

e-ISSN: 1694-8742

№ 2 (7). 2025, 53-59

УДК: 514.123.2: 004.9

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948742\\_2\(7\)\\_6-2025](https://doi.org/10.52754/16948742_2(7)_6-2025)

**ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**МААЛЫМАТТЫК ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫ КОЛДОНУУ МЕНЕН ЭКИНЧИ  
ТАРТИПТЕГИ БЕТТЕРДИ ИЗИЛДӨӨ**

**THE STUDY OF SECOND-ORDER SURFACES USING INFORMATION TECHNOLOGY**

**Соловкина Ирина Владимировна**

*Соловкина Ирина Владимировна*

*Solovkina Irina Vladimirovna*

кандидат педагогических наук, доцент, Горно-Алтайский государственный университет  
*педагогика илимдеринин кандидаты, доцент, Горно-Алтайск мамлекеттик университетини*  
*Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Gorno-Altai State University*

[sol0903@mail.ru](mailto:sol0903@mail.ru)

ORCID: 0000-0003-3952-7515

---

**Темербекова Альбина Алексеевна**

*Темербекова Альбина Алексеевна*

*Temerbekova Albina Alekseevna*

доктор педагогических наук, профессор, Горно-Алтайский государственный университет  
*педагогика илимдеринин доктору, профессор, Горно-Алтайск мамлекеттик университетини*  
*Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Gorno-Altai State University*

[tealbina@yandex.ru](mailto:tealbina@yandex.ru)

ORCID: 0000-0002-7875-895X

---

**Байгонакова Галия Аманболдыновна**

*Байгонакова Галия Аманболдыновна*

*Baigonakova Galiya Amanboldynovna*

кандидат физико-математических наук, доцент, Горно-Алтайский государственный университет  
*физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент, Горно-Алтайск мамлекеттик университетини*  
*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Gorno-Altai State University*

[galyaab@mail.ru](mailto:galyaab@mail.ru)

ORCID: 0000-0002-2095-3330

---

Дата поступления / Түшкөн датасы /  
Date of receipt: 16.06.2025

Дата принятия / Кабыл алынган  
датасы / Date of adoption: 28.10.2025

Дата публикации / Жарыкка чыккан  
датасы / Publication date: 29.12.2025

## ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

### Аннотация

В курсе аналитической геометрии тема «Поверхности второго порядка» является одной из сложных. Функционально-графические представления студентов, получивших начало своего формирования на школьной ступени обучения, все более совершенствуются во время обучения в вузе. Пройденный материал о кривых второго порядка активно применяются при изучении поверхностей. Сложность заключается в том, что не все студенты могут изобразить ту или иную поверхность, рассматриваемую в условии задачи. В решении данного вопроса помогают информационные технологии. На лекциях при изучении данного материала мы используем методику построения поверхностей, основанную на методе сечений. Построение каждой поверхности рассматривается поэтапно, изображения кривых в соответствующих плоскостях сопровождается дополнительными элементами чертежа, что способствует процессу понимания и усвоения материала. Получив изображение поверхности, показываем видимые и невидимые линии фигуры. Далее закрепление материала и его визуализация осуществляется при помощи компьютерной программы GeoGebra, где студенты, в зависимости от значений полуосей, могут проанализировать изменение вида поверхности.

**Ключевые слова:** аналитическая геометрия, поверхность второго порядка, информационные технологии, программа GeoGebra, студенты, обучение.

