

e-ISSN: 1694-8742

№1 (02) 2023, 42-53

УДК: 517.93; 378.147

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948742_2023_1\(2\)_5](https://doi.org/10.52754/16948742_2023_1(2)_5)

**ЦИФРОВЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК ВОПЛОЩЕНИЕ
КОГНИТИВНО-ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА К ОБУЧЕНИЮ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ**

Математика боюнча санарип лабораториялык иштер болочок мугалимдерди окутууда когнитивдик-
ишмердик мамилени ишке ашыруу катары

Digital laboratory works in mathematics as an implementation of the cognitive-active approach to
training future teachers

Бодряков Владимир Юрьевич

Бодряков Владимир Юрьевич

Bodryakov Vladimir Yurievich

д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой, Уральский государственный педагогический университет

физ.-мат. илимд. д-ру, кафедра башчы, Урал мамлекеттик педагогикалык университети

Dr of Phys-Math Sc, Head of the Department, Ural State Pedagogical University

Bodryakov_VYu@e1.ru

ЦИФРОВЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК ВОПЛОЩЕНИЕ КОГНИТИВНО-ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА К ОБУЧЕНИЮ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ

Аннотация

Реализуемые под руководством автора в течение ряда лет в Уральском государственном педагогическом университете при подготовке будущих учителей математики и информатики цифровые лабораторные работы по математике (ЛРМ) представлены как идейное и натурное воплощение разработанного автором когнитивно-деятельностного подхода к предметному обучению. Авторские идеи проиллюстрированы на примере двух ЛРМ: ЛРМ (e). «Определение числа e путем оцифровки изображения висящей цепи»; ЛРМ (dT/dt). «Изучение закона охлаждения тела путем теплообмена».

Ключевые слова: когнитивно-деятельностный подход к обучению, подготовка будущих учителей, цифровые лабораторные работы по математике.

**Математика боюнча санарип лабораториялык иштер
болочок мугалимдерди окутууда когнитивдик-ишмердик
мамилени ишке ашыруу катары**

**Digital laboratory works in mathematics as an implementation
of the cognitive-active approach to training future teachers**

Аннотация

Урал мамлекеттик педагогикалык университетинде бир нече жылдар бою автордун жетекчилиги астында келечектеги математика жана информатика мугалимдерин даярдоодо ишке ашырылып келе жаткан математика боюнча санарип лабораториялык иштер (СЛИ) автор тарабынан иштелип чыккан предметти окутууда когнитивдик-ишмердик мамилени идеялык жана табигый ишке ашырылышы катары каралган. Автордун идеялары эки СЛИнин мисалында көрсөтүлгөн: СЛИ (e). «Асылган чынжырдын сүрөтүн санариптештирүү жолу менен e санын аныктоо»; СЛИ (dT/dt). «Жылуулук алмашуу жолу менен телонун муздашы законун изилдөө».

Abstract

Implemented under the guidance of the author for a number of years at the Ural State Pedagogical University in the preparation of future teachers of Mathematics and Informatics, digital laboratory works in mathematics (LWM) are presented as an ideological and natural embodiment of the cognitive-active approach to subject education developed by the author. The author's ideas are illustrated by the example of two LWMs: LWM (e). "Determining the number e by digitizing the image of a hanging chain"; LWM (dT/dt). "Study of the law of body cooling by heat transfer".

Ачык сөздөр: окууга когнитивдик-ишмердик мамиле, болочок мугалимдерди даярдоо, математика боюнча санарип лабораториялык иштер.

Keywords: cognitive-active approach to teaching, training of future teachers, digital laboratory works in mathematics.

