ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

ISSN 1694-7452 **e-ISSN: 1694-8610**

№4/2023, 97-105

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.968
DOI: 10.52754/16948610_2023_4_11

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СВЕРТОЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

ВОЛЬТЕРРДИН БИРИНЧИ ТЕКТЕГИ ТҮЙҮНДҮҮ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО

REGULARIZATION OF CONVOLUTIONAL VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

Сражидинов Адил
Сражидинов Адил
Srazhidinov Adil

к.ф.-м.н., профессор, Кызылкийский гуманитарно-педагогический институт, БатГУ
ф.-м.и.к., профессор, Кызыл-Кыя гуманитардык-педагогикалык институту, БатМУ
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kyzyl-Kiya Humanitarian Pedagogical Institute, Batken State University
srazhidinov.adi@gmail.com

Абдраева Нурджан Ишимкуловна
Абдраева Нурджан Ишимкуловна
Abdraeva Nurdzhan

старший преподаватель, Кызыл-Кийский институт технологии, экономики и права БатГУ
улук окутуучу, Кызыл-Кыя технология, экономика жана укук институту, БатМУ
Senior Lecturer, Kyzyl-Kiya Institute of Technology, Economics and Law, Batken State University
abd.nurj@gmail.com

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СВЕРТОЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Аннотация

В данной статье рассматривается вольтеррово-интегральное уравнение свертки первого рода. Ядро-функция a(t-s) предполагается достаточно «неудобной», т.е. никак нельзя свести первоначальное уравнение к уравнению второго рода того или иного вида. Решение ищется в классе L2[0,1]. Приемом применения так называемого метода ПУС (метод перехода для уравнения свертки) [9] показано L2-стремление (т.е. по норме пространства L2[0,1]) решения возмущенных уравнений второго рода, напоминающих не совсем вольтерровых интегральных уравнений свертки. Широко используется разложение ряда Фурье по полной системе ортонормированных функций ядра a(t-s), а также другие техники применения теории гильбертовых пространств.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра первого рода, метод перехода для уравнений свертки, L2-сходимость, ряд Фурье, полная система собственных функций, возмущенное уравнение второго рода, содержащее положительный параметр ε.

ВОЛЬТЕРРДИН БИРИНЧИ ТЕКТЕГИ ТҮЙҮНДҮҮ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО

Аннотация

Бул макалада Вольтеррдин биринчи тектеги түйүндүү интегралдык теңдемеси каралган. Теңдеме, анын ядро- функциясы a(t-s) изилдөөгө "ыңгайсыз" деп божомолдонуп, б.а. баштапкы теңдемени тигил же бул түрдөгү экинчи тектеги теңдемеге келтирүүгө мүнкүн болбогон учурларда, ага Түйүн теңдемелери үчүн өтмөк методун [9] колдонуу ыңгайлуу экендиги көргөзүлдү. Натыйжада теңдеменин үзгүлтүксүз чечими бар болгондо ага параметри ε^2 болгон козголгон экинчи тектеги интегралдык теңдеменин чечимдери L2[0,1] мейкиндигинде (ε→0 учурда) умтулаары көргөзүлдү. Макаланын жыйынтыгын алууда ядро a(t-s) тин ортнормалдаштырылган өздүк функцияларынын толук системасы боюнча Фурье катарына ажыратуу сыяктуу жана гильберттик мейкиндиктер теориясын пайдалануу техникалары колдонулган.

Ачкыч сөздөр: Вольтеррдин биринчи тектеги түйүндүү интегралдык теңдемеси, түйүн теңдемелери үчүн өтмөк методу, L2-жыйналуу, Фурье катары, өздүк функциялардын толук системасы, оң ε параметирлүү козголгон экинчи тектеги интегралдык теңдеме.

REGULARIZATION OF CONVOLUTIONAL VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

Abstract

The Volterra convolution integral equation of the first kind is being considered in this article. The kernel function a(t-s) is assumed to be quite “inconvenient”, i.e. there is no way to reduce the original equation to an equation of the second kind of one kind or another. The solution in the class L2[0,1]. The method of applying the transition method (the transition method for the convolution equation [9] shows the L2-aspiration (i.e., according to the norm of the space L2[0,1]) to solve a perturbed equation of the second kind, reminiscent of the non-Volterra integral convolution equation. The expansion of the Fourier series in a complete system of orthonormal kernel functions a(t-s), as well as other techniques for applying the theory of Hilbert spaces, are widely used.

