ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ. ПЕДАГОГИКА. ПСИХОЛОГИЯ.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. ПЕДАГОГИКА. ПСИХОЛОГИЯ.

BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY. PEDAGOGY. PSYCHOLOGY.

e-ISSN: 1694-8742

№1 (02) 2023, 30-41

УДК: 517.93; 378.147
DOI: https://doi.org/10.52754/16948742_2023_1(2)_4

ОБУЧЕНИЕ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ ОСНОВАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (на примере задачи о преследовании с произвольным начальным углом прицеливания)

Болочок мугалимдерге дифференциалдык теңделердин жардамында математикалык моделдөөнүн негиздерин үйрөтүү (каалагандай баштапкы багыттоо бурчу менен изилдөө маселесинин мисалында)

Teaching future teachers the basics of mathematical modeling with the help of differential equations (on example of a pursuit problem with an arbitrary initial aiming angle)

Бодряков Владимир Юрьевич
Бодряков Владимир Юрьевич
Bodryakov Vladimir Yurievich

д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой, Уральский государственный педагогический университет
физ.-мат. илимд. д-ру, кафедра башчы, Урал мамлекеттик педагогикалык университети
D-r of Phys-Math Sc, Head of the Department, Ural State Pedagogical University
Bodryakov_VYu@e1.ru

ОБУЧЕНИЕ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ ОСНОВАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(на примере задачи о преследовании с произвольным начальным углом прицеливания)

Аннотация

На примере расширенной задачи о преследовании в системе «хищник–жертва» обсуждается, входящий в профессиональную подготовку, процесс обучения будущих учителей основам математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений. Дополняет классическую постановку задачи о преследовании допущение произвольного начального угла прицеливания $0 < \alpha_0 < \pi$. Процесс преследования может быть исчерпывающе изучен в рамках математической модели, а также может быть натурно или виртуально реализован в форме лабораторной работы на занятиях по робототехнике. Модель имеет выраженно практико-ориентированный характер, и ее освоение способствует развитию функциональной математической грамотности будущих учителей, обучающихся по направлениям подготовки в предметных областях: математика, физика, информатика, технология. Модель включает в себя возможность оптимизации преследования и игровые элементы при ограничениях на ресурс преследования хищника или уязвимость жертвы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, задача о преследовании, математическое моделирование, профессиональная подготовка будущих учителей.

Болочок мугалимдерге дифференциалдык теңделердин жардамында математикалык моделдөөнүн негиздерин үйрөтүү (каалагандай баштапкы багыттоо бурчу менен изилдөө маселесинин мисалында)

Аннотация

«Жырткыч-олжо» системасындагы кеңейтилген изилдөө маселесинин мисалында болочок мугалимдерди кесиптик даярдоодо дифференциалдык теңдемелерди колдонуу менен математикалык моделдөөнүн негиздерин үйрөтүү процесси талкууланат. Маселесинин классикалык формулировкасы $0 < \alpha_0 < \pi$ каалагандай баштапкы багыттоо бурчунун болжолу менен толукталат. Бул процесс математикалык моделдин алкагында толук изилдениши мүмкүн, ошондой эле робототехника сабактарында жеринде же виртуалдык түрдө лабораториялык иш түрүндө ишке ашырылышы мүмкүн. Модель айкын практикага багытталган мүнөзгө ээ жана аны өздөштүрүү иштеп чыгуу математика, физика, информатика, технология боюнча даярдоо багытында окуган болочок мугалимдердин функционалдык математикалык сабаттуулугун өнүктүрүүгө мүмкүнчүлүк түзөт. Модель жырткычтын куугунтук ресурсуна же олжонун аялуулугуна чектөөлөр астында куугунтук жана оюн элементтерин оптималдаштыруу мүмкүнчүлүгүн камтыйт.

Ачкыч сөздөр: дифференциалдык теңдемелер, изденүү маселеси, математикалык моделдөө, болочок мугалимдердин кесиптик даярдыгы.