*Маалыматтык технологияларды колдонуу менен экинчи тартиптеги беттерди изилдөө*

*The study of second-order surfaces using information technology*

### Аннотация

Аналитикалык геометрия курсунда «Экинчи тартиптеги беттер» темасы эң татаал темалардын бири болуп эсептелет. Студенттердин функционалдык-графикалык түшүнүктөрү мектеп баскычында калыптана баштап, жогорку окуу жайында окуу процессинде барган сайын өркүндөйт. Экинчи тартиптеги ийри сызыктар боюнча өздөштүрүлгөн материал беттерди изилдөөдө активдүү колдонулат. Кыйынчылыгы — бардык эле студенттер берилген шарттагы тигил же бул бетти элестетип, сүрөттөп бере албайт. Бул маселени чечүүдө маалыматтык технологиялар чоң жардам берет. Лекцияларда бул материалды окутууда биз кесилиштер ыкмасына негизделген беттерди куруу методикасын колдонобуз. Ар бир бетти куруу этап-этабы менен каралат, тиешелүү жазыктыктардагы ийри сызыктардын сүрөттөрү кошумча чийме элементтери менен коштолуп, бул материалды түшүнүүгө жана өздөштүрүүгө өбөлгө түзөт. Беттин сүрөтү алынгандан кийин фигуранын көрүнгөн жана көрүнбөгөн сызыктары көрсөтүлөт. Андан соң материалды бекемдөө жана аны визуалдаштыруу GeoGebra компьютердик программасынын жардамы менен ишке ашырылат, мында студенттер жарым огдордун маанилерине жараша беттин формасынын өзгөрүшүн талдай алышат.

### Abstract

In the course of analytical geometry, the topic of "Second-order surfaces" is one of the most difficult. The functional and graphical representations of students who began their education at the school level are increasingly being improved during their studies at the university. The material learned about second-order curves is actively used in the study of surfaces. The difficulty lies in the fact that not all students can depict one or another surface considered in the task condition. Information technology helps in solving this issue. In the lectures, when studying this material, we use a method of constructing surfaces based on the method of sections. The construction of each surface is considered in stages, the images of curves in the corresponding planes are accompanied by additional drawing elements, which contributes to the process of understanding and assimilation of the material. Having received an image of the surface, we show the visible and invisible lines of the shape. Further, the material is fixed and visualized using the GeoGebra computer program, where students, depending on the values of the semi-axes, can analyze the change in the appearance of the surface.

**Ачык сөздөр:** аналитикалык геометрия, экинчи тартиптеги беттер, маалыматтык технологиялар, GeoGebra программасы, студенттер, окутуу.

**Keywords:** analytical geometry, second-order surface, information technology, GeoGebra program, students, training.

## Введение

Современные студенты значительно опережают своих сверстников предыдущих поколений в области применения информационных технологий, основанных на использовании в процессе обучения разнообразных компьютерных приложений и программ. Применение современных технологий в образовательном процессе является одной из основных задач совершенствования математического образования (О Концепции развития математического образования в РФ, 2013).

В курсе «Аналитическая геометрия», которую студенты изучают на первом курсе, тема «Поверхности второго порядка» является одной из самых сложных. В общем виде, *поверхностью второго порядка* называется множество всех точек пространства, координаты которых в какой-либо аффинной системе координат удовлетворяют уравнению второй степени:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0, \quad (1)$$

где  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{00}$  – действительные числа, причем не все коэффициенты при членах второй степени равны нулю (Атанасян & Базылев, 1986, с. 216).

## Результаты исследования

В формулировках задач по этой теме в основном требуется исследовать поверхность по данному каноническому уравнению и изобразить ее. Изображение поверхностей базируется на применении метода сечений, позволяющему сделать вывод о виде исследуемой поверхности. Смысл этого метода состоит в «изучении линий, получающихся в результате пересечения данной поверхности с координатными плоскостями (а также с плоскостями, параллельными какой-либо из координатных плоскостей), и точном вычерчивании каждой такой линии согласно полученному для неё уравнению» (Пищулина & Кукушкина, 2012, с. 16). Сечения, построенные по такому алгоритму, позволяют наглядно представить исследуемую поверхность, ее форму и размеры. Полученные в результате сечений кривые представляют собой хорошо знакомые обучающимся функции, например параболу и гиперболу.

Приведем примеры, рассматривающие методику построения поверхностей, подробное описание можно посмотреть в учебно-методическом пособии «Аналитическая геометрия в пространстве» (Соловкина & авт., 2023). Чертежи, иллюстрирующие решение задачи, выполнены с использованием инструмента «Фигуры» панели «Иллюстрации» Microsoft Word.

**Задача.** Поверхность второго порядка задана уравнением  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ . Исследовать поверхность методом сечений, назвать ее и построить.