Keywords: Volterra integral equation of the first kind, transition method for convolution equations, L2-convergence, Fourier series, complete system of orthonormal functions, perturbed equation of the second kind containing a positive parameter.

Введение. К необходимости рассмотрения вольтеррового сверточного уравнения первого рода

$$\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds = f(t), 0 \le t \le 1, \qquad (1)$$

приводят разные практические задачи, (см., например, монографию [1]), где $a(t-s)$ –ядро-функция, $f(t)$ −правая часть известные функции, φ −неизвестное решение из пространства непрерывных на [0,1] функций C[0,1]. Впоследствии этого и других соображений, изучение уравнения (1) и сегодня остается актуальной задачей.

Отметим, что в работе [2] рассмотрено с гладким ядром $K(t,s)$ интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t K(t,s)\varphi(s)ds = f(t), 0 \le t \le 1,$$

а также третьего рода, т.е. в случае, когда *K(0,0)=0, K(t, t)* имеет нули на [0,1], и доказано в определенных условиях существование многопараметрического семейства решений. А в работе [3] на основе модификации предложенного в [4] метода получены теоремы единственности и нахождения приближенных решений уравнения нового типа

$$\int_{\sigma(t)}^t K(t,s)\varphi(s)ds = f(t), 0 \le t \le 1,$$

где $\sigma(0) = 0$, $\sigma(t) \in [0,t]$ –известная непрерывная функция. Однако во всех указанных и других работах, посвященных интегральным уравнениям Вольтерра первого рода, насколько нам известно, в приведенных ниже условиях отдельно не рассмотрен его частный случай

$$\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds = f(t), 0 \le t \le 1, \qquad (1)$$

В данной статье рассматривается именно уравнение (1).

Материалы и методы исследования. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода (1), когда

a) функция $a(t)$ непрерывна на [0,1], $a(0)$= 0 и $a(t) \not\equiv 0$ на $[0,\alpha]$ при любом $\alpha > 0$;
b) решение уравнения (1) $\varphi(t)$ непрерывно и известно $\varphi(1)$, в дальнейшем для определенности будем считать $\varphi(1)$= 0.

Единственность решений уравнения (1) в классе непрерывных на [0,1] функций C[0,1] (даже в классе суммируемых с квадратом на [0,1] функций $L_2[0,1]$) гарантируется известной теоремой Титчмарша о свертке [2, 3]. Условия однозначной разрешимости в классе $L_2[0,1]$ интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^1 K(t,s)\varphi(s)ds = f(t), 0 \le t \le 1, \qquad (2)$$

с симметричным замкнутым ядром $K(t,s)$ приведены в теореме Пикара. Разумеется, уравнение (1) является частным случаем интегрального уравнения Фредгольма первого рода (2). Уравнение (2) исследовано и в работах Фридмана [7], а именно, справедливы, см. например, [8, стр.231-236]:

Теорема 1 (Пикар). Интегральное уравнение первого рода (2) с замкнутым симметричным ядром $K(t,s)$ при $f(t) \in L_2[0,1]$ имеет, и притом единственное решение в классе $L_2[0,1]$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2$ сходится.

Здесь λ_k- характеристические числа ядра $K(t,s)$, f_k – коэффициенты Фурье функции $f(t)$ относительно собственных функций $\varphi_k(t)$ этого ядра.

Теорема 2 (Фридман). Пусть $K(t,s)$ – симметричное положительно определенное L_2-ядро, и пусть уравнение (2) однозначно разрешимо. Тогда последовательность $\{\varphi_n(t)\}$, определяемая рекуррентным соотношением $\varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(t) + \lambda\left\{f(t) - \int_0^1 K(t,s)\varphi_{n-1}(s)ds\right\}$,

где $\varphi_0(t) \in L_2[0,1]$, $0 < \lambda < 2\lambda_1$ и λ_1 – наименьшее характеристическое число ядра $K(t,s)$, сходится в среднем к решению уравнения (2).