Teaching future teachers the basics of mathematical modeling with the help of differential equations (on example of a pursuit problem with an arbitrary initial aiming angle)

Abstract

Using the example of the extended problem of stalking in the predator–victim system, the process of teaching future teachers the basics of mathematical modeling using differential equations, which is part of professional training, is discussed. The assumption of an arbitrary initial aiming angle of $0 < \alpha_0 < \pi$ complements the classical formulation of the pursuit problem. The process of harassment can be exhaustively studied within the framework of a mathematical model, and can also be implemented in full-scale or virtually in the form of laboratory work in robotics classes. The model has a pronounced practice-oriented character, and its development contributes to the development of functional mathematical literacy of future teachers studying in the areas of training in the subject areas: mathematics, physics, computer science, technology. The model includes the possibility of optimizing the pursuit and game elements with restrictions on the predator's pursuit resource or the vulnerability of the victim.

Keywords: differential equations, the problem of persecution, mathematical modeling, professional training of future teachers.

Введение

Не вызывает сомнения востребованность высокого качества предметной подготовки будущих учителей математики и информатики (*Концепция развития математического образования в Российской Федерации, 2013*), (*Schmidt и др., 2011*), (*Аксенова, Бодряков, 2016*), (*Бодряков, Воронина, 2018*), (*Перминов и др., 2019*), (*Barakaev и др., 2020*), (*Абдуразаков и др., 2021*), (*Шкерина и др., 2022*). Причем, ввиду быстрых и необратимых процессов цифровизации всех сторон общественного уклада, разделение «учебного плана» на различных уровнях системы образования на образовательные области (математика, естественные науки, информатика и технологии, и др.) становится все более условным. Актуальной становится задача обеспечения транспредметной или STEM-подготовки будущих учителей, – прежде всего, учителей математики. Ставший уже общеупотребимым термин «транспредметный» подчеркивает неразрывное единство различных дисциплин; термин «STEM» (Science, Technology, Engineering, Mathematics) конкретизирует неразрывно связанные (интегрированные) области знания. В STEM-образовании математика играет роль связующего континуума (*Chesky, Wolfmeyer, 2015, с. 105*), (*Kertil, Gurel, 2016, с. 173*), (*Bergsten, Frejd, 2019, с. 941*), (*Maass и др., 2019, с. 869*), (*Синельников, Худов, 2020, с. 54*). В дальнейшем будем говорить о студентах – будущих учителях математики, и подразумевать студентов педагогического вуза, которые проходят профессиональную подготовку в педагогическом университете в парадигме транспредметного, или STEM-образования по направлению «44.03.05 – Педагогические образование. Математика и информатика». Впрочем, результаты настоящей работы вполне востребованы и для целого ряда других направлений подготовки.

Одним из наиболее выраженных индикаторов успешной реализации STEM-подхода к подготовке будущих учителей является их развитая функциональная математическая грамотность (ФМГ) (*Валеев, 2020, с. 353*), (*Каскатаева и др., 2021, с. 58*), (*Десненко, Зверева, 2021, с. 56*). ФМГ понимается как способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах. ФМГ включает в себя математические рассуждения, использование математических понятий, процедур, фактов и инструментов, чтобы описать, объяснить и предсказать явления (определение PISA). Развитая ФМГ дает возможность грамотно проводить математические рассуждения; формулировать, применять и интерпретировать математику для решения проблем реального мира.

Другим, тесно увязанным с первым, индикатором успешности STEM-образования будущих учителей является их собственная способность к учебно-исследовательской и проектной деятельности, – а также способность успешно руководить учебно-исследовательской и проектной деятельностью своих учеников. Формированию и развитию этих способностей способствует настойчивое вовлечение студентов в НИР и повышение публикационной активности преподавателей кафедр с участием студентов, привлечение студентов к участию в проектах, олимпиадах и конкурсах профессиональной направленности, и др. (*Kertil, Gurel, 2016*), (*Каскатаева и др., 2021*), (*Kapur, 1982*), (*Лебедева, 2010*), (*Сыдыкова, 2010*), (*Перминов, 2014*), (*Безручко, 2014*), (*Бодряков & Быков, 2014*).

Несмотря на признаваемую всеми участниками и на всех уровнях массового математического образования актуальность обучения учителей основам математического моделирования, налицо явный дефицит удобных для обучения содержательных моделей. Следует также указать на не самый высокий уровень математической подготовленности студентов педвуза – будущих учителей математики. Нужно понимать, что математика, как наука, не является предметом профессиональной деятельности школьного учителя. Поэтому уровень сложности «обучающей» математической модели должен быть, с одной стороны, достаточно высок, чтобы соответствовать понятию «современное высшее математическое образование будущего учителя», с другой стороны, должен быть посилен для выпускника, добросовестно освоившего обычный курс высшей математики педагогического вуза.