Введение

Воззрения автора в отношении когнитивно-деятельностного подхода к обучению математике изложены в работе (Бодряков, 2019). Этой же теме в различных контекстах посвящены работы российских (Далингер, 2011), (Тапалаева, 2016), (Блинова, 2017), (Горячев и др., 2018), (Величко, 2019), (Черняева, 2021), (Воронина, 2022) и зарубежных методистов-исследователей (Drew & Mackie, 2011), (Swiderski, 2011), (Tarmizia, Bayata, 2012), (Karpov, 2016), (Lessani и др., 2017), (Campbell, Blair, 2018), (Royani & Agustina, 2019), (Khasawneh и др., 2023). Основная идея когнитивно-деятельностного подхода заключается в разумном и взаимодополняющем сочетании применения когнитивных технологий в обучении математике и деятельностного подхода к обучению. Основной задачей когнитивных технологий является, по сути, формирование разносторонних интеллектуальных качеств обучающегося и его способности к продуктивному обучению и успешной самореализации. Основной задачей деятельностного подхода к обучению математике является, по сути, формирование функциональной математической грамотности обучающегося как способности и готовности к применению усвоенных математических знаний к решению задач окружающей действительности в различных контекстах. Далее для определенности будем говорить о подготовке будущих учителей математики и информатики в педагогическом университете, хотя идеи когнитивно-деятельностного подхода к предметному обучению могут быть непосредственно обобщены на другие предметные области и на другие уровни образования.

Исследователи, работающие в указанной области, отмечают важность для успешного обучения гармоничного сочетания у обучающихся трех взаимосвязанных и взаимодополняющих личностных компонентов: мотивационной, когнитивной и деятельностной (Горячев и др., 2018). Под мотивационным компонентом авторами (Горячев и др., 2018) понимается наличие у обучающегося мотивации и эмоционального отношения к учению. В когнитивный компонент включены предметные знания, способы, методы, приемы, необходимые для обучения. В деятельностный компонент отнесены регулятивные и познавательные универсальные учебные действия. В работе (Тапалаева, 2016) предложена когнитивная модель развития индивидуальной учебной деятельности в процессе обучения математике; в частности, автор выделяет следующие этапы развития процесса подготовки обучающегося к продуктивной учебной деятельности: 1) зарождение активности; 2) выработка плана действий, гипотез, моделей, схем предметных действий; 3) готовность к принятию решения; 4) результат. Автор (Swiderski, 2011) указывает на эффективность следующих когнитивных техник: активизация предшествующих знаний, разбиение сложного материала на более простые части, разработка и использование различных схемотехник. Авторы (Khasawneh и др., 2023) подчеркивают важность коллективного обсуждения подходов к решению предстоящих задач, особенно проблемных и чреватых ошибками.

Реализуемые в течение ряда лет в Уральском государственном педагогическом университете при подготовке будущих учителей математики и информатики цифровые лабораторные работы по математике (ЛРМ) с точки зрения автора, подкрепленной опытом многолетних педагогических наблюдений, являются весьма продуктивным идейным и натурным воплощением когнитивно-деятельностного подхода к предметному обучению. Демонстрация последнего является целью настоящей статьи.

Авторские идеи проиллюстрированы на примере двух ЛРМ: ЛРМ (e). «Определение числа e путем оцифровки изображения висящей цепи»; ЛРМ (dT/dt). «Изучение закона охлаждения тела путем теплообмена». Изложение ведется в форме, приближенной к Отчету по ЛРМ; шаблон Отчета по ЛРМ представлен в работе (Бодряков & Быков, 2022).

Тема: ЛРМ (e). Определение числа e путем оцифровки изображения висящей цепи.

Цель: ознакомиться с математической моделью цепной линии. На основании данных

оцифровки изображения висящей цепи определить величину числа e как одного из параметров математической модели.

Задачи: 1) Изучить учебную литературу по подходам к построению математической модели цепи, свободно висящей в однородном поле тяжести;

2) изучить методы оцифровки изображений и обработки результатов оцифровки;

3) с помощью любого подходящего цифрового устройства сделать несколько снимков свободно висящей цепи;

4) провести верификацию математической модели формы свободно висящей цепи.

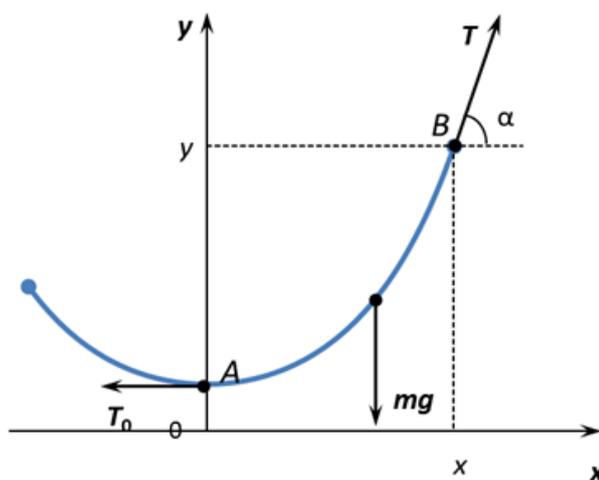


Рисунок 1. Математическая модель свободно висящей цепи

Оборудование и материалы: Цифровая камера для фотофиксации висящей цепи, ПК со стандартным ПО.

Теория. Пусть в поле тяжести Земли подвешена тонкая, гибкая, нерастяжимая нить (рис. 1), изготовленная из материала с погонной плотностью массы ρ (вес единицы длины нити). Необходимо найти уравнение $y(x)$, описывающее форму цепи. Найденную функцию $y(x)$ назовем цепной линией (катеноидой).

Решение: для решения задачи достаточно рассмотреть равновесие выделенного участка нити. Рассмотрим правый участок нити, – от вершинной точки $A(0, y(0))$ до точки $B(x, y)$ (рис. 1). Действие мысленно отброшенных участков цепи заменим соответствующими силами натяжения в нити. В вершине A действует горизонтально направленная (в силу симметрии) влево сила

$$\mathbf{T}_0 = -T_0 \mathbf{i} \quad (1)$$

В точке B действует направленная под углом α к положительному направлению оси Ox сила \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = T \cos(\alpha) \mathbf{i} + T \sin(\alpha) \mathbf{j} \quad (2)$$

Кроме того, на выделенный участок цепи действует сила тяжести, приложенная к центру масс участка:

$$\mathbf{mg} = -mg \mathbf{j}, \quad (3)$$

В выражениях (1)–(3) введены обозначения \mathbf{i} и \mathbf{j} для единичных ортов координатных осей Ox и Oy , соответственно.

Так как выделенный участок нити находится в статическом равновесии, то векторная сумма всех сил, действующих на него, равна нулю:

$$\mathbf{T}_0 + \mathbf{T} + \mathbf{mg} = 0 = (-T_0 + T \cos \alpha) \mathbf{i} + (-mg + T \sin \alpha) \mathbf{j} \quad (4)$$

В проекциях на координатные оси имеем, соответственно:

$$Ox: T \cos \alpha = T_0; \quad (5)$$

$$Oy: T \sin \alpha = mg \quad (6)$$

Разделив выражение (6) на выражение (5) для исключения T , получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = mg / T_0 \quad (7)$$

Заметим, что согласно геометрическому смыслу производной,

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{dy}{dx}, \quad (8)$$

а масса выделенного участка нити пропорциональна длине дуги ℓ , выражаемой криволинейным интегралом:

$$m = \rho \ell = \rho \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (9)$$

Объединяя выражения (7)–(9), получаем

$$y' = \frac{\rho g}{T_0} \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (10)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (10) путем дифференцирования приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (ДУ-II); введем также обозначение

$\frac{1}{a} = \frac{\rho g}{T_0}$, где действительный параметр $a > 0$:

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2} \quad (11)$$

С учетом очевидных начальных условий: $y(x=0) = y(0)$, $y'(x=0) = 0$, на самом деле имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2}; \\ y|_{x=0} = y(0); \\ y'|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