**Решение.**

1) Плоскость  $Oxy$ :  $\begin{cases} z = 0; \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \end{cases}$  В сечении получили пару прямых, пересекающихся в начале координат. При  $z = h$  ( $h < 0$ ) в каждом сечении получим гиперболу с действительной осью  $Oy$ . Таким образом, получаем семейство гипербол вида:

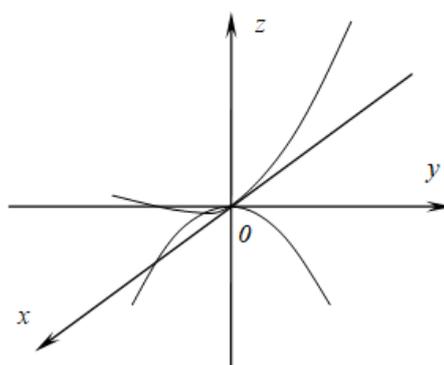
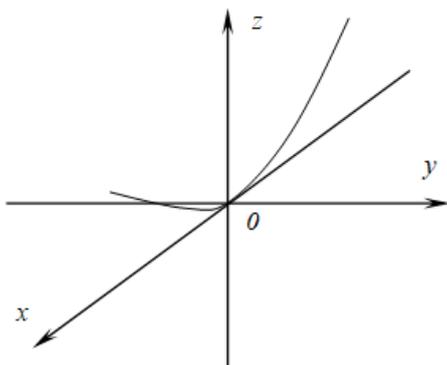
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2.$$

2) Плоскость  $Oxz$ :  $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 2z. \end{cases}$  В сечении получили кривую второго порядка – параболу.

3) Плоскость  $Oyz$ :  $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} = -2z. \end{cases}$  В сечении получили кривую второго порядка – параболу.

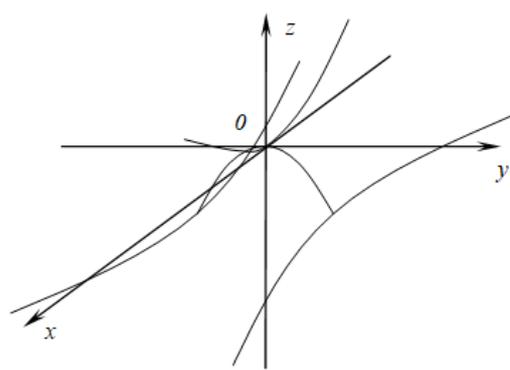
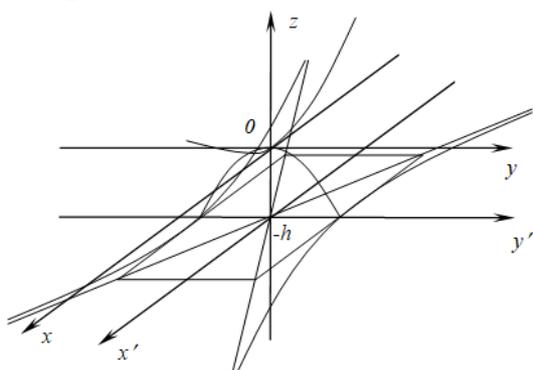
Построим поверхность, последовательно изображая полученные в сечениях параболы и

гиперболу. «Начнем построение с изображения неподвижной параболы в плоскости  $Oxz$  (рис. 1). В плоскости  $Oyz$  построим подвижную параболу (рис. 2).



**Рис. 1.** - Неподвижная парабола в плоскости  $Oxz$     **Рис. 2.** - Подвижная парабола в плоскости  $Oyz$

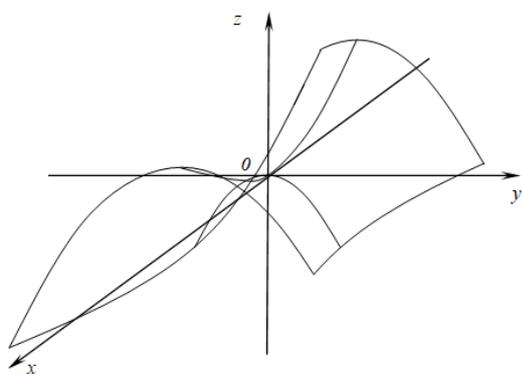
Выберем произвольную высоту  $h$  гиперболического параболоида в отрицательном направлении оси  $Oz$  и подставим ее значение в соответствующее уравнение. Для изображения гиперболы с действительной осью  $Oy$  построим вспомогательную систему координат  $Ox'y'$  с центром в точке с координатами  $(0; 0; -h)$  (рис. 3). Уберем вспомогательные элементы чертежа (рис. 4).