С учетом вышесказанного, целью настоящей статьи является представление задачи о преследовании с произвольным начальным углом прицеливания как подходящей реалистичной математической модели для обучения будущих учителей основам математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений.

Теория. Задача о преследовании (говорят также, задача о погоне, pursuit problem или chase problem) хорошо известна. Сюжет о преследовании «хищником» (predator) «жертвы» (prey) на плоскости, причем так, что вектор скорости хищника все время нацелен на жертву имеет реалистичный контекст, например, преследование лисицей полевой мыши. Один из первых сюжетов – это преследование пиратским судном торгового, возможно, предложен еще Леонардо да Винчи; математическое решение этой задачи представлено в работах P. Bouguer и P.-L. M. de Maupertuis. Неоднократно на протяжении почти трех минувших столетий математики возвращались к решению задачи о погони, рассматривая ее в различных аспектах. T. de Saint-Laurent получил точное решение задачи о погоне в ее классической интерпретации практически в современном виде:

$$y = \frac{a}{2}\{\frac{1}{n+1}[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} - 1] + \frac{1}{n-1}[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} - 1]\},$$

где $n > 1$ – отношение постоянных скоростей собаки и хозяина, a – начальное расстояние между ними. Сюжет решаемой задачи состоял в том, чтобы найти уравнение траектории $y(x)$, которую оставили на песке следы собаки, бежавшей за хозяином, равномерно шагающим по прямолинейному краю берега (из начала координат вдоль оси Ox). В работе содержится довольно обстоятельный разбор истории решения задачи о погоне разными авторами.

Отмечено, что общее решение задачи о погоне в трехмерном случае сопряжено со значительными математическими сложностями. Автор приводит решение «плоской» задачи о погоне в оригинальной «тригонометрической» форме для общего случая неперпендикулярных начальных скоростей хищника и жертвы. W. R. Utz одним из первых отметил неисчерпаемый педагогический потенциал задачи о погоне в ее различных формулировках, который может быть успешно реализован при обучении студентов математике (раздел нелинейных дифференциальных уравнений), физике (раздел механики), численным методам (компьютерные вычисления), и др. Задача о погоне может служить отличной темой для самостоятельной учебно-исследовательской деятельности студентов, темой для курсовых и выпускных квалификационных работ. Автор отмечает, что по его наблюдениям задача о погоне привлекает до 40% студентов математиков и физиков; работая с этой задачей студенты получают навыки самостоятельной исследовательской деятельности.

Надо сказать, что интерес к задаче о погоне в ее различных интерпретациях не только не угас к настоящему времени, но, скорее, нарастает и в научном, и в образовательном отношении; не прекращаются поиски аналитического решения задачи о преследовании в трехмерном случае. Следует, однако, отметить то обстоятельство, что опубликованные решения задачи о погоне часто довольно сложны в понимании для современных студентов. Так, как показывает многолетний педагогический опыт автора, понимание кинематических подходов к решению задачи о погоне с переходом в движущуюся систему отсчета, как это делают физики - задача почти непосильная для студентов-математиков педагогического университета.

Представим несложное в понимании, алгоритмически выверенное, решение задачи о преследовании на плоскости. Требуемая математическая подготовка студентов – стандартный односеместровый курс обыкновенных «Дифференциальных уравнений», включая разделы, связанные с решением неполных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Результаты и обсуждение.

Постановка задачи. Объект *B* (жертва) движется параллельно оси *Ox* с постоянной скоростью v = 300 м/с из начальной $B0(x0, h = 10000\,м)$ точки. Объект *A* (хищник) движется из начальной точки O (0, 0) с постоянной скоростью u = 500 м/с так, что вектор $\vec{u}$ все время направлен на точку B (рис. 1). Найти уравнение y(x) траектории движения хищника (кривая погони) и время погони T. Начальный угол прицеливания равен α_0.

<u>Решение</u>: Уравнения, описывающие движение объекта B (жертвы) суть

$$x_B = x_0 + vt = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha_0 + vt;\ y_B = h \qquad (1)$$

Уравнения движения объекта A (хищника), $x(t)$, $y(t)$, а также уравнение траектории $y(x)$ подлежат определению.