Результаты и обсуждения. Как видно из приведенных теорем, уравнение (2) изучалось в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$, мы также будем изучать уравнение (1) сначала в классе $L_2[0,1]$, а затем – в классе C[0,1]. С этой целью к уравнению (1) применим метод *ПУС* [9, 10] (метод перехода для уравнения свертки), согласно которому из (1) имеем интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_0^2 \omega(|t-s|)\varphi(s)ds = F(t) + F(2-t), 0 \le t \le 2, \quad (3)$$

где

$$\omega(t)=\begin{cases} 0, 0 \le t \le 1, \\ a(t-1), 1 < t \le 2, \end{cases} \quad (4)$$

$$y(t)=\begin{cases} \varphi(t), 0 \le t \le 1, \\ \varphi(2-t), 1 < t \le 2, \end{cases} \quad (5)$$

$$F(t)=\begin{cases} 0, 0 \le t \le 1, \\ f(t-1), \ 1 < t \le 2 . \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что уравнения (1) и (3) эквивалентны [9, 10] в силу продолжения функций с отрезка [0,1] на [0,2] посредством (4), (5) и (6). Следуя работе [9,10], введем

Определение 1. Будем говорить, что функция z(t) четная (нечетная) на отрезке [0,2], если z(t) = z(2-t) (соответственно z(t) = - z(2-t)) для $t \in [0,2]$.

Теперь рассмотрим уравнение

$$\lambda z(t) = \int_0^2 \omega(|t-s|)z(s)ds \ , 0 \le t \le 2 . \quad (7)$$

Поскольку ядро $\omega(|t-s|)$ непрерывно, симметрично и уравнение

$$\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds = 0, 0 \le t \le 1, \quad (8)$$

следовательно, и уравнение

$$\int_0^2 \omega(|t-s|)y(s)ds \ = \ 0, 0 \le t \le 2, \quad (9)$$

имеют соответственно в классах $L_2[0,1]$ и $L_2[0,2]$ только нулевые решения [8], то ядро уравнения (9) имеет в $L_2[0,2]$ полную ортонормированную систему функций

$$y_1(t), y_2(t),... \quad (10)$$

и отвечающие ей собственные числа

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \qquad (11)$$

расположенные по убыванию модулей с учетом их кратности.

Так как оператор, определенный [9] равенством

$$\Omega y = \int_0^2 \omega(|\, t-s\,|)y(s)ds, 0 \le t \le 2 \qquad (12)$$

переводит четную (нечетную) на [0,2] функцию из $L_2[0,2]$ в четную (соответственно нечетную), то без ограничения общности, можем считать каждую собственную функцию из (10) либо четной, либо нечетной на [0,2] функцией, вообще говоря [9], справедлива

Лемма 1. Если λ является собственным значением для четной на [0,2] собственной функции оператора Ω из (12), т.е. уравнение (7), то (-λ) является собственным значением соответствующей нечетной на [0,2] собственной функции того же оператора, и, наоборот.

Доказательство. Действительно, пусть z(t) четная на [0,2] собственная функция, соответствующая собственному значению λ оператора Ω: $L_2 \to L_2$. Тогда нечетная функция

$$v(t) = \begin{cases} z(t), 0 \le t \le 1 \\ -z(2-t), 1 \le t \le 2, \end{cases} \qquad (13)$$

является нечетной собственной функцией для числа (-λ). В самом деле при $t \le 1$ и с учетом (4) и обозначения (13), имеем

$\int_0^2 \omega(|\, t-s\,|)v(s)ds = \int_0^1 \omega(|\, t-s\,|)v(s)ds + \int_1^2 \omega(|\, t-s)v(s)ds = -\int_1^2 \omega(|\, t-s)v(2-s)ds =$ $-\int_1^2 \omega(|\, t-s\,|)z(2-s)ds = -\int_1^2 \omega(|\, t-s\,|)z(s)ds = -[\int_0^1 \omega(|\, t-s\,|)z(s)ds + \int_1^2 \omega(|\, t-s\,|)z(s)ds] = -\int_0^2 \omega(|\, t-s\,|)z(s)ds = -\lambda z(t) = -\lambda v(t),\ 0 \le t \le 1$, т.е.

$$\int_0^2 \omega(|\, t-s\,|)v(s)ds = -\lambda v(t), 0 \le t \le 1\,. \qquad (14)$$

Пусть теперь $1 < t \le 2$. Тогда, поступая , как и выше, получаем

$\int_0^2 \omega(|\, t-s\,|)v(s)ds = \int_0^1 \omega(|\, t-s\,|)v(s)ds + \int_1^2 \omega(|\, t-s\,|)v(s)ds = \int_0^1 \omega(|\, t-s\,|)v(s)ds = \int_0^1 \omega(|\, t-s\,|)z(s)ds = \int_0^1 \omega(|\, t-s\,|)z(2-s)ds = \lambda z(2-t) = \lambda v(2-t) =$ $-\lambda v(t)$, т.е.

$$\int_0^2 \omega(|\, t-s\,|)v(s)ds = -\lambda v(t), 1 < t \le 2. \qquad (15)$$

Из равенств (14) и (15) непосредственно следует

$$\int_0^2 \omega(|\, t-s\,|)v(s)ds = -\lambda v(t), 0 \le t \le 2\,.$$

Лемма доказана.