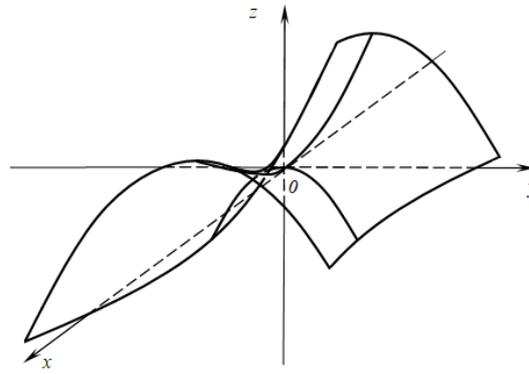
**Рис. 3.** - Гипербола с действительной осью  $Oy$     **Рис. 4.** - Чертеж без вспомогательных элементов

Переместим подвижную параболу в крайние точки неподвижной параболы и опустим соответствующие ветви полученных в результате преобразования парабол на гиперболу (рис. 5 а).

Проведем очерковую линию (рис. 5 б), покажем видимые и невидимые элементы гиперболического параболоида (Соловкина & авт., 2023).



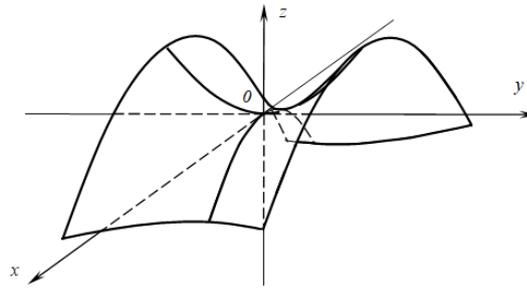
а)



б)

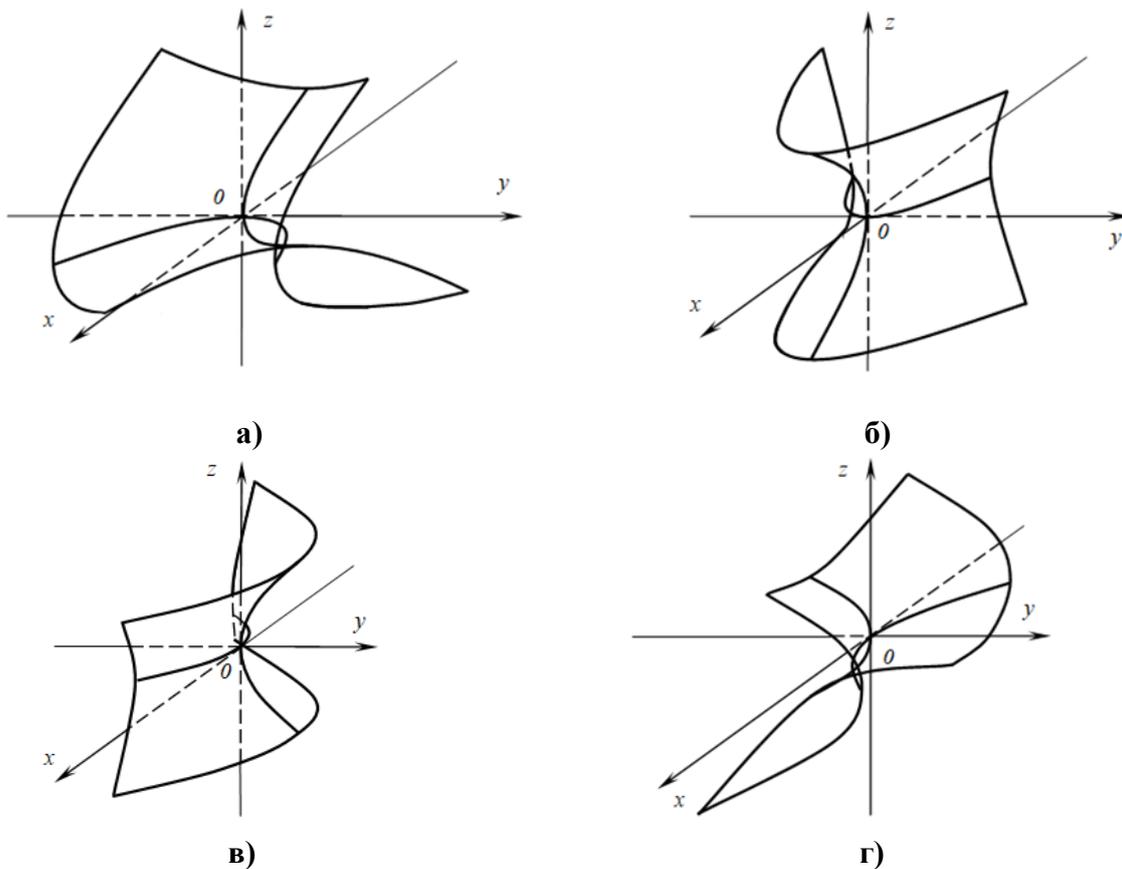
**Рис. 5** - Видимые и невидимые элементы гиперболического параболоида