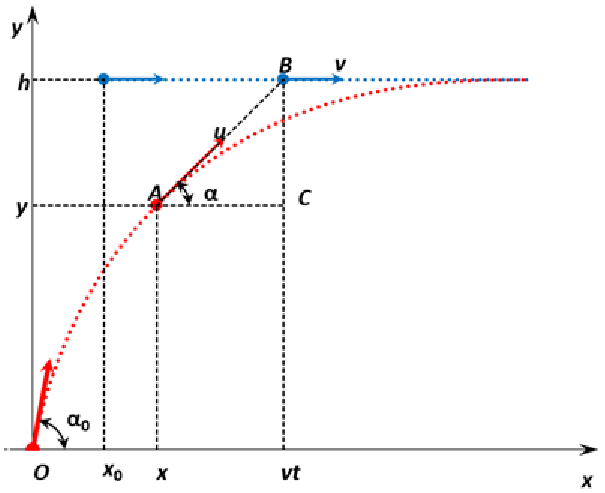

Рисунок 1. Кривая преследования с произвольным начальным углом прицеливания

В связи с движением объекта A очевидна следующая система соотношений (см. рис. 1):

$$u_x = \frac{dx}{dt} = u\cos\alpha; \quad u_y = \frac{dy}{dt} = u\sin\alpha; \qquad (2)$$

$$\frac{h-y}{vt-x} = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{u_x}{u_y} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} \equiv y'. \qquad (3)$$

Начальные условия для объекта A определяются следующими соотношениями:

$$y(t=0) = x(t=0) = 0; \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0} = \mathrm{tg}\,\alpha_0. \qquad (4)$$

Отметим также, что из (2) следует соотношение:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + y'^2}, \qquad (5)$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{\sqrt{1+y'^2}}. \qquad (6)$$

Заметим также, что дифференцирование по времени t может быть заменено на дифференцирование по координате x с помощью соотношений:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} = y'\frac{dx}{dt} \qquad (7)$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = y''\frac{dx}{dt} \qquad (8)$$

Перепишем соотношение (3) в виде

$$\frac{h-y}{y'} = vt - x, \quad (9)$$

и, с учетом (7), (8), продифференцируем обе части по времени t:

$$\frac{y'\frac{d(h-y)}{dt} - (h-y)\frac{dy'}{dt}}{y'^2} = -\frac{y'^2\frac{dx}{dt} + y''\frac{dx}{dt}}{y'^2} = -\frac{dx}{dt} - \frac{(h-y)\,y''}{y'^2}\frac{dx}{dt} = v - \frac{dx}{dt}, \quad (10)$$

откуда, с учетом (6), окончательно получаем

$$-\frac{(h-y)\,y''}{y'^2}\frac{u}{\sqrt{1+y'^2}} = v,$$

$$-k\,(h-y)\,y'' = y'^2\sqrt{1+y'^2}, \quad (11)$$

где параметр $k = u/v > 1$. Это неполное дифференциальное уравнение второго порядка (ДУ-II) (отсутствует явная зависимость от x) интегрируется путем понижения порядка с помощью подстановки:

$$\frac{dy}{dx} = p = p(y), \quad (12)$$

так что

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy}. \quad (13)$$

Теперь, с учетом начальных условий (4) и того, что $p \neq 0$ (тривиальный случай $p = 0$ не рассматриваем), имеем задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка (ДУ-I) с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} -\,k\,(h-y)\frac{dp}{dy} = p\sqrt{1+p^2}; \\ p|_{y=0} = \operatorname{tg}\alpha_0\,. \end{cases} \quad (14)$$

После разделения переменных имеем:

$$\int\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}} = -\frac{1}{k}\int\frac{dy}{h-y},$$

или, учитывая, что $y \leq h$:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{\sqrt{1+p^2}+1} = \frac{1}{k}\ln(h-y) + C_1. \quad (15)$$

Постоянную интегрирования C_1 определим из начального условия в (14):

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+(\operatorname{tg}\alpha_0)^2}-1}{\sqrt{1+(\operatorname{tg}\alpha_0)^2}+1} = \frac{1}{k}\ln h + C_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{k}\ln h + C_1,$$

