ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY

ISSN 1694-7452 **e-ISSN: 1694-8610**

№4/2023, 87-95

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.928.2
DOI: 10.52754/16948610_2023_4_10

ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТКЕ ЭЭ БОЛГОН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH A SINGULAR POINT

Бекмурза уулу Ыбадылла
Бекмурза уулу Ыбадылла
Bekmurza uulu Ybadylla

аспирант, Ош мамлекеттик университети
аспирант, Ошский государственный университет
Graduate Student, Osh State University
ybekmurzauulu@oshsu.kg

ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТКЕ ЭЭ БОЛГОН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Аннотация

Макала бисингулярдык козголгон эки чекиттүү чектик маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасын тургузууга арналган. Кичи параметр жогорку тартиптеги туундунун астында катышкан экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн кесиндиде эки чекиттүү Дирихленин чектик маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы тургузулат. Каралып жаткан маселенин өзгөчөлүгү тиешелүү козголбогон биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме кесиндинин сол учунда өзгөчө чекитке ээ. Биз ушуга окшош чектик маселелердин асимптотикалык чыгарылыштарын тургузуунун жөнөкөйлөштүрүлгөн алгоритмин сунуштайбыз, ал эки функциянын суммасынан турат жана биздин чек ара функциялар өзгөчө чекиттин чеке-белинде "чек ара катмары" касиетине ээ, б.а. чек ара катмарынын сыртында даражалуу мүнөздө жок болот.

Ачкыч сөздөр: ассимптотикалык чыгарылыш, дирихленин эки чекиттүү чектик маселеси, бисингулярдык козголгон маселе, кичи параметр, өзгөчө чекит.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

Аннотация

Статья посвящена построению асимптотического разложения решения бисингулярно возмущенной двухточечной краевой задачи. строится равномерное асимптотическое разложение решения двухточечной краевой задачи Дирихле на отрезке для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что соответствующая невозмущенная задача для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка имеет особую точку на левом конце отрезка. Нами предлагается более простой алгоритм построения асимптотического решения подобных краевых задач, который состоит из двух составных функций и наши пограничные функций построенные в окрестности особой точки обладают свойством «погранслойности», т.е. степенным характером исчезают вне пограничного слоя.

Ключевые слова: асимптотическое решение, двухточечная краевая задача Дирихле, бисингулярно возмущенная задача, малый параметр, особая точка.

ASYMPTOTIC OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH A SINGULAR POINT

Abstract

A uniform asymptotic expansion of the solution of the two-point Dirichlet boundary value problem for a linear inhomogeneous ordinary differential equation of the second order with a small parameter at the highest derivative is constructed on the segment. The peculiarity of the problem under consideration is that the corresponding unperturbed problem for an ordinary differential equation of the first order has a singular point at the left end of the segment. We propose a simpler algorithm for constructing an asymptotic solution to such boundary value problems, which consists of two composite functions, and our boundary functions constructed in the neighborhood of a singular point have the “boundary layer” property, i.e. power-law disappear outside the boundary layer.

Keywords: asymptotic solution, two-point Dirichlet boundary value problem, singularly perturbed problem, small parameter, singular point.

Киришүү

Сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер физиканын, техниканын ж.б. илимдин тармактарында кездешет [1]-[4]. Бүгүнкү күндө сингулярдык козголуулар теориясы математиканын бир бутагына айланды. Буга далил катары акыркы жылдарда жарык көргөн макалалардын, монографиялардын санын кескин өсүүсүн далил катары келтирсе болот [1]-[18].

Маселенин коюлушу

Төмөнкү эки чекиттүү чектик маселени изилдейбиз

$$\varepsilon\, y''(x) + xy'(x) - y(x) = f(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{1}$$

$$y(0) = a, \;\; y(1) = b, \tag{2}$$

мында ε – кичи оң параметр, *a жана b* – белгилүү турактуу сандар, $f \in C^{\infty}[0,1]$.

(1) жана (2)- Дирихленин маселеси деп да аталат.

Маселенин өзгөчөлүгү

1) Кичи параметрдин жогорку тартиптеги туунду белгиси астында катышуусу, эгерде кичи параметрди формалдуу түрдө нөлгө барабарласак, анда биз биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемени алабыз:

$$xy_0'(x) - y_0(x) = f(x), \tag{3}$$

(3)- теңдеменин чыгарылышы (2)- чек аралык шарттарды жалпы учурда канаттандырбайт;

2) (3)- дифференциалдык теңдеме x=0 чекитиниде регулярдык өзгөчө чекитке ээ [4]-[6].

(1)- теңдемеде $y'(x)$ тин астындагы коэффициенти (0,1) аралыгында оң болгондуктан, (1)-(2)- козголгон маселедеги чек аралык катмар [0,1] кесиндинин сол учунда жайгашкан деп божомолдойбуз, б.а. x=0 чекиттин чеке белинде [4]-[7].

Алгач төмөнкү жардамчы лемманы келтиребиз [11]:

1-Лемма. (3)- дифференциалдык теңдеме төмөнкү шарт менен жалгыз чыгарылышка ээ болот:

$$y_0(1) = b, \tag{4}$$

жана бул чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$y_0(x) = x\left(b + \int_1^x \frac{f(\tau)}{\tau^2}d\tau\right). \tag{5}$$

Тыянак. (5)- чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$y_0(x) = f'(0)x\ln x + Q(x), \text{ мында } Q \in C^{\infty}[0,1].$$

Чындыгында,

$$y_0(x) = bx + x\int_1^x \frac{f(\tau)}{\tau^2}d\tau = bx + x\int_1^x \left(\frac{f(0)}{\tau^2} + \frac{f'(0)}{\tau} + F(\tau) \right)d\tau =$$
$$= f'(0)x\ln x + Q(x)$$

Мындай өзгөртүп жазып алганыбыздын себеби $y_0 \in C[0,1]$, бирок $y_0 \notin C^1[0,1]$ өзгөчөлүктү көрсөтүү.

Бул деген чыгарылыш кесиндиде үзгүлтүксүз, бирок $y_0(x)$ функциясынын туундусу кесиндиде үзгүлтүксүз эмес, x=0 чекитинде үзүлүүгө ээ.

Демек, (1)-(2)- маселе бисингулярдык.

(1)-(2)- маселенин чыгарылышын төмөнкү формалдуу катар көрүнүшүндө издейбиз:

$$V(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \ldots + \varepsilon^n v_n(x) + \ldots \tag{6}$$

мында $v_k(x)$ (k=0,1,…) – азырынча белгисиз функциялар, 0<ε<<1.

(6)-катарды (1)-теңдемеге алып барып коебуз:

$$\varepsilon\{v''_0(x) + \varepsilon v''_1(x) + \ldots + \varepsilon^n v''_n(x) + \ldots\} + x\{v'_0(x) + \varepsilon v'_1(x) + \ldots + \varepsilon^n v'_n(x) + \ldots\} -$$
$$-\{v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \ldots + \varepsilon^n v_n(x) + \ldots\} = f(x),$$

мындан кичи параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарлап, төмөнкү катыштарды алабыз:

$$xv'_0(x) - v_0(x) = f(x), \tag{7}$$

$$v''_{k-1}(x) + xv'_k(x) - v_k(x) = 0,\ k \in N. \tag{8}$$

(7) жана (8)- биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер. (1)-(2)- маселеде чек аралык катмар [0,1] кесиндинин сол учунда жайгашкандыгы үчүн, биз (7) жана (8)- теңдемелердин чыгарылыштарынан тиешелүү түрдө төмөнкү шарттардын аткарылуусун талап кылабыз:

$$v_0(1) = b,\ v_k(1) = 0,\ k \in N. \tag{9}$$

1-лемманын негизинде (7), (8) жана (9) маселелердин чыгарылыштары жашайт, жалгыз болот жана ал чыгарылыштарды төмөнкү көрүнүштө жаза алабыз:

$$v_0(x) = x\left(b + \int_1^x \tau^{-2} f(\tau)d\tau \right) \Rightarrow v_0(x) = f'(0)x\ln x + Q_0(x),\ \mathrm{Q}_0 \in C^\infty[0,1];$$

$$v_k(x) = -x\int_1^x \tau^{-2} v''_{k-1}(\tau)d\tau \Rightarrow v_k(x) = \frac{1}{x^{2k-1}}Q_k(x),\ Q_k \in C^\infty[0,1], k \in N.$$

Ошентип биз (6)- катардын мүчөлөрүн аныктап алдык:

$$V(x) = f'(0)x\ln x + Q_0(x) + \frac{\varepsilon}{x}Q_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{x^3}Q_2(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{x^{2n-1}}Q_n(x) + \ldots \tag{10}$$

Бул жерден тургузулган катардын $x \in (\sqrt{\varepsilon}, 1]$ аралыкта гана асимптотикалык катар боло тургандыгы келип чыгат.

Аныктама. (10)- катар (1)-(2)- маселенин тышкы чыгарылышы деп аталат.

Демек, тургузулган тышкы чыгарылыш (1)-(2)-маселени $x \in (\sqrt{\varepsilon}, 1]$ аралыкта гана канааттандырат, б.а. тышкы чыгарылыш [0,1] кесиндини толук камтыбайт.

Толук кесиндиде (1)-(2)- маселени канааттандырган чыгарылышты тургузуу үчүн жалпыланган чектик функциялар методун колдонобуз.

(1)-(2)-маселенин чыгарылышын эки функциянын суммасы көрүнүшүндө издейбиз:

$$y(x) = u(x) + \pi(t), \tag{11}$$

мында

$u(x)$ – эч кандай өзгөчөлүккө ээ болбогон жылма тышкы чыгарылыш,

$\pi(t)$ – чек аралык катмардагы ички чыгарылыш, $t = x/\mu,\ \mu = \sqrt{\varepsilon}$.

(11)ди (1)-(2)- маселеге алып барып коебуз:

$$\varepsilon u''(x) + xu'(x) - u(x) = f(x) - g(x), \quad 0 \le x \le 1,\ u(1) = b,\ u \in C^{\infty}[0,1], \tag{12}$$

$$\pi''(t) + t\pi'(t) - \pi(t) = g(t\mu),\ 0 \le t \le \mu^{-1},\ \pi(0) = a - u(0),\ \lim_{t\to\infty}\pi(t) = 0 \tag{13}$$

мында $g(x) = g_0 x + \varepsilon g_1 x + \ldots + \varepsilon^n g_n x + \ldots$, g_k – азырынча белгисиз коэффициенттер.

(12)-маселенин чыгарылышын төмөнкү катар көрүнүшүндө издейбиз:

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots + \varepsilon^n u_n(x) + \ldots \tag{14}$$

мында $u_k(x)$ (k=0,1,…) – азырынча белгисиз функциялар, 0<ε<<1.

(14)-катарды (1)-теңдемеге алып барып коебуз:

$$\varepsilon\{u''_0(x) + \ldots + \varepsilon^n u''_n(x) + \ldots\} + x\{u'_0(x) + \ldots + \varepsilon^n u'_n(x) + \ldots\} -$$
$$-\{u_0(x) + \ldots + \varepsilon^n u_n(x) + \ldots\} = f(x) - g_0 x - \varepsilon g_1 x - \ldots - \varepsilon^n g_n x - \ldots,$$

мындан кичи параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарлап, төмөнкү катыштарды алабыз:

$$xu'_0(x) - u_0(x) = f(x) - g_0 x,\ \ u_0(1) = b, \tag{15}$$

$$u''_{k-1}(x) + xu'_k(x) - u_k(x) = -g_k x,\ u_k(1) = 0,\ k \in N. \tag{16}$$

1-лемманын негизинде (15)- жана (16)- маселелердин чыгарылыштары

$$u_0(x) = x\left(b + \int_1^x \frac{f(\tau) - g_0\tau}{\tau^2}d\tau\right),\ u_k(x) = -x\int_1^x \frac{u''_{k-1}(\tau) + g_k\tau}{\tau^2}d\tau,\ k \in N$$

болот.

Эгерде $g_0 = f'(0),\ g_k = -u'''_{k-1}(0),\ k \in N$ болсо, анда

$$u_k \in C^\infty[0,1]\ (k = 0,1,2,\ldots) \Rightarrow u \in C^\infty[0,1].$$

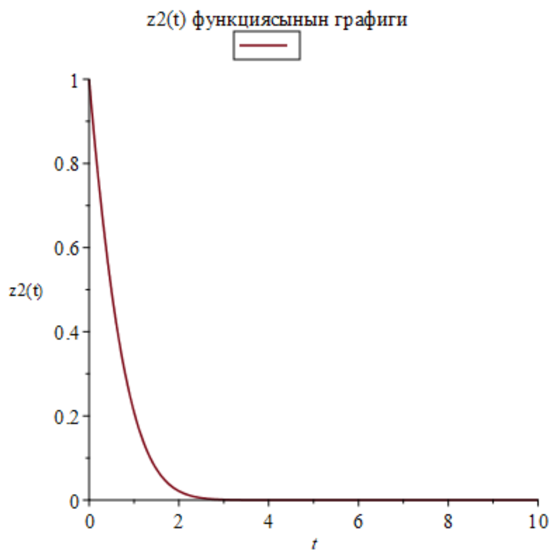
Ошентип биз эч кандай өзгөчөлүккө ээ болбогон (14)- жылма тышкы чыгарылыштын жана $g(x)$ функциясынын бардык мүчөлөрүн аныктап алдык.

