүүнүн таралуусунун ылдамдыгын аныктап алабыз:

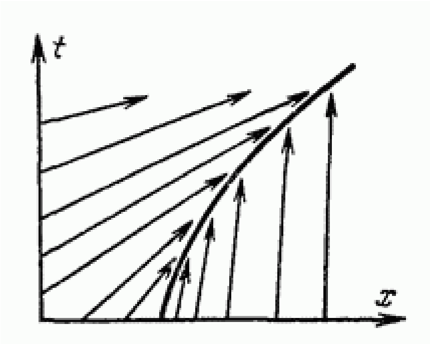
$$D = (b+a)/2.$$

Эгерде чыгарылыштын өзү үзүлүүгө ээ болсо, анда ал чыгарылыш **күчтүү үзүлүүгө** ээ болгон чыгарылыш деп аталат. Газдардын динамикасында мындай чыгарылышты сокку толкун (ударная волна) деп аташат.

Квазисызыктуу теңдемелердин күчтүү үзүлүүсү мүнөздөөчүлөрү боюнча таралбайт. Ушундай жалпыланган чыгарылыштар гана баштапкы берилгендердин кичине козголуусуна карата туруктуулугу квазисызыктуу теңдемелердин теориясында далилденген.

**Төртүнчү учур.** $u(x,0)$ функциясы үзгүлтүксүз, бирок кандадйдыр бир интервалда кемийт. Бул учур үчүнчү учурга алып келинет. Мурдагы дай эле мүнөздөөчүлөрдүн кесилиши күчтүү үзүлүүгө алып келет.

Мындан үзүлүүнүн таралуусунун ылдамдыгы: $D=(b+a)/2$ болот.




Бул учурда баштапкы берилгендер үзгүлтүксүз жана жылма болсо деле убакыттын өтүүсү менен чыгарылыштарды күчтүү үзүлүү пайда болот.

Үзүлүүлөрдүн саны дагы убакыттын өтүүсү менен өзгөрүшү мүмкүн.

**Жыйынтыктоо**

**1-Эскертүү**. Эгерде $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=0$ ордуна башка дивергенттик формааны алсак, мисалы: $\frac{\partial}{\partial t}(\ln u)+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ анда сокку толкундун ылдамдыгы өзгөрөт. Бирок алсыз сокку толкундар үчүн сокку толкундун ылдамдыгы $D=\frac{1}{2}(b+a)$ га салыштырмалуу 1+O(ε$^2$) эсе айрымаланат, мында ε=(*b*–*a*)/(*b*+*a*). Б.а. бираз эле өзгөрөт.

**2-Эскертүү**. Сызыктуу теңдемелердин үзгүлтүктүү чыгарылыштарын жылма жана үзгүлтүксүз чыгарылыштардын предели катарында кароого болот.

**Адабияттар**

1. Alymkulov, K. Perturbed Differential Equations with Singular Points in book [Text] / K. Alymkulov, D.A. Tursunov // Recent Studies in Perturbation Theory. Chapter 1. Edited by Dimo I. Uzunov, Publisher InTech, 2017.
2. Уизем, Дж.Б. Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж. Уизем; перевод с англ. В.В. Жаринова ; под ред. А.Б. Шабата. - Москва : Мир, 1977. - 622 с..
3. Построение точных решений некоторых уравнений гиперболического типа, содержащих разрыв, распространяющийся по неоднородному фону / Ю.А.Криксин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 17. 14 с. doi:10.20948/prepr-2018-17.

4. Hopf E., The partial differential equation // Communiations on Pure and Applied Mathematics. 1950, 3, pp. 201-230.
5. Олейник О.А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук, 1957, № 12, С. 3-73.
6. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Moussiaux A. Handbook of first order partial differential equations // Differential and Integral Equations and Their Appliations 2002 vol.1.
7. . Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Мат. модел., 2012, т. 24, № 12, с. 124-128.