Откуда,

$$C_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{k}\ln h. \quad (16)$$

Для получения выражения (16) воспользовались тем, что:

$$\frac{\sqrt{1+(\operatorname{tg}\alpha_0)^2}-1}{\sqrt{1+(\operatorname{tg}\alpha_0)^2}+1} = \frac{1-\cos\alpha_0}{1+\cos\alpha_0} = \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2}\right)^2.$$

Теперь

$$\ln\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{\sqrt{1+p^2}+1} = \frac{2}{k}\ln z + \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2}\right)^2, \quad (17)$$

где введено обозначение

$$z = \frac{h-y}{h}. \tag{18}$$

Заметим, что $0 \le z \le 1$.

Кроме того, $$\frac{dy}{dx} = -\boldsymbol{h}\,\frac{dz}{dx}. \tag{19}$$

Потенцирование (17) для производной $\boldsymbol{p} = \frac{dy}{dx}$ дает уравнение

$$\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{\sqrt{1+p^2}+1} = \left(z^{\frac{1}{k}}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 \tag{20}$$

Уравнение (20) разрешается относительно p непосредственно. С учетом (19) имеем:

$$p = \frac{dy}{dx} = -\boldsymbol{h}\,\frac{dz}{dx} = \frac{2\,z^{\frac{1}{k}}\mathrm{tg}\frac{\alpha_0}{2}}{1-\left(z^{\frac{1}{k}}\mathrm{tg}\frac{\alpha_0}{2}\right)^2} = \frac{2}{z^{-\frac{1}{k}}\mathrm{ctg}\frac{\alpha_0}{2} - z^{\frac{1}{k}}\mathrm{tg}\frac{\alpha_0}{2}}. \tag{21}$$

Полученное дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменной $z(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется:

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha_0}{2}\int z^{-\frac{1}{k}}\,dz - \mathrm{tg}\frac{\alpha_0}{2}\int z^{\frac{1}{k}}\,dz - C_2 = -\frac{2}{h}\int dx,$$

Откуда

$$\frac{2x}{h}\frac{z^{1+\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha_0}{2} = -\frac{z^{1-\frac{1}{k}}}{1-\frac{1}{k}}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha_0}{2} + \boldsymbol{C_2}. \tag{22}$$

Постоянную интегрирования C_2 определим, исходя из начальных условий (при $x = 0$ $y = 0$, а $z = 1$):

$$\boldsymbol{C_2} = \frac{1}{1-\frac{1}{k}}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha_0}{2} - \frac{1}{1+\frac{1}{k}}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha_0}{2}. \tag{23}$$

После несложных преобразований получаем окончательно искомое уравнение траектории объекта A (кривую преследования с произвольным начальным углом прицеливания α_0) в виде зависимости $x(y(z))$:

$$\boldsymbol{x(z)} = \frac{h}{2}\left[\frac{1-z^{1-\frac{1}{k}}}{1-\frac{1}{k}}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha_0}{2} - \frac{1-z^{1+\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha_0}{2}\right], \tag{24}$$

где $\boldsymbol{z} = \frac{h-y}{h}$. Задача о нахождении уравнения кривой преследования решена.

В момент завершения преследования координаты хищника есть $\boldsymbol{y = h, z = 0}$, а

$$\boldsymbol{x(z=0)} = \frac{h}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha_0}{2} - \frac{1}{1+\frac{1}{k}}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha_0}{2}\right] = \frac{h}{2}\left[\frac{k}{k-1}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha_0}{2}}{\sin\frac{\alpha_0}{2}} - \frac{k}{k+1}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha_0}{2}}{\cos\frac{\alpha_0}{2}}\right] =$$

$$= \frac{hk}{2}\left[\frac{1}{k-1}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha_0}{2}}{\sin\frac{\alpha_0}{2}} - \frac{1}{k+1}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha_0}{2}}{\cos\frac{\alpha_0}{2}}\right] = \frac{hk}{k^2-1}\,\frac{1+k\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}.$$

При завершении преследования в той же точке пространства оказывается и жертва. Время погони T определяется совокупностью условий:

$$\begin{cases} x = h\ \mathrm{ctg}\,\alpha_0 + vT, \\ y = h \text{ или } z = 0 \end{cases}$$

откуда после несложных преобразований

$$T = \frac{hk}{v(k^2-1)} \frac{k+\cos\alpha_0}{k\sin\alpha_0} = T_0 \frac{k+\cos\alpha_0}{k\sin\alpha_0}, \qquad (25)$$

где введено обозначение $T_0 = \frac{hk}{v(k^2-1)} = \frac{hu}{u^2-v^2}$.