(13)-маселенин чыгарылышын тургузабыз.

Бир тектүү $z''(t) + tz'(t) - z(t) = 0$ теңдеменин сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштарын төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$z_1(t) = t,\ z_2(t) = e^{-t^2/2} + t\int_\infty^t e^{-\tau^2/2}d\tau \cdot$$

мында $z_2(t) = \begin{cases} 1 - c_1 t + c_2 t^2 + \ldots, & t \to 0 \\ \dfrac{1}{t^2} e^{-t^2/2}\left(1 - \dfrac{3}{t^2} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{t^4} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{(2n+1)!!}{t^{2n}} + \ldots\right), & t \to \infty, \end{cases}$



Вронскианы: $W(z_1, z_2) = -e^{-t^2/2}$. Ошондуктан (13)-теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$\pi(t) = z_2(t)\int \frac{z_1(t)g(t\mu)}{W}dt - z_1(t)\int \frac{z_2(t)g(t\mu)}{W}dt + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

болот. Ал эми чек аралык шарттарды канааттандырган чыгарылыш төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\pi(t) = -z_2(t)\int_0^t z_1(\tau)g(\tau\mu)e^{\tau^2/2}d\tau + z_1(t)\int_\infty^t z_2(\tau)g(\tau\mu)e^{\tau^2/2}d\tau + (a - u(0))z_2(t) =$$

$$= \left[z_1(t)\int_\infty^t z_2(\tau)\tau e^{\tau^2/2}d\tau - z_2(t)\int_0^t z_1(\tau)\tau e^{\tau^2/2}d\tau\right]\sum_{k=0}^\infty \mu^{2k+1}g_k + \quad .$$

$$+(a - u_0(0))z_2(t) - z_2(t)\sum_{k=0}^\infty \mu^{2k}u_k(0)$$

Тургузулган $u(x)$ жана $\pi(t)$ функцияларын (11) ге алып барып коебуз:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x)+[z_1(t)\int_{\infty}^{t} z_2(\tau)\tau e^{\tau^2/2}d\tau - z_2(t)\int_0^t z_1(\tau)\tau e^{\tau^2/2}d\tau]\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{2k+1}g_k + \\ +(a-u_0(0))z_2(t)-z_2(t)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{2k}u_k(0) \quad (17)$$

мында $u_0(x)=xb+x\int\limits_1^x \tau^{-2}(f(\tau)-f'(0)\tau)d\tau$,

$$u_k(x)=-x\int\limits_1^x \tau^{-2}(u''_{k-1}(\tau)-u'''_{k-1}(0)\tau)d\tau,\ k\in N\ \ u_k\in C^{\infty}[0,1]\ (k=0,1,2,...).$$

(17)-катар чындап (1)-(2)- маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасы экендигин далилдөө үчүн (17)нин калдык мүчөсүн баалайбыз. Мейли

$$y(x)=y_n(x)+R_n(x) \quad (18)$$

болсун, мында $R_n(x)$ – калдык мүчө,

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(x)+[z_1(t)\int_{\infty}^{t} z_2(\tau)\tau e^{\tau^2/2}d\tau - z_2(t)\int_0^t z_1(\tau)\tau e^{\tau^2/2}d\tau]\sum_{k=0}^{n}\mu^{2k+1}g_k + \\ +(a-u_0(0))z_2(t)-z_2(t)\sum_{k=0}^{n}\mu^{2k}u_k(0).$$

(18)-туюнтманы (1)-(2)- мселеге алып барып коюуп, калдык мүчө үчүн төмөнкү маселени алабыз:

$$\varepsilon R''_n(x)+xR'_n(x)-R_n(x)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad 0\le x\le 1,\ R_n(0)=0,\ R_n(1)=0. \quad (19)$$

(19)-маселеге максимум принцибин [16] колдонуп, калдык мүчө үчүн төмөнкү асимптотикалык бааны алабыз:

$$R_n(x)=O(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon\to 0,\ 0\le x\le 1.$$

Натыйжада биз төмөнкү теореманы далилдедик:

Теорема. Өзгөчө чекитке ээ болгон сингулярдык козголгон (1)-(2)- чектик маселенин чыгарылышы үчүн төмөнкү асимптотикалык ажыралма орун алат:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(x)+[z_1(t)\int_{\infty}^{t} z_2(\tau)\tau e^{\tau^2/2}d\tau - z_2(t)\int_0^t z_1(\tau)\tau e^{\tau^2/2}d\tau]\sum_{k=0}^{n}\mu^{2k+1}g_k + \\ +(a-u_0(0))z_2(t)-z_2(t)\sum_{k=0}^{n}\mu^{2k}u_k(0)+\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon\to 0.$$

Корутунду. Биз бисингулярдык козголгон эки чекиттүү чектик маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасын тургуздук. Каралып жаткан маселенин өзгөчөлүгү тиешелүү козголбогон биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме кесиндинин сол учунда регулярдык өзгөчө чекитке ээ. Иррегулярдык өзгөчө чекиттер [12]-[15] жумуштарда каралган.

Адабияттар

1. Shiromani R., Shanthi V., Ramos H. A computational method for a two-parameter singularly perturbed elliptic problem with boundary and interior layers // Mathematics and Computers in Simulation. 2023, Vol. 206, pp. 40–64.
2. Liu Z., Wei J., Zhang J. A new type of nodal solutions to singularly perturbed elliptic equations with supercritical growth // Journal of Differential Equations. 2022. Vol. 339. pp. 509–554.
3. Smith J. Singular Perturbation Theory (Cambridge University press, Cambridge, 1985).
4. Nayfeh A.H. Perturbation Methods, Pure and Applied Mathematics (Wiley-Inter science Series of Texts, Monographs and Tracts, New York, 1973).
5. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 4. С. 484-487.
6. Алымкулов К., Зулпукаров А.З. Равномерное приближение решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка в случае, когда невозмущенное уравнение имеет регулярную особую точку // Исслед. по инт.-дифф.уравнениям. – Бишкек: Илим. 2004. Вып. 33. С.118-123.
7. Tursunov D. A. and Bekmurza uulu Ybadylla Asymptotic Solution of the Robin Problem with a Regularly Singular Point // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 613–620.
8. Турсунов Д.А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем // Изв. вузов. Математика. 2018. № 3. С. 70–78. DOI: 10.3103/S1066369X18030088.
9. Турсунов Д.А. Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 10–21. DOI 10.17377/semi.2017.14.002
10. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 271–281.
11. Bekmurza uulu Ybadylla, Kozhobekov K.G., Tursunov D.A. Asymptotics of solutions of boundary value problems for the equation $\varepsilon y'' + xp(x)y' - q(x)y = f$ // EURASIAN MATHEMATICAL JOURNAL. Vol. 13, No 3 (2022), 82 – 91.
12. Kozhobekov K.G., Tursunov D.A. Asymptotic solution of a singularly perturbed Cauchy problem with a turning point // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Т. 254. № 6. С. 788-792.
13. Kozhobekov K.G., Tursunov D.A. Asymptotics of the solution of bisingularly perturbed first boundary value problem // Журнал Лобачевского по математике. 2022. Т. 43. № 2. С. 506-5.
14. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотическое решение задачи Неймана с нерегулярной особой точкой // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 201. С. 98-102.

15. Kozhobekov K.G., Tursunov D.A., Omaralieva G.A. Asymptotics of the solution of bisingular boundary value problems with a biboundary layer // Журнал Лобачевского по математике. 2023. Т. 43. № 11. С. 3198-320.
16. Protter M.H., Weinberger H.F., Maximum-Principles in Differential Equations (Diff.Equat.Ser. Prentice-Hall, Inc. X, N. J., 1
17. Садиева, А. (2023). Туруксуз спектрге ээ болгон сингулярдык козголгон маселенин чыгарылышынын асимптотикасы. *Вестник Ошского государственного университета*, (3), 65-72. https://doi.org/10.52754/16948610_2023_3_8. EDN: WQDATO.
18. Абдилазизова, А. (2022). Биринчи тартиптеги сингулярдык козголгон сызыктуу дифференциалдык теңдеменин чечиминин асимптотикасы. *Вестник Ошского государственного университета*, (1), 5-11. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_1_5. EDN: PJWGKB.