ДУ-II в задаче Коши (12) является неполным и решается с понижением порядка путем замены $y' = p = p(x)$. Такая замена приводит к вспомогательной задаче Коши:

$$\begin{cases} p' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2}; \\ p|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

ДУ-I в (13) является уравнением с разделяющимися переменными и интегрируется непосредственно:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a} \int dx + C_1,$$

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1, \quad (14)$$

где постоянная интегрирования C_1 определяется из начального условия в (13); при $x = 0$, $\ln 1 = 0 = C_1$

Таким образом, окончательно, решением задачи Коши (13) является выражение

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} \quad (15)$$

После потенцирования, выр. (15) легко разрешается относительно p :

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{x/a};$$

$$\sqrt{1 + p^2} = e^{x/a} - p;$$

$$1 + p^2 = (e^{x/a} - p)^2 = e^{2x/a} - 2p e^{x/a} + p^2;$$

$$2p e^{x/a} = e^{2x/a} - 1.$$

Окончательно

$$p = y' = \frac{1}{2} (e^{x/a} - e^{-x/a}) = \text{sh}(x/a). \quad (16)$$

В выражении (16) использовано обозначение для гиперболического синуса $\text{sh } z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z})$.
Теперь получаем вторую задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2} (e^{x/a} - e^{-x/a}); \\ y|_{x=0} = y(0). \end{cases} \quad (17)$$

ДУ-I в задаче Коши (17) есть уравнение с разделенными переменными, и элементарно интегрируется:

$$dy = \frac{1}{2} (e^{x/a} - e^{-x/a}) dx;$$

$$\int dy = \frac{1}{2} \int (e^{x/a} - e^{-x/a}) dx + C_2;$$

$$y = \frac{1}{2} a (e^{x/a} + e^{-x/a}) + C_2 = a \text{ch}(x/a) + C_2 \quad (18)$$

В выражении (18) использовано обозначение для гиперболического косинуса $\text{ch } z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z})$.
Постоянную интегрирования C_2 определим из начального условия в задаче Коши (17); при $x = 0$ имеем:

$$y(0) = a + C_2,$$

так что

$$C_2 = y(0) - a$$

Теперь

$$y(x) = (y(0) - a) + a \text{ch}(x/a) \quad (19)$$

Поскольку выбор оси абсцисс не влияет на форму цепной линии, можно положить

$$y(0) - a = 0$$

В этом случае каноническое выражение для формы цепной линии определяется функцией:

$$y(x) = a \text{ch}(x/a) \quad (20)$$

Задача о математической модели свободно висящей цепи решена.

Ход работы. После сборки экспериментальной «установки» (см. рис. 2), с помощью цифровой камеры производится фотофиксация висящей цепи. Проводится оцифровка изображения в MS Paint; фиксируются координаты характерных точек цепи (рис. 3).



Рисунок 2. Изображение свободно висящей цепи

Согласно построенной математической модели висящей цепи:

$$y(x) = (y(0) - a) + a \text{ch}(x/a),$$

где $a = \text{const} > 0$. Удобно провести ось абсцисс так, чтобы $y(0) = 0$. Тогда

$$y(x) = a [\text{ch}(x/a) - 1] \quad (*)$$

Заметим также, что

$$y'(x) = \text{sh}(x/a) \tag{**}$$

При $x = a$ имеем $y(a) = a [\text{ch}(1) - 1] = a [(e + e^{-1})/2 - 1]$, откуда относительно параметра e , понимаемого как подлежащий определению параметр модели:

$$e_{\text{exp}} = (y(a)/a + 1) + [(y(a)/a + 1)^2 - 1]^{1/2} \tag{***}$$

При этом $y'(a) = \text{sh}(1) \approx 1,1752$.