Время T_0 соответствует продолжительности погони в классической задаче преследования при начальном угле прицеливания $\alpha_0 = 90°$. Численная оценка с выбранными значениями параметров

дает $T_0 = \frac{10000\cdot 500}{500^2 - 300^2} = 31{,}25$ **с.**

При этом координаты точки встречи объектов *A* и *B* есть $x(T_0) = 300\cdot 31{,}25 = 9375$ **м;** $y(T_0) = 10000$ м. Выясним оптимальный, при прочих равных условиях, начальный угол прицеливания, обеспечивающий минимальную продолжительность преследования и, соответственно, минимальную длину кривой преследования.

Для этого в выражение (25) с помощью производной исследуем на экстремум функцию

$$f(\alpha_0) = \frac{k+\cos\alpha_0}{k\sin\alpha_0} \text{ при условии } 0 < \alpha_0 < 180°.$$

Имеем

$$f'(\alpha_0) = -\frac{1+k\cos\alpha_0}{k\sin^2\alpha_0} = 0$$

при

$$\cos\alpha_0{}^* = -\frac{1}{k} = -\frac{v}{u}.$$

Как и можно было ожидать, $90° < \alpha_0{}^* < 180°$. Нетрудно убедиться в том, что вторая производная $f''(\alpha_0 = \alpha_0{}^*)$ положительна, т.е. при $\alpha_0 = \alpha_0{}^*$ функция $f(\alpha_0)$ имеет единственный экстремум-минимум.

$$f_{\min} = f(\alpha_0 = \alpha_0{}^*) = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}.$$

Численная оценка с выбранными значениями параметров дает $f_{\min} = 0{,}8$ при оптимальном начальном угле прицеливания $\alpha_0{}^* = \arccos(-0{,}6) \approx 127°$. Иначе, минимальное время преследования может быть уменьшено на 20% по сравнению с T_0, **– до** $T_{\min} = 0{,}8T_0 = 25$ **с.** Любопытно отметить, что абсциссы начала и конца оптимальной (наикратчайшей) кривой преследования обе нулевые. На *рис. 2* в условиях задачи представлены модельные кривые преследования для различных начальных углов преследования. *В таблице* приведены характеристические параметры кривых преследования.

Описанная выше работа по решению задачи преследования с произвольным начальным углом прицеливания выполняется на лекции по «Дифференциальным уравнениям» (история вопроса, постановка задачи, основная канва решения, перспективы дальнейших исследований) и, после самостоятельной домашней проработки вопроса студентами, закрепляется на практических занятиях в академических группах (детальное выполнение преобразований, разбор неясных мест).

После проделанной работы студенты готовы к выполнению лабораторной работы по математике (ЛРМ). ЛРМ как эффективный инструмент формирования исследовательских умений, обучающихся (на всех уровнях образования) являются педагогических ноу-хау кафедры высшей математики и методики обучения математике УрГПУ (Екатеринбург) и за примерно десятилетие активного применения в учебном процессе доказали свою педагогическую эффективность.