Построение гиперболического параболоида, расположенного в отрицательном направлении оси  $Oz$ , осуществляется аналогично приведенному выше примеру (рис. 6).



**Рис. 6** - Гиперболический параболоид, расположенный в отрицательном направлении оси  $Oz$

Аналогично указанному выше, осуществляется построение поверхностей второго порядка – гиперболических параболоидов с осями  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 7 а - 7 г).



**Рис. 7.** Гиперболические параболоиды с осями  $Ox$  и  $Oy$

Рассмотренный иллюстративный материал на примере гиперболического параболоида является для студентов своеобразным помощником в курсе изучения поверхностей второго порядка. Ориентируясь на приведенные иллюстрации и алгоритм выполнения, обучающиеся самостоятельно решают задачи, выполняют чертежи на бумажных носителях, развивая свои функционально-графические представления.

Наглядно-образные компоненты мышления играют большую роль в жизни обучающихся и при грамотном использовании информационных технологий можно повысить эффективность изучения аналитической геометрии. Технологии мультипликации и графики помогают студентами в представлении геометрических построений, выявлении по графикам свойств функций, а по чертежам – свойств геометрических фигур и др.

Многие, кто работает с программой GeoGebra, характеризующейся как «бесплатная кросс-платформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном пакете» (GeoGebra), отмечают ее несомненную помощь при проведении учебных занятий. Так, авторы отмечают, что «интерактивная геометрическая среда GeoGebra может помочь в визуализации изучаемых математических объектов» (Ерилова, 2018, с. 108).

Значительных результатов при использовании рассматриваемой программы добились ученые при изучении поверхностей второго порядка, но в нашем случае воспользоваться их методикой мы не можем, так как «при вводе обозначений используется синтаксис LaTeX» (Роголев & Бондарев, 2016, с. 32). С этой программой студенты первого курса, при изучении данной темы, еще не знакомы. Отметим также, что с помощью информационных сред, таких как GeoGebra, предоставляемых первокурсникам, в виде манипулирования различными объектами на экране дисплея, изменением их размеров и цвета, а также скорости их перемещения, и т. д. позволяют обучающимся усваивать учебный материал с наиболее полным включением мышления, представления и воображения.

Современные информационно-коммуникационные технологии эффективно используются на всех этапах процесса обучения: при объяснении и закреплении нового материала, при повторении и контроле знаний обучающихся и др. Для студентов при этом информационно-коммуникационные технологии выполняют различные функции: учителя, объекта обучения, рабочего инструмента и при необходимости – тренажера.

Продолжая вопрос о построении гиперболического параболоида, посмотрим, как выглядит данная поверхность при 3D изображении с применением программы GeoGebra.

Рассмотрим задачу на сопостроение. Построить поверхность второго порядка, заданную каноническим уравнением, назвать её

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

В программе GeoGebra задаем каноническое уравнение рассматриваемой поверхности второго порядка и определяем произвольно конкретные значения полуосей, пусть в нашем случае они имеют следующие значения:  $a = 1$ ,  $b = 1,5$ ,  $c = 3$ . В итоге получаем 3D модель гиперболического параболоида (рис. 8).