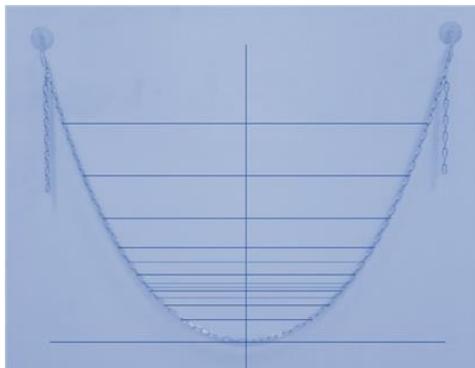


Рисунок 3. Изображение свободно висящей цепи с «оцифровочными» линиями

Результаты и обсуждение.

Результаты эксперимента и обработки изображения в графическом виде приведены на рис. 3 и в таблице.

Таблица. Результаты измерений и расчетов в ЛРМ (e); указано среднее по данным семи наблюдений «экспериментальное» значение $e_{\text{exp}} \pm \text{СКО}$.

№ п/п	a , пкс	$y(a)$, пкс	e_{exp}
1	836	555	2,9937
2	772	467	2,8602
3	728	408	2,7583
4	704	379	2,7073
5	686	355	2,6589
6	634	307	2,5810
7	584	255	2,4681
		$\langle e_{\text{exp}} \rangle \pm \delta e$	2,718 \pm 0,174

Методом наименьших квадратов найдено, что «экспериментальное» значение числа e равно $e = 2,718 \pm 0,174$ с относительной статистической погрешностью $\pm 6,4\%$. Фактическая же относительная погрешность (по отношению к «математическому» значению числа $e = 2,718281828459045\dots$) менее 0,1%. О высоком качестве математической модели и отличном соответствии расчета по модели с фактическим изображением цепи свидетельствует итоговый рис. 4.

Выводы

1. Задачи работы решены, цель достигнута. Методом наименьших квадратов найдено, что число e равно $e = 2,718 \pm 0,174$ с относительной статистической погрешностью $\pm 6,4\%$. Фактическая же относительная погрешность (по отношению к «математическому» значению числа $e = 2,718281828459045\dots$) менее 0,1%. Теоретическая цепная линия находится в отличном согласии с изображением реальной цепи.

Перспективы дальнейших учебных исследований в контексте математической модели цепной линии и ее натурного воплощения:

- исследование свойств гиперболических функций $y = \text{sh}x$, $y = \text{ch}x$ как функций действительного и комплексного аргумента;
- исследование свойств цепной линии $y = a \text{ch}(x/a)$ в зависимости от параметра a .
- исследование свойств показательной функции $y = b^x$ при разных основаниях $b > 0$;

- определение числа e путем оцифровки изображения висящей цепи – в форме модифицированных лабораторных работ по математике, при выполнении КР и ВКР;
- освоение методов статистической обработки данных;
- изучение дискретной модели висящей цепи в виде совокупности связанных нитями точечных масс;
- изучение моделей реальных процессов, поведение которых описывается экспоненциальной функцией (охлаждение тел, колебательные процессы в вязкой среде);
- изучение арочных конструкций в форме цепной линии в архитектуре, и др.