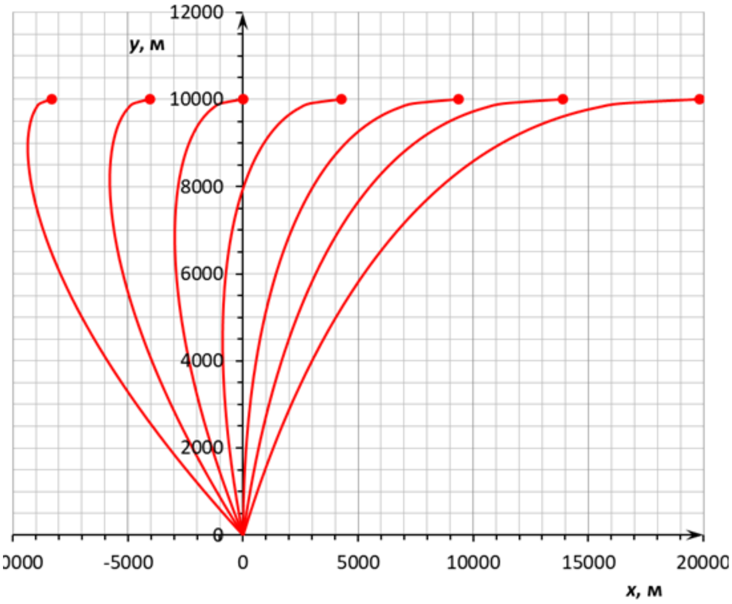

Рисунок 2 - Семейство кривых преследования с различными начальными углами прицеливания. Слева направо α_0: 150°; 140°; 126,87°; 110°; 90°; 75°; 60°.

Таблица. Характеристические параметры кривых преследования из рис. 2

α_0	150°	140°	126,87° (α_0*)	110°	90°	75°	60°
T, с	30,02	26,27	25	26,43	31,25	37,38	46,91
$x_{конеч}$, м	– 8313	– 4036	0	4289	9375	13892	19846

В данном случае ЛРМ «Задача о преследовании с произвольным начальным углом прицеливания» посвящена изучению изменения характера кривых преследования в зависимости от параметров задачи, таких как расстояние h от точки старта до линии движения жертвы, соотношение скоростей хищника и жертвы, начальный угол прицеливания $\boldsymbol{\alpha_0}$. Студенческий отчет по ЛРМ, форму которого можно увидеть, например, в работе, фактически представляет собой небольшое научное исследование и оценивается по трем направлениям: теоретическая проработка вопроса, грамотное выполнение «эксперимента» и интерпретация данных, оценка педагогических перспектив выполненной ЛРМ для применения в ходе будущей самостоятельной работы в школе. В зависимости от педагогических целей, можно применять равновзвешенную (все оцениваемые направления имеют равный вес) или неравновзвешенную систему оценивания. Так, если у юных студентов дневного отделения больший приоритет имеет теоретическая подготовка и грамотность технического выполнения исследования, то для старших студентов заочного отделения, часто уже практикующих педагогов, больший вес имеет их оценка педагогических перспектив выполненной ЛРМ.

Следует подчеркнуть, что как показывают многолетние педагогические наблюдения автора, данная ЛРМ неизменно вызывает оживленный интерес и с энтузиазмом выполняется студентами УрГПУ, обучающимися по направлениям подготовки: «44.03.01 – Педагогическое образование. Математика», «44.03.05 – Педагогическое образование. Математика и информатика», «09.03.01 – Информационные системы и технологии», «44.04.01 – Математическое образование» (магистратура), и др. Имеется вполне успешный опыт применения этой ЛРМ в школе молодыми учителями – нашими выпускниками. Разумеется, школьники используют готовое решение задачи, а учитель рассказывает основные идеи решения.

Задача о преследовании с произвольным начальным углом прицеливания служит также предметной основой для выполнения курсовых работ как «по математике», так и «по информатике». В последнем случае впечатляюще выглядят программно реализованные динамические сцены модельного виртуального преследования. В задача о преследовании может быть сформулирована в игровой форме, например, когда у жертвы есть укрытие. Пример: погоня лисы за полевой мышью. Здесь можно изучать области достижимости лисой мыши при различных конфигурациях их начальных положений и скоростей, а также координат безопасной норы.

Выводы

Таким образом, в настоящей работе представлена задача о преследовании с произвольным начальным углом прицеливания в качестве подходящей реалистичной математической модели для обучения будущих учителей основам математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений. Математическая модель не сложна в принципиальном понимании и не содержит чрезмерно сложных выкладок, поэтому вполне может быть рассмотрена в курсе «Дифференциальных уравнений» в ходе профессиональной подготовки будущих учителей математики в педагогическом университете. Вместе с тем, «решение модели» преследования требует существенных усилий от обучающегося. Иными словами, задача о преследовании лежит в зоне ближайшего развития обучающихся и потому ее освоение оптимально для развития студентов. Опыт автора показывает, что студенты с энтузиазмом осваивают модель преследования, а наиболее мотивированные хотят продолжить исследования задачи о преследовании в ее различных модификациях, расширяющих поле для проведения исследований в рамках модели. К числу таких модификаций относится случай с ограниченным ресурсом движения хищника, наличие безопасного укрытия у жертвы, появление отвлекающей цели и др.