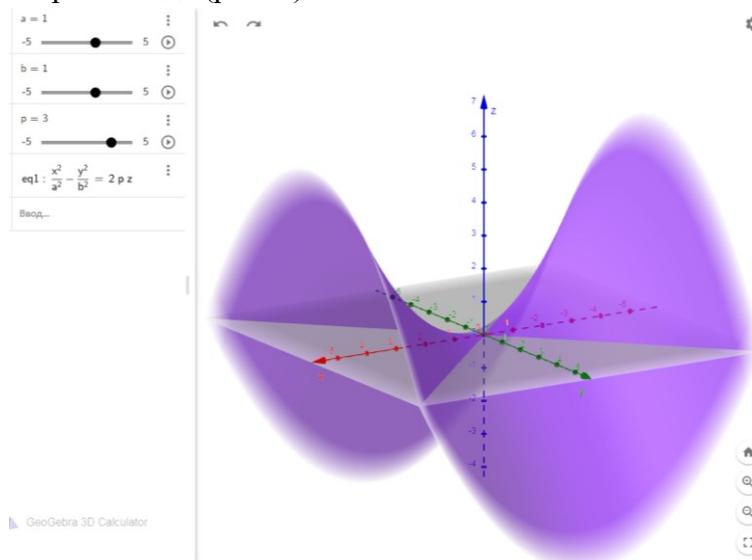


Рис. 8. Построение гиперболического параболоида с использованием программы GeoGebra

Авторы отмечают, что гиперболический параболоид получается при «движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в разные стороны)» (Пахомова, 2012).

### Выводы

Анализ основных свойств поверхности второго порядка – гиперболического параболоида – показал возможность изменения значений полуосей на полученной модели, и указал на ее свойства:

- поверхность симметрична относительно оси  $Oz$ , плоскостей  $Oxz$  и  $Oyz$ ;
- из уравнения поверхности следует, что все переменные принимают любые значения;
- гиперболический параболоид получается при «движении одной параболы вдоль другой».

Таким образом, рассмотренная нами методика построения поверхностей второго порядка и работа по использованию в этом построении программы GeoGebra, позволяют получать эффективность при изучении данной темы. Практико-ориентированное применение информационных технологий в процессе обучения студентов аналитической геометрии способствует усвоению учебного материала и правильному его восприятию при графической интерпретации геометрических задач.

### Литература

- Агафонов, П. А. (2019). Методика формирования геометрических понятий у школьников с применением системы GEOGEBRA. *Педагогический журнал*, (1(1)), 537–545.
- Атанасян, Л. С., & Базылев, В. Т. (1986). Геометрия. Учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. В 2 частях. Москва: Просвещение, (1), (336).
- Ерилова, Е. Н. (2018). Изучение высшей математики с использованием возможностей ИГС GeoGebra. *Педагогический опыт: от теории к практике: сборник материалов IV Международной научно-практической конференции*, 108–110.
- Пахомова, Е. Г. (2012). Поверхности второго порядка. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. In *Корпоративный портал ТПУ*. [https://portal.tpu.ru/SHARED/p/PEG/page\\_2/laag/Tab1/LAAG\\_Lecture-18-19.pdf](https://portal.tpu.ru/SHARED/p/PEG/page_2/laag/Tab1/LAAG_Lecture-18-19.pdf)
- Пищулина, И. Я., Кукушкина, Е. В. (2012). Поверхности второго порядка: учебное пособие. УрФУ, (166).
- Роголев, Д. В., Бондарев, А. Н. (2016). Использование математической среды GeoGebra при изучении поверхностей второго порядка. *Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: сборник материалов Международного научно-практического семинара*, 32–34.
- Соловкина, И. В., Темербекова, А. А., Богданова, Р. А., Байгонакова, Г. А. (2023). Аналитическая геометрия в пространстве. Горно-Алтайск: Горно-Алтайский государственный университет, (202). EDN JRKXMA.
- О Концепции развития математического образования в РФ. (2013). Распоряжение Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. Garant.Ru. <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/#review>
- GeoGebra* – История создания, разработки, первый выпуск. (2025). РУВИКИ: новая российская интернет-энциклопедия. <https://ru.ruwiki.ru/wiki/GeoGebra>