e-ISSN 1694-8645

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

BULLETIN OSH STATE UNIVERSITY
MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES

№2(5) (2024)

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН

ЖАРЧЫСЫ

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

Илимий журнал

№2(5), 2024

ВЕСТНИК

ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

Научный журнал

BULLETIN

Osh State University

MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

ТЕХНИКА

КОНФЕРЕНЦИИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.928

DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_1

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОПАРНО КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫМИ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

Алыбаев Курманбек Сарманович, д.ф.-м.н., профессор
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Нурматова Майрамгул Нарбековна, старший преподаватель
nurmatova_mairamgul@mail.ru
Жалал-Абадский государственный университет имени Б.Осмонова
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *В данной работе рассматривается автономная система сингулярно возмущенных уравнений быстрых переменных, состоящая из* $2n$ *уравнений первого порядка и одного уравнения медленной переменной. Матрица первого приближения быстрых переменных имеет попарно комплексно-сопряженные собственные значения. Собственные значения имеют нулей и они являются точками поворота. Система имеет положение равновесие, причем устойчивость положения равновесия теряется всеми собственными значениями при некотором значении медленной переменной. Доказано, что решение сингулярно возмущенного уравнения в течении конечного времени остается вблизи возникшего неустойчивого положения равновесия.*

Ключевые слова: *сингулярно возмущенные уравнения, положение равновесия, устойчивость, аналитические, гармонические функции, линии уровня, ограниченность, сходимость, задержка решения.*

ТҮГӨЙЛӨШ КОМПЛЕКСТИК-ТҮЙҮНДӨШ БУРУЛУУ ЧЕКИТТЕРИ МЕНЕН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

Алыбаев Курманбек Сарманович, ф.-м.и.д., профессор
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Нурматова Майрамгул Нарбековна, улук окутуучу
nurmatova_mairamgul@mail.ru
Б.Осмонов атындагы Жалал-Абад мамлекеттик университети
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *Бул эмгекте биринчи даражадагы тез өзгөрмөлүү 2n теңдемеден жана жай өзгөрмөлүү бир теңдемеден турган автономдук теңдемелердин системасы каралат. Тез өзгөрмөлөрдүн биринчи жакындоо матрицасы түгөйлөш комплекстик-түйүндөш өздүк маанилерге ээ, алар бурулуу чекиттери болуп саналышат. Система тең салмактуу абалга ээ жана ал жай өзгөрмөнүн кандайдыр бир маанисинде бардык өздүк маанилерде туруктуулугун жоготот. Сингулярдык козголгон теңдеменин чечими пайда болгон туруксуз тең салмактуулук абалга чектүү убакыт аралыгында жакын кармала тургандыгы далилденди.*

Ключевые слова: *сингулярдык козголгон теңдеме, тең салмактуулук абал, туруктуулук, аналитикалык, гармоникалык функциялар, деңгээл сызыктар, чектелгендик, жыйналуучулук, чечимдин кармалышы.*

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH PAIRWISE COMPLEX CONJUGATE TURNING POINTS

Alybaev Kurmanbek Sarmanovich, Doctor of Ph. and Math. Sc., professor
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Nurmatova Mairamgul Narbekovna, Senior Lecturer
nurmatova_mairamgul@mail.ru
Jalal-Abad state university named after B.Osmonov
Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Annotation. *This paper considers an autonomous system of singularly perturbed equations of fast variables, consisting of 2n first-order equations and one equation of a slow variable. The matrix of the first approximation of fast variables has pairwise complex conjugate eigenvalues. The eigenvalues have zeros and they are turning points. The system has an equilibrium position, and the stability of the equilibrium position is lost by all eigenvalues at a certain value of the slow variable. It has been proven that the solution of a singularly perturbed equation remains close to the resulting unstable equilibrium position for a finite time.*

Key words: *singularly perturbed equations, equilibrium position, stability, analytical, harmonic functions, level lines, boundedness, convergence, solution delay.*

Введение

Пусть рассматривается система уравнений

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(y)\tilde{x}(t,\varepsilon) + V\big(\tilde{x}(t,\varepsilon)\big)\tilde{x}(t,\varepsilon), \qquad (1)$$

$$y' = 1, \qquad (2)$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, y(t_0) = t_0 \qquad (3)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр; $t \in \Omega \subset C$ – множество комплексных чисел, $\Omega = \{t \in C,\ |t| < r_0,\ r_0 \epsilon R - \text{множество вещественных чисел и } r_0 \gg |t_0|\}$

$$x = colon(x_1, \dots, x_n), \tilde{x} = colon(x_1 - y,\ x_2\ ,\ x_3 - y\ , x_4\ , \dots, x_{2n-1} - y\ , x_{2n}),$$

$$A(y) = \begin{pmatrix} A_1(y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n(y) \end{pmatrix},$$

$$A_j(y) = \begin{pmatrix} y & -\alpha_j \\ \alpha_j & y \end{pmatrix},\ (j = 1, \dots, n)\ , 0 < \alpha_1 < \ \dots\ < \alpha_n;$$

$$V\big(\tilde{x}(t,\varepsilon)\big) = ((x_1 - y)^2 + x_2^2 + (x_3 - y)^2 + x_4^2 + \dots + (x_{2n-1} - y)^2 + x_{2n}^2).$$

Матрица $A(y)$ имеет $2n$, попарно комплексно-сопряженных, собственных значений вида

$$\lambda_{2j-1}(y) = y + i\alpha_j,\ \lambda_{2j}(y) = y - i\alpha_j,\ j = 1, \dots, n, i = \sqrt{-1}.$$

Система (1), в пространстве быстрых движений, в точке $(y, 0, y, 0, \dots, y, 0)$ имеет положение равновесие. Это положение равновесие устойчиво при $y < 0$ и неустойчива при $y > 0$, т.е. при переходе значения $y = 0$ устойчивость положения равновесия теряется.

<u>Определение</u>. Если устойчивость положения равновесия теряется при некотором значении y, но решение уравнения (1) не сразу покидает возникшее неустойчивое положение равновесия, а в течении конечного времени остаётся вблизи него, то будем говорить, что происходит задержка решения вблизи неустойчивого положения равновесия (ЗР).

Впервые влияние ЗР было обнаружено в работе [1] под руководством Л.С.Понтрягина.

ЗР исследованы в [2], [3], [4], для случая, когда устойчивость положения равновесия теряется только одной парой, комплексно-сопряженных, собственных значений.

В рассматриваемом случае устойчивость положения равновесия теряется всеми собственными значениями, при значении $y = 0$.

<u>Задача.</u> Исследовать решения уравнений (1)-(2), при заданных начальных значений (3), на ЗР.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методами изложенного в [5], [6], [7], [8].

Основная часть

Эта часть будет посвящена решению поставленной задачи, которая подразделяется на несколько частей.

1. ***<u>Преобразование уравнения (1).</u>***

Решение уравнения (2) возьмем в виде $y = t$.

В (1) произведем замены (далее для удобства аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$x_{2j-1} - t = u_{2j-1}\,, x_{2j} = u_{2j}\,, j = 1, \dots, n\,.$$

Имеем (используем координатную запись векторов)

$$\varepsilon u'_{2j-1} = t\, u_{2j-1} - \alpha_j\, u_{2j} + V(u_1, \dots, u_{2n})\, u_{2j-1} - \varepsilon,$$
$$\varepsilon u'_{2j} = \alpha_j\, u_{2j-1} + t\, u_{2j} + V(u_1, \dots, u_{2n})\, u_{2j}, j = 1, \dots, n.$$

Отсюда получим систему

$$\varepsilon z'_{2j-1} = \left(t + \alpha_j i\right) z_{2j-1} + V_0(z_1,\ z_2, \dots, z_{2n})\, z_{2j-1} - \varepsilon\,, \qquad (4)$$
$$\varepsilon z'_{2j} = \left(t - \alpha_j i\right) z_{2j} + V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n})\, z_{2j} - \varepsilon,$$

с начальным условием

$$z_{2j-1}(t_0, \varepsilon) = z^0_{2j-1}\,, z_{2j}(t_0, \varepsilon) = z^0_{2j}, j = 1, \dots, n\,, \qquad (5)$$

где $V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) = z_1 \cdot z_2 + \dots + z_{2n-1} \cdot z_{2n}$.

<u>Теорема.</u> $x(t, \varepsilon)$ – решение задачи (1), (3) существует на отрезке $[t_0, \alpha_1]$ $\left(t_0 = -\sqrt{\alpha_1(2\alpha_n + \alpha_1)}\right)$ и справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = (y, 0, y, 0, \dots, y, 0)$$

т.е. происходит задержка решения, при смене устойчивости положения равновесия, вблизи возникшего неустойчивого положения равновесия.

<u>Доказательство.</u> Задачу (4)-(5), заменим следующим

$$z_{2j-1} = z^0_{2j-1} exp\frac{1}{2\varepsilon}\left(F_{1j}(t) - F_{1j}(t_0)\right) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) z_{2j-1} - \varepsilon\right] \times exp\frac{1}{2\varepsilon}\left(F_{1j}(t) - F_{1j}(\tau)\right) d\tau, \qquad (6)$$
$$z_{2j} = z^0_{2j} exp\frac{1}{2\varepsilon}\left(F_{2j}(t) - F_{2j}(t_0)\right) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) z_{2j} - \varepsilon\right] \times exp\frac{1}{2\varepsilon}\left(F_{2j}(t) - F_{2j}(\tau)\right) d\tau,$$

где $F_{1j}(t) = \left(t + i\alpha_j\right)^2, F_{2j}(t) = \left(t - i\,\alpha_j\right)^2, j = 1, \dots, n.$

Далее будем считать

$$\left|z^0_k\right| \le M\varepsilon\,,\ k = 1, \dots, 2n. \qquad (7)$$

$M_1, M_2, \ldots$ – означают положительных постоянных, не зависящих от ε.

К (6) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом:

$$z_{2j-1\,m} = z_{2j-1}^0 exp\frac{1}{2\varepsilon}\left(F_{1j}(t) - F_{1j}(t_0)\right) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[V_0(z_{1\,m-1}, \ldots, z_{2n\,m-1})z_{2j-1\,m-1} - \varepsilon\right] \times exp\frac{1}{2\varepsilon}\left(F_{1j}(t) - F_{1j}(\tau)\right)d\tau, \qquad (8)$$
$$z_{2j\,m} = z_{2j}^0 exp\frac{1}{2\varepsilon}\left(F_{2j}(t) - F_{2j}(t_0)\right) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[V_0(z_{1\,m-1}, \ldots, z_{2n\,m-1})z_{2j\,m-1} - \varepsilon\right] \times exp\frac{1}{2\varepsilon}\left(F_{2j}(t) - F_{2j}(\tau)\right)d\tau,$$
$$z_{2j-1\,0} \equiv 0, z_{2j\,0} \equiv 0, m = 1,2, \ldots, t \in \mathcal{D}.$$

2. ***Построение области и выбор путей интегрирования.***

Используя линии уровня функций

$$ReF_{1j}(t) = t_1^2 - (t_2 + \alpha_j)^2,$$
$$ReF_{2j}(t) = t_1^2 - (t_2 - \alpha_j)^2, j = 1, \ \ldots, n$$

построим область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, определим пути интегрирования для (8). Определим линии уровня

$$(p_{1j}) = \{t \in C, ReF_{1j}(t) = 0\},$$

Функции $F_{1j}(t)$ в точках $t = -i\alpha_j$ имеют двухкратные нули, следовательно линии (p_{1j}) разветвляются в точках $t = -i\alpha_j$ (рис. 1).

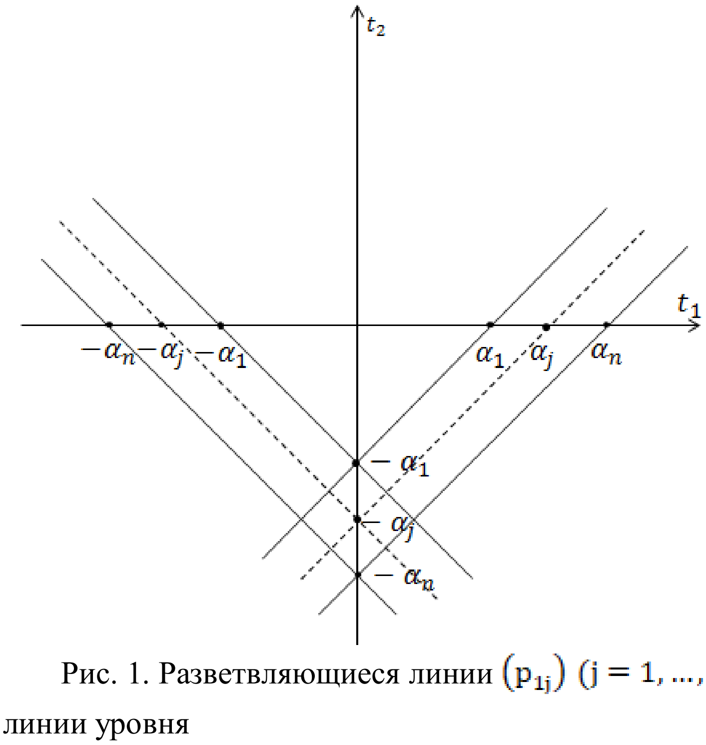


Рис. 1. Разветвляющиеся линии (p_{1j}) $(j = 1, \ldots, n)$.

Аналогично линии уровня

$(p_{2j}) = \{t \in C, ReF_{2j}(t) = 0\}, j = 1, \ldots, n$

разветвляются в точке $t = i\alpha_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, причем ветви (p_{1j}) и (p_{2j}) (при фиксированном j) симметричны.

Здесь и далее симметрию, будем понимать, относительно действительной оси.

Введем в рассмотрение линию уровня

$$(p_{1n}) = \{t \in C, \mathrm{Re}F_{1n}(t) = t_0^2 - \alpha_n^2\}.$$

Определим (p_{1n}), так, чтобы она соединяла точки $(t_0;\ 0)$, $(0;\ -\alpha_1)$.

Имеем

$$t_1^2 - (t_2 + \alpha_n)^2 = t_0^2 - \alpha_n^2.$$

Отсюда, пологая, $t_1 = 0, t_2 = -\alpha_1$, получим

$-(\alpha_n - \alpha_1)^2 = t_0^2 - \alpha_n^2$

или

$$t_0 = -\sqrt{\alpha_n^2 - (\alpha_n - \alpha_1)^2}.$$

Таким образом, (p_{1n}) имеет уравнение

$$t_1^2 - (t_2 + \alpha_n)^2 = -(\alpha_n - \alpha_1)^2.$$

Часть (p_{1n}) соединяющая точки $(t_0;\ 0)$, $(0;\ -\alpha_1)$ обозначим (K_n). Возьмём ветвь (p_{11}^1), линии уровня (p_{11}), проходящую через точки $(0;\ -\alpha_1)$, $(\alpha_1;\ 0)$ и часть (p_{11}^1), соединяющую эти точки, обозначим (K_1). Определим $(\bar{K}_n)$ и $(\bar{K}_1)$, симметричные к (K_n) и (K_1). Область ограниченный, (K_n), (K_1), $(\bar{K}_n)$, $(\bar{K}_1)$ обозначим $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ (рис. 2).

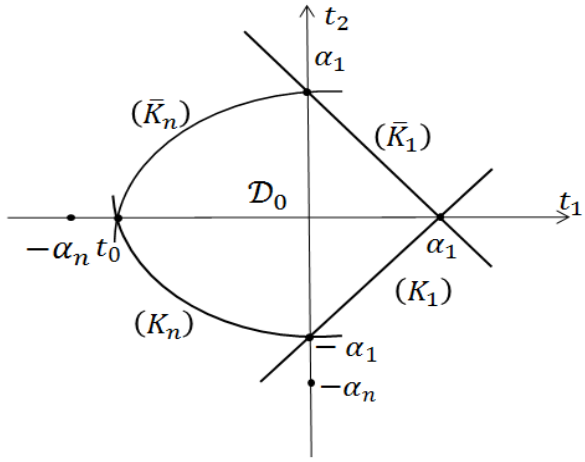


Рис. 2. Область $\mathcal{D}_0$.

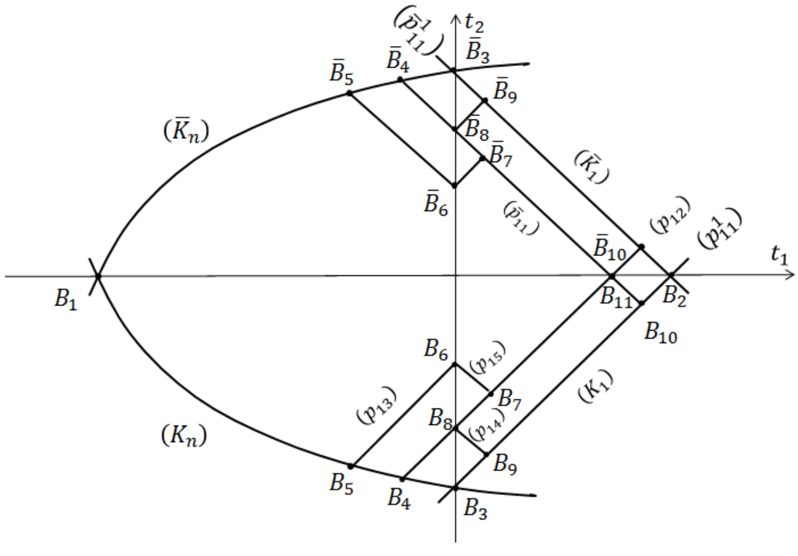


Рис. 3. Точки $B_j(j = 1, \dots, 11)$, $\bar{B}_j(j = 3, \dots, 10)$

Разделим $\mathcal{D}_0$. Для этого определим линии уровня

$$(p_{12}) = \{t \in \mathcal{D}_0,\ t_1 - t_2 - \alpha_1 = -\sqrt{\varepsilon}\},$$

$$(p_{13}) = \{t \in \mathcal{D}_0,\ t_1 - t_2 - \alpha_1 = -q, 0 \ll q \ll \alpha_1,\ (\alpha_1 - q) - \text{не зависит от } \varepsilon\},$$

$$(p_{14}) = \{t \in \mathcal{D}_0,\ t_1 + t_2 + \alpha_1 = \sqrt{\varepsilon}\},$$

$$(p_{15}) = \{t \in \mathcal{D}_0,\ t_1 + t_2 + \alpha_1 = q,\ 0 \ll q \ll \alpha_1\}.$$

Определим точки, $B_1(t_0;0)$, $B_2(\alpha_1;0)$, $B_3(0;\ -\alpha_1)$, $(K_n) \times (p_{12}) = B_4$, $(K_n) \times (p_{13}) = B_5$, $(p_{13}) \times (p_{15}) = B_6$, $(p_{15}) \times (p_{12}) = B_7$, $(p_{12}) \times (p_{14}) = B_8$, $(p_{14}) \times (p_{11}^1) = B_9$,$(p_{14}) \times (p_{11}^1) = B_{10}$, $B_{11}(\alpha_1 - \sqrt{\varepsilon};0)$ (рис. 3).

Точки $\bar{B}_j (j = 3, \dots ,10)$ определяются симметричными, к точкам $B_j (j = 3, \dots ,10)$.

Произведено деление области $\mathcal{D}_0$ на несколько частей, которые обозначим так

$(B_1B_5B_6\bar{B}_6\bar{B}_5) = \mathcal{D}_1$, $(B_6B_7B_{11}\bar{B}_7\bar{B}_6) = \mathcal{D}_2$, $(B_4B_5B_6B_7) = \mathcal{D}_3$, $(B_3B_4B_8B_9) = \mathcal{D}_4$, $(B_8B_9B_{10}B_{11}) = \mathcal{D}_5$, $(B_2B_{10}B_{11}\bar{B}_{10}) = \mathcal{D}_6$.

Части, симметричные к $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$ обозначим $\bar{\mathcal{D}}_3$, $\bar{\mathcal{D}}_4$, $\bar{\mathcal{D}}_5$ (рис. 4).

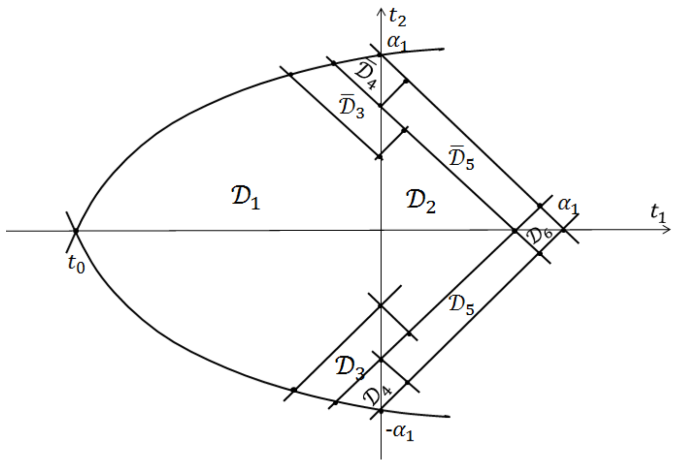


Рис. 4. Деление области $\mathcal{D}_0$.

Определим пути интегрирования для (8). Основное требование при выборе путей интегрирования заключается в следующем: По выбранным путям интегрирование функции $ReF_{kj}(t)$ $(j = 1, \dots, n; k = 1, 2)$ не должны возрастать (T).

Далее запись (K) $[t_0, t]$ означает часть кривой (K), соединяющую точки t_0 и t.

Если $t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4$, то путь интегрирование для z_{2j-1} состоит из части: (K_n) $[t_0, \tilde{t}]$, прямой

$$(\mathcal{P}_1) = \{t \in C, t_1 - t_2 - \alpha_1 = -\tilde{q},\ 0 \le \tilde{q} \le \alpha_1 - t_0\}\ [\tilde{t}, t];$$

если $t \in \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \cup \mathcal{D}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_5$, то из части $(K_n) \cup (K_1)$ $[t_0, \tilde{t}]$ $\tilde{t} \in (K_1)$, прямой

$$(\mathcal{P}_2) = \{t \in C, t_1 + t_2 + \alpha_1 = \tilde{q}_1, \sqrt{\varepsilon} \le \tilde{q}_1 \le 2\alpha_1\}\, [\tilde{t}, t].$$

Для компоненты z_{2j} путь выбирается, симметричным, к путям z_{2j-1}.

Проверим, действительно ли, по выбранным путям $ReF_{kj}(t)$ – не возрастают. Поскольку функции $ReF_{1j}(t)$ и $ReF_{2j}(t)$ в симметричных точках принимают равные значения, то проверку проведем только для $ReF_{1j}(t)$.

Рассмотрим функции $ReF_{1j}(t)$. Сначала рассмотрим случай $t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \overline{\mathcal{D}}_3 \cup \overline{\mathcal{D}}_4$.