Литература

Концепция развития математического образования в Российской Федерации - Российская газета. (2013, December 24). Российская Газета.

Schmidt, W. H., Blömeke, S., & Tatto, M. T. (2011). Teacher Education Matters: A Study of Middle School Mathematics Teacher Preparation in Six Countries. International Perspectives on.

Аксенова, О. В. (2016). Проблемы качества математической подготовки будущих учителей информатики в контексте фундаментализации современного образования. *Педагогическое образование в России*, *7*, 125–130.

Бодряков, В. Ю. (2018). Проблемы качества математического образования в педагогическом вузе и пути их решения. *Педагогическое образование в России*, *2*, 15–27.

Перминов, Е. А. (2019). Об актуальности фундаментализации математической подготовки студентов педагогических направлений в цифровую эпоху. *Образование и наука*, *21*(5), 86–111.

Barakaev, M., Shamshiyev, A., O’rinov, X., Abduraxmonov, D., G‘Iyosova, Z. (2020). Problems of Teaching Mathematics in Modernization. *International Journal of Progressive Sciences and*

Technologies, *19*(2), 201–203. https://doi.org/10.52155/ijpsat.v19.2.1720

Абдуразаков, М. М., Лягинова, О. Ю., Цветкова, О. Н. (2021). Информатика, математика и логика в аспекте межпредметной и метапредметной образовательной связи. *Чебышевский сборник*, *22*(2), 373–388. https://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/1006/800

Шкерина, Л. В., Шашкина, М. Б., & Табинова, О. А. (2022). Выявление и преодоление предметных дефицитов студентов-будущих учителей математики. *Перспективы науки и образования*, *58*(4), 173–192.

Chesky, N. Z., Wolfmeyer, M. R. (2015). *Philosophy of STEM Education: A Critical Investigation* (p. 105). Springer.

Kertil, M., Gurel, C. (2016). Mathematical Modeling: A Bridge to STEM Education. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *4*(1), 44-55. https://doi.org/10.18404/ijemst.95761

Bergsten, C., & Frejd, P. (2019). Preparing pre-service mathematics teachers for STEM education: an analysis of lesson proposals. *Zdm – Mathematics Education*, *51*(6), 941–953. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01071-7

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M. R., & Goos, M. (2019). The Role of Mathematics in interdisciplinary STEM education. *Zdm – Mathematics Education*, *51*(6), 869–884. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5

Синельников, И. Ю., Худов, А. М. (2020). STEM как инновационная стратегия интегрированного образования: передовой опыт, перспективы, риски. *Инновационные проекты и программы в образовании*, *69*(3), 54–62.

Валеев, И. И. (2020). Функциональная математическая грамотность как основа формирования и развития математической компетенции. *Бизнес. Образование. Право*, *53*(4), 353–360.

Каскатаева, Б. Р., Кокажаева, А. Б., Казыбек, Ж. (2021). Математическое моделирование как инструмент повышения математической грамотности учащихся. *Вестник Казахского национального женского педагогического университета*, *1*, 58–66.

Десненко, С. И., Зверева, Т. Я. (2021). Подготовка будущего учителя математики к формированию у школьников математической грамотности. *Ученые записки Забайкальского государственного университета, 16*(5), 56–66.

Kapur, J. N. (1982). The art of teaching the art of mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *13*(2), 185–192. https://doi.org/10.1080/0020739820130210

Лебедева, И. П. (2016). Математическое моделирование в формировании исследовательской компетенции будущих учителей математики. *Педагогическое образование и наука*, *2*, 76–78.

Садыкова, А. А. (2017). Методика подготовки будущих учителей математики к использованию моделирования в обучении школьников (с. 227).

Перминов, Е. А. (2004). Об актуальности и методологических аспектах обучения будущих педагогов математическому моделированию. *Образование и наука*, *111*(2), 17–33.

Безручко, А. С. (2014). Методика обучения решению дифференциальных уравнений будущих учителей математики, основанная на использовании информационных технологий (с. 211).

Бодряков, В. Ю., Быков, А. А. (2014). Научно-исследовательская работа и научно-исследовательская работа студентов как инструменты формирования профессиональных компетенций студентов и академической репутации вуза. *Педагогическое образование в России*, *8*, 154–158.