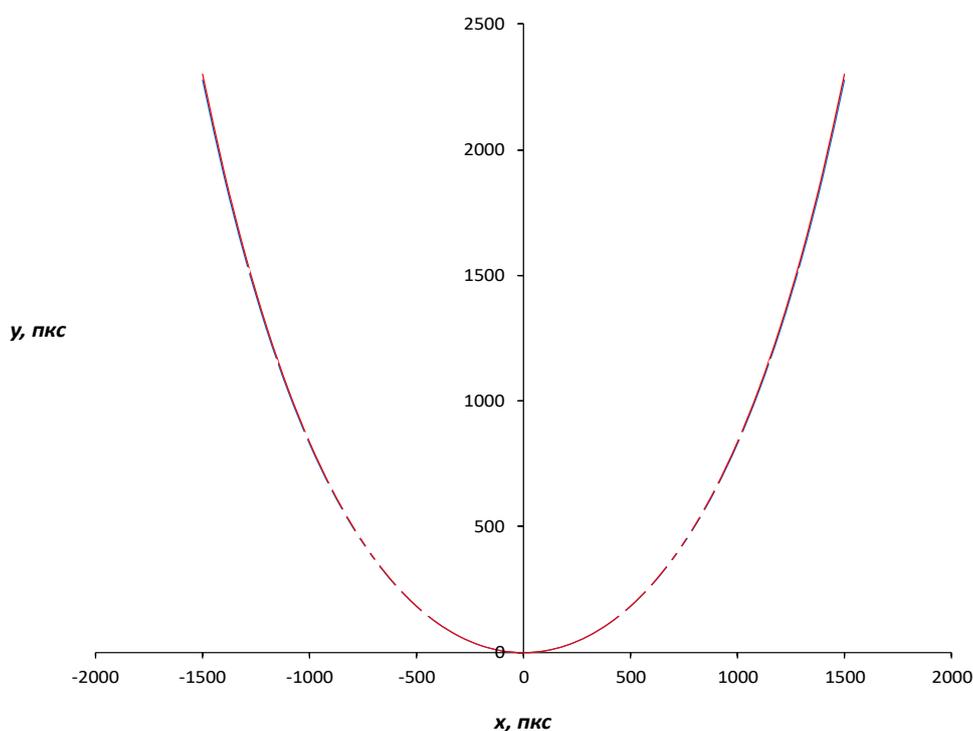


Рисунок 4. Результаты расчетов в ЛРМ (e). Точки – оцифровка; синяя линия – модельный расчет; красная – теоретическая кривая $y = a(\operatorname{ch}(x/a) - 1)$.

Хорошее понимание свойств показательной функции вида $y = e^x$ или $y = e^{-x}$ необходимо для грамотного выполнения следующей ЛРМ.

Тема: ЛРМ (dT/dt). Изучение закона охлаждения тела путем теплообмена.

Цель: Освоение математической модели, описывающей охлаждение тела путем теплообмена с окружающей средой.

Задачи: 1) Изучить учебную литературу по физическим механизмам и математическим моделям теплообмена тела с окружающей средой;

2) изучить методы измерения и фиксации температуры тела;

3) с помощью оборудования «Цифровой лаборатории по математике» провести динамические измерения температуры $T(t)$ тела, находящегося в условиях теплообмена с окружающей средой;

4) провести верификацию математической модели охлаждения тела при теплообмене.

Оборудование и материалы: Оборудование «Цифровой лаборатории по математике» (датчик температуры, USB-кабель, стакан с горячей водой, компьютер с программой «ЦЛ по математике»), ПК со стандартным ПО.

Теория. Согласно математической модели явления, скорость $dT(t)/dt$ изменения температуры тела $T(t)$ со временем t прямо пропорциональна разности $T(t) - T_0$, где T_0 – температура окружающей

среды. С использованием физического смысла производной как скорости процесса, сказанное может быть выражено в форме линейного дифференциального уравнения I порядка (ДУ-I):

$$dT/dt = -k(T - T_0) = -kT + kT_0, \quad (*)$$

где k – коэффициент теплообмена ($k = \text{const} > 0$).

Т.о., если измерить временную зависимость температуры $T(t)$ нагретого тела, остывающего в среде с неизменной температурой T_0 , то, согласно математической модели, зависимость dT/dt vs. T должна быть линейной, с угловым коэффициентом, равным $-k$, и свободным членом kT_0 .

Ход работы. После сборки экспериментальной установки (рис. 5), устанавливаются рабочие параметры компьютерной программы. Датчик температуры опускается в стакан с нагретой водой и запускается программа для фиксации результатов эксперимента. Полученные данные $T(t)$ могут быть обработаны средствами электронной таблицы MS Excel.



Рисунок 5. Экспериментальная установка в ЛРМ (dT/dt)

Результаты и обсуждение.

Результаты эксперимента в графическом виде приведены на рис. 6. Получен также протокол испытаний в табличном виде в формате .txt. Обработка данных проведена с помощью инструментов MS Excel. На рис. приведена зависимость скорости изменения температуры тела dT/dt от температуры тела T . Видно, что точки dT/dt vs. T ложатся на прямую линию тренда в области температур $321 < T(\text{K}) < 343$ ($48 < T(^{\circ}\text{C}) < 70$).

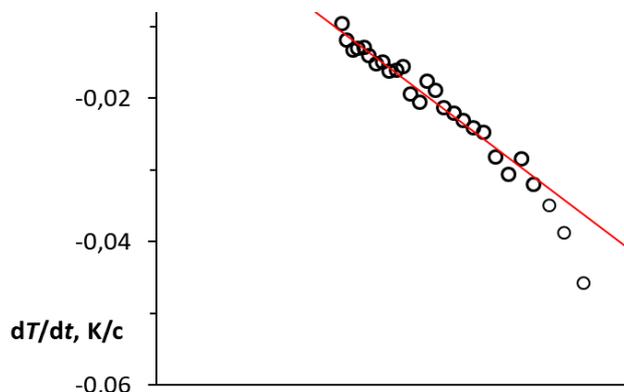


Рисунок 6. Зависимость dT/dt vs. T в ЛРМ (dT/dt). Прямая – линейный тренд

Методом наименьших квадратов (линейная регрессия) найдено, что коэффициент теплообмена равен $k = (9,16 \pm 0,38) \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$, температурный параметр $T_0 = 309,6 \pm 13,2 \text{ K}$

Выводы

Задачи работы решены, цель достигнута. Методом наименьших квадратов найдено, что коэффициент теплообмена равен $k = (9,16 \pm 0,38) \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, температурный параметр $T_0 = 309,6 \pm 13,2 \text{ К}$. Хорошее следование эмпирической корреляционной зависимости dT/dt vs. T линейному тренду свидетельствует об адекватности примененной математической модели охлаждения нагретого тела путем теплообмена.

Перспективы дальнейших учебных исследований в контексте математической модели закона охлаждения тела:

- получение точного решения модельного ДУ-1 и расчет временной зависимости температуры охлаждающегося тела $T(t)$;
- исследование модели охлаждения при различных геометриях опыта (разных k);
- выполнение измерений без использования специализированного лабораторного оборудования (термометр, секундомер);
- освоение методов численного дифференцирования;
- освоение методов статистической обработки данных и др.

Заключение

Лабораторные работы по математике, особенно сопровождаемые целесообразным применением цифровых инструментов (в этом случае уместно подчеркивание – цифровые ЛРМ), вызывают активный самоподдерживающийся интерес современных студентов. Особенно ценна, по мнению студентов, активная составляющая процесса такого обучения математике, выраженная в форме конкретной осязаемой деятельности – манипулировании с объектом исследования и соответствующей лабораторной инфраструктурой (деятельностный компонент). Процесс выполнения ЛРМ более свободен и динамичен, чем обычное лекционное или практическое занятие, поэтому изучение математики в форме ЛРМ приветствуется студентами, в основном, представителями подвижного цифрового поколения Z. При выполнении ЛРМ применение различных когнитивных техник, описанных в перечисленных выше и др. работах наиболее уместно, наглядно и продуктивно. В отношении когнитивного компонента – происходит «смещение» мышления обучающихся от репродуктивного уровня простого исполнения по инструкции к частично-исследовательскому и даже исследовательскому, когда обучающийся сам генерирует идеи улучшения существующих или постановки новых ЛРМ.

Последовательно решая экспериментальные и/или теоретические задачи, возникающие при выполнении ЛРМ, студент осознает свои дефициты в конкретных математических разделах и восполняет их – самостоятельно или с помощью педагога. Успешная реализация деятельностного и когнитивного компонентов приводит к большей выраженности мотивационного компонента, усиливающего, в свою очередь, развитие деятельностного и когнитивного компонентов личностных качеств обучающихся. Как результат, наблюдается закономерное повышение академической успешности обучающихся; развиваются их исследовательские умения. Одновременно формируются как конкретные теоретические и экспериментальные умения, так и деятельностная личность (само)обучающегося и высокомотивированного гражданина-исследователя. Возможно, это является наиболее значимым итогом представленного подхода к обучению математике.

Литература

Бодряков, В. Ю. (2019). Когнитивно-деятельностный подход в обучении математике.

Когнитивные исследования в образовании. Сборник научных статей VII

Международной научно-практической конференции, 101–108.

Далингер, В. А. (2011). Обучение математике на основе когнитивно-визуального подхода.

Вестник Брянского государственного университета, 1, 299–305.

Тапалаева, И. Х. (2016). Новые подходы в методике преподавания математики на факультете информатики. *Молодые ученые*, 7, 451–454.

Блинова, Т. Л. (2017). Методология обучения математике в рамках когнитивистского подход.

Педагогическое образование в России, 6, 13–20.

Горячев, М. Д., Попов, А. А., Ширяев, Е. А., & Яндукова, Т. А. (2018). *Современное школьное образование: актуальные проблемы* (р. 194). ООО “Порто-принт”

Величко, Ю. А. (2019). Когнитивные основы синтеза методик преподавания дискретной математики. *Сибирский учитель*, 124(3), 40–49.

Черняева, Т. Н. (2021). Тенденции развития методики преподавания математики в вузе.

Столыпинский вестник, 3(1), 9–14.

Воронина, В. Э. (2022). Сравнительный анализ применения различных методик преподавания математики в военных вузах. *Аллея науки*, 72(9), 714–723.

Drew, V., & Mackie, L. (2011). Extending the constructs of active learning: implications for teachers' pedagogy and practice. *Curriculum Journal*, 22(4), 451–467.

<https://doi.org/10.1080/09585176.2011.627204>

Swiderski, S. M. (2011). Transforming Principles into Practice: Using Cognitive Active Learning Strategies in the High School Classroom. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, 84(6), 239–243. <https://doi.org/10.1080/00098655.2011.590549>

Tarmizi, R. A., & Bayat, S. (2012). Collaborative problem-based learning in mathematics: A cognitive load perspective. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 32, 344–350.

<https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.01.051>

Karpov, A. (2016). Generative Learning in Research Education for the Knowledge Society. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 11(6), 1621–1633.

International Electronic Journal of Mathematics Education, 11(6), 1621–1633.

- Lessani, A., Yunus, A. S. M., Bakar, K. A. (2017). Comparison of new mathematics teaching methods with traditional method. *People: International Journal of Social Sciences?* 3(2), 1285–1297.
<https://doi.org/10.20319/pijss.2017.32.12851297>
- Campbell, C., & Blair, H. G. (2018). Learning the Active Way. In *Advances in educational technologies and instructional design book series* (pp. 21–37). IGI Global.
<https://doi.org/10.4018/978-1-5225-3873-8.ch002>
- Royani, M., & Agustina, W. (2019). Junior High School Students Ability to Use The Polya’s Step to Solve Mathematical Problems Through Problem Based Learning. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research*, 2(2), 86–90.
<https://doi.org/10.33122/ijtmer.v2i2.112>
- Khasawneh, A. A., Al-Barakat, A. A., & Almahmoud, S. A. (2023). The impact of mathematics learning environment supported by error-analysis activities on classroom interaction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(2), em2227.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/12951>
- Юрьевич, Б. В., & Александрович, Б. А. (2022). Цифровые лабораторные работы по математике как современный инструмент формирования обучающегося-исследователя. *Педагогическое образование в России*, 3, 148–159.