Возьмём (K_n) $[t_0, \tilde{t}]$. Из уравнения (K_n)

$t_1^2 - (t_2 + \alpha_n)^2 = -(\alpha_n - \alpha_1)^2$

находим

$$t_2 = -\alpha_n + \sqrt{t_1^2 + (\alpha_n - \alpha_1)^2}.$$

На (K_n): $ReF_{1n}(t) = 0$, т.е. $ReF_{1n}(t)$ – не возрастает;

$$ReF_{1j}(t) = t_1^2 - (t_2 + \alpha_j)^2 = t_1^2 - \left(\alpha_n - \alpha_j - \sqrt{t_1^2 + (\alpha_n - \alpha_1)^2}\right)^2 =$$

$$-(\alpha_n - \alpha_j)^2 + 2(\alpha_n - \alpha_j)\sqrt{t_1^2 + (\alpha_n - \alpha_1)^2} - (\alpha_n - \alpha_1)^2 =$$

$$= 2(\alpha_n - \alpha_j)\sqrt{t_1^2 + (\alpha_n - \alpha_1)^2} - \left((\alpha_n - \alpha_j)^2 + (\alpha_n - \alpha_1)^2\right),$$

$$(j = 1, \dots, n-1).$$

Отсюда имеем

$$\left(ReF_{1j}(t)\right)' = 2(\alpha_n - \alpha_j)\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + (\alpha_n - \alpha_1)^2}}.$$

По условию $\alpha_n > \alpha_j$ $(j = 1, \dots, n-1)$, тогда $ReF_{1j}(t)$ убывает по (K_n) при $t_0 \le t_1 < 0$ и принимает наименьшее значение при $t_1 = 0$. Возьмём вторую часть пути, т.е. $(\mathcal{P}_1)$ $[\tilde{t}, t]$.

Имеем $t_1 - t_2 - \alpha_1 = -\tilde{q}$, $t_2 = t_1 - \alpha_1 + \tilde{q}$.

Тогда

$$ReF_{1j}(t) = t_1^2 - (t_2 + \alpha_j)^2 (j = 1, \dots, n) = (t_1 - t_2 - \alpha_j)(t_1 + t_2 + \alpha_j) =$$

$$= (\alpha_1 - \alpha_j - \tilde{q})(2t_1 + \alpha_j - \alpha_1 + \tilde{q}) = -(\alpha_j + \tilde{q} - \alpha_1)(2t_1 + \alpha_j - \alpha_1 + \tilde{q}).$$

Таким образом

$$\left(ReF_{1j}(t)\right)' = -2(\alpha_j + \tilde{q} - \alpha_1).$$

Если $j = 1$, то

$$\left(ReF_{11}(t)\right)' = -2\tilde{q}, \; 0 \le \tilde{q} \le \alpha_1 - t_0.$$

Равенство $\tilde{q} = 0$ имеет место только на границе $\mathcal{D}_4$. Для оставшихся частей $0 < \tilde{q} \leq \alpha_1 - t_0$ и $\left(ReF_{11}(t)\right)' < 0$. Требование выполняется для $ReF_{11}(t)$.

Если $j = 2, \dots, n$, то $\left(ReF_{11}(t)\right)' < 0$, т.е. требование выполняется для $ReF_{1j}(t)$ $(j = 2, \dots, n)$.

Пусть $t \in \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \cup \mathcal{D}_2 \cup \overline{\mathcal{D}}_5$. Функции $ReF_{1j}(t)$ $(j = 1, \dots, n)$ рассмотрим для $t \in (K_1)$ $[t_0, \tilde{t}]$.

$$\forall t \in (K_1)(ReF_{11}(t) = 0).$$

Из уравнения (K_1)

$$t_1 - t_2 - \alpha_1 = 0$$

определим

$$t_2 = t_1 - \alpha_1.$$

Тогда

$$ReF_{1j}(t) = t_1^2 - \left(t_2 + \alpha_j\right)^2 = t_1^2 - \left(t_1 + \alpha_j - \alpha_1\right)^2 = -\left(\alpha_j - \alpha_1\right)\left(2t_1 + \alpha_j - \alpha_1\right).$$

$$\left(ReF_{1j}(t)\right)' = -\left(\alpha_j - \alpha_1\right) < 0.$$

Функции $ReF_{1j}(t)$ $(j = 2, \dots, n)$ убывают.

$\forall t \in (K_1)$, требование, выполняется для $ReF_{1j}(t)$ $(j = 1, \dots, n)$. Теперь рассмотрим $t \in (\mathcal{P}_2)$. Из уравнения $(\mathcal{P}_2)$ определим

$$t_1 = -t_2 - \alpha_1 + \tilde{q}_1.$$

Для функций $ReF_{1j}(t)$ имеем

$$ReF_{1j}(t) = (t_2 + \alpha_1 - \tilde{q}_1)^2 - \left(t_2 + \alpha_j\right)^2 = -\left(\alpha_j - \alpha_1 + \tilde{q}_1\right)\left(2t_2 + \alpha_j - \alpha_1 - \tilde{q}_1\right).$$

Отсюда получим

$$\left(ReF_{1j}(t)\right)' = -2\left(\alpha_j - \alpha_1 + \tilde{q}_1\right) < 0, j = 1, \dots, n.$$

(при $j = 1$ имеем $\left(ReF_{1j}(t)\right)' = -2\tilde{q}_1 < -2\sqrt{\varepsilon} < 0$).

По симметричным путям $ReF_{2j}(t)$ также не возрастают. Подведя итог можем утверждать, (Т) выполняется для всех $ReF_{kj}(t)$ по выбранным путям интегрирования.

(Т) важно при оценке последовательных приближений.

3. ***<u>Оценка и доказательство равномерной сходимости последовательных приближений.</u>***

Переходим к оценке последовательных приближений (8) и доказательству, их равномерной сходимости в $\mathcal{D}_0$. Как показывают исследования приведенные в [6], на оценку последовательных приближений в основном влияют оценки первых приближений. Оценка последовательных приближений проводится методом индукции, согласно выбранных путей интегрирования.

Оценим первые приближения.

Для $z_{11}(t,\varepsilon)$ получим оценку

$$|z_{11}| \le M \begin{cases} \varepsilon, t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \overline{\mathcal{D}}_3 \cup \overline{\mathcal{D}}_4 \cup \overline{\mathcal{D}}_5, \\ \sqrt{\varepsilon}, \quad t \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6. \end{cases}$$

При оценке $z_{11}(t,\varepsilon)$ на (K_n) применяется метод Лапласа, а на (K_1) метод стационарной фазы.

Для $z_{2j-1\,1}(t,\varepsilon)$ $(j = 2, \dots, n)$ имеем оценки

$$\left|z_{2j-1\,1}\right| \le M\varepsilon, t \in \mathcal{D}_0.$$

В рассматриваемом случае $\forall t \in \mathcal{D}_0 \left(F'_{2j-1}(t) \ne 0\right)$, тогда интегралы

$$\int_{t_0}^{t} exp \frac{1}{2\varepsilon}\left(F_{1j}(t) - F_{1j}(\tau)\right) d\tau$$

имеют порядок ε. Для этого к этим интегралам, достаточно применить интегрирование по частям и учесть (Т).

$z_{21}(t,\varepsilon), z_{2j\,1}(t,\varepsilon)$ имеют оценки

$$|z_{21}| \le M \begin{cases} \varepsilon, \quad t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_5, \\ \sqrt{\varepsilon}, \quad t \in \overline{\mathcal{D}}_3 \cup \overline{\mathcal{D}}_4 \cup \overline{\mathcal{D}}_5 \cup \mathcal{D}_6. \end{cases}$$

Итого

$$\|z_1(t,\varepsilon)\| \le M \begin{cases} \varepsilon, \quad t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, \quad t \in \left(\bigcup_{k=3}^{5}(\mathcal{D}_k \cup \overline{\mathcal{D}}_k)\right) \cup \mathcal{D}_6. \end{cases}$$

Для последующих приближений получается аналогичная оценка

$$\|z_m(t,\varepsilon)\| \le M \begin{cases} \varepsilon, \ t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, \quad t \in \left(\bigcup_{k=3}^{5}(\mathcal{D}_k \cup \overline{\mathcal{D}}_k)\right) \cup \mathcal{D}_6. \end{cases} \tag{8}$$

Для доказательства равномерной сходимости $\{z_m(t,\varepsilon)\}$ применяется признак Вейерштрасса, т.е. проводится оценка

$$\|z_m - z_{m-1}\| \le \left(M_1\sqrt{\varepsilon}\right)^m, m = 1,2, \dots$$

Из доказанной оценки вытекает равномерная сходимость $\{z_m(t,\varepsilon)\}$ к некоторой функции $z(t,\varepsilon)$, которая является решением (6).

Для этого решения справедлива оценка, согласно (8)

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le M\begin{cases} \varepsilon,\ t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon},\ t \in \left(\bigcup_{k=3}^{5}(\mathcal{D}_k \cup \bar{\mathcal{D}}_k)\right). \end{cases} \qquad (9)$$

Рассматривая (9) на действительной оси получим оценку0

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le \begin{cases} \varepsilon,\ t_0 \le t_1 < \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon}, \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon} \le t_1 \le \alpha_1. \end{cases} \qquad (10)$$

Из (10) вытекает справедливость теоремы.

Вз доказанной теоремы вытекает, на ЗР, основное влияние оказывают точки поворота $(\pm i\alpha_1)$.

Заключение

Таким образом, из доказанной теоремы вытекает, для решения рассматриваемой системы сингулярно возмущенных уравнений происходит задержка решения вблизи возникшего неустойчивого положения равновесия в течении конечного времени.

При исследовании поставленной задачи применены линии уровня и свойства гармонических функций. Основным является построение области в комплексной плоскости. Такой подход позволил эффективно решить поставленную задачу.

Литература

1. Шишкова, М.А. (1973) Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Докл.АН СССР, Т.209. №3, сс. 576-579.
2. Нейштадт, А.И. (1988) О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II. Дифференциальные уравнения, Т. 24. №2, сс. 226–233.
3. Алыбаев, К.С. (2001) Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Вестник КГНУ. Серия 3, Выпуск 6, сс.190-200.
4. Турсунов, Д. А. (2018) Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» Вестник Томск.гос.универ. Матем. и механика. №54, сс. 46–57.
5. Алыбаев, К.С., Мусакулова Н.К. (2022) Метод линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений. Вестник ОшГУ, № 4. сс. 206-217. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206
6. Алыбаев, К.С., Нурматова, М.Н. (2023) Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений. Бюллетень науки и практики. Т. 9. №12. сс.12-19. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01
7. Alybaev, K.S., Dzhuraev, A.M.,Nurmatova, M.N. (2024) Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position. Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 45, No. 3, pp. 1178–1187. https://doi.org/10.1134/S1995080224600791.
8. Алыбаев, К.С., Нурматова, М.Н., Мусакулова Н.К. (2024) Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях. Бюллетень науки и практики. Т. 10. №3, сс. 14-27. https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01.

УДК 517.75
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_2

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕЕ ТРЕТЬЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Апаков Юсупжон Пулатович, д.ф.-м.н., профессор
yusupjonapakov@gmail.com
Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз.
Меликузиева Дилшода Мухторжоновна
meliquziyevadilshoda@gmail.com
Наманганский инженерно-строительный институт
Наманган, Узбекистан

Аннотация. *В работе для уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками рассмотрены краевые задачи в полуограниченных областях. Единственность решения доказана методом интегралов энергии. Существования решений доказаны методом разделения переменных. Решения построен явно в виде бесконечного ряда, обоснована возможность почленного дифференцирования ряда по всем переменным.*

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение с частными производными, уравнение четвёртого порядка, кратные характеристики, краевая задача, единственность, существование, ряд, полуограниченная область, абсолютная и равномерная сходимость.*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A FOURTH ORDER EQUATION CONTAINING A THIRD TIME DERIVATIVE IN SEMI-BOUNDED DOMAINS

Apakov Yupjon Pulatovich, Dr Sc, professor
yusupjonapakov@gmail.com
V.I.Romanovskii Institute of Matematics of the Academy of Sciences of the Uzbekistan
Namangan, Uzbekistan
Melikuzieva Dilshoda Muxtorjon qizi
meliquziyevadilshoda@gmail.com
Namangan Engineering-Construction Institute
Namangan, Uzbekistan

Abstract. *In this work, boundary value problems in semi-bounded domains are considered for a fourth-order equation with multiple characteristics. The uniqueness of the solution is proven by the method of energy integrals. The existence of solutions is proved by the method of separation of variables. The solutions are constructed explicitly in the form of an infinite series, and the possibility of term-by-term differentiation of the series with respect to all variables is justified.*

Key words: *Partial differential equation, fourth order equation, multiple characteristics, boundary value problem, uniqueness, existence, series, semi-bounded domain, absolute and uniform convergence.*

1. Введение

Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см. [1-4]).

Монография Джураева Т.Д., Сопуева А. [5], посвящена классификации дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка для таких уравнений.

В работе [6] рассмотренны краевые задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками с одним младшим членом.

В работе [7] рассмотрена краевая задача для уравнения четвертого порядка вида

$$u_{xxxx} - u_{tt} = f\left(x,t\right).$$

В работе [8] была решена задача с начальными и граничными условиями для уравнения колебания балки вида

$$a^2 u_{xxxx} + u_{tt} = 0,$$

в которой балка длины l, зажата на концах, в массивные тиски.

В работе [9] рассмотрена краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами.

В работах [10-14] рассмотрены краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени.

В работах [15-18] рассмотрены краевые задачи для уравнения с кратными характеристиками в полуограниченных областях.

Краевые задачи для уравнений четвертого порядка, содержащее третью производную по времени мало изучены [19-22].

2. Постановка задачи

В областях $D^+ = \left\{\left(x,y\right): \quad 0<x<p, \quad 0<y<+\infty\right\}$ и $D^- = \left\{\left(x,y\right): \quad 0<x<p, \quad -\infty<y<0\right\}$ рассмотрим уравнение

$$L\left[u\right] \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \tag{1}$$

где $p>0$ - действительное число, и для него исследуем следующие задачи.

Задача A_1**.** Найти решение уравнения (1) в области D^+ из класса $u\left(x,y\right) \in C^{4,3}_{x,y}\left(D^+\right) \cap C^{3,2}_{x,y}\left(D^+ \cup \Gamma_1\right)$, имеющее ограниченную третью производную по x и вторую производную по y при $y \to +\infty$, равномерно по x и $u_{xx} \in L_2\left(D^+\right)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u\left(0,y\right) = u\left(p,y\right) = u_{xx}\left(0,y\right) = u_{xx}\left(p,y\right) = 0, \quad 0 \le y < +\infty, \tag{2}$$

$$u\left(x,0\right) = \psi_1\left(x\right), \quad u_y\left(x,0\right) = \psi_2\left(x\right), \quad \lim_{y\to+\infty} u\left(x,y\right) = 0, \quad 0 \le x \le p, \tag{3}$$

где $\Gamma_1 = \partial D^+$-граница области D^+, $\psi_1\left(x\right) \in C^5\left[0,p\right], \quad \psi_2\left(x\right) \in C^4\left[0,p\right]$- заданные функции, причем

$$\begin{aligned} \psi_1^{(k)}\left(0\right) = \psi_1^{(k)}\left(p\right) = 0, \quad k = 0,2,4. \\ \psi_2^{(j)}\left(0\right) = \psi_2^{(j)}\left(p\right) = 0, \quad j = 0,2. \end{aligned} \tag{4}$$

Задача A_2**.** Найти решение уравнения (1) в области D^- из класса $u(x,y)\in C^{4,3}_{x,y}\left(D^-\right)\cap C^{3,2}_{x,y}\left(D^-\cup\Gamma_2\right)$, имеющее ограниченную производную третьего порядка по x и вторую производную по y при $y\to-\infty$, равномерно по x и $u_{xx}\in L_2\left(D^-\right)$, удовлетворяющее краевому условию (2) при $-\infty<y\le 0$ и

$$u(x,0)=\psi_3(x),\quad \lim_{y\to-\infty}u(x,y)=\lim_{y\to-\infty}u_y(x,y)=0,\quad 0\le x\le p, \tag{5}$$

где $\Gamma_2=\partial D^-$ - граница области D^-, $\psi_3(x)\in C^5[0,p]$- заданная функция, причем

$$\psi_3^{(r)}(0)=\psi_3^{(r)}(p)=0,\qquad r=0,2,4. \tag{6}$$

3. Единственность решения

Теорема 1. Если задачи A_1 и A_2 имеют решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однародными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в D^+ $\left(D^-\right)$.

Для этого уравнение (1) умножим на u, тогда получим

$$uL[u]\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx}-u_xu_{xx}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_{yy}-\frac{1}{2}u_y^2\right)+u_{xx}^2=0. \tag{7}$$

Интегрируя тождество (7) по области $D_d=\left\{(x,y):0<x<p,\quad 0<y<d\right\}$, где $d>0$ имеем

$$\begin{gathered}\int_0^d\left[u(p,y)u_{xxx}(p,y)-u(0,y)u_{xxx}(0,y)\right]dy-\\ -\int_0^d\left[u_x(p,y)u_{xx}(p,y)-u_x(0,y)u_{xx}(0,y)\right]dy-\\ -\int_0^p\left[u(x,d)u_{yy}(x,d)-u(x,0)u_{yy}(x,0)\right]dx+\\ +\frac{1}{2}\int_0^p\left[u_y^2(x,d)-u_y^2(x,0)\right]dx+\iint_{D_d}u_{xx}^2dxdy=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Если $d\to+\infty$, то $D_d\to D^+$. Учитывая однородные краевые условия задачи A_1, т.е. $\psi_i(x)=0,\quad i=1,2,$ и свойства функции $u(x,y)$ при $y\to+\infty$, а также, что $u_{xx}\in L_2\left(D^+\right)$, из (8) получаем

$$\frac{1}{2}\lim_{d\to+\infty}\int_0^p u_y^2(x,d)\,dx+\iint_{D^+}u_{xx}^2dxdy=0\,.$$

Из второго слагаемого имеем

$$u_{xx}=0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y)=x\cdot f_1(y)+f_2(y), \quad (x,y)\in D^+\cup\Gamma_1.$$

где $f_1(y), \quad f_2(y)-$ произвольные функции, удовлетворяюшие всем условиям задачи.

Полагая $x=0$, имеем

$$u(0,y)=f_2(y)=0 \quad \Rightarrow \quad f_2(y)=0,$$

полагая $x=p$, имеем

$$u(p,y)=p\cdot f_1(y)=0 \quad \Rightarrow \quad f_1(y)=0.$$

Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$, в $D^+\cup\Gamma_1$.

Интегрируя тождество (7) по области $D_c=\{(x,y):0<x<p, \quad -c<y<0\}, c>0$ учитывая однородные краевые условия задачи A_2 и свойства функции $u(x,y)$ при $y\to-\infty$, а также что $u_{xx}\in L_2(D^-)$, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^p u_y^2(x,0)dx+\iint_{D^-}u_{xx}^2dxdy=0.$$

Отсюда следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в $D^-\cup\Gamma_2$.

4. Существование решения

С целью доказательства существования решения, рассмотрим следующую вспомагательную задачу: найти нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и представимое в виде

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y) \tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнение (1) и разделяя переменные, относительно функции $X(x)$ и $Y(y)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$X^{(4)}(x)-\lambda\cdot X(x)=0, \tag{10}$$

$$Y^{(3)}(y)-\lambda\cdot Y(y)=0, \tag{11}$$

где λ параметр разделения.

Учитывая граничные условия (2) для уравнения (10) имеем следующую задачу:

$$X(0)=X(p)=X''(0)=X''(p)=0 \tag{12}$$

а) Пусть $\lambda=d^4, \quad d>0.$ Тогда общее решение уравнения (10) определим в следующеем виде:

$$X(x)=C_1e^{dx}+C_2e^{-dx}+C_3\cos dx+C_4\sin dx, \tag{13}$$

где C_i- произвольные постоянные. Удовлетворяя функция (13) первыми двумя условиями из (12),

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ X''(0) = C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ X(p) = C_1 e^{dp} + C_2 e^{-dp} + C_3 \cos dp + C_4 \sin dp = 0, \\ X''(p) = C_1 e^{dp} + C_2 e^{-dp} - C_3 \cos dp - C_4 \sin dp = 0, \end{cases}$$

находим $C_1 = C_2$, $C_3 = 0$. Имеем следующую нетривиальное решение задачи (12) сушествует только при

$$d_n = \frac{\pi n}{p}, \ \ n = 1, 2, 3, ...$$

$$\lambda_n = d_n^4 = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4, \ \ n = 1, 2, 3, ...$$

Эти числа являются собственными значениями задачи (12), а соответсвующие ими собственные функции имеют следующий вид:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{\pi n}{p} x. \qquad (14)$$

б) Пусть $\lambda = 0$. Тогда общее решение уравнения (10) определим в следующеем виде:

$$X(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \qquad (15)$$

где $C_i -$ произвольные постоянные. Удовлетворяя функция (15) первыми двумя условиями из (12),

$$\begin{cases} X(0) = C_4 = 0, \\ X''(0) = C_2 = 0, \\ X(p) = C_1 p^3 + C_2 p^2 + C_3 p + C_4 = 0, \\ X''(p) = 6C_1 p + 2C_2 = 0, \end{cases}$$

находим $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. (15) имеет только нулевое решение.

в) Пусть $\lambda = -d^4, \quad d > 0.$

$$X(x) + d^4 X(x) = 0,$$

$$k^4 + d^4 = 0,$$

$$\left(k^2 + d^2\right)^2 - 2k^2 d^2 = \left(k^2 - \sqrt{2}kd + d^2\right)\left(k^2 + \sqrt{2}kd + d^2\right) = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} d \pm \frac{\sqrt{2}}{2} di, \quad k_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} d \pm \frac{\sqrt{2}}{2} di.$$

Тогда общее решение уравнения (10) определим в следующеем виде:

$$X(x)=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}dx}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}dx+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}dx\right)+$$
$$+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}dx}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}dx+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}dx\right), \tag{16}$$

где C_i- произвольные постоянные. Учитывая граничные условия (2) для уравнения (16), из система

$$\begin{cases} X(0)=C_1+C_3=0\Rightarrow C_1=C_3, \\ X''(0)=C_2-C_4=0\Rightarrow C_2=C_4, \\ X(p)=C_1sh\sqrt{2}dp\cdot\cos\frac{\sqrt{2}}{2}dp+C_2ch\sqrt{2}dp\cdot\sin\frac{\sqrt{2}}{2}dp=0, \\ X''(p)=-C_1ch\sqrt{2}dp\cdot\sin\frac{\sqrt{2}}{2}dp+C_2sh\sqrt{2}dp\cdot\cos\frac{\sqrt{2}}{2}dp=0, \end{cases}$$

находим $C_1=C_2=C_3=C_4=0$. (16) имеет только нулевое решение.

Рассмотрим задачу A_1.

Учитывая граничные условия (3) для уравнения (11) имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} Y^{(3)}(y)-\lambda Y(y)=0, \\ Y(0)=\psi_{1n}, \\ Y'(0)=\psi_{2n}, \\ \lim\limits_{y\to+\infty}Y(y)=0. \end{cases}$$

где $\psi_{in}=\int\limits_0^p\psi_i(\xi)X_n(\xi)d\xi,\quad i=1,2.$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$Y_n(y)=C_{1n}e^{k_ny}+e^{-\frac{1}{2}k_ny}\left(C_{2n}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_ny\right)+C_{3n}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_ny\right)\right), \tag{17}$$

где $k_n=\sqrt[3]{\lambda_n}$, а $C_i, i=\overline{1,3}$ пока неизвестные постоянные.

Удовлетворив условию (3) из (17) имеем

$$\begin{cases} C_{1n}=0, \\ C_{2n}=\psi_{1n}, \\ C_{3n}=\frac{2}{\sqrt{3}k_n}\psi_{2n}+\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_{1n}, \end{cases}$$

C_{2n} и C_{3n} - коэффициенты Фурье функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, т.е.

$$C_{2n} = \int_0^p \psi_1(\xi) X_n(\xi) d\xi, \qquad C_{3n} = \int_0^p \psi_2(\xi) X_n(\xi) d\xi,$$

В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M.