В силу предположения б) и равенства (4), (5) и (6) уравнение (3) имеет четное на [0,2] непрерывное решение. Обозначим, как и в [9], через H[0,2] подпространство четных на [0,2] функций пространства $L_2[0,2]$. Так что y(t)∈H[0,2]. Не вводя новые обозначения, будем считать что $\{y_i(t)\}$ - система ортонормированных функций оператора (12), а (11) - соответствующая система собственных чисел, упорядоченных по убыванию модулей и записанных с учетом кратностей собственных функций. Так как в $L_2[0,2]$ любая нечетная на [0,2] функция ортогональна любой четной функции, то в силу леммы 1, любому собственному числу из (11) соответствует собственное число (-λ) того же оператора Ω с разницей лишь в том, что числу λ отвечает на [0,2] четная функция, а числу (-λ) отвечает ее напарница. Здесь для удобства введено

Определение 2. Нечетная на [0,2] функция *v(t)* называется напарницей функции

$$u(t) = \begin{cases} v(t), 0 \le t \le 1, \\ v(2-t), 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Так как решение уравнения (3) четно на [0,2], т.е. принадлежит пространству H[0,2], то его решение достаточно рассмотреть в H[0,2]. Поскольку Ω, как действующий оператор из $L_2[0,2]$ в себя, и сохраняющий четности функций, то при исследовании уравнения (3) нам достаточно ограничиться подпространством H[0,2].

Напарницы функций $y_i(t)$, i=1, 2, соответственно обозначим $\widetilde{y_i}(t)$. Так как система $\{y_i(t), \widetilde{y_i}(t)\}$полна в $L_2[0,2]$, кроме того, $y_i(t)\perp\widetilde{y_j}(t)$ для всех i, j = 1, 2,..., то нетрудно заметить, что $L_2[0,2]$ = L$\{y_1(t), \widetilde{y_i}(t). y_2(t), \widetilde{y_2}(t), \ldots\}$ = L$\{y_1(t), y_2(t), ..\}$ $\oplus$L$\{\widetilde{y_i}(t), \widetilde{y_2}(t), \ldots\}$ = H[0,2] $\oplus$ H_[0,2], т.е. гильбертово пространство в $L_2[0,2]$ разлагается в прямую сумму подпространств H[0,2] и H_[0,2] [11]:

$L_2[0,2]$= H[0,2] $\oplus$ H_[0,2].

Наряду с (7) рассмотрим уравнение

$$\lambda\varphi(1-t) = \int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds, 0 \le t \le 1, \qquad (16)$$

как показано в [9], уравнение (16) в подпространстве H[0,2] и уравнение (16) в пространстве $L_2[0,1]$ эквивалентны в следующем смысле.

Если $\{y_i(t)\}$ – система ортонормированных собственных функций уравнения (7) в H[0,2], то система их сужений на [0,1] $\sqrt{2}\{y_i(t)\}$ является ортонормированной системой собственных функций уравнения (16) в пространстве $L_2[0,1]$, и, наоборот, т.е. если $\{\varphi_i(t)\}$ система ортонормированных функций уравнения (16), то система $\{y_i(t)\}$, где

$$y_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{cases} \varphi_i(t), 0 \le t \le 1, \\ \varphi_i(2-t), 1 < t \le 2, \end{cases}$$

является ортонормированной системой функций уравнения (7) на [0,2], а собственные значения этих функций одни и те же.

Так как уравнение (8) имеет только нулевое решение в пространстве $L_2[0,1]$, то система собственных функций $\{\varphi_i(t)\}$ уравнения (16) полна в $L_2[0,1]$. Аналогично можно показать полноту системы $\{y_i(t)\}$ и $\{\widetilde{y_i}(t)\}$ соответственно в подпространствах H[0,2] и H_[0,2]. Действительно, если функция y(t) ∈ H[0,2] ортогональна ко всем $y_i(t)$, i=1, 2,..., то она как четная на [0,2] функция ортогональна всем $\widetilde{y_i}(t)$. Так как функция из $L_2[0,2]$, следовательно, y(t)=0, $0 \le t \le 2$. Аналогично доказывается, что если y(t)∈H_[0,2], и $y_i(t)\perp \widetilde{y_i}(t)$, i = 1, 2,..., то y(t) =0. А если y(t) любая функция из $L_2[0,2]$, то ее можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$y(t) = \frac{y(t)+y(2-t)}{2} + \frac{y(t)-y(2-t)}{2}, \qquad (17)$$

первое из них четная на [0,2] функция, а второе – нечетная. Поэтому если y(t)⊥y_i(t), y(t) $\perp\tilde{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, то y(t)=0, $0 \le t \le 2$.

Действительно, из (17) в силу четности на [0,2] функции y_i(t), получаем $[y(t) + y(2-t)] \perp y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$. Так как $y(t) + y(2-t)$ четная на [0,2] функция, то $[y(t) + y(2-t)] \in$ H[0,2]. Как было показано выше, отсюда получаем $y(t) + y(2-t)$= 0, $0 \le t \le 2$. Аналогично получаем $y(t) - y(2-t)$= 0 . Отсюда, $y(t) = 0, 0 \le t \le 2$.

Теперь покажем, что если u(t)⊥y_i(t) и u(t)⊥ $\tilde{y}_i(t)$ на [0,2], то u(t)=0,

$0 \le t \le 2$. Следовательно $\varphi(t), 0 \le t \le 1$. Поэтому $\{\varphi_i(t)\}$ - система ортонормированных функций уравнения (16) полна в L_2[0,1].

Теперь рассмотрим уравнение

$$\varepsilon^2 u_\varepsilon(t) + \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)u_\varepsilon(\sigma)d\sigma ds = \int_0^{1-t} a(1-t-s)f(1-s)ds, 0 \le t \le 1. \qquad (18)$$

Так как

f(1-t) = $\int_0^{1-t} a(1-t-s)\varphi(s)ds$, (19)

$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \varphi_i(t)$, (20)

где φ_i – коэффициент Фурье решения $\varphi(t)$, то согласно (16) имеем

f(1-t) = = $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i \varphi_i(t)$, $0 \le t \le 1$.

Уравнение (18) с учетом (19) принимает вид

$$\varepsilon^2 u_\varepsilon(t) + \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-t} a(1-s-\sigma)u_\varepsilon(\sigma)d\sigma ds = \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma ds \qquad (21)$$

Откуда

$\varepsilon^2 \Delta_\varepsilon(t) + \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)\,\Delta_\varepsilon(\sigma)d\sigma ds = \varepsilon^2\varphi(t)$, (22) где

$\Delta_\varepsilon(t) = \varphi(t) - u_\varepsilon(t), 0 \le t \le 1$. (23)

Решение $u_\varepsilon(t)$ в уравнении (21) ищем в виде разложения функции в ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(t)\}$. Тогда

$\Delta_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{\varepsilon i}\,\varphi_i(t)$, $\Delta_{\varepsilon k} = \int_0^1 \Delta_\varepsilon(t)\varphi_k(t)dt$ (24)

и (22) имеет вид

$\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{\varepsilon i}\,\varphi_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \Delta_{\varepsilon i}\varphi_i(t) = \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\varphi_i(t)$.

Откуда

$\Delta_{\varepsilon i}(\varepsilon^2 + \lambda_i^2) = \varepsilon^2\varphi_i$,

$\Delta_{\varepsilon i} = \frac{\varepsilon^2\varphi_i}{(\varepsilon^2+\lambda_i^2)}$, $i = 1,2,\ldots$ (25)

Из (24) с учетом (25) имеем

$\Delta_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi_i \varphi_i(t)/(\varepsilon^2+\lambda_i^2)$. (26)

Покажем L_2 - сходимость ряда (26), (т.е. по норме пространства $L_2[0,1]$) к функции $\Delta_\varepsilon(t)$, другими словами, законность разложения (26). Правую часть (26) представим в виде

$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi_i \varphi_i(t)/(\varepsilon^2+\lambda_i^2) = S_N(t) + R_N(t)$, (27)

где $S_N(t)$ - N-ая частичная сумма ряда (26), $R_N(t)$- соответствующий остаток, т.е. $S_N(t) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^2 \varphi_i \varphi_i(t)/(\varepsilon^2+\lambda_i^2)$, $R_N(t) = \sum_{i=N+1}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi_i \varphi_i(t)/(\varepsilon^2+\lambda_i^2)$.

Имеем $\| R_N(t) \|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} [\varepsilon^2 \varphi_i/(\varepsilon^2+\lambda_i^2)]^2 \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_i^2$, т.е.

$\| R_N(t) \|^2 \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_i^2$. Так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^2$ – сходящийся , то

$\sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_i^2 \to 0, N \to \infty$. (28)

Пусть $\delta > 0$ – фиксированное произвольное число, по которому выбираем номер N в (28) настолько большим, чтобы

$\sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_i^2 < \delta^2$. (29)

Теперь по выбранному в (29) номеру N, определим ε на столько малым, чтобы

$L^2 \sum_{i=1}^{N} [\varepsilon^2/(\varepsilon^2+\lambda_i^2)]^2 < \delta^2$, (30)

где $L \geq |\varphi_i|$, i=1,2,…, N. Так как $0 < \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \cdots \leq \lambda_N^2$, то для выполнения неравенства (30) достаточно ε выбрать из условий:

$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\lambda_i^2} \leq \frac{\delta^2}{LN}$, i=1,2,...,N.

Из соотношений (29) и (30) очевидно получаем

$\| S_N(t) \|^2 < \delta^2$, $\| R_N(t) \|^2 < \delta^2$, следовательно, из (27) имеем

$\|\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi_i \varphi_i(t)/(\varepsilon^2+\lambda_i^2)\| < \delta\sqrt{2}$. (31)

Так как $\{\varphi_i(t)\}$ полная ортонормированная система в $L_2[0,1]$ и в силу неравенства (31) ряд внутри его нормы сходится в среднем, то ряд (26) также сходится в среднем, т.е. имеет место (26). Значит

$\| \Delta_\varepsilon(t) \| = \|\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi_i \varphi_i(t)/(\varepsilon^2+\lambda_i^2)\| < \delta\sqrt{2}$.

Отсюда в силу (23) и произвольности $\delta > 0$ имеем сходимость в среднем

$\varphi(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Итак доказана

Теорема 3. Пусть выполнены условия а) и б). Тогда решения уравнений (18) сходятся в среднем к решению уравнения (1) при $\varepsilon \to 0$.

Выводы. Доказанную теорему 3 можно использовать для построения L_2 -приближений к решению уравнения (1). В качестве примечания хотелось бы отметить, что из - за наличия предположения «неудобности» к исследованию ядра $a(t-s)$, нам не удалось установить оценки типа $\|\varphi(t) - u_\varepsilon(t)\| = O(\varepsilon^\alpha)$ при некотором $\alpha > 0$. Этот вопрос и вопрос о непрерывном приближении будут прорабатываться в дальнейших работах авторов.

Литература

1. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода. Теория и численные методы.- Новосибирск: Наука.1999. -193с.
2. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода и третьего рода // Журн. вычислит. математики и матфизики, 19, №4, 1979. -С.970-989
3. Асанов А., Бекешов Т. Об одном классе неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Укр. Мат. Журн. т.72 .№2, 2020.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Докл.АН СССР, 309, №5, 1989.-С.1052-1055
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. – М., Л.: ОГИЗ, 1948. – 480 с.
6. Titchmarash E.C. The zeros of certain integral functions//Proc.London Math.Soc.-1926. Vol.25, №2.-P.283-302
7. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М: Наука. 1975. -304 с.
8. Фридман В.М. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредголма 1-го рода // УМН, XI, выпуск I. -1956.
9. Сражидинов А. Метод перехода для уравнений свертки и
10. некоторые его применения//Тезисы докл. V Международ. научно-практич. конф. ИННОВАЦИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. КУЛЬТУРА 22 апреля 2022г.Тюмен: Тюмен. инд.унив. 2022. -С.188-192
11. Сражидинов, А. (2022). Обобщение теоремы Титчмарша о свертке на функции многих переменных. *Вестник Ошского государственного университета*, (4), 228-243. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_228. EDN: FTQQYV.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Учеб. для мат. спец.ун-тов, -3-е изд., перераб. –М.: Наука, 1972. - 496 с.