Интегрируем по частям $\psi_1(x)$ пять раза и $\psi_2(x)$ четыре раза принимая во внимание условие (4) получим следующие оценки:

$$|C_{2n}| \le M \frac{|\Psi_{1n}|}{n^5}, \quad |C_{3n}| \le M \frac{|\Psi_{2n}|}{n^4}, \tag{18}$$

где

$$\Psi_{1n} = \int_0^p \psi_1^{(5)}(\xi) \cos\frac{\pi n}{p} \xi d\xi,$$

$$\Psi_{2n} = \int_0^p \psi_2^{(4)}(\xi) \sin\frac{\pi n}{p} \xi d\xi.$$

Решение задача A_1 имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \left(e^{-\frac{1}{2}k_n y} \left(C_{2n} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n y\right) + C_{3n} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n y\right) \right) \right) \tag{19}$$

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (19). Учитывая (18) из (19) получим

$$|u(x,y)| \le M \sum_{n=1}^{\infty} |X_n(x)| \left(\frac{|\Psi_{1n}|}{n^5} + \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{16/3}} \right) < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (19) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что производные ряда (19) входящие в уравнение (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $D^+ \cup \Gamma_1$. Для этого вычисляем производные по y из (19), оценив полученные равенства и учитывая (18), имеем

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} k_n^3 \left(|C_{2n}| + \frac{2}{\sqrt{3}k_n} |C_{3n}| \right) |X_n(x)| \le M \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{1n}|}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{4/3}} \right).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| \le M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{1n}|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{4/3}} \le M \sqrt{\frac{2}{p} \|\Psi_{1n}\|^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{4/3}} \le$$

$$\le M \frac{\pi}{\sqrt{3p}} \|\Psi_{1n}\| + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{4/3}} < \infty,$$

так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{1n}\right|^{2}=\frac{2}{p}\left\|\Psi_{1n}\right\|_{L_2(0,p)}^{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость четвертой производной по x ряда (19) следует из равенства $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ и доказанного выше.

Рассмотрим задачу A_2.

Учитывая граничные условия (5) для уравнения (17) имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} Y^{(3)}(y)-\lambda^4 Y(y)=0, \\ Y(0)=\psi_{3n}, \\ \lim\limits_{y\to-\infty} Y(y)=\lim\limits_{y\to-\infty} Y'(y)=0, \end{cases}$$

где $\psi_{3n}=\int_0^p \psi_3(\xi)X_n(\xi)d\xi.$

Следовательно, в (17) необходимо считать, что $C_{2n}=C_{3n}=0.$ Тогда функция (17) имеет вид

$$Y_n(y)=C_{1n}e^{k_n y}$$

C_{1n} - коэффициенть Фурье функций $\psi_3(x)$, т.е.

$$C_{1n}=\int_0^p \psi_3(\xi)X_n(\xi)d\xi,$$

Принимая во внимание условие (5), интегрируем по частям $\psi_3(x)$ пять раз получим следующие оценки:

$$\left|C_{1n}\right|\le M\frac{\left|\Psi_{3n}\right|}{n^5}, \tag{20}$$

где

$$\Psi_{3n}=\int_0^p \psi_3^{(5)}(\xi)\cos\frac{\pi n}{p}\xi d\xi.$$

Теперь в силу (13), решение задачи A_2 имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{1n}e^{k_n y}X_n(x). \tag{21}$$

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (21). Учитывая (20), из (21) получим

$$\left|u\left(x,y\right)\right| \le M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{3n}\right|}{n^5} < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (21) сходится абсолютно и равномерно.

Тепер докажем, что производные ряда (21) входящие в уравнение (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $D^- \cup \Gamma_2$. Для этого вычисляем производные по y, оценив полученны равенства и учитывая (21), имеем

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} k_n^3\left(\left|C_{1n}\right|\right)\left|X_n\left(x\right)\right| \le M\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{3n}\right|}{n}\right).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right| \le M\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{3n}\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + M \le M\frac{\pi}{\sqrt{3p}}\left\|\Psi_{3n}\right\| < \infty,$$

так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{3n}\right|^2 = \frac{2}{p}\left\|\Psi_{3n}\right\|_{L_2(0,p)}^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость четвертой производной по x ряда (22) следует из равенства $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ и доказанного выше.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Если функции $\psi_i\left(x\right) \in C^5\left[0,p\right],\ i=1,3,\quad \psi_2\left(x\right) \in C^4\left[0,p\right]$, и выполняются условия (4) и (6), то решения задач A_1 и A_2 существуют, и представляются в виде (19) и (21) соответсвенно.

Литература

1. Турбин М.В. Исследование начально краевой задачи для модели движения жидкости Герше - Балки . Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер.Физ. Мат. -2013. № 2. - С. 246-257.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.-М.: Мир,1977.-622 с.
3. Шабров С.А. Об оценках функций влияния одной математической модели четвёртого порядка. Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. -2015.20(2) - С. 168-179.
4. Benney D.J.,Luke ,J.C Interactions of permanent waves of finite amplitude . J. -Math. Phys. -1964. 43, - P.309-313. doi.org/10.1002/sapm1964431309
5. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. Ташкент. «Фан». 2000.-144 с.
6. Аманов Д, Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения четвёртого порядка с младшим членом. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, -2013, выпуск 1.-С. 3–10. **DOI:** 10.20537/vm130101.
7. Аманов Д. , Бекиев А.Б., Отарова Ж.А . Краевая задача для уравнения четвёртого порядка. Узб.мат.журнал. -2015, -№4. -С.11-18.
8. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки.- 2015, том 19, № 2.-С. 311–324. https://doi.org/10.14498/vsgtu1406

9. Иргашев Б.Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами . Бюллетень Института математики. -2019, -№6. -С.23-29.

10. Dzhuraev T.D., Apakov Yu.P. On the theory of the third- order equation with multiple characteristics containing the second time derivative. Ukrainian Mathematical Journal .-2010.-62, -pp.43–55. https://doi.org/10.1007/s11253-010-0332-8

11. Apakov Yu.P.,Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics. Nonlinear Analysis: Modeling and Control.Vilnius,2011. –Vol.16.-No3. -pp. 255–269. DOI:10.15388/NA.16.3.14092

12. Apakov Yu. P. On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics. Ukrainian Mathematical Journal.-2012.- 64 (1), -pp.1–11. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0625-1

13. Apakov Yu. P. On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation. Lobachevskii Journal of Mathematics, -2020.-41, -pp.1754–1761. https://doi.org/10.1134/S1995080220090036

14. Apakov Yu.P. , Umarov R.A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms Construction of the Green’s Function. Lobachevskii Journal of Mathematics, -2022.-43,-pp.738–748. DOI: 10.1134/S199508022206004X.

15. Апаков Ю.П. К решению краевых задач для уравнения в неограниченных областях . Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. –Ташкент, 2006. –№3. –С. 17-20.

16. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях . Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. –Нальчик, 2008. -№2(22). –С. 147-151.

17. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области .Узбекиский математический журнал. 2009, №4,- С. 21-28.

18. Apakov Y.P., Hamitov A.A. On solution of the boundary value problems posed for an equation with the third-order multiple characteristics in semi-bounded domains in three dimensional space. Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, 2023, Vol.29,58. pp.2-14. https://doi.org/10.1007/s40590-023-00523-1

19. Аманов Д.,Скоробогатова Э.Р. Краевые задачи для уравнения четвёртого порядка. Вестник КазНУ сер.мат.,мех., инф. -2009 г .-№ 4(63).-С.16-20.

20. Апаков Ю.П., Меликузиева Д.М. Краевая задача для уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками. Вестник. НамГУ, - 2022, -№5.-С.82-91.

21. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a problem for a fourth-order with multiple characteristics containing the third time derivate. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023 Vol. 44, No. 8, pp.3218-3224. DOI:10.1134/S1995080223080061

22. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time. Bulletin of the Karaganda University.Mathematics Series, No.4(112),2023,pp.30-40. DOI:10.31489/2023M4/30-40

УДК: 517.956, 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_3

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Апаков Юсупжон Пулатович, д.ф.-м.н., профессор
yusupjonapakov@gmail.com
Институт Математики им. В.И.Романовского Акад. наук Республики Узбекистан
Хамитов Азизбек Ахмаджон угли докторант (PhD)
azizbek.khamitov.93@mail.ru
Наманганский инженерно-строительный институт
Наманган, Узбекистан

Аннотация. *В данной работе рассматривается граничная задача для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трёхмерном пространстве. Единственность решение доказана методом интегралов энергии, а существование решения методом разделения переменных. Решение выписано через построенную функцию Грина. При обосновании равномерной сходимости установлено отличие от нуля «малого знаменателя».*

Ключевые слова: *Дифференциальные уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, граничная задача, собственное значение, собственная функция, функциональный ряд, абсолютная и равномерная сходимость.*

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER INHOMOGENEOUS EQUATION IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Apakov Yupjon Pulatovich, DrSc, professor
yusupjonapakov@gmail.com
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics
Uzbekistan Academy of Sciences
Namangan Engineering-Construction Institute
Namangan, Uzbekistan
Hamitov Azizbek Ahmadjon uglu, Postgraduate Student
azizbek.khamitov.93@mail.ru
Namangan Engineering-Construction Institute
Namangan, Uzbekistan

Abstract. *This work considers a boundary value problem for a third-order non-homogeneous equation with multiple characteristics in three-dimensional space. The uniqueness of the solution is proved by the method of energy integrals, and the existence of the solution is proved by the process of separation of variables. The solution is written out through the constructed Green function. When justifying uniform convergence, a difference from zero of the "small denominator" is established.*

Key words: *Third-order differential equations with multiple characteristics, boundary value problem, eigenvalue, eigenfunction, functional series, absolute and uniform convergence.*

1. Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, а также фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В работе [2], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = const.$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ описывает плоско - параллельный поток [3].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах H. Block [4], E. Del Vecchio [5].

L. Catabriga в работе [6] для уравнения $D_x^{2n+1} u - D_y^2 u = 0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала, решил краевые задачи.

В работах [7-8] построены фундаментальные решения уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдены оценки при $|t| \to \infty$.

В работах [9-10] в плоскости, т.е. при $z = 0$, рассмотрены краевые задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

2. Постановка задачи

В области $D = \{(x, y, z): \ 0 < x < p, \ 0 < y < q, \ 0 < z < r\}$ рассмотрим следующее уравнение третьего порядка вида

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), \tag{1}$$

где $p, q, r \in R$ и для него исследуем следующую задачу:

Задача A. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $u(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{3,2,2}(D) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \ u(x, y, 0) = u(x, y, r) = 0, \tag{2}$$

$$u(p, y, z) = \psi_1(y, z), \ u_x(p, y, z) = \psi_2(y, z), \ u_{xx}(0, y, z) = \psi_3(y, z), \tag{3}$$

где $\psi_i(y, z), \ i = \overline{1,3}, \ f(x, y, z)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, \dfrac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i(y, 0) = \psi_i(y, r) = 0, \dfrac{\partial^2 \psi_i(y, 0)}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \psi_i(y, r)}{\partial z^2} = 0, \qquad i = \overline{1,3}. \\ f(x, 0, z) = f(x, q, z) = 0, \ f(x, y, 0) = f(x, y, r) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что для уравнения (1) при $f(x, y, z) = 0$ в работах [11-12], исследованы некоторые корректные краевые задачи в конечных и бесконечных областях.

3. Единственность решения

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y,z)$ и $u_2(x,y,z)$. Тогда функция $u(x,y,z)=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y,z)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Для этого уравнения (1) умножим на u, тогда получим

$$u\,L[u]\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\,u_y\right)+u_y^2-\frac{\partial}{\partial z}\left(u\,u_z\right)+u_z^2=0. \qquad (5)$$

Интегрируя тождество (5) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(0,y,z)dydz+\iiint_D u_y^2(x,y,z)\,dxdydz+\iiint_D u_z^2(x,y,z)\,dxdydz=0.$$

Отсюда следует, что $u_y(x,y,z)=0$ и $u_z(x,y,z)=0$, т.е. $u(x,y,z)=h(x)$, здесь $h(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям задачи. Тогда поставляя в уравнение (1), имеем $h'''(x)=0$. Отсюда, $h(x)=C_1x^2+C_2x+C_3$. Из условии (3), получим

$$\begin{cases}2C_1=0,\\ C_1p^2+C_2p+C_3=0,\\ 2C_1p+C_2=0.\end{cases}$$

Основной определитель этой системы равен

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ p^2 & p & 1\\ 2p & 1 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Так как $\Delta\neq 0,$ то $C_1=C_2=C_3=0,$ отсюда получим $h(x)=0$. Следовательно, $u(x,y,z)\equiv 0$, $(x,y,z)\in\overline{D}$. В силу последнего, получим $u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z)$.

Теорема 1 доказана.

4. Существование решения

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

$$1)\ \frac{\partial^6\psi_i(y,z)}{\partial y^3\partial z^3}\in C\left[0<y<q,0<z<r\right],\ i=\overline{1,3};$$

$$2)\ \frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x\partial y^2\partial z^2}\in C\left[0<x<p,0<y<q,0<z<r\right],$$

и (4), то решение задачи A существует.

Доказательство. Решения задачи A, ищем в виде

$$u(x,y,z)=\mathrm{X}(x)V(y,z).$$

Поставляя в уравнение (1) и разделяя переменные, для $V(y,z)$ имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} V_{yy}+V_{zz}+\lambda V=0, \\ V(0,z)=V(q,z)=0, \\ V(y,0)=V(y,r)=0, \end{cases} \tag{6}$$

где λ - параметр разделения.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (6). Решение задачи (6) ищем в виде

$$V(y,z)=Y(y)Z(z). \tag{7}$$

Подставляя (7) в уравнение (6), разделяя переменные, имеем задачи

$$\begin{cases} Y''+\nu Y=0, \\ Y(0)=Y(q)=0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} Z''+\mu Z=0, \\ Z(0)=Z(r)=0, \end{cases} \tag{9}$$

где ν и μ - положительные постоянные, связанные соотношением $\lambda=\nu+\mu.$

Известно из [13], что решения задачи (8), (9) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} Y_n(y)=A_n\sin\dfrac{n\pi y}{q}, \\ Z_m(z)=A_m\sin\dfrac{m\pi z}{r}, \end{cases}$$

где $A_{n,m}$ - некоторые постоянные множители, $\nu_n=\left(\dfrac{n\pi}{q}\right)^2, \mu_m=\left(\dfrac{m\pi}{r}\right)^2$, $n,m\in N$ - собственные значения.

Тогда, в качестве решения спектральной задачи (8), (9) возьмем функции

$$V_{n,m}(y,z)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}, \tag{10}$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{n,m}=\left(\frac{n^2}{q^2}+\frac{m^2}{r^2}\right)\pi^2,\ \ n,m\in N.$$

Отметим, что система собственных функций (10) задачи (7), (8) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(0<y<q,\,0<z<r)$ [14-15].

Разложим $f(x,y,z)$ в ряд Фурье по $\{V_{n,m}(y,z)\}$:

$$f(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\sum_{n,m=1}^{+\infty} f_{n,m}(x)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r},$$

где $f_{n,m}(x)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\int_0^q\int_0^r f(x,y,z)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}dydz.$

Интегрируя функцию $f_{n,m}(x)$ по частям и учитывая условия (4), имеем оценку

$$\left|f_{n,m}(x)\right|\le M\frac{\left|F_{n,m}(x)\right|}{n^2m^2}, \tag{11}$$

здесь

$$M=\left(\frac{qr}{\pi^2}\right)^2,\quad F_{n,m}(x)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\int_0^q\int_0^r\frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2\partial z^2}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}dydz.$$

В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M .

Решение задачи A ищем в виде

$$u(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\sum_{n,m=1}^{+\infty}X_{n,m}(x)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}. \tag{12}$$

Поставляя (12) в уравнение (1), учитывая граничные условия (3), получим следующую задачу:

$$\begin{cases}X'''_{n,m}(x)+\lambda_{n,m}X_{n,m}(x)=f_{n,m}(x),\\ aX_{n,m}(0)+bX''_{n,m}(0)=\psi_{1n,m},\\ cX_{n,m}(p)+dX''_{n,m}(p)=\psi_{2n,m},\\ X'_{n,m}(p)=\psi_{3n,m},\end{cases} \tag{13}$$

где $\psi_{in,m}=\frac{2}{\sqrt{qr}}\int_0^q\int_0^r\psi_i(y,z)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}dydz,\ i=\overline{1,3}.$

Применяя интегрирование по частям к $\psi_{in,m}$ с учетом условия (4), получаем оценку

$$\left|\psi_{in,m}\right|\le M\frac{\left|\Psi_{in,m}\right|}{n^3m^3}, \tag{14}$$

здесь

$$\Psi_{in,m}=\frac{2}{\sqrt{qr}}\int_0^q\int_0^r\frac{\partial^6\psi_i(y,z)}{\partial y^3\partial z^3}\cos\frac{n\pi y}{q}\cos\frac{m\pi z}{r}dydz.$$

Решение задачи (13) находим методом построение функции Грина, для этого с помощью функции

$$U_{n,m}(x)=X_{n,m}(x)-\rho_{n,m}(x), \tag{15}$$

изменим граничные условия на однородные.

Функция $\rho(x)$ имеет вид

$$\rho_{n,m}(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2\psi_{1n,m}+\psi_{2n,m}+(x-p)\psi_{3n,m}. \tag{16}$$

Подставляя (15), (16) в (13) получим задачу

$$\begin{cases} U'''_{n,m}(x)+\lambda_{n,m}U_{n,m}(x)=\lambda_{n,m}g_{n,m}(x), \\ U_{n,m}(p)=U'_{n,m}(p)=U''_{n,m}(0)=0, \end{cases} \tag{17}$$

здесь

$$g_{n,m}(x)=(p-x)\psi_{3n,m}-\psi_{2n,m}-\frac{1}{2}(x-p)^2\psi_{1n,m}+\frac{f_{n,m}(x)}{\lambda_{n,m}}.$$

Учитывая (11), (14) и $\lambda_{n,m}=\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{r}\right)^2\geq\frac{2\pi^2}{qr}nm,\ \ n,m\in N$, имеем оценки

$$\begin{aligned} &\left|g_{n,m}(x)\right|\leq\frac{M}{n^3m^3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\Psi_{in,m}\right|+\left|F_{n,m}(x)\right|\right), \\ &\left|g'_{n,m}(x)\right|\leq\frac{M}{n^3m^3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\Psi_{in,m}\right|+\left|F'_{n,m}(x)\right|\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Решение задачи (17) ищем в виде:

$$U_{n,m}(x)=\lambda_{n,m}\int_0^p G_{n,m}(x,\xi)g_{n,m}(\xi)\,d\xi, \tag{19}$$

здесь $G_{n,m}(x,\xi)$ функция Грина задачи (17) и имеет вид:

$$G_{n,m}(x,\xi)=\begin{cases} G_{1n,m}(x,\xi), 0\leq x<\xi, \\ G_{2n,m}(x,\xi), \xi<x\leq p, \end{cases} \tag{20}$$

здесь

$$G_{1n,m}(x,\xi)=\frac{1}{\overline{\Delta}}\left(\begin{aligned} &e^{-k_{n,m}x}\left(2e^{k_{n,m}\left(p-\frac{\xi}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}\xi\right)-2e^{k_{n,m}\left(\xi-\frac{p}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}p\right)\right)- \\ &-2e^{-\frac{k_{n,m}}{2}(p-x)}\left(e^{k_{n,m}\xi}+2e^{-\frac{k_{n,m}}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}\xi\right)\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}(p-x)+\frac{\pi}{6}\right) \\ &+2e^{k_{n,m}\left(\frac{x}{2}-\frac{\xi}{2}\right)}\left(e^{k_{n,m}p}+2e^{\frac{-k_{n,m}}{2}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}p\right)\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}\right),$$

$$G_{2n,m}(x,\xi)=\frac{1}{\overline{\Delta}}\left(e^{k_{n,m}\xi}+2e^{-\frac{k_{n,m}}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}\xi\right)\right)$$

$$\left(e^{k_{n,m}(p-x)}-2e^{-\frac{k_{n,m}}{2}(p-x)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}(p-x)+\frac{\pi}{6}\right)\right),$$

$$\overline{\Delta}=3k_{n,m}^2e^{k_{n,m}p}\left(1+2e^{-\frac{3}{2}k_{n,m}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}p\right)\right),$$

$$k_{n,m}=\sqrt[3]{\lambda_{n,m}}=\sqrt[3]{\left(\frac{n^2}{q^2}+\frac{m^2}{r^2}\right)\pi^2},\quad n,m\in N.$$

В силу (12) и (15) решение задачи A имеет вид

$$u(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left(U_{n,m}(x)+\rho_{n,m}(x)\right)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}. \qquad (21)$$

Если функция $u(x,y,z)$ определяемая рядом (21), и ее производные u_{xxx}, u_{yy} и u_{zz} сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$, то она даёт решение задачи A.

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (21). Из (21) имеем оценку

$$\left|u(x,y,z)\right|\le M\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left(\left|U_{n,m}(x)\right|+\left|\rho_{n,m}(x)\right|\right).$$

Теперь подставляя $G_{n,m}(x,\xi)=-\frac{1}{\lambda_{n,m}}G_{n,m\xi\xi\xi}(x,\xi)$ в (19) и интегрируя по частям, имеем

$$U_{n,m}(x)=-g_{n,m}(x)+g_{n,m}(0)G_{2n,m\xi\xi}(x,0)-g_{n,m}(p)G_{1n,m\xi\xi}(x,p)+$$
$$+\int_0^p G_{n,m\xi\xi}(x,\xi)g_{n,m}{}'(\xi)d\xi.$$

Учитывая (16), (18) и

$$\left|G_{2n,m\xi\xi}(x,0)\right|\le M,\ \left|G_{1n,m\xi\xi}(x,p)\right|\le M,\ \left|G_{n,m\xi\xi}(x,\xi)\right|\le M,$$

из функция Грина (20), получим оценки

$$\left|\rho_{n,m}(x)\right|\le\frac{M}{n^3m^3}\left(\left|\Psi_{1n,m}\right|+\left|\Psi_{2n,m}\right|+\left|\Psi_{3n,m}\right|\right),$$

$$\left|U_{n,m}(x)\right|\le\frac{M}{n^3m^3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\Psi_{in,m}\right|+\left|F_{n,m}(0)\right|+\left|F_{n,m}(p)\right|+\left|F_{n,m}(x)\right|+\left|F'_{n,m}(x)\right|\right).$$

Отсюда

$$\left|u(x,y,z)\right|\le M\sum_{n,m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3m^3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\Psi_{in,m}\right|+\left|F_{n,m}(0)\right|+\left|F_{n,m}(p)\right|+\left|F_{n,m}(x)\right|+\left|F'_{n,m}(x)\right|\right)<\infty.$$ Отсюда следует, что ряд (21) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что частные производные ряда (21) входящие в уравнения (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$. Для этого вычисляем частные производные ряда (21) по переменными y и z до второго порядка, получим

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-\frac{2\pi^2}{\sqrt{q^5r}}\sum_{n,m=1}^{+\infty}n^2\left(U_{n,m}(x)+\rho_{n,m}(x)\right)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=-\frac{2\pi^2}{\sqrt{qr^5}}\sum_{n,m=1}^{+\infty}m^2\left(U_{n,m}(x)+\rho_{n,m}(x)\right)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}.$$

Учитывая оценку $u(x,y,z)$, получим

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le M\sum_{n,m=1}^{+\infty}\frac{1}{nm^3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\Psi_{in,m}\right| + \left|F_{n,m}(0)\right| + \left|F_{n,m}(p)\right| + \left|F_{n,m}(x)\right| + \left|F'_{n,m}(x)\right|\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \le M\sum_{n,m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3 m}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\Psi_{in,m}\right| + \left|F_{n,m}(0)\right| + \left|F_{n,m}(p)\right| + \left|F_{n,m}(x)\right| + \left|F'_{n,m}(x)\right|\right).$$

Используя неравенства Коши- Буняковского и Бесселя, получим

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le M\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{nm^3}\right)^2}\left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{1n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{2n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{3n,m}\right|^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(0)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(p)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(x)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F'_{n,m}(x)\right|^2}\right) \le$$

$$\le \overline{M}\left(\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial^6 \psi_i(y,z)}{\partial y^3 \partial z^3}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^4 f(0,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^4 f(p,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \right.$$

$$\left. + \left\|\frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2}\right\|_{L_2[0<x<p,\, 0<y<q,\, 0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}\right\|_{L_2[0<x<p,\, 0<y<q,\, 0<z<r]}\right) < \infty,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \le M\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3 m}\right)^2}\left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{1n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{2n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{3n,m}\right|^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(0)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(p)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(x)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F'_{n,m}(x)\right|^2}\right) \le$$

$$\le \overline{M}\left(\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial^6 \psi_i(y,z)}{\partial y^3 \partial z^3}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^4 f(0,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^4 f(p,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \right.$$

$$\left. + \left\|\frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2}\right\|_{L_2[0<x<p,\, 0<y<q,\, 0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}\right\|_{L_2[0<x<p,\, 0<y<q,\, 0<z<r]}\right) < \infty,$$

так как

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{in,m}\right|^2 \le \left\|\frac{\partial^6 \psi_i(y,z)}{\partial y^3 \partial z^3}\right\|^2_{L_2[0<y<q,0<z<r]},\ i=\overline{1,3},\ \sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(x)\right|^2 \le \left\|\frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2}\right\|^2_{L_2[0<x<p,\, 0<y<q,\, 0<z<r]},$$

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F'_{n,m}(x)\right|^2 \le \left\|\frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}\right\|^2_{L_2[0<x<p,\, 0<y<q,\, 0<z<r]},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость третьей производной по x ряда (21) следует из $\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right| \le \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|$ и доказанного выше.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро - дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014, № 1(34), С. 56-65.
2. Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. матем. и механ., - Москва, 1965, Том 29, № 6, С. 1004-1014.
3. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения. // Журнал вычисл. мат. и мат. физики, - Москва, 1972, Том 12, № 5, С. 1265-1279.
4. Block H. Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21),- pp. 1-30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.
5. Del Vecchio E. Sulleequazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$ // Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.
6. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario matimatico della univ. di Padava. - 1961, 31. - pp. 1-45.
7. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007, № 2(15), С. 18-26.
8. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени. // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, Том 62, № 1. С. 40-51.
9. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина // Узбекский математический журнал. 2011. №3. - С. 36-42.
10. Apakov, Y.P., Umarov, R.A. Construction of the Solution of a Boundary- Value Problem for the Third-Order Equation with Lower Terms with the Help of the Green Function // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 274, No. 6. - pp. 807-821.
11. Apakov Yu. P., Hamitov A. A. Third Boundary Value Problem for an Equation with the Third Order Multiple Characteristics in Three Dimensional Space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. 44, №2, -pp. 523-532.
12. Apakov Yu. P., Hamitov A. A. On solution of the boundary value problems posed for an equation with the third-order multiple characteristics in semi-bounded domains in three dimensional space // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, 2023. 29, 58, -pp. 2-14.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: «Наука», 1966. - 724 с.
14. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985, 590 стр.
15. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // Изв. вузов. Матем., 2021, №10. -С.60-70.

УДК 517.968

DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_4

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, д.ф.-м.н., профессор
aigarkyn.osh@mail.ru
Абдакимова Гулсара Кутбиллаевна
agulsara88@mail.ru.
Ошский технологический университет имени М. Адышева
Ош, Кыргызская Республика

Аннотация. *Рассматривается задача решения дифференциального уравнения в частных производных. Порядок уравнения равен трем, квазилинейный, а также неизвестная функция содержится под интегралом. Для такого уравнения были рассмотрены краевые условия и использован метод дополнительного аргумента.*

Ключевые слова: *Третий порядок, квазилинейный, интегральный оператор, краевые условия, принцип сжимающих отражений, конечный, однородный.*

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИН ИЗИЛДӨӨ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор
aigarkyn.osh@mail.ru
Абдакимова Гулсара Кутбиллаевна
agulsara88@mail.ru
М. Адышеватындагы Ош технологиялык университети
Ош, Кыргыз Республикасы

Аннотация. *Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемени чечүү маселеси каралган. Теңдеменин тартиби үчкө барабар, квазисызыктуу ошондой эле белгисиз функция интегралдын ичинде да камтылат. Мындай теңдеме үчүн чектик шарттар каралып, кошумча аргумент кийирүү усулу колдонулган.*

Ачкыч сөздөр: *Үчүнчү тартип, квазисызыктуу, интегралдык опреатор, чектик шарттар, кысып чагылтуулар принциби, чектелүү, бир тектүү.*

NVESTIGATION OF SOLUTIONS OF NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE THIRD ORDER

Ashirbaeva Aizharkyn Zhorobekovna- Doctor of Ph. and Math.l Sc., professor
aigarkyn.osh@mail.ru
Abdakimova Gulsara Kutbillaevna
agulsara88@mail.ru
Osh technological university named after the M. Adyshev
Kyrgyzstan,Osh

Abstract. *The problem of solving a partial differential equation is considered. The order of the equation is three, quasi-linear, and the unknown function is contained under the integral. For such an equation, boundary conditions were considered and the method of additional argument was used.*
Key words: *Third order, quasi-linear, integral operator, boundary conditions, principle of compressive reflections, finite, homogeneous.*

Введение. В данной работе использована предложенная в [1] схема применения метода дополнительного аргумента (МДА) для уравнений высокого порядка.

Исследование решений дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными различных типов с применением МДА рассмотрено в ряде работ. Исследование решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа новым способом рассмотрено в работах [2,6,7], а применение МДА для системы дифференциальных уравнений - в статьях [5,9]. Доказательства теорем существования и единственности решения начальной задачи для операторно-дифференциальных уравнений и систем таких уравнений приведены в работах [4,8].

В настоящее время представляет большой интерес нахождения приближенного решения начальной задачи с использованием МДА [3].

В предлагаемой статье мы рассмотрим начальные и предельные граничные условия для уравнения третьего порядка и приведем его к интегральному уравнению с использованием указанного метода на основе обозначений. Доказано существование решения предельной краевой задачи и ограниченность частных производных решения.

Постановка задачи.

Рассматривается уравнение:

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)-u_{txx}(t,x)-u(t,x)u_{xxx}(t,x)=F(t,x;u), \quad (1)$$

$$G_2(T)=[0,T]\times R,\ T\in R_+=(0,\infty).$$

Уравнение (1) интегро-дифференциальное, так как содержит интегральный оператор $F(t,x;u)$, содержащий функцию $u(t,x)$ в целом и под знаком интеграла.

Пусть оператор $F(t,x;u)$ имеет следующий конкретный вид:

$$F(t,x;u)=f(t,x,u,\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x,\xi)u(t,\xi)d\xi).$$

Рассматриваются условия для уравнения (1):

начальное:

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad (2)$$

предельное краевое:

$$u(t,\infty)=u_x(t,\infty)=0. \quad (3)$$

условие согласования: $\varphi(\infty)=\varphi'(\infty)=0$.

Методы решения.

Для (1) введем обозначение: $z(t,x)=u(t,x)-u_{xx}(t,x)$.

Тогда (1) принимает вид: $D[u(t,x)]z(t,x)=F(t,x;u)$.(4)

Следовательно, для задачи (4),(2) применяется МДА. Такие применения МДА можно посмотреть в работах [2-4].

Имеем эквивалентную начальной задаче (4), (2) систему интегральных уравнений(ИУ):

$$z(t,x)=\overline{\varphi}(p(0,t,x;u)+\int_0^t F(\eta,p(\eta,t,x;u);u(\eta,p(\eta,t,x;u))d\eta,\ (t,x)\in G_2(T) \tag{5}$$

$$p(\tau,t,x;v)=x-\int_\tau^t u(s,p(s,t,x;u))ds, (\tau,t,x)\in Q_2(T), \tag{6}$$

здесь $\overline{\varphi}=z(0,x)$,

$$Q_n(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_n,x)|\ 0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_n\le T,\ x\in R\};$$

Действительно (5), (6) удовлетворяет начальной задаче (4), (2). ИУ типа (6) и его свойства рассмотрены в работах [1-4]. Теперь рассмотрим уравнение (5) с условием (3). Из (5), (3) имеем

$$u(t,x)=\int_x^\infty e^{x-s}\int_{-\infty}^s e^{\xi-s}[\overline{\varphi}(p(0,t,\xi;u)+$$

$$+\int_0^t F(\eta,p(\eta,t,\xi;u);u(\eta,p(\eta,t,\xi;u))d\eta]d\xi ds,\quad (t,x)\in G_2(T). \tag{7}$$

Обозначая в (7) через $v(\tau,t,x)=u(\tau,p(\tau,t,x;u))$, имеем:

$$v(\tau,t,x)=\int_{p(\tau,t,x;v)}^\infty e^{p(\tau,t,x;v)-s}A(s;p,v)ds,\qquad (\tau,t,x)\in Q_2(T), \tag{8}$$

где $A(s,p,v)=\int_{-\infty}^s e^{\xi-s}[\overline{\varphi}(p(0,\tau,\xi;v)+\int_0^\tau F(\eta,p(\eta,\tau,\xi;v);v(\eta,\tau,\xi))d\eta]d\xi.$

В работе используется следующая лемма.

Лемма 1. Если $\varphi(p)=\int_p^\infty e^{p-s}\psi(s)ds,\quad \psi\in\overline{C}(R),$ то

$$\|\varphi\|\le\|\psi\|,\quad \|\varphi'\|\le 2\|\psi\|.$$

Доказательство. Дифференцируя, получаем

$$|\varphi'(p)|=\left|-\psi(p)+\int_p^\infty e^{p-s}\psi(s)ds\ \right|\le\|\psi\|+\|\psi\|=2\|\psi\|.$$

Пусть:

$\overline{C}$ -пространствонепрерывных и ограниченных функций;

Lip(N|$_u$,M|$_v$,…) класс функций, удовлетворяющих условию Липшица.

Теорема. Пусть $\overline{\varphi}(x)\in\overline{C}(R)\cap Lip\big|_L$,

$$f(t,x,u,I)\in\overline{C}(G_2(T))\times R\cap Lip(M\big|_x,N\big|_u,H\big|_I),\quad K(t,x,s)\in\overline{C}(G_2(T)\times R),$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t,x,s| ds < \gamma = const.$$

Тогда существует такое $T^* \in R_+$, что уравнение (8) имеет единственное решение в $\overline{C}(G_2(T^*))$.

Доказательство. Для (8) применяем принцип сжатых отображений(ПСО) и лемму 1:

$$|A(s,p,v)| = \int_{-\infty}^{s} e^{\xi - s}[\|\overline{\varphi}\| + \int_0^{\tau} \|F\| d\eta] d\xi \le \|\overline{\varphi}\| + T^* \|F\| = \overline{V}, \|v\| \le \overline{V}.$$

Из (6) и (8) получаем оценки:

$$\|p_{n+1} - p_n\| \le T^* \|v_{n+1} - v_n\|;$$

$$\|v_{n+1} - v_n\| \le \Bigg\| \int_{p_{n+1}(\tau,t,x;v)}^{\infty} e^{p_{n+1}(\tau,t,x;v)-s} A(s; p_{n+1}, v_{n+1}) ds -$$

$$- \int_{p_n(\tau,t,x;v)}^{\infty} e^{p_n(\tau,t,x;v)-s} A(s; p_{n+1}, v_{n+1}) ds +$$

$$+ \int_{p_n(\tau,t,x;v)}^{\infty} e^{p_n(\tau,t,x;v)-s} A(s; p_{n+1}, v_{n+1}) ds - \int_{p_n(\tau,t,x;v)}^{\infty} e^{p_n(\tau,t,x;v)-s} A(s; p_n, v_n) ds \Bigg\|,$$

$$(\tau, t, x) \in Q_2(T).$$

Отсюда в силу леммы1 получаем оценки:

$$\|v_{n+2} - v_{n+1}\| \le 2\|A(p_{n+1}, v_{n+1})\| \|p_{n+1} - p_n\| + \|A(p_{n+1}, v_{n+1}) - A(p_n, v_n\| \le$$

$$\le 2\overline{V}\|p_{n+1} - p_n\| + \underset{S}{Sup} \int_{-\infty}^{s} e^{p-s}[L\|p_{n+1} - p_n\| +$$

$$+ \int_0^{\tau} (M\|p_{n+1} - p_n\| + (N + H\gamma)\|v_{n+1} - v_n\|) d\alpha] ds \le$$

$$\le 2\overline{V}\|p_{n+1} - p_n\| + L\|p_{n+1} - p_n\| + T^* M\|p_{n+1} - p_n\| + t_0(N + H\gamma)\|v_{n+1} - v_n\| \le$$

$$\le (2\overline{V} + L + t_0 M) t_0 \|v_{n+1} - v_n\| + T^*(N + H\gamma)\|v_{n+1} - v_n\| \le$$

$$\le T^*((2\overline{V} + L + t_0 M) + N + H\gamma)\|v_{n+1} - v_n\|.$$

$$\|v_{n+2} - v_{n+1}\| \le T^*(2\overline{V} + L + t_0 M) + N + H\gamma)\|v_{n+1} - v_n\|.$$

Отсюда при $T^* < (2\overline{V} + L + T^* M + N + H\gamma)^{-1}$ по ПСО получаем доказательство теоремы.

Лемма 2. При $T \le T^*$, функция $v(\tau, t, x)$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные по всем аргументам.

Доказательство. Из доказательства теоремы получаем, что функция $v_\tau(\tau, t, x)$ ограничена:

$$v_\tau(\tau, t, x) = v\ \ (\tau, t, x) A(x - \int_{\tau}^{t} v(\eta, t, x) d\eta; p; v).$$

Теперь найдем производную по t :

$$v_t(\tau,t,x)=(v(t,t,x)+\int_{\tau}^{t}v_t(\eta,t,x)d\eta)A(x-\int_{\tau}^{t}v(\eta,t,x)d\eta;p;v)+$$

$$+\int_{p(\tau,t,x;v)}^{\infty}e^{p(\tau,t,x;v)-s}[-v(t,t,x)-\int_{\tau}^{t}v_t(\eta,t,x)d\eta]A(s,p,v)ds$$

Применим ПСО:

$$\|v_t\|\le\|K_1\|\cdot\|v\|+\|K_1\|\cdot\|v_t\|T^*.$$

$$\|v_t\|-\|K_1\|\cdot\|v_t\|T^*-\|K_1\|\cdot\|v\|\le 0,$$

где $\|A-K\|\le K_1=const,$

$$K(\tau,t,x;p,v)\equiv\int_{p(\tau,t,x;v)}^{\infty}e^{p(\tau,t,x;v)-s}A(s;p,v)ds.$$

Пусть

$$\|K_1\|\cdot\|v_t\|-\|v_t\|-\|K_1v\|=0.$$

Отсюда решая уравнение, получаем ограниченность v_t :

$$\|v_t\|\le M_0=const.$$

Аналогично получаем ограниченность v_x.

Из леммы 2 следует, что функция $p(\tau,t,x)$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные по всем аргументам.

Лемма 3. Производные u_t,u_x,u_{txx},u_{xxx} от решения задачи (1) - (2) - (3) равномерно ограничены.

Доказательство. Найдемпроизводные изИУ:

$$u(t,x)=\int_{x}^{\infty}e^{x-s}\int_{-\infty}^{s}e^{\xi-s}[\overline{\varphi}(p(0,t,\xi;u)+$$

$$+\int_{0}^{t}f(\eta,p(\eta,t,\xi;u),u(\eta,p(\eta,t,\xi;u),\int_{-\infty}^{\infty}K(\eta,p(\eta,t,\xi;u),\zeta)u(\eta,\zeta)d\zeta)d\eta]d\xi ds.$$

$$u_t(t,x)=\int_{x}^{\infty}e^{x-s}\int_{-\infty}^{s}e^{\rho-s}\{\overline{\varphi}'(-u(t,x)-\int_{0}^{t}v_t(\tau,t,\rho))d\tau)+$$

$$+f(t,x,u,I)+\int_{0}^{t}[f_x(\tau,p,v)p_t+f_u(\tau,p,v)v_t+$$

$$+f_I(\tau,p,v)\int_{-\infty}^{\infty}K_p(\eta,p(\eta,t,\xi;u),\zeta)u(\eta,\zeta)d\zeta)d\eta p_t]d\tau\}d\rho ds,$$

$$u_x(t,x)=-\int_{-\infty}^{x}e^{\rho-x}[\overline{\varphi}(p(0,t,\rho)+$$

$$+\int_0^t F(\nu, p(\nu,t,\rho);v(\nu,t,\rho))d\nu]d\rho ds+u(t,x),$$

$$u_{xxx}(t,x)=-[\overline{\varphi}'p_x+\int_0^t[f_x p_x+f_u v_x++f_I\int_{-\infty}^{\infty}K_p u(\eta,\zeta)d\zeta)d\eta p_x]d\tau\}d\rho ds+u_x(t,x).$$

Ограниченность u_{txx} следует из равенства

$$u_{txx}=u_t+uu_x-uu_{xxx}=f\ .$$

Вывод. Интегро-дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка с начальным и предельным граничным условиямиприведено к решению ИУ. Доказано существование единственного решения, имеющее ограниченные частные производные.

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента:Автореф. дисс. докт. физ.–матем. наук, 01.01.02 [Текст] / А.Ж. Аширбаева.- Бищкек, 2012. - - 34 с.
2. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального урав-нения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазия-ева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.
3. Аширбаева А.Ж. Приближенное решение начальной задачи для нели-нейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Ашир-баева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып. 46. – С. 37–40.
4. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейного операторно-дифференциаль-ного уравнения в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазия-ева // Вестник КРСУ. 2015. –Т.15 –№5. – С. 61–64.
5. Аширбаева А.Ж. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительногоаргу-мента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Естественные и ма-тематические науки в современном мире. Новосибирск, 2017.-№1(48). -С.111-124.
6. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального урав-нения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазия-ева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.
7. Мамазиаева Э.А. Исследование решений операторно-дифференциаль-ного уравнения гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – Ош, 2014. – № 3. -С. 27–32.
8. Мамбетов Ж.И. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими пере-менными методом дополнительного аргумента[Текст] / А.Ж. Ашир-баева, Э.А. Мамазиаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. –№5. – С. 81–86.
9. Мамбетов Ж.И. Решение системы интегро-дифференциальных уравне-ний методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж. И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. Специальный выпуск – Ош, 2013. – № 1. -С. 91–94.

УДК 517. 928
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_5

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, д.ф.-м.н., профессор
aijarkyn.osh@mail.ru
Бекиева Малика Раимжоновна, преподаватель
malikabekieva@gmail.com
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Для нелинейной системы второго порядка рассматривается задача Коши. Данная задача сводится к интегральному уравнению с использованием нескольких обозначений. Приведение задачи к интегральному уравнению, таким образом, является одной из актуальных задач. В работе рассмотрена система, нелинейная относительно неизвестной функции.*

Ключевые слова: *Частные производные, второй порядок, система, интегральное уравнение, нелинейное, обозначение, новые функции.*

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН БИР СИСТЕМАСЫ ЖӨНҮНДӨ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор
aijarkyn.osh@mail.ru
Бекиева Малика Раимжоновна, окутуучу
Malikabekieva@gmail.com
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Сызыктуу эмес экинчи тартип системасы үчүн Коши маселеси каралган. Колган маселе бир нече белгилерди колдонуу менен интегралдык теңдемеге келтирилген. Маселени ушундай жол менен интегралдык теңдемеге келтирүү актуалдуу маселелердин бири болуп саналат. Макалада каралып жаткан система белгисиз функцияга карата сызыктуу эмес.*

Ачкыч сөздөр: *Жекече туундулар, экинчи тартип, система, интегралдык теңдеме, сызыктуу эмес, белгилөө, жаңы функциялар.*

ON A SYSTEM OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna, Dr Sc, professor
aijarkyn.osh@mail.ru
Bekieva Malika Raimjonovna, teacher
malikabekieva@gmail.com
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The Cauchy problem is considered for a nonlinear second-order system. This problem is reduced to an integral equation using several notations. Thus, reducing the problem to an integral equation is one of the urgent tasks. The paper considers a system that is nonlinear with respect to an unknown function.*

Keywords: *Partial derivatives, second order, system, integral equation, nonlinear, notation, new functions.*

Введение. При решении поставленной задачи Коши используем метод дополнительно аргумента (МДА). При использовании этого метода данное уравнение должно быть записано в удобной операторной форме. Чтобы записать уравнение в операторной форме, мы используем обозначения и вводим новые неизвестные функции. Такой подход использовался в статьях [4-5].

Применению МДА для дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка со многими переменными посвящены работы [1,3].

Постановка задачи. Рассмотрим систему, нелинейную относительно неизвестной функции вида:

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2(t,x)u_{xx} + a_1(t,x)u + b_1(t,x)\omega + f_1(t,x,u,\omega) \\ \omega_{tt} = k^2(t,x)\omega_{xx} + a_2(t,x)u + b_2(t,x)\omega + f_2(t,x,u,\omega). \end{cases} \quad (1)$$

Системы второго порядка (1) рассматривается со следующими условиями:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial^k \omega}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \omega_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \quad (3)$$

В работе используются пространства функций $\overline{C}^{(k)}(\Omega)$, $Q_m(T)$ введенные в[1].

Методы решения.

С заданной функцией $k(t,x) \in \overline{C}^{(2)}(Q_1(T))$ будем решать следующие интегральные уравнения (ИУ) относительно $p(s,t,x)$, $q(s,t,x)$:

$$p(s,t,x) = x - \int_s^t k(\nu, p(\nu,t,x))d\nu, (s,t,x) \in Q_2(T), \quad (4)$$

$$q(s,t,x) = x + \int_s^t k(\nu, q(\nu,t,x))d\nu, (s,t,x) \in Q_2(T). \quad (5)$$

Введем новые неизвестные функции и обозначения:

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\vartheta_1(t,x) = D[-k(t,x)]u(t,x), \quad (6)$$

$$\vartheta_2(t,x) = D[-k(t,x)]\omega(t,x), \quad (7)$$

$$g(t,x) = \frac{-1}{k(t,x)}[k_t(t,x) + k(t,x)k_x(t,x)],$$

$$\beta(t,x) = D[k(t,x)]g(t,x).$$

Из (6), (7) используя МДА соответственно получаем:

$$u(t,x) = u_0\big(p(0,t,x)\big) + \int_0^t \vartheta_1\big(s, p(s,t,x)\big)ds, \quad (8)$$

$$\omega(t,x)=\omega_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t \vartheta_2\big(s,p(s,t,x)\big)ds \tag{9}$$

Теорема.

Пусть: $u_k(x),\omega_k(x)\in \overline{C}^{(2-k)}(R),\ (k=0,1)$,

$a_i(t,x),b_i(t,x)\in \overline{C}^{(2)}(Q_1(T)),\ f_i(t,x,u,\omega)\in \overline{C}^{(2)}(Q_1(T)\times R^2)$.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение в $\overline{C}(Q_1(T^*))$, где $T^*>0$ определяется из исходных данных.

Доказательство. Задача (1)-(3) с помощью МДА сводиться к решению следующей системы:

$$\begin{aligned}\vartheta_1(t,x)&=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)u-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_1(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)u(s,q)ds+\\&+\int_0^t a_1(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t b_1(s,q)\omega(s,q)ds+\int_0^t f_1(s,q,u(s,q),\omega(s,q))ds,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2(t,x)&=\frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\omega-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_2(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\omega(s,q)ds+\\&+\int_0^t a_2(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t b_2(s,q)\omega(s,q)ds+\int_0^t f_2(s,q,u(s,q),\omega(s,q))ds,\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\big[2\vartheta_1(t,x)-g(t,x)u(t,x)\big]\big|_{t=0}=\varphi_1(x),$$
$$\big[2\vartheta_2(t,x)-g(t,x)\omega(t,x)\big]\big|_{t=0}=\varphi_2(x).$$

Сначала докажем, что система (10), (11) удовлетворяет задачу (1)-(3).

Дифференцируя (10), имеем:

$$\begin{aligned}&\vartheta_{1t}(t,x)+k(t,x)\vartheta_{1x}(t,x)=k(t,x)g(t,x)u_x(t,x)+a_1(t,x)u(t,x)+\\&+b_1(t,x)\omega(t,x)+f_1(t,x,u,\omega).\end{aligned} \tag{12}$$

Принимая во внимание введенные обозначения (6), из (12) получаем первое уравнение системы (1). Точно так же дифференцируя (11), получаем второе уравнение системы (1). ИУ (10), (11) удовлетворяют (2), (3).

Теперь введя обозначения:

$$z_1(t,x;u)=2\vartheta_1(t,x)-g(t,x)u(t,x),$$
$$z_2(t,x;u)=2\vartheta_2(t,x)-g(t,x)\omega(t,x),$$

запишем систему (1) в виде оператора:

$$D[k(t,x)]z_1(t,x;u)=-g(t,x)\vartheta_1(t,x)-\beta(t,x)u+2a_1(t,x)u+2b_1(t,x)\omega+2f_1(t,x,u,\omega),$$
$$D[k(t,x)]z_2(t,x;u)=-g(t,x)\vartheta_2(t,x)-\beta(t,x)\omega+2a_2(t,x)u+2b_2(t,x)\omega+2f_2(t,x,u,\omega).$$

Для последней системы применяя МДА, получаем систему ИУ (10), (11).

Теперь подставляя (8), (9) в (10), (11), получаем систему

ИУ относительно неизвестных функций $\vartheta_1(t,x),\quad \vartheta_2(t,x)$ в операторном виде:

$$A\vartheta_1=\vartheta_1(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\left(u_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t\vartheta_1\big(s,p(s,t,x)\big)ds\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_1(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\beta(s,q)\left(u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_1\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds+ \tag{13}$$
$$+\int_0^t a_1(s,q)\left(u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_1\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds+$$
$$+\int_0^t b_1(s,q)\left(\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_2\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds+$$
$$+\int_0^t f_1(s,q,u_0\big(p(0,s,q)\big)+\int_0^s\vartheta_1\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau,\omega_0\big(p(0,s,q)\big)+\int_0^s\vartheta_2\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau)ds,$$
$$A\vartheta_2=\vartheta_2(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\left(\omega_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t\vartheta_2\big(s,p(s,t,x)\big)ds\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_2(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\beta(s,q)\left(\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_2\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds+ \tag{14}$$
$$+\int_0^t a_2(s,q)\left(u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_1\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds+$$
$$+\int_0^t b_2(s,q)\left(\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_2\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds+$$
$$++\int_0^t f_2(s,q,u_0\big(p(0,s,q)\big)+\int_0^s\vartheta_1\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau,\omega_0\big(p(0,s,q)\big)+\int_0^s\vartheta_2\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau)ds.$$

Для системы ИУ (13), (14) применяя принцип сжатых отображений, докажем, что при $T^*>0,$ что система имеет единственное решение в $\overline{C}(Q_1(T^*))$.

Пусть $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2)$ решение системы (13), (14), удовлетворяющее неравенству:

$$\|\vartheta-\phi\|\le M=const,\quad i=1,2,\quad \phi=(\phi_1,\phi_2),$$

$$\phi_1=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)u_0\big(p(0,t,x)\big)-\frac{1}{2}\int_0^t\beta(s,q)u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds+$$
$$+\int_0^t a_1(s,q)u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds+\int_0^t b_1(s,q)\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds,$$

$$\phi_2=\frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\omega_0\big(p(0,t,x)\big)-\frac{1}{2}\int_0^t\beta(s,q)\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds+$$
$$+\int_0^t a_2(s,q)u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds+\int_0^t b_2(s,q)\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds.$$

Покажем, что при $T<T_*$ операторыA_1, A_2 являются операторами сжатия

$$\|A_i\vartheta-\phi_i\|\le(\|g\|K+\|f_i\|)T+(\|a_i\|+\|b_i\|+\frac{1}{2}\|\beta\|)K\frac{T^2}{2}=\Omega_i(T),\quad i=1,2,$$

где

$$\|\vartheta\| \le \|\phi\| + M = K.$$

Справедливы оценки:

$$\left\|A_i\vartheta^1 - A_i\vartheta^2\right\| \le \theta_i(T)\left\|\vartheta^1 - \vartheta^2\right\|, \quad i = 1,2,$$

где

$$\theta_i(T) = \|g\|T + (\|a_i\| + \|b_i\| + \frac{1}{2}\|\beta\| + L_i^1 + L_i^2)\frac{T^2}{2}, \quad i = 1,2,$$

где $f_i(t,x,u,\omega) \in Lip(L_i^1\big|_u, L_i^2\big|_\omega)$.

Обозначим через $T_i,\, i = 1,2,3,4 -$ положительные корни уравнений $\Omega_i(T) = M$, $\theta_i(T) = 1, \quad i = 1,2.$

При $T < T^* = \min\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ система ИУ (13), (14) имеет единственное решение, следовательно, задача (1)-(3) тоже имеет единственное решение. Теорема доказана.

Вывод. Полученный результат также можно распространить на случай, если коэффициенты производных неизвестных функций второго порядка по аргументу x разные.

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Исследования решения нелинейного дифференциально-го уравнения в частных производных [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Вестник ОшГУ, Серия естественных наук. - 2008.– № 1. – С. 140–144.
2. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента: Автореф. дисс. … докт. физ.–матем. наук, 01.01.02 [Текст] / А.Ж. Аширбаева.- Бищкек, 2012. - 34 с.
3. Аширбаева А.Ж. Сведение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с n+1 независи-мыми переменными к решению интегрального уравнения [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Вестник ОшГУ. –2013. – № 1. – Спец. выпуск – С. 82-86.
4. Аширбаева А.Ж. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Биш-кек, 2017. –№5. – С. 87–90.
5. Аширбаева А.Ж. Новый способ решения общего уравнения гиперболического типа / А.Ж. Аширбаева // Математическое образование. Москва, 2019. Вып.3(87). С.12-16.

УДК 517.968

DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_6

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Басаров Сержан Жандосулы
bassarov.serzhan98@gmail.com
Евразийский Национальный Университет им. Л.Н.Гумилева
Бекмаганбетов Куаныш Абдрахманович, д.ф.-м.н., профессор
bekmaganbetov-ka@yandex.ru
Нурсултанов Ерлан Даутбекович, д.ф.-м.н., профессор
er-nurs@yandex.ru
Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова
Астана, Казахстан

Аннотация. *В работе мы вводим пространство стохастических процессов с непрерывным временем. Доказана интерполяционная теорема типа Марцинкевича для этих пространств для квазилинейных операторов.*

Ключевые слова: *стохастические процессы, мартингалы, интерполяционная теорема типа Марцинкевича, интеграл Ито, остановленный процесс.*

INTERPOLATION METHODS FOR SPACES OF STOCHASTIC PROCESSES

Basarov Serzhan Zhandosuly
bassarov.serzhan98@gmail.com
Eurasian National University named after. L.N. Gumileva
Bekmaganbetov Kuanysh Abdrakhmanovich, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor
bekmaganbetov-ka@yandex.ru
Nursultanov Erlan Dautbekovich, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor
er-nurs@yandex.ru
Kazakhstan branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov
Astana, Kazakhstan

Abstract. *In this paper we define spaces of continuous stochastic processes. We obtain the Marcinkiewicz-type interpolation theorem for such spaces and quasi-linear operators.*

Keywords. *stochastic processes, martingales, the Marcinkiewicz-type interpolation theorem, Ito's integral, stopped process.*

1. Пространство $N_{p,q}(F)$ и его свойства

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) и некоторая фильтрация $F = \{\mathrm{F}_t\}_{t\in T}$, где $T \subset \mathrm{R}$, то есть неубывающее семейство σ-алгебр $\Im_t$, $t \in T$, таких, что $\Im_s \subseteq \Im_t \subseteq \Im$ *при* $s \le t,\ s,t \in T$.

Пусть стохастический процесс $X=\{X_t\}_{t\in T}$, где $X_t:\Omega\to \mathrm{R}$ согласован с фильтрацией $F=\{\Im_t\}_{t\in T}$, то есть X_t является $\Im_t$-измеримой величиной при каждом $t\in T$. Для стохастического процесса $X=\{X_t,\Im_t\}_{t\in T}$ определим функцию

$$\overline{X}_t(F)=\sup_{A\in\Im_t,P(A)>0}\frac{1}{P(A)}\left|\int_A X_t P(d\omega)\right|.$$

Эту функцию назовем мажорантой процесса X по фильтрации F .

Пусть $0<p<\infty$, $0<q\le\infty$ и $T=[0,\infty)$. Через $N_{p,q}(F)$ ([3], [4]), обозначим множество стохастических процессов X, определенных на F для которых конечен функционал

$$\|X\|_{N_{p,q}}(F)=\begin{cases}\left(\int_0^\infty\left(t^{-1/p}\,\overline{X}_t\right)^q\dfrac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{при}\quad 0<q<\infty\\ \sup\limits_{t 0} t^{-1/p}\,\overline{X}_t & \text{при}\quad q=\infty\end{cases}. \qquad (1)$$

Так как интерес представляет поведение стохастического процесса при $t\to\infty$, то в дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые нами процессы таковы, что их нормы не имеют особенностей при $t=0$.

Говорят [1], что стохастический процесс $X=\{X_t,\Im_t\}_{t\in T}$ является мартингалом, если выполнены следующие условия:

1) $E|X_t|<\infty$, $t\in T$;

2) $E(X_t\,|\,\Im_s)=X_s$ (п. н), $s,t\in T$, $s\le t$;

субмартингалом, если

2′) $E(X_t\,|\,\Im_s)\ \ X_s$ (п. н), $s,t\in T$, $s\le t$;

супермартингалом, если

2″) $E(X_t\,|\,\Im_s)\Box X_s$ (п. н), $s,t\in T$, $s\le t$.

Определение 2. Пусть $F=\{\Im_t\}_{t\in T}$ -- некоторая фильтрация. Будем говорить, что процесс X принадлежит классу $W(F)$, если найдется константа C, такая, что для любых $1\boxed{\leqq}s\boxed{\leqq}t$ и произвольных $A\in\Im_s$ справедливо неравенство

$$\left|\int_A X_s P(d\omega)\right|\boxed{\leqq}C\left|\int_A X_t P(d\omega)\right|.$$

Введенный класс $W(F)$ содержит мартингалы, неотрицательные субмартингалы, неположительные супермартингалы. Свойство процесса, определяющее его принадлежность классу $W(F)$, назовем обобщенной монотонностью.

Следующие леммы описывают свойства постранств $N_{p,q}(F)$.

Лемма 1. Пусть стохастический процесс X принадлежит классу $W(F)$. Тогда при $0<q\le q_1\le\infty$ справедливо неравенство

$$\|X\|_{N_{p,q1}(F)}\le c\|X\|_{N_{p,q}(F)}.$$

Лемма 2. Пусть $0 < p < \infty,\ a > 1$. Если стохастический процесс X принадлежит классу $W(F)$, то при $0 < q < \infty$ справедливо соотношение

$$\|X\|_{N_{p,q}(F)} \approx \left(\sum_{k \in Z} \left(a^{-k/p}\, \overline{X}_{a^k} \right)^q \right)^{1/q},$$

а при $q = \infty$

$$\|X\|_{N_{p,\infty}(F)} \approx \sup_{k \in Z} a^{-k/p}\, \overline{X}_{a^k}{}^{1/q}.$$

Лемма 3. (Неравенство Гельдера). Пусть $0 < p, p_1, p_2 < \infty$, $0 < q, q_1, q_2 \le \infty$ и $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $1/q = 1/q_1 + 1/q_2$. Если стахостические процессы $X = (X_t, \overline{\mathfrak{I}}_t)$ и $Y = (Y_t, \overline{\mathfrak{I}}_t)$ являются процессами из классов $N_{p1,q1}(F)$ и $N_{p2,q2}(F)$ соответственно, то процесс $XY = (X_t Y_t, \overline{\mathfrak{I}}_t)$ принадлежит $N_{p,q}(F)$ и верно неравенство

$$\|XY\|_{N_{p,q1}(F)} \le \|X\|_{N_{p1,q1}(F)} \|Y\|_{N_{p2,q2}(F)}.$$

Лемма 4. (Неравенство Харди). Пусть $s \ge 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,$ тогда для неотрицательной последовательности $a = \{a\}_{k \in Z}$ имеют место наравенства:

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{-\alpha k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-\beta m} a_m \right)^s \right)^{1/s} \le C_{\alpha,\beta,\gamma,s} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{-(\beta+\alpha/\gamma)k} a^k \right)^s \right)^{1/s},$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha k} \sum_{m=\gamma k}^{\infty} 2^{-\beta m} a_m \right)^s \right)^{1/s} \le C_{\alpha,\beta,\gamma,s} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{-(\beta-\alpha/\gamma)k} a^k \right)^s \right)^{1/s}.$$

2. Интерполяционные методы для стохастических процессов

Пусть $A(F) = (A_0(F), A_1(F))$ -- пара квазинормированных собственных подпространств линейного хаусдорфового пространства $\aleph(F)$ стохастических процессов, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ с фильтрацией $F = \{\mathfrak{I}_t\}_{t \in T}$. Очевидно, эта пара является совместимой парой и, следовательно, для нее определяется шкала интерполяционных пространств относительно вещественного метода [2].

Пусть $0 < \theta < 1$. При $0 < q < \infty$ положим

$$A_{\theta,q} = (A_0, A_1)_{\theta,q} = \left\{ X \in \aleph(F) : \|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^{\infty} (t^{-\theta} K(t,X))^q \frac{dt}{t} \right)^q < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$

$$A_{\theta,\infty} = (A_0, A_1)_{\theta,\infty} = \left\{ X \in \aleph(F) : \|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,X) < \infty \right\},$$

где

$$K(t, X; A_0, A_1) = \inf_{X = X_0 + X_1} (\|X_0\|_{A_0} + t\|X_1\|_{A_1}) \text{ -- функционал Петре.}$$

Рассмотрим следующую модификацию интерполяционного метода.

Случайная величина $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ называется марковским моментом (относительно фильтрации $F = \{\mathfrak{I}_t\}_{t \in T}$), если $\{\omega : \tau(\omega) \square t\} \in \mathfrak{I}_t$ для каждого $t \in T$. Марковский момент называется моментом остановки, если $\tau(\omega) < \infty$ (п.н.) (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

Пусть $\Re = \{\tau(\omega)\}$ -- моменты остановок относительно фильтрации F, $A(F) = (A_0(F), A_1(F))$ -- пара квазинормированных собственных подпространств $\aleph(F)$. Для $X \in \aleph(F)$ определим функционал

$$K_{\Re}(t, X) = K(t, X; A_0, A_1; \Re) = \inf_{\tau \in \mathrm{T}} (\|X - X^{\tau}\|_{A_0} + t\|X^{\tau}\|_{A_1}),\ t > 0.$$

Здесь точная нижняя грань берется по всем остановкам из $\Re$. При $0 < q < \infty$ положим

$$A_{\theta,q}^{\mathrm{T}} = (A_0, A_1)_{\theta,q}^{\Re} = \left\{ X \in \aleph(F) : \|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}^{\mathrm{T}}} = \left(\int_0^{\infty} (t^{-\theta} K_{\mathrm{T}}(t, X))^q \frac{dt}{t} \right)^q < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$

$$A_{\theta,\infty}^{\Re} = (A_0, A_1)_{\theta,\infty}^{\Re} = \left\{ X \in \aleph(F) : \|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}^{\mathrm{T}}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K_{\Re}(t, X) < \infty \right\}.$$

Очевидно, что $K(t, X) \leqq K_{\Re}(t, X)$ для всех $t > 0$, и следовательно, имеет место вложение $A_{\theta,q}^{\Re} \subseteq A_{\theta,q}$.

Пусть T – преобразование стохастического процесса X. Будем говорить, что преобразование T квазилинейно, если найдется $C > 0$ такое, что

$$\left|(T(X))_t - (T(Y))_t\right| \leqq C\left|(T(X - Y))_t\right| \ \text{для любого}\ t \in T\ (\text{п.н.}). \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть $(A_0(F), A_1(F))$, $(B_0(\Phi), B_1(\Phi))$ -- две совместимые пары пространств стохастических процессов и $\Re = \{\tau(\omega)\}$ – некоторое фиксированное семейство моментов остановок относительно фильтрации F. Если T – преобразование стохастического процесса X и выполнены условия

$$\|T(X - X^{\tau})\|_{B_0} \leq M_0 \|X - X^{\tau}\|_{A_0},\quad \|T(X^{\tau})\|_{B_1} \leq M_1 \|X^{\tau}\|_{A_1}$$

для всех остановок $\tau \in \Re$, то верно неравенство

$$\|T(X)\|_{B_{\theta,q}} \leq C M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|X\|_{A_{\theta,q}^{\Re}},$$

где C -- константа из определения квазилинейности преобразования T.

Теорема 2. Пусть $X = \{X_t, \Im_t\}_{t \in T} \in W(F)$ и $1 < p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leqq q_0, q_1, q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $\Re = \{a^k\}_{k \in \mathrm{Z}}$ -- последовательность остановок. Тогда справедливы неравенства

$$\|X\|_{N_{p,q}(F)} \leq c_1 \|X\|_{(N_{p_0,q_0}(F), N_{p_1,q_1}(F))_{\theta q}},$$

$$\|X\|_{(N_{p_0,q_0}(F), N_{p_1,q_1}(F))_{\theta q}^{\Re}} \leq c_2 \|X\|_{N_{p,q}(F)},$$

где константы c_1, c_2 зависят только от параметров $p_i, q_i (i = 0,1)$ и θ.

2.1 Ограниченность некоторых операторов в классах $N_{p,q}(F)$

Пусть $X = \{X_t, t \geq 0\}$ -- стохастический процесс заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$. Пусть, далее $\Im_t^X$ -- σ-алгебра, порожденная величинами $X_s, 0 \leq s \leq t$. Положим $\Im^X = \sigma\{X_t, t \geq 0\}$. Будем считать, что вероятностное пространство полно и σ-алгебры $\Im^X, \Im_t^X$ $(t \geq 0)$ расширены классом $\aleph$ событий нулевой вероятности. Рассматривается естественная фильтрация $\left(\Im_t^X\right)_{t\geq 0}$.

Тогда для стохастического процесса $f_s(\omega)$ можно определить интеграл Ито

$$I_t(f) = \int_{(0,t]} f_s(\omega) dX_s(\omega), \quad t \in [0, \infty).$$

Если $X_s(\omega)$ и $f_s(\omega)$ – мартингалы, то интеграл Ито $I_t(f)$ является мартингалом.

Теорема 3. Пусть $0 < q < p < \infty$, $1 \leq \gamma \leqq \infty$, $1/r = 1/q - 1/p$. Пусть $f(t)$ – детерминированная функция из $C^1([0,\infty))$ такая, что

$$\sup_{t>0} t^{-1/r} f(t) + \sup_{t>0} t^{1-1/r} f'(t) \leqq B < \infty,$$

тогда имеет место неравенство

$$\|I_t(f)\|_{N_{q,\gamma}}(G) \leqq CB\|X\|_{N_{p,\gamma}}(G),$$

где константа C зависит только от параметров p, q, γ.

Теорема 4. Пусть $0 < p < \infty$, $1 \leqq q \leq \infty$, процесс $X = (X_t, \wp_t)_{t0}$ из $W(G)$, $\tau(\omega)$ -- марковский момент, $X^\tau = (X_{t\wedge\tau}, \wp_t)_{t\geq 0}$ – остановленный процесс. Тогда имеет место неравенство

$$\|X^\tau\|_{N_{p,q}}(G) \leqq C\|X\|_{N_{p,q}}(G).$$

Следствие 1. Пусть $0 < p < \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$, процесс $X = (X_t, \wp_t)_{t0}$ является неотрицательным субмартингалом. Тогда процесс $X^* = (X_t^*, \wp_t)_{t0}$ также является субмартингалом и имеет место

$$\|X^*\|_{N_{p,q}}(G) \approx \|X\|_{N_{p,q}}(G).$$

Данная работа поддержана грантом Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488613).

Литература

1. Ширяев А.Н. Вероятность. -- М.: Наука, 1980. -- 574 с.
2. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. -- М.: Мир, 1980, 264 с.
3. Nursultanov E., Tikhonov S. \\Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. – 2011. – Vol. 21, no. 950-981, DOI 10.1007/s12220-010-9175-7
4. Nursultanov E.D. Net spaces and unequalities of Hardy-Littlewood – Sb.math., vol.189, # 3, (1998). 399-419 p.
5. Nursultanov E., Tikhonov S. Weighted norm inequalities for convolution and Riesz potential // Potential Anal. -- 2015. -- V. 42, 157 2. -- P. 435 -- 456.
6. Nursultanov E.D., Ruzhansky M.V., Tikhonov S.Yu. The Nikolskii Inequality and Functional Classes on Compact Lie Groups // Functional Analysis and Its Applications. -- 2015. -- V. 49, 157 3. -- P. 83 -- 87.
7. Нурсултанов М.Е. Спектральные свойства оператора Шрёдингера с δ-распределением // Матем. заметки. -- 2016. -- Т. 100, 157 2. -- С. 256-269.

8. Дьяченко М.И., Нурсултанов Е.Д., Нурсултанов М.Е., Теорема Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Матем. заметки . -- 2016. -- Т. 99, 157 4. -- С. 502-510.
9. Акылжанов Р.Х., Нурсултанов Е.Д., Ружанский М.В. Неравенства типа Харди-Литтлвуда-Пэли на компактных группах Ли // Матем. заметки. -- 2016. -- Т. 100, 157 2. -- С. 79-82.
10. Akylzhanov R., Nursultanov E., Ruzhansky M. Hardy-Littlewood-Paley inequalities and Fourier multipliers on SU(2) // Stud. Mathematica. -- 2016. -- V. 234, 157 1. -- P. 1-29.
11. Tleukhanova N.T., Nursultanov E.D. Summability of the Fourier cofficients of function from anisotropic Lorentz space // AIP Conference Proceedings 1676, 020071 (2016); doi: 10.1063/1.4930497
12. Tleukhanova N.T., Ydyrys A. On multipliers of Fourier series in the Lorentz space // AIP Conference Proceedings 1676, 020071 (2016); doi: 10.1063/1.4930497
13. Nursultanov E. D., Ruzhansky M. V., and Tikhonov S. Yu , Nikolskii Inequality and Besov, Tribel-Lizorkin and Beurling Spaces s on Compact Hoomogeneous manifolds\\ Ann. Sc. Norm/Super. Pisa CI. Sci (5) Vol 15(2016), 981-1017
14. Dzhumabaeva, D. G.; Dyachenko, M. I.; Nursultanov, E. D.On convergence of multiple trigonometric series with monotone coefficients, SIBERIAN MATHEMATICAL JOURNAL -2017- Vol. 58 no 2 p. 205-214
15. Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Ye. Interpolation properties of anisotropic Nikol'skii-Besov $B_{pr}^{\alpha q}(\mathrm{T}^d)$ spaces and embedding theorems // International Conference on Analysis and Applied Mathematics, серия AIP Conference Proceedings, т. 1759 (2016), с. 020134-1- 020134-5
16. Tleukhanova N. Reconstruction Operator of Functions from the Sobolev Space. // Fourier analysis and approximation theory. Editors: M. Ruzhanskii, S. Tikhonov, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhauser, Barcelona, 2016. P 181-191. ISSN 2296-5009
17. Kopezhanova A.N., Nursultanov E.D., Persson L.-E. Boas theorem for some Lorentz spaces // Lulea university of Technology, Department of Mathematics, Research report 2. -- 2015. -- 21 p.
18. Ыдырыс А. Асимптотика кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестник МГУ. Серия математика. -- 2015. -- 157 6. -- С. 15 -- 22.
19. Akylzhanov R., Nursultanov E., Ruzhansky M. Hardy-Littlewood, Hausdor- Young-Paley inequalities, and $L_p - L_q$ multipliers on compact homogeneous manifolds // arXiv:1504.07043, 2015.
20. Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. О проблеме мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье // Тезисы докладов международной конференции: Функциональные пространства и теория приближения функций. -- Москва, 2015. -- С. 190.
21. Nursultanov E.D., Tikhonov S.Yu., Tleukhanova N.T. Norm convolution inequalities in L_p // Тезисы докладов международной конференции: Функциональные пространства и теория приближения функций. -- Москва, 2015. -- С. 41.
22. Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T. On multipliers of Fourier series // Тезисы докладов 10-го международного конгресса "`ISSAC-2015'". -- Макао, 2015. -- С. 172.
23. Akylzhanov R. Hardy-Littlewood, Hausdorff-Young-Paley inequalities, and $L_p - L_q$ Fourier multipliers on compact homogeneous manifolds // Тезисы докладов 10-го международного конгресса "`ISSAC-2015'". -- Макао, 2015. -- С. 173.
24. Nursultanov E. Interpolation theorem for Morrey-type spaces and its corollaries // Analysis and Partial Differential Equations. Pure Analysis and PDE Group Imperial College London, UK.P.11/ 2016
25. Nursultanov E.D., Tikhonov S.Yu., Tleukhanova N.T. Norm convolution inequalities in L_p // Тезисы докладов международной конференции: Актуальные проблемы математики и математического моделирования. - Алматы, 2015.
26. Джумабаева Д.Г. О сходимости кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Тезисы докладов международной конференции: Теория функций, информатика, дифференциальные уравнения и их приложения. - Алматы, 2015.
27. Nursultanov E., Tleukhanova N. Summability of the Fourier coefficients of functions from anisotropic Lorentz space // Third International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2016): тезисы Международной научной конференции. -- Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2016. -- С. 88.
28. Ydyrys A., Tleukhanova N. On multipliers of Fourier series in the Lorentz space // Third International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2016): тезисы Международной научной конференции. -- Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2016. -- С. 119.
29. Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Ye. Interpolation properties of anisotropic Nikol'skii-Besov $B_{pr}^{\alpha q}(\mathrm{T}^d)$ spaces and embedding theorems // Third International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2016): тезисы Международной научной конференции. -- Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2016. -- С. 42-43.

30. Бекмаганбетов К.А., Толеугазы Е. О порядке тригонометрического поперечника анизотропного класса Никольского// Abstracts International scientific conference:`Weighted estimates of differential and integral operators and their applicatons.' Астана: ЕНУ им.Л.Н.Гумилева -2017- с.32-35.
31. Tleukhanova N.T., Nursultanov E.D. Recovery operator of periodic functions from the spaces. // Abstracts International scientific conference:`Weighted estimates of differential and integral operators and their applicatons.' Астана: ЕНУ им.Л.Н.Гумилева -2017- p.83-85.
32. Джумабаева Д.Г. О сходимости кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Международный научный симпозиум:Теория функций, функциональный анализ и их приложения - Астана: КФ МГУ им.М.В.Ломоносова --2017-с.36-37
33. Ыдырыс А.Ж. About the multipliers of Fourier series on Lorentz space // Международный научный симпозиум Международный научный симпозиум:Теория функций, функциональный анализ и их приложения - Астана: КФ МГУ им.М.В.Ломоносова -2017-с.73-74
34. Bekmaganbetov K.,Toleugazy Y. - About of the orthoprojection widths of the anisotropic Nikol'ski-Besov classes - Abstracts of the VI congress of the turkic world mathematical society - Astana - 2017 - p.163-164
35. Jumabayeva D. - On multiplers of Foutier-Haar series - Abstracts of the VI congress of the turkic world mathematical society - Astana - 2017 - p. 192-194.
36. Nursultanov E. - Net spaces and their applications - Abstracts of the VI congress of the turkic world mathematical society - Astana - 2017 - p. 214-215.
37. Nursultanov E., Sarybekova L., Tleukhanova N. - Some new Fourier multiplier results of Lizorkin and Hermander types - Abstracts of the VI congress of the turkic world mathematical society - Astana - 2017 - p. 2015-2016.
38. Tleukhanova N. - Recovery operator of periodic functions - Abstracts of the VI congress of the turkic world mathematical society - Astana - 2017 - p. 241-242.
39. Международная конференция "`Функциональные пространства и теория приближения функций"', Москва, 2015.
40. 10-ый международный конгресс "`ISSAC-2015"', Макао (Китай), 2015.
41. Международная конференция "`Теория функций, информатика, дифференциальные уравнения и их приложения"', Алматы, 2015.
42. Третья Международная научная конференция "Анализ и прикладная математика" ICAAM 2016: --Алматы.
43. Международная конференция "Весовые оценки дифференциальных и интегральных операторов и их приложения", Астана, 2017.VI конгресс мирового математического общества тюркских народов, Астана, 2017.

УДК 517.9
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_7

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ В КПП-МОДЕЛИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Давыдов Алексей Александрович, д.ф.м.н., профессор
davydov@mi-ras.ru
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Москва, Россия
International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA)
Laxenburg, Austria
Платов Антон Сергеевич, к.ф.м.н., доцент
platovmm@mail.ru
Национальный исследовательский технологический университет МИСИС
Туницкий Дмитрий Васильевич, д.ф.м.н., ведущий научный сотрудник
dtunitsky@yahoo.com
Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН
Москва, Россия

Аннотация. *Мы рассматриваем нелокальное уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова и Фишера, описывающее динамику ресурса, распределенного на замкнутом многообразии, например, на двумерной сфере - поверхности Земли. Нелокальность выражается зависимостью члена реакции уравнения от интеграла произведения искомого решения с некоторым интегральным ядром по многообразию. Например, при равенстве единице этого ядра мы получаем зависимость члена реакции от общего объем ресурса на многообразии. При естественных предположениях о параметрах уравнения доказана теорема единственности решения задачи Коши при ограниченных неотрицательных начальных данных, имеющего непрерывную* L_2*-норму на многообразии и ограниченного.*

Ключевые слова: *КПП-модель, задача Коши, единственность решения.*

ON UNIQUENESS OF THE SOLUTION TO CAUCHY PROBLEM IN KPP-MODEL WITH NONLOCAL COMPETITION

Davydov Alexey Alexandrovich, Doctor of Ph. Math. Sc., Professor
davydov@mi-ras.ru
Lomonosov Moscow State University
Moscow, Russia
International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA
Laxenburg, Austria
Platov Anton Sergeevich, PhD, Associate Professor
platovmm@mail.ru
National University of Science and Technology MISIS
Tunitsky Dmitry Vasilievich, Doctor of Ph. Math. Sc., Leading Researcher
dtunitsky@yahoo.com

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences
Moscow, Russia

Abstract. *We consider the nonlocal Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov and Fisher equation describing the dynamics of a resource distributed on a closed manifold, for example, on a two-dimensional sphere - the Earth's surface. Nonlocality is defined by the dependence of the reaction term of the equation on the integral of the product of the desired solution with some integral kernel over the manifold. For example, if this kernel is equal to one, we obtain the dependence of the reaction term on the total volume of the resource on the manifold. Under natural assumptions about the parameters of the equation, a uniqueness theorem is proved for a solution to the Cauchy problem with bounded nonnegative initial data, which has a continuous L_2-norm on the manifold and is bounded.*

Keywords: *KPP model, Cauchy problem, uniqueness of solution*

1. Введение.

Анализ динамики возобновляемых ресурсов является важной составляющей в изучении многих проблем прикладного характера, включая оптимизацию эксплуатации промысловых популяций, задачи сохранения окружающей среды и биоразнообразия, а также других вопросов. В силу ценности получаемых при этом анализе результатов, инструменты этого анализа разрабатываются и применяются различными исследовательскими группами в мире. Разработка подобных инструментов или их применение проводились в работах [3], [4], [10], [15], [16], в работах [9], [19], [25], [26] в применении к задачам рационального природопользования и сохранения окружающей среды, в работах [1], [2], [7], [10], [11], [15], [17], [23], [27] при оптимизации динамики ресурса с бесконечным горизонтом планирования его использования.

Модель Колмогорова-Петровского-Пискунова и Фишера (=КПП и Фишера) [12], [13] появилась в первой половине 20-го века для анализа динамики распределенной популяции при наличии диффузии и внутривидовой конкуренции. Она объединяет модель Фурье распространения тепла [14] с логистической моделью Ферхюльста [26]. А именно, к уравнению теплопроводности добавляется член реакции, в котором коэффициенты естественно зависят от точки ареала обитания популяции.

Здесь мы рассматриваем нелокальную модель КПП и Фишера на замкнутом многообразии M (например, на n-мерном торе, естественно появляющемся при изучении распределенного ресурса в периодической среде [3], или на двумерной сфере, которая является естественной моделью поверхности Земли [8], [23], [27]). Нелокальность выражается зависимостью коэффициентов члена реакции от общего объема ресурса, что приводит к уравнению

$$p_t - Lp = ap - bp^2, \tag{1.1}$$

где $p = p(t,x)$, $p \geq 0$, — плотность изучаемого ресурса в точке x многообразия M его распределения в момент времени t, L — равномерно эллиптический оператор, непрерывно зависящий от точки ареала (см. [21], [22]), функции a и b характеризуют скорости процессов возобновления ресурса и насыщения им среды, соответственно, предполагаются ограниченными, измеримо зависящими от точки среды и непрерывно от показателя E объема имеющегося ресурса, например, его суммарной массы (это и делает модель нелокальной, чего нет, например, в [8], [21], [22]). Таким образом,

$$a = a(x,E), \quad b = b(x,E),$$

где показатель E определяется строго монотонным непрерывным функционалом на конусе неотрицательных плотностей распределения, имеющим нулевое значение в нуле, например, вида

$$E = \int_M K\,(x,y)p(x,t)^{\alpha} dx \qquad (1.2)$$

с некоторым положительным ограниченным измеримым весом K и положительной степенью α (при $K = 1, \alpha = 1$ здесь считается общий объем распределенного ресурса). Как отмечено выше, нелинейная зависимость тех или иных характеристик при изучении возобновляемых ресурсов встречалась и ранее (см. например, [5], [6], [20]). Кроме того, функция b предполагается отделенной от нуля некоторым положительным числом b_0. В частности, при достаточно больших значениях плотности ресурса правая часть уравнения (1.1) отрицательна.

Учитывая, что функции a и b лишь измеримы по фазовой переменной решение уравнения (1.1) или решение задачи Коши для него понимается в слабом смысле (см., например, [18], [22]).

В настоящей работе мы показываем, что при $\alpha = 1$ и выполнении для функций a и b условия Липшица по E в изучаемой модели может существовать не более одного решения задачи с ограниченными начальными данными. Вопрос существования решения остается открытым, как и вопрос о существовании глобального аттрактора нетривиальных неотрицательных решений (см. [8], [21], [22], [27]). Существование неотрицательного стационарного решения в этой модели изучалось в [24].

2. Формулировка результата

Теорема 1. *Пусть M — замкнутое гладкое многообразие, на котором оператор L является непрерывным равномерно эллиптическим, ядро K ограничено и измеримо, а коэффициенты a и b ограничены, измеримы и удовлетворяю условию Липшица по E. Тогда при $\alpha = 1$ задача Коши для уравнения (1.1) с ограниченным начальным значением не может иметь более одного решения,*

- *дифференцируемого при положительном времени,*
- *не превосходящего по модулю фиксированной положительной константы P,*
- *имеющего на этом многообразии непрерывную L_2-норму.*

Доказательство. Доказательство проведем в более наглядном случае, когда ресурс распределен на n-мерном торе, а оператор L имеет дивергентную форму. В этом случае уравнение (1.1) можно переписать в более привычной форме

$$p_t = (A(x)p_x)_x + a(x,E)p - b(x,E)p^2. \qquad (2.3)$$

Допустим, что для рассматриваемой задачи Коши с некоторыми ограниченными измеримыми начальными данными $p(0,x)$ существует два решения p и $\tilde{p}$, не превосходящие по абсолютной величине некоторой константы P и определенные при малых положительных временах.

В силу уравнения (2.3) имеем

$$p_t = (A(x)p_x)_x + a(x,E)p - b(x,E)p^2 \text{ и } \tilde{p}_t = (A(x)\tilde{p}_x)_x + a(x,\tilde{E})\tilde{p} - b(x,\tilde{E})\tilde{p}^2. \qquad (2.4)$$

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получим

$$(p-\tilde{p})_t = (A(x)(p-\tilde{p})_x)_x + [a(x,E)p - a(x,\tilde{E})\tilde{p}] + [-b(x,E)p^2 + b(x,\tilde{E})\tilde{p}^2]. \qquad (2.5)$$

Домножая последнее уравнение на $(p-\tilde{p})$ и интегрируя по многообразию, получаем

$$||p-\tilde{p}||_t^2 = \int (A(x)(p-\tilde{p})_x)_x(p-\tilde{p})dx + \int [a(x,E)p - a(x,\tilde{E})\tilde{p}](p-\tilde{p})dx +$$
$$+\int [-b(x,E)p^2 + b(x,\tilde{E})\tilde{p}^2](p-\tilde{p})dx.$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части последнего уравнения по отдельности и сделаем их подходящую оценку. Для первого слагаемого в силу равномерной эллиптичности оператора L имеем

$$\int (A(x)(p-\tilde{p})_x)x(p-\tilde{p})dx = -\int (A(x)(p-\tilde{p})_{x'}(p-\tilde{p})_x)dx \leq 0. \quad (2.6)$$

Для подынтегральной функции во втором слагаемом получаем

$$\left|[a(x,E)p - a(x,\tilde{E})\tilde{p}](p-\tilde{p})\right| = \left|\left[a(x,E)(p-\tilde{p}) + \left(a(x,E) - a(x,\tilde{E})\right)\tilde{p}\right](p-\tilde{p})\right| \leq$$

$$\leq |a(x,E)|(p-\tilde{p})^2 + N\left|E-\tilde{E}\right| |\tilde{p}|\, |p-\tilde{p}| \leq B(p-\tilde{p})^2 + NkR||p-\tilde{p}||\, |\tilde{p}|\, |p-\tilde{p}|,$$

где B — константа, ограничивающая функцию a, N — константа Липшица для этой функции по E, k — константа, ограничивающая ядро K, а R — корень из объема многообразия. Следовательно, для интеграла по многообразию от второго слагаемого имеем

$$\left|\int [a(x,E)p - a(x,\tilde{E})\tilde{p}](p-\tilde{p})dx\right| \leq B||p-\tilde{p}||^2 + NkR^2P||p-\tilde{p}||^2 \leq$$

$$\leq (B + NkR^2P)||p-\tilde{p}||^2,$$

где $||p||$ — L_2 - норма функции p.

Аналогично для третьего слагаемого

$$\left|\int [-b(x,E)p^2 + b(x,\tilde{E})\tilde{p}^2](p-\tilde{p})dx\right| \leq D\int |p+\tilde{p}|(p-\tilde{p})^2dx \leq 2DP||p-\tilde{p}||^2,$$

где D- константа, ограничивающая функцию b.

Таким образом, суммируя полученные оценки, получаем следующую оценку для скорости изменения L_2-норма разности решений

$$||p-\tilde{p}||_t^2 \leq S||p-\tilde{p}||^2$$

с $S = B + NkR^2P + 2DP$. Наконец, интегрируя последнее неравенство, получаем

$$||p-\tilde{p}||^2 \leq ||p(0,x) - \tilde{p}(0,x)||^2e^{St}$$

Учитывая, что рассматривается непрерывное в L_2-норме на многообразии решение, а начальные данные этих решений одинаковы, получаем справедливость теоремы.

Литература

1. Беляков А.О., Давыдов А.А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса, Тр. ИММ УрО РАН, 22, № 2, 2016, 38–46; Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 299, suppl. 1 (2017), P. 14 – 21
2. Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M. Optimal cyclic exploitation of renewable resources // J. Dyn. Control Syst.. 2015. Vol. 21, № 3. P. 475–494.
3. Berestycki H., Francois H., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence // J. Math. Biol. 2005. V. 51. P. 75–113. DOI: 10.1007/s00285-004-0313-3
4. Berestycki H., Francois H., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: II—biological invasions and pulsating travelling fronts//J. Math. Pures Appl.. 2005. V. 84. P. 1101–1146.
5. Davydov A.A., Platov A.S. Optimal stationary solution in forest management model by accounting intra-species competition, Mosc. Math. J., 12:2 (2012), 269–273
6. Давыдов А. А., Платов А. С. Оптимальная эксплуатация двух структурированных по размеру конкурирующих популяций, Тр. ИММ УрО РАН, 19, № 4, 2013, 89–94; Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 287, suppl. 1 (2014), 49–54

7. Davydov A.A., Vinnikov E.V. Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting// Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 407, 101–112 (2023)

8. Винников Е.В., Давыдов А.А., Туницкий Д.В. Существование максимального среднего временного сбора в КПП-модели на сфере при постоянном и импульсном отборах // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.. 2023. Т. 514, № 1. С. 59–64.

9. Cohen P.J., Foale S.J. Sustaining small-scale fisheries with periodically harvested marine reserves. Marine Policy 37 (2013), 278–287.

10. Daners D., Medina P. Abstract evolution equations. Periodic problems and applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series 279, Longman Scientific & Technical, 1992; ISBN 0 582 09635 9

11. Du Y., Peng R. The periodic logistic equation with spatial and temporal degeneracies. Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), 6039-6070

12. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1, № 6. С. 1–26.

13. Fisher R.A. The Wave of Advance of Advantageous Genes // Annals of Eugenics, 1937. 7 (4), pp.353–369. DOI:10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x

14. Fourier J.B.J. Theorie Analytique de la Chaleur. Paris: F. Didot, 1822.

15. Henderson K., Loreau M. An ecological theory of changing human population dynamics // People Nature, 2019, Vol. 1, Issue 1, 31-43.

16. Hess P. Periodic-parabolic Boundary Value Problems and Positivity // Pitman Research Notes in Mathematics Series. 1991, Vol. 155.

17. Medina P.K. Feedback Stabilizability of Time-Periodic Parabolic Equations. In: Jones C.K.R.T., Kirchgraber U., Walther H.O. (eds) Dynamics Reported. Dynamics Reported (Expositions in Dynamical Systems), vol 5 (1996). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-79931-0_2

18. Ладыженская О.А. Уральцева Н.Н. Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва. Наука. 1967

19. Pethame B. Parabolic equations in biology: Growth, reaction, movement and diffusion. Springer, 2015, Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences, 978-3-319-19499-8; 978-3-319-19500-1.

20. Tarniceriu O.C., Veliov V.M. Optimal Control of a Class of Size-Structured Systems. In: Lirkov, I., Margenov, S., Wasniewski, J. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2007. Lecture Notes in Computer Science, vol 4818. Springer, Berlin, Heidelberg.

21. Туницкий Д.В. О разрешимости полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях, Изв. РАН. Сер. матем., 86:5 (2022), 97–115.

22. Туницкий Д.В. О стабилизации решений полулинейных параболических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях, Изв. РАН. Сер. матем., 87:4 (2023), 186–204.

23. Туницкий Д.В. Эксплуатация возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли // Международная конференция «Системный анализ: моделирование и управление», посвященная памяти академика А.В. Кряжимского, Москва, 23–24 января 2024 г. Тезисы докладов. Москва : МГУ имени М.В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2024. С. 113-114.

24. Давыдов А.А., Платов А.С., Туницкий Д.В. , Существование оптимального стационарного решения в КПП-модели при нелокальной конкуренции, Тр. ИММ УрО РАН, 30, № 3, 2024, 113–121.

25. Undersander D., Albert B., Cosgrove D., Johnson D., Peterson P. Pastures for profit: A guide to rotational grazing (A3529), Cooperative Extension Publishing, University of Wisconsin-Extension, 2002.

26. Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, Correspondance mathematique et physique. 1938. V. 10. P. 113–121.

27. Туницкий Д.В. Об оптимальном управлении сбором возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли // Автоматика и телемеханика. 2024. No 7. С. 42–60.

УДК 517. 928
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_8

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН КОШУМЧА АРГУМЕНТ УСУЛУН КОЛДОНУУ

Жолдошова Чебире Буркановна, окутуучу
chebire86@mail.ru
М. М. Адышев атындагы Ош технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу теңдеменин, болгонда да сызыктуу эмес болгон учурда чечимин табуу же жалгыз чечимдин жашашын изилдөө бир топ татаалдыктарды жаратат. Макалада мындай типтеги теңдемелер үчүн кошумча аргумент кийирүү усулу колдонулган жана чечимдин жашашы, жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденген.*
Ачкыч сөздөр: *сызыктуу эмес, жекече, туунду, функциялар классы, оператордук теңдеме, кысып чагылтуулар принциби.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Жолдошова Чебире Буркановна, преподаватель
chebire86@mail.ru
Ошский технологический университет имени М. Адышева
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Поиск решения уравнения с частными производными четвертого порядка, особенно нелинейного, или исследование существования единственного решения представляет собой значительную сложную задачу. В статье был использован метод дополнительного аргумента для уравнения такого типа и доказана теорема о существовании единственного решения.*
Ключевые слова: *нелинейный, частный, производная, класс функций, операторное уравнение, принцип сжимающих отражений.*

USING THE ADDITIONAL ARGUMENT METHOD FOR A NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Zholdoshova Chebire Burkanovna, teacher
chebire86@mail.ru
Osh Technological University named after M. Adyshev
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *Finding a solution to a fourth-order partial differential equation, especially a nonlinear one, or investigating the existence of a single solution is a significant challenge. In the article, the method of an additional argument was used for an equation of this type and the theorem on the existence of a single solution was proved.*
Keywords: *nonlinear, partial, derivative, class of functions, operator equation, principle of compressive reflections.*

Киришүү

[1] жумушунда киргизилген жана бизде колдонулуучу функциялар класстары:

$$Q_n(T) = \{(t_1, t_2, t_3, .., t_n, x) \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le ... \le t_n \le T,\ x \in R\},$$

$\overline{C}^{(k)}(\Omega)$ - өзүнүн k –тартипке чейинки үзгүлтүксүз жана чектелген жекече туундуларына ээ болгон функциялардын классы.

Биз төмөнкү жардамчы интегралдык теңдемени карайлы:

$$p(\tau,t,x) = x - \int_{\tau}^{t} u(s, p(s,t,x))ds, \quad (\tau,t,x) \in Q_2(T) \tag{1}$$

мындагы $u(t,x)$ функциясы төртүнчү тартипке чейинки үзгүлтүксүз жана чектелген жекече туундуларга ээ функция болсун жана x аргументи боюнча Липшицтин шартын кандайдыр бир оң L саны менен канаатандырсын.

Эгерде биз төмөнкү дифференциалдык операторду киригизсек:

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x},$$

Анда (1) интегралдык теңдемесинен төмөнкү барабардыкка ээ болобуз:

$$D[u(t,x)]p(\tau,t,x) = 0 \tag{2}$$

Дагы кошумча белгилеп кетүүчү нерсе эгерде (1) интегралдык теңдемесинде x өзгөрмөсүнүн ордуна $p(t,\theta,x)$ функциясын кое турган болсок төмөнкү теңдештикти алабыз:

$$p(\tau,t,p(t,\theta,x)) = p(\tau,\theta,x), \quad (\tau,t,\theta,x) \in Q_3(T), \tag{3}$$

Чындыгында эле (1)де алмаштыруу жүргүзөлү:

$$p(\tau,t,p(t,\theta,x)) = p(t,\theta,x) - \int_{\tau}^{t} u(s, p(s,t,p(t,\theta,x))ds,$$

$$p(\tau,\theta,x) = x - \int_{\tau}^{\theta} u(s, p(s,\theta,x))ds.$$

Эгерде $q(\tau,t,\theta,x) = \left| p(\tau,t,p(t,\theta,x)) - p(\tau,\theta,x) \right|$ белгилөөсүн колдонсок, анда:

$$\left| p(\tau,t,p(t,\theta,x)) - p(\tau,\theta,x) \right| \le \left| x - \int_{t}^{\theta} u(s,p(s,\theta,x))ds - \int_{\tau}^{t} u(s,p(s,t,p(t,\theta,x)))ds - \right.$$

$$-x + \int_{\tau}^{\theta} u(s,p(s,\theta,x))ds \,| \le \left| - \int_{t}^{\theta} u(s,p(s,\theta,x))ds + \int_{\tau}^{\theta} u(s,p(s,\theta,x))ds - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau}^{t} u(s,p(s,t,p(t,\theta,x)))ds \right| \le \int_{\tau}^{t} L \left| p(s,t,p(t,\theta,x)) - p(s,\theta,x) \right| ds.$$

Жыйынтыкта төмөнкү барабарсыздык келип чыгат:

$$q(\tau,t,\theta,x;u) \le \int_{\tau}^{t} Lq(s,t,\theta,x;u)ds. \tag{4}$$

(4) барабарсыздыгынан $q(\tau,t,\theta,x;u) \equiv 0$ мындан (3) теңдештигинин аткарылаары келип чыгат.

Маселенин коюлушу. Сызыктуу эмес, жекече туундулуу оператордук-дифференциалдык теңдемени карайлы:

$$D^2[-u(t,x]D^2[u(t,x)]u(t,x) = F(t;u), \quad (t,x) \in Q_1(T), \qquad (5)$$

$F(t;u)-$ каалагандай u функциясы үчүн t өзгөрмөсүнөн гана көз каранды болгон оператор жана ал төмөнкү эки шартты канаатандырат:

үзгүлтүксүз оператор;

$L>0$ жана $T^*\leq T$ үчүн:

$$\| F(t;u_1) - F(t;u_2) \|_{Q_1(T^*)} \leq L \| u_1(t,x) - u_2(t,x) \|_{Q_1(T^*)} .$$

(5) теңдемеси оператордук формада берилди. Жеке учурда:

$$D[-u(t,x]D[u(t,x)]u(t,x) = u_{tt}(t,x) - u^2(t,x)u_{xx}(t,x) + u_x(t,x)[u_t(t,x) - u(t,x)u_x(t,x)].$$

(5) теңдемеси үчүн төмөнкүдөй баштапкы шарттарды карайбыз:

$$\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \psi_k(x), \quad k = 0,1,2,3, \qquad (6)$$

мында $\psi_k(x) \in \overline{C}^{(4)}(R), \quad k = 0,1,2,3.$

ТЕОРЕМА. Эгерде (6) баштапкы шартында берилген функциялар төмөнкү шарттарды канаатандырса:

$$D[-u(t,x)]D^2[u(t,x)]u(t,x)\Big|_{t=0} = 0\,, \qquad (7)$$

$$D^2[u(t,x)]u(t,x)\Big|_{t=0} = 0\,. \qquad (8)$$

Анда (1)-(2) маселесинин жалгыз $u(t,x) \in \overline{C}^{(4)}(Q_1(T^*)$ чечими жашайт, мындагы $T^*\leq T$ баштапкы берилгендерден аныкталат.

Далилдөө.

Теореманын далилдөөсүндө жеңилдик үчүн колдонулуучу белгилөөлөрдү карайбыз:

$$z(t,x;u) = D^2[u(t,x)]u(t,x),$$

$$z_1(t,x;u) = D[-u(t,x)]z(t,x;u),$$

$$z_2(t,x;u) = D[-u(t,x)]z_1(t,x;u).$$

$$\theta(t,x;u) = D[u(t,x)]u(t,x).$$

Белгилөөлөрдүн жардамында (1) төмөнкү көрүнүштөргө келет:

$$D^2[-u(t,x)]z(t,x;u) = F(t;u). \qquad (9)$$

$$D[-u(t,x)]z_1(t,x;u) = F(t;u). \qquad (10)$$

(10), (6) маселеси үчүн [2,3] макалаларында колдонулган, кошумча аргумент кийирүү усулу (КАКУ) деп аталган усулду колдонобуз. КАКУнун жардамында каралган баштапкы маселе төмөнкү интегралдык теңдемеге келтирилет:

$$z_1(t,x;u) = \int_0^t F(s;u)ds\,. \qquad (11)$$

(11)ден t жана x боюнча туундуларды алсак, дифференциалдык оператор боюнча (10)дун орун алаарын көрөрбүз. $t = 0$ шартында $z_1(0,x;u) = 0$ болот.

Башкача айтканда теоремадагы (7) шартын канаатандырат.

(11), (9) маселеси үчүн да КАКУну колдонуп төмөнкүгө келебиз:

$$z(t,x;u)=\int_0^t (t-s)F(s;u)ds. \quad (12)$$

Биз (1) теңдемесине удаалаш КАКУну колдонуу менен (12)ге келдик. (12)ден (11)ди дифференциалдык операторду колдонуу менен алабыз жана теоремадагы (8) шарты орун алат. Теореманын (7) жана (8) шарттары (11) жана (12) формулаларын келтирип чыгарууда колдонулду.

(12)ни ыңгайлуу формада жазып алалы:

$$D[u(t,x)]\theta(t,x;u)=\int_0^t (t-s)F(s;u)ds=I(t;u). \quad (13)$$

(13) үчүн КАКУну колдонобуз, баштапкы берилгендерди эске алуу менен:

$$\theta(t,x;u)=\varphi(p(0,t,x))+\int_0^t I(\rho;u)d\rho, \quad (14)$$

$$\theta(t,x;u)\big|_{t=0}=\varphi(x),$$

мындагы $p(s,t,x)$ функциясы (1) интегралдык теңдемесинен аныкталат жана ал үчүн (2), (3) барабардыктары орун алат.

Чындыгында эле (14)төн төмөнкүнү алууга болот:

$$D[u(t,x)]\theta(t,x;u)=\varphi'(p(0,t,x))D[u(t,x)]p(0,t,x)+I(t;u).$$

Акыркы теңдеме үчүн (2) барабардыгын колдонсок (14) орундалат жана $\theta(0,x;u)=\varphi(x)$.

Эми (14), (6) маселесин чечүүнү карайлы. КАКУну колдонолу:

$$u(t,x)=\psi_0(p(0,t,x))+t\varphi(p(0,t,x))+\int_0^t (t-\rho)I(\rho;u)d\rho, \quad (15)$$

Жогорудагы учурлардай эле (15) үчүн дифференциалдык оператор каралса, (14) келип чыгат. Эгерде *t=0* деп алсак: $u(0,x)=\psi_0(x)$.

Жыйынтыкта биз (15) интегралдык теңдемеси менен коюлган маселенин эквиваленттүү экендигин алдык. Мындай жыйынтыкка төрт жолу КАКУну удаалаш колдонуу менен жана тескерисинче интегралдык теөдемелерге дифференциалдык операторду колдонуу менен жеттик. Биз үчүн (15)тин жалгыз чечиминин жашашын аныктоо жетиштүү. Андыктан (15) үчүн өзгөртүп жүргүзүүлөрдү жасайбыз жана кысып чагылтуулар принцибинин (КЧП) негизинде жалгыз локалдык чечимдин жашашын аныктайбыз.

(15)те t өзгөрмөсүн s менен x өзгөрмөсүн p(s,t,x) функциясы менен алмаштырабыз жана (3) барабардыгын колдонобуз:

$$u(s,p(s,t,x))=\psi_0(p(0,t,x))+s\varphi(p(0,t,x))+\int_0^s (s-\rho)I(\rho;u)d\rho \quad (16)$$

(16)га (1)ди алып келип коёбуз:

$$v(s,t,x)=\psi_0(x-\int_0^t v(\tau,t,x))d\tau)+s\varphi(x-\int_0^t v(\tau,t,x))d\tau)+\int_0^s (s-\rho)I(\rho;u)d\rho, \quad (17)$$

$$v(s,t,x)=u(s,p(s,t,x)), \quad (s,t,x)\in Q_1(T).$$

Жыйынтыкта $u(t,x)=v(t,t,x)$ барабардыгын канаатандырган $v(s,t,x)$ белгисиз функциясынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө жетиштүү экендигине келдик. (17) үчүн КЧПны колдонобуз.

Ыңгайлуулук үчүн (17)ни төмөнкүдөй формада жазып алабыз:

$$v(\tau,t,x)=J(\tau,t;v), \tag{18}$$

$$J(\tau,t;v)=\psi_0(x-\int_0^t v(\tau,t,x))d\tau)+\tau\varphi(x-\int_0^t v(\tau,t,x))d\tau)+\int_0^s (s-\rho)I(\rho;u)d\rho,.$$

Бизге $T^*<T$ саны табылып, төмөнкү барабарсыздык орун алсын:

$$\left|J(\tau,t;v)\right|=\left|\psi_0(p(0,t,x))+\tau\varphi(p(0,t,x))\right|+\int_0^t (t-\rho)\,|\int_0^\rho (\rho-s)F(s;0)ds\,|\leq$$

$$\leq\left|\psi_0\right|+t\left|\varphi\right|+\|\,F(t;0)\,\|_{[0,t]}\,\frac{t^4}{2!}\leq\Omega_0(T^*),$$

мында

$$\Omega_0(S)=\left\|\psi_0\right\|+\left\|\varphi\right\|S+\|\,F(t;0)\,\|_{[0,t]}\,\frac{S^4}{2!}.$$

$$\left|J(\tau,t;v_1)-J(\tau,t;v_2)\right|\leq T^*\Omega_1\,\|\,v_1-v_2\,\|_{Q_2(T^*)}$$

мындагы

$$\Omega_1=\left\|\psi_0'\right\|+\left\|\varphi'\right\|T+\frac{T^3}{2!}.$$

Корутунду.

Демек биз далилдедик: (18) теңдемеси жалгыз чечимге ээ болот жана анын нормасы *$2\Omega_0(T^*)$*дан ашпайт. Ошондой эле КЧПнин негизинде (18) теңдемесинин чечими $T^*<T$ үчүн бардык аргументтери боюнча төртүнчү тартипке чейинки үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болот.

Теорема далилденди.

Адабияттар

1. Аширбаева А.Ж. Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев // Исследо-вания по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. – С. 3–8.
2. Аширбаева А.Ж. Исследование решений интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ч.Б. Жолдошева // Вестник ОшГУ, Серия естественных и медицинских наук. – 2012. – № 2. – Вып. 1. – С. 150–153.
3. Аширбаева А.Ж. Сведение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка к решению интег-рального уравнения [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Механика и моделиро-вание процессов технологии. – Тараз: Тараз университеті, 2013. - № 1. - С.14-19.

УДК 514.75
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_9

E_6 МЕЙКИНДИГИН БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУНУН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫГЫ ЖӨНҮНДӨ

Зулпукар кызы Анаргул, магистрант
zulpukarkyzy213478@oshsu.kg
Режапова Нигорахон Абдухашимовна, магистрант
rezhapova094323@oshsu.kg
Момунова Айзирек Абдибалиевна, магистрант
momunova121886@oshsu.kg
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *$\Omega \subset E_6$ аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген: ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана ω^1 сызыгы өтөт. Ушул сызык үчүн Френенин репери [1] боло тургандай кыймылдуу репер тандалып алынган. Бул репердин координаталык векторлорунун интегралдык сызыктары Френенин торчосун [2] түзүшөт. Ушул торчонун ω^1 сызыгынын жанымасында F_1^6 чекити инварианттык түрдө аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде, F_1^6 чекити өзүнүн $\Omega_1^6 \subset E_6$ аймагын "сызып" чыгат. Натыйжада $f_1^6(X) = F_1^6$ боло тургандай $f_1^6 : \Omega \to \Omega_1^6$ бөлүктөп чагылтуусу аныкталат.*

$\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ жана $f_1^6(\Delta_4) = \Delta'_4$ бөлүштүрүүсү каралган. Френенин торчосу Френенин циклдик торчосу болгон учурда $\theta \subset \Delta_5$ жана $\bar{\theta} = f_1^6(\theta)$ сызыктары (Δ_4, Δ'_4) түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн f_1^6 бөлүктөп чагылтуусундагы квазикошмок сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарты далилденген.

Ачкыч сөздөр: *евклиддик мейкиндик, бөлүктөп чагылтуу, Френенин репери, Френенин торчосу, квазикошмок сызык, бөлүштүрүү.*

О КВАЗИДВОЙНОЙ ЛИНИИ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА E_6

Зулпукар кызы Анаргул., магистрант
zulpukarkyzy213478@oshsu.kg
Режапова Нигорахон Абдухашимовна, магистрант
rezhapova094323@oshsu.kg
Момунова Айзирек Абдибалиевна, магистрант
momunova121886@oshsu.kg
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В области $\Omega \subset E_6$ рассмотрено семейство гладких линий: через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия ω^1 заданного семейства. В пространстве E_6 выбран подвижной репер таким образом, чтобы он был репером Френе [1] для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [1]. На касательной к линии ω^1 этой сети инвариантным образом определяется точка F_1^6. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_1^6 описывает свою область $\Omega_1^6 \subset E_6$. В результате получается частичное отображение $f_1^6 : \Omega \to \Omega_1^6$ такое, что $f_1^6(X) = F_1^6$.*

Рассмотрены четырехмерные распределения $\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ и $f_1^6(\Delta_4) = \Delta'_4$. В случае, когда сеть Френе является циклической сетью Френе доказаны необходимое и достаточное условия для того, *чтобы линии $\theta \subset \Delta_5$ и $\bar{\theta} = f_1^6(\theta)$ являлись квазидвойными линиями пары распределений (Δ_4, Δ'_4) в частичном отображении f_1^6.*

Ключевые слова: *евклидово пространство, частичное отображение, репер Френе, сеть Френе, распределение, квазидвойная линия.*

ABOUT QUASI-DOUBLE LINE OF THE PARTIAL MAPPING OF THE SPACE E_6

Zulpukar kyzy Anargul, undergraduate
zulpukarkyzy213478@oshsu.kg
Rezhapova Nigorakhon Abduhashimovna, undergraduate
rezhapova094323@oshsu.kg
Momunova Ayzirek Abdibalievna, undergraduate
momunova121886@oshsu.kg
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *In domain $\Omega \subset E_6$ it is considered the family of smooth lines such than through a point $X \in \Omega$ passes one line ω^1 of given family. A movable frame $\mathcal{R}$ of the space E_6 chosen as follows: $\mathcal{R}$ was Frenet's frame for the line ω^1 of given family. The integral lines of the coordinate vectors of this frame form a Frenet's net. On the tangent to the line ω^1 of this net the point F_1^6 is defined in an invariant way. When the point X moves in the domain Ω, the point F_1^6 describes it's domain $\Omega_1^6 \subset E_6$. Thus we get the partial mapping $f_1^6: \Omega \to \Omega_1^6$ such, that $f_1^6(X) = F_1^6$.*

It is considered the four dimensional distributions $\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ and $f_1^6(\Delta_4) = \Delta'_4$.

If the case when net of Frenet is cyclic net of Frenet it is proved necessary and sufficient conditions for lines $\theta \subset \Delta_5$ and $\bar{\theta} = f_1^6(\theta)$ to be quasi-double lines of the pair of distributions (Δ_4, Δ'_4) in the partial mapping f_1^6.

Key words: *Euclidean space, of Frenet's net, Frenet's frame, partial mapping, distribution, quasi-double line.*

Киришүү. $\Omega \subset E_6$ мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген $X \in \Omega$ ар бир чекити аркылуу аркылуу берилген көптүктүн бирден гана сызыгы өтөт. Ортонормаланган,

$\mathcal{R} = (X, \vec{e}_{i,})$ $(i, j, k = \overline{1,6})$ реперин Ω аймагында бул репер берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери [1,2] боло тургандай тандап алабыз. $\mathcal{R}$ реперинин деривациондук формулалары төмөнкүдөй көрүнүштө болушат:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \quad (1)$$

Мындагы ω^i, ω_i^k дифференциалдык формалары евклиддик мейкиндиктин структуралык теңдемелерин канаатандырышат:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \quad (2)$$

$\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчун Френенин торчосун Σ_6 түзүшөт. $\mathcal{R}$ репери Σ_6, торчосунун сызыктарынын жанымаларына тургузулгандыктан, ω_i^k формалары башкы формалар болушат, б.а.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \quad (3)$$

(2) формулалардын акыркы барбардыгын эске алсак, анда төмөндөгү келип чыгат:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \quad (4)$$

(3) барабардыкты сырттан дифференцирлеп төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Мындан, (2) формуланы колдонсок, төмөндөгү келип чыгат:

$$.\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

(3) формуланын негизинде акыркы барабардык төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell,$$

же

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j.$$

(барабардыктын оң жагындагы экинчи мүчөдө жана индекстеринин ордун алмаштырдык).
Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0\ ,$$

же

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Акыркы барабардыкка Картандын леммасын [3] колдонуп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m,$$

же

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l\right)\omega^m. \qquad (5)$$

Чондуктардын $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ системасы экинчи тартиптеги геометриялык обьектти түзүшөт.

Берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин формулалары төмөндөгүдөй көрүнүштө болушат:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$
$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5,$$
$$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4 \vec{e}_4 + \Lambda_{51}^6 \vec{e}_6,$$
$$d_1\vec{e}_6 = \Lambda_{61}^5 \vec{e}_5,$$

жана

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^3 = 0, \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0, \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{51}^1 = 0, \Lambda_{11}^6 = -\Lambda_{61}^1 = 0 \qquad (6)$$

$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{51}^2 = 0, \Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0, \Lambda_{31}^5 = -\Lambda_{51}^3 = 0,$$

$$\Lambda_{21}^6 = -\Lambda_{61}^2 = 0, \Lambda_{31}^6 = -\Lambda_{61}^3 == 0,\ \Lambda_{61}^4 = -\Lambda_{41}^6 = 0, \qquad (7)$$

мындагы $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = -\Lambda_{51}^4$, $k_5^1 = \Lambda_{51}^6 = -\Lambda_{61}^5$ – ω^1 сызыгынын биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи ийриликтери (тиешелеш түрдө), $d_1 - \omega^1$ сызыгы боюнча дифференцирлөөнүн символу.

Σ_6 торчосунун ω^i сызыгынын жанымасындагы F_i^j $(i \neq j)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (8)$$

Ар бир $(X, \vec{e}_i)$ жанымасында бештен псевдофокус жашайт:

$(X, \vec{e}_1)$ жанымасында – $F_1^2,\ F_1^3,\ F_1^4,\ F_1^5,\ F_1^6$;

$(X, \vec{e}_2)$ жанымасында – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5, F_2^6$;

$(X, \vec{e}_3)$ жанымасында – $F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5, F_3^6$;

$(X, \vec{e}_4)$ жанымасында – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_4^5, F_4^6$;

$(X, \vec{e}_5)$ жанымасында – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4, F_5^6$;

$(X, \vec{e}_6)$ жанымасында – $F_6^1, F_6^2, F_6^3, F_6^4, F_6^5$.

$\Omega \subset E_6$ аймагындагы Σ_6 торчосу Френенин циклдик торчосу деп аталат, эгерде төмөндөгү реперлер бир учурда ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5, ω^6 сызыктары үчүн (тиешелеш түрдө) Френенин реперлери болушса:

$\mathcal{R}_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$, $\mathcal{R}_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1)$,
$\mathcal{R}_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathcal{R}_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
$\mathcal{R}_5 = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, $\mathcal{R}_5 = (X, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$.

Σ_6 торчосу Френенин циклдик торчосу болсун деп эсептейли жана аны $\tilde{\Sigma}_6$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

Изилдөөнүн материалдары.

$F_1^6 \in (X, \vec{e}_1)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_1^6} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{66}^1}\vec{e}_1.$$

X чекити $\Omega \subset E_6$ аймагында кыймылга келгенде, F_1^6 чекити өзүнүн $\Omega_1^6 \subset E_6$ аймагын "сызып" чыгат Натыйжада $f_1^6(X) = F_1^6$ боло тургандай $f_1^6 : \Omega \to \Omega_1^6$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз.

Ω_1^6 аймагында $\mathcal{R}' = \left(F_1^6, \vec{q}_{i,}\right)$ кыймылдуу реперин алабыз мында $\vec{q}_i$ векторлору төмөнкүдөй көрүнүштө болушат [4,5]:

$$\vec{q}_1 = \left[1 + \frac{D_{161}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2;$$
$$\vec{q}_2 = \frac{D_{162}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^6}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_6;$$
$$\vec{q}_3 = \frac{D_{163}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^2}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{13}^6}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_6; \qquad (9)$$
$$\vec{q}_4 = \frac{D_{164}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{14}^6}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_6;$$
$$\vec{q}_5 = \frac{D_{165}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^2}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2 + \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{15}^6}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_6;$$
$$\vec{q}_6 = \frac{D_{166}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{16}^2}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2.$$

Жалпы учурда бул векторлор сызыктуу көз каранды

$\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон α сызыгын карайбыз. Анын жаныма вектору $\vec{\theta} = \theta^2\vec{e}_2 + \theta^3\vec{e}_3 + \theta^5\vec{e}_5 + \theta^6\vec{e}_6$ көрүнүшүндө болот. $f_1^6(\theta) = \bar{\theta}$ сызыгынын жаныма векторун табалы:

$$\vec{\bar{\theta}} = \theta^2\vec{q}_2 + \theta^3\vec{q}_3 + \theta^5\vec{q}_5 + \theta^6\vec{q}_6.$$

Мындан (9) формулаларды эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\vec{\bar{\theta}} = (\theta^2 q_2^1 + \theta^3 q_3^1 + \theta^5 q_5^1 + \theta^6 q_6^1)\vec{e}_1 + (\theta^2 + \theta^3 q_3^2 + \theta^5 q_5^2 + \theta^6 q_6^2)\vec{e}_2 + \theta^3\vec{e}_3 + \theta^5\vec{e}_5 + (\theta^2 q_2^6 + \theta^3 b_3^6 + \theta^4 b_4^6)\vec{e}_6$$

,

мында $q_i^j - \vec{q}_i$ векторунун j-чы координатасы.

Аныктама. Эгерде $\theta \subset \Delta_4$ сызыгынын X чекитиндеги жанымасы жана $\bar{\theta} = f_1^6(\theta)$ сызыгынын F_1^6 чекитиндеги жанымасы бир эле төрт ченемдүү ($\vec{e}_2, \vec{e}_3$, $\vec{e}_5, \vec{e}_6$

векторлоруна керилген) мейкиндикте жатышса, анда θ жана $\bar{\theta}$ сызыктары f_1^6 бөлүктөп чагылтуусунда (Δ_4, Δ'_4) түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары деп аталышат.

$\vec{\theta}, \vec{\bar{\theta}} \in \Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ шарттарынан төмөндөгү келип чыгат.

$$\theta^2 q_2^1 + \theta^3 q_3^1 + \theta^5 q_5^1 + \theta^6 q_6^1 = 0.$$

Мындан (9) формулаларды эске алсак:

$$\theta^2 Q_{162}^6 + \theta^3 Q_{163}^6 + \theta^5 Q_{165}^6 + \theta^6 Q_{166}^6 = 0. \qquad (10)$$

Тескерисинче, эгерде (10) шарт орун алса, анда $\theta, \bar{\theta}$ сызыктары f_1^6 бөлүктөп чагылтуусунда (Δ_4, Δ'_4) түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызытары болушат.

Төмөндөгүдөй теорема далилденди.

Теорема. $\theta \subset \Delta_4$ жана $\bar{\theta} = f_1^6(\theta)$ сызыктары f_1^6 бөлүктөп чагылтуусунда (Δ_4, Δ'_4) түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары болушу үчүн (10) шарттын орун алышы зарыл жана жетиштүү:

Адабияттар

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ // Москва: Наука, 1967. – С. 481-482.
2. Матиева Г., Абуллаева Ч.Х., Нышанбаева Н.Т. Е5 евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [текст] // Илим. Билим. Техника. – Ош, 2022. – № 3 (75). – С. 32-39.
3. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С. П. Фиников. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 432 с.
4. Матиева Г., Папиева Т.М., Курбанбаева Н.Н. Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной сетью Френе / Монография. – Ош: «Билим»ОшГУ, 2022. – 130 с.
5. Папиева Т.М., Абдулазизова М.Х., Адиева Б.Т., Исакова Э.М., Максатбек кызы Б. Необходимое и достаточное условие существования квазидвойной линии пары в евклидовом пространстве / Вестник Ошского государственного университета. – 2021. – Е.1. – №1. – С. 110-118.

1.

УДК 517.9
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_10

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Кангужин Балтабек Есматович, доктор ф.-м.н., профессор
kanguzhin53@gmail.com
Хужахметов Жамшид Жангабайулы, магистрант
qjhmtv@gmail.com
Казахский Национальный университет имени Аль-Фараби
Алматы, Казахстан

Аннотация. *В статье рассматривается применение метода разложения в экспоненциальные ряды по спектральному параметру для решения задач на собственные значения операторов Штурма-Лиувилля. Предложен новый подход к разложению характеристического определителя в экспоненциальные ряды, показавший эффективность для вычисления больших собственных значений. Теоретические положения подкреплены асимптотическими формулами для собственных значений и собственных функций. Обсуждаются практические методы достижения более высокой вычислительной точности. Работа основывается на развитии ранее предложенных методов и открывает новые перспективы в численном анализе задач математической физики.*

Ключевые слова: *оператор Штурма-Лиувилля, спектральный анализ, экспоненциальные ряды.*

ӨЗДҮК МААНИЛЕР МАСЕЛЕСИНДЕ СПЕКТРАЛДЫК ПАРАМЕТР БОЮНЧА ЭКСПОНЕНЦИАЛДЫК КАТАРЛАРГА АЖЫРАТУУ ЫКМАСЫН КОЛДОНУУ

Кангужин Балтабек Есматович, ф.-м.и. доктору, профессор
kanguzhin53@gmail.com
Хужахметов Жамшид Жангабайулы, магистрант
qjhmtv@gmail.com
Аль-Фараби атындагы Казак Улуттук Университети
Алматы, Казахстан

Аннотация. *Макалада Штурм-Лиувилль операторлорунун өздүк маанилерин эсептөөгө спектралдык параметр боюнча экспоненциалдык катарларды колдонуу каралат. Характеристикалык детерминантты экспоненциалдык катарларга ажыратуунун жаңы ыкмасы сунушталып, чоң өздүк маанилерди эсептөөдө эффективдүү экени көрсөтүлдү. Теориялык негиздер өздүк маанилер жана өздүк функциялар үчүн асимптотикалык формулалар менен бекемделет. Эсептөөлөрдүн тактыгын жогорулатуу үчүн практикалык ыкмалар талкууланат. Бул иш мурдагы ыкмаларды өнүктүрүүгө негизделип, математикалык физиканын сандык анализинде жаңы мүмкүнчүлүктөрдү ачат.*

Ачкыч сөздөр: *Штурм-Лиувилль оператору, спектралдык анализ, экспоненциалдык катарлар.*

APPLICATION OF THE METHOD OF DECOMPOSITION INTO EXPONENTIAL SERIES BASED ON THE SPECTRAL PARAMETER IN EIGENVALUE PROBLEMS

Kanguzhin Baltabek Esmatovich, Doctor of Ph. and Math.l Sc., Professor
kanguzhin53@gmail.com
Khujakmetov Jamshid Zhangabaiuly, Master's Student
qjhmtv@gmail.com

Al-Farabi Kazakh National University
Almaty, Kazakhstan

Abstract. *The article explores the application of exponential series based on the spectral parameter to solve eigenvalue problems of Sturm-Liouville operators. A novel approach for decomposing the characteristic determinant into exponential series is proposed, demonstrating effectiveness for computing large eigenvalues. The theoretical framework is supported by asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions. Practical methods for achieving higher computational precision are also discussed. The work is based on an extension of earlier methods and offers new perspectives for numerical analysis in mathematical physics.*

Key words: *Sturm-Liouville operator, spectral analysis, exponential series.*

1. Введение

В работе [6] предложен метод разложения в степенные ряды по спектральному параметру, который оказался эффективным для численного нахождения собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Задача вычисления собственных значений оператора Штурма-Лиувилля сводится к нахождению нулей так называемого характеристического определителя $\Delta(\lambda)$. Характеристический определитель оператора Штурма-Лиувилля представляет целую функцию от спектрального параметра λ. Таким образом, характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ разлагается в степенной ряд по спектральному параметру λ с бесконечным радиусом сходимости. В работе [6] дан простой способ нахождения коэффициентов Тейлора. Оказалось, что рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов Тейлора дают простой и мощный метод для численного вычисления собственных значений. Однако такой подход эффективен при вычислении не очень больших собственных значений. Для очень больших собственных значений метод, предложенный в работе [6], не то чтобы неэффективен, но для нахождения таких собственных значений целесообразно использовать экспоненциальные ряды по спектральному параметру. Предлагаемые нами экспоненциальные ряды эффективны для вычисления достаточно больших по модулю собственных значений.

2. Экспоненциальные ряды по спектральному параметру для уравнения Штурма-Лиувилля на отрезке

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на отрезке

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ \ 0 \le x \le b. \tag{1}$$

Такие уравнения называют уравнениями Штурма-Лиувилля. Коэффициент $q(x)$ часто называют потенциалом. Условия, которыми удовлетворяет потенциал, будут уточняться в зависимости от изучаемой проблемы. Комплексное число λ играет роль спектрального параметра. Часто вместо параметра λ удобно использовать параметр ρ, так что $\rho^2 = \lambda$.

Предположим, что λ - комплексное число. Через $\varphi(x,\lambda)$ обозначим решение однородного уравнения (1), подчиненного условиям Коши при $x = b$:

$$\varphi(b,\rho) = 1,\ \ \varphi'(b,\rho) = h, \tag{2}$$

где h - некоторая комплексная константа.

Согласно результатам монографии [1], решение $\varphi(b,\rho)$ является решением интегрального уравнения:

$$\varphi(x,\rho) = \cos\rho(x-b) + h\frac{\sin\rho(x-b)}{\rho} + \int_x^b \frac{\sin\rho(x-b)}{\rho} q(t)\varphi(t,\rho)dt.$$

Положим

$$\varphi_0(x,\rho) = \cos\rho(x-b) + h\frac{\sin\rho(x-b)}{\rho}. \qquad (3)$$

Пусть при

$$\varphi_n(x,\rho) = \int_x^b \frac{\sin\rho(x-b)}{\rho} q(t)\varphi_{n-1}(t,\rho)dt. \qquad (4)$$

В монографии [1] доказано, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x,\rho)$ сходится равномерно по λ для $|\lambda| \le N$ и равномерно x для $x \in [0;b]$. Здесь N - произвольное положительное число. Таким образом, функция $\varphi(x,\rho)$ является целой функцией от параметра ρ^2.

Для дальнейших целей удобно получить экспоненциальное представление для $\varphi_n(x,\rho)$. Из соотношений (4) при фиксированном натуральном n имеем равенство:

$$\varphi_n(t_{n+1},\lambda) = \frac{1}{(\sqrt{\lambda})^n}\int_b^{t_{n+1}} dt_n \ldots \int_b^{t_3} dt_2 \int_b^{t_2} dt_1 \prod_{i=1}^{n} q(t_i) \prod_{i=1}^{n} \sin\sqrt{\lambda}\,(t_{i+1} - t_i)\left[\cos\sqrt{\lambda}\,(t_1 - b) + \frac{h}{\lambda}\sin(t_1 - b)\right], \qquad n = 1,2,\ldots,$$

где $t_{n+1} = x$.

Через I_n обозначим n-мерный единичный параллелепипед, вершины которого имеют вид $(0, e^2, e^3, \ldots, e^n)$. Здесь числа e_i $(i = \overline{1,n})$ могут принимать значения либо ноль, либо один. Пусть фиксирована вершина $(0, e^2, e^3, \ldots, e^n) \in I_n$, тогда через M_0 обозначим количество равных между собой соседних координат. Иначе говоря,

$$M_0 = card\{\exists i \in [1,n] \cap \mathbb{N} :\ e_i = e_{i+1}\}.$$

Используя тождество при $n = 2k-1$:

$$\begin{cases} n = 2k-1:\ \prod_{i=1}^{2k-1}\sin\alpha_i = \frac{4}{4^k}\sum_{(o\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{2k-1})\in I_{2k-1}}(-1)^{k-1+\sum_{s=1}^{2k-1}\varepsilon_s}\sin\sum_{i=1}^{2k-1}(-1)^{\varepsilon_i}\alpha_i, \\ n = 2k:\ \prod_{i=1}^{2k}\sin\alpha_i = \frac{2}{4^k}\sum_{(o\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{2k})\in I_{2k}}(-1)^{k+\sum_{s=1}^{2k}\varepsilon_s}\cos\sum_{i=1}^{2k}(-1)^{\varepsilon_i}\alpha_i, \end{cases} \qquad (5)$$

при $n = 2k-1$ и $n = 2k$ из соотношения (5)-(6) выводим требуемые экспоненциальные представления.

Для этого введем величины при $n = 2k-1$:

$$\min\mathcal{T}_{1(2k-1)} = \left((-1)^{\varepsilon_{2k-1}} + 2\left(k - 1 + A\left[\frac{M_0}{2}\right] - M_0\right)\right)x - \left(2\left(k - A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right) - 1\right)b,$$

$$\max\mathcal{T}_{1(2k-1)} = \left((-1)^{\varepsilon_{2k-1}} - 2\left(k - 1 - A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)\right)x + \left(2\left(k + A\left[\frac{M_0}{2}\right] - M_0\right) - 3\right)b,$$

$$\min\mathcal{T}_{2(2k-1)} = \left(-(-1)^{\varepsilon_{2k-1}} + 2\left(k + A\left[\frac{M_0}{2}\right] - M_0\right)\right)x - \left(2\left(k - A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right) - 1\right)b,$$

$$minT_{2(2k-1)}=\left(-(-1)^{\varepsilon_{2k-1}}+2\left(k+A\left[\frac{M_0}{2}\right]-M_0\right)\right)x-\left(2\left(k-A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)-1\right)b,$$

при $n=2k$:

$$minT_{1(2k)}=\left((-1)^{\varepsilon_{2k-1}}+2\left(k-A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)\right)x-\left(2\left(k-A\left[\frac{M_0}{2}\right]-M_0\right)-1\right)b,$$

$$maxT_{1(2k)}=\left((-1)^{\varepsilon_{2k-1}}+2\left(k-1-A\left[\frac{M_0}{2}\right]-M_0\right)\right)x+\left(2\left(k+A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)-1\right)b,$$

$$minT_{2(2k)}=\left(2-(-1)^{\varepsilon_{2k-1}}+2\left(k-A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)\right)x-\left(2\left(k+A\left[\frac{M_0}{2}\right]-M_0\right)-1\right)b,$$

$$minT_{2(2k)}=\left(-(-1)^{\varepsilon_{2k-1}}-2\left(k-1+A\left[\frac{M_0}{2}\right]-M_0\right)\right)x-\left(2\left(k-A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)+1\right)b.$$

Лемма 1. Пусть k - фиксированное натуральное число. Тогда найдется непрерыные по τ функций $A^{M_0}_{1(2k-1)}(x,\tau_{1(2k-1)},b)$, $A^{M_0}_{2(2k-1)}(x,\tau_{2(2k-1)},b)$, $B_{2k-1}(x)$ такие, что справедливо экспоненциальное представления

$$\begin{aligned}
&\varphi_{2k-1}(x,\rho)\\
&=\sum_{\varepsilon_{2k-1}=0}^{1}\sum_{M_0=0}^{2k-1}C^{M_0}_{2k-2}\left[\frac{1}{\rho^{2k-1}}\int\limits_{min\,\tau_{1(2k-1)}}^{max\,\tau_{1(2k-1)}}A_{1(2k-1)}(x,\tau_{1(2k-1)},b)sin\rho\tau_{1(2k-1)}d\tau_{1(2k-1)}\right.\\
&-\frac{1}{\rho^{2k-1}}\int\limits_{min\tau_{2(2k-1)}}^{max\tau_{2(2k-1)}}A^{M_0}_{2(2k-1)}(x,\tau_{2(2k-1)},b)sin\rho\tau_{2(2k-1)}d\tau_{2(2k-1)}\\
&+\frac{h}{\rho^{2k}}\int\limits_{min\tau_{2(2k-1)}}^{max\tau_{2(2k-1)}}A^{M_0}_{2(2k-1)}(x,\tau_{2(2k-1)},b)cos\rho\tau_{2(2k-1)}d\tau_{2(2k-1)}\\
&\left.-\frac{h}{\rho^{2k}}\int\limits_{min\,\tau_{1(2k-1)}}^{max\tau_{1(2k-1)}}A^{M_0}_{1(2k-1)}(x,\tau_{1(2k-1)},b)cos\rho\tau_{1(2k-1)}d\tau_{1(2k-1)}\right]\\
&+\frac{1}{\rho^{2k-1}}B_{2k-1}(x)sin\rho(x-b)-\frac{1}{\rho^{2k-1}}\int\limits_{b-x}^{x-b}A^{2k-1}_{2(2k-1)}(x,\tau_{2(2k-1)},b)sin\rho\tau_{2(2k-1)}d\tau_{2(2k-1)}\\
&-\frac{h}{\rho^{2k}}B_{2k-1}(x)cos\rho(x-b)+\frac{h}{\rho^{2k-1}}\int\limits_{b-x}^{x-b}A^{2k-1}_{2(2k-1)}(x,\tau_{2(2k-1)},b)cos\rho\tau_{2(2k-1)}d\tau_{2(2k-1)}.
\end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть k - фиксированное натуральное число. Тогда найдется непрерыные по τ функций $A^{M_0}_{1(2k)}(x,\tau_{1(2k)},b)$, $A^{M_0}_{2(2k)}(x,\tau_{2(2k)},b)$, $B_{2k}(x)$ такие, что справедливо экспоненциальное представления

$$
\begin{aligned}
\varphi_{2k}(x,\rho) = & \sum_{\varepsilon_{2k-1}=0}^{1} \sum_{M_0=0}^{2k-3} C_{2k-1}^{M_0} \left[\frac{1}{\rho^{2k}} \int\limits_{min\tau_{1(2k)}}^{max\tau_{1(2k)}} A_{1(2k)}(x,\tau_{1(2k)},b) cos\rho\tau_{1(2k)} d\tau_{1(2k)} \right. \\
& + \frac{1}{\rho^{2k}} \int\limits_{min\tau_{2(2k)}}^{max\tau_{2(2k)}} A_{2(2k)}^{M_0}(x,\tau_{2(2k)},b) cos\rho\tau_{2(2k)} d\tau_{2(2k)} \\
& + \frac{h}{\rho^{2k+1}} \int\limits_{min\tau_{2(2k)}}^{max\tau_{2(2k)}} A_{2(2k)}^{M_0}(x,\tau_{2(2k)},b) sin\rho\tau_{2(2k)} d\tau_{2(2k)} \\
& \left. - \frac{h}{\rho^{2k+1}} \int\limits_{min\tau_{1(2k)}}^{max\tau_{1(2k)}} A_{1(2k)}^{M_0}(x,\tau_{1(2k)},b) sin\rho\tau_{1(2k)} d\tau_{1(2k)} \right] \\
& + \frac{1}{\rho^{2k}} B_{2k}(x) cos\rho(x-b) - \frac{1}{\rho^{2k}} \int\limits_{b-x}^{x-b} A_{2(2k-1)}^{2k}(x,\tau_{2(2k)},b) cos\rho\tau_{2(2k)} d\tau_{2(2k)} \\
& + \frac{h}{\rho^{2k+1}} B_{2k}(x) sin\rho(x-b) \\
& + \frac{h}{\rho^{2k+1}} \int\limits_{b-x}^{x-b} A_{2(2k-1)}^{2k}(x,\tau_{2(2k)},b) sin\rho\tau_{2(2k)} d\tau_{2(2k)}.
\end{aligned}
$$

Используя леммы 1 и 2, требуемое решение задачи (1) - (2) может быть записано в виде экспоненциального ряда по спектральному параметру.

Теорема. Пусть $q \in C[a,b]$. Тогда для любого комплексного λ решение задачи (1) - (2) существует и единственно, причем справедливо представлений

$$
\begin{aligned}
& \varphi(x,\rho) = cos\rho(x-b) + \tfrac{1}{\rho}\left(h + B_1(x)\right) sin(x-b) - \tfrac{1}{\rho} \textstyle\int_{b-x}^{x-b} A_{23}^{1}(x,\tau_{23},b) sin\rho\tau_{23} d\tau_{23} - \\
& \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \tfrac{1}{\rho^{2k}} \left(B_{2k}(x) - hB_{2k+1}(x)\right) cos\rho(x-b) + \\
& \tfrac{1}{\rho^{2k}} \textstyle\sum_{\varepsilon_{2k-1}=0}^{1} \Big(\sum_{M_0=0}^{2k-3} C_{2k-1}^{M_0} \int_{min\tau_{1(2k-1)}}^{max\tau_{1(2k-1)}} A_{2(2k+1)}(x,\tau_{2(2k+1)},b) cos\rho\tau_{1(2k-1)} d\tau_{1(2k+1)} - \\
& \textstyle\sum_{M_0=0}^{2k-3} C_{2k-1}^{M_0} \int_{min\tau_{1(2k+1)}}^{max\tau_{1(2k+1)}} A_{1(2k+1)}^{M_0}(x,\tau_{1(2k+1)},b) cos\rho\tau_{1(2k+1)} d\tau_{1(2k+1)} + \\
& \textstyle\sum_{M_0=0}^{2k-3} C_{2k-1}^{M_0} \int_{min\tau_{1(2k)}}^{max\tau_{1(2k)}} A_{1(2k)}(x,\tau_{1(2k)},b) cos\rho\tau_{1(2k)} d\tau_{1(2k)} + \\
& \textstyle\sum_{M_0=0}^{2k-2} C_{2k-1}^{M_0} \int_{min\tau_{2(2k)}}^{max\tau_{2(2k)}} A_{2(2k)}^{M_0}(x,\tau_{2(2k)},b) cos\rho\tau_{2(2k)} d\tau_{2(2k)} \Big) + \\
& h \textstyle\int_{b-x}^{x-b} A_{2(2k-1)}^{2k+1}(x,\tau_{2(2k-1)},b) cos\rho\tau_{2(2k-1)} d\tau_{2(2k-1)} + \\
& \textstyle\int_{b-x}^{x-b} A_{2(2k-1)}^{2k}(x,\tau_{2(2k)},b) cos\rho\tau_{2(2k)} d\tau_{2(2k)} + \tfrac{1}{\rho^{2k+1}} \left(B_{2k+1}(x) + hB_{2k}(x)\right) sin\rho(x-b) + \\
& \tfrac{1}{\rho^{2k+1}} \textstyle\sum_{\varepsilon_{2k-1}=0}^{1} \Big(\sum_{M_0=0}^{2k-3} C_{2k-2}^{M_0} \int_{min\tau_{1(2k-1)}}^{max\tau_{1(2k-1)}} A_{1(2k+1)}(x,\tau_{1(2k+1)},b) sin\rho\tau_{1(2k+1)} d\tau_{1(2k+1)} - \\
& \textstyle\sum_{M_0=0}^{2k-3} C_{2k-2}^{M_0} \int_{min\tau_{2(2k+1)}}^{max\tau_{2(2k+1)}} A_{2(2k+1)}^{M_0}(x,\tau_{2(2k+1)},b) sin\rho\tau_{2(2k+1)} d\tau_{2(2k+1)} + \\
& \textstyle\sum_{M_0=0}^{2k-2} C_{2k-1}^{M_0} \int_{min\tau_{2(2k)}}^{max\tau_{2(2k)}} A_{2(2k)}^{M_0}(x,\tau_{2(2k)},b) sin\rho\tau_{2(2k)} d\tau_{2(2k)} + \\
& h \textstyle\sum_{M_0=0}^{2k-2} C_{2k-1}^{M_0} \int_{min\tau_{1(2k)}}^{max\tau_{1(2k)}} A_{1(2k)}^{M_0}(x,\tau_{1(2k)},b) sin\rho\tau_{1(2k)} d\tau_{1(2k)} \Big) - \\
& \textstyle\int_{b-x}^{x-b} A_{2(2k+1)}^{2k-1}(x,\tau_{2(2k+1)},b) sin\rho\tau_{2(2k+1)} d\tau_{2(2k+1)} + \\
& h \textstyle\int_{b-x}^{x-b} A_{2(2k-1)}^{2k}(x,\tau_{2(2k)},b) sin\rho\tau_{2(2k)} d\tau_{2(2k)} \Big\}.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

3. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций.

Займемся теперь выводом асимптотических формул для собственных значений и собственных функций. Из этих формул, в частности, будет следовать существование бесчисленного множества собственных значений.

По-прежнему предположим вначале, что $h \neq \infty$ и $H \neq \infty$ При любом λ функция $\varphi(x,\lambda)$ удовлетворяет, очевидно, первому из краевых условий (1) - (2). Поэтому мы определим собственные значения, если подставим функцию $\varphi(x,\lambda)$ во второе краевое условие.

Согласно лемме 1.2 из [1] собственные значения действительны, т.е. $Im\rho = 0$. Поэтому оценим ряд (7) следующим образом:

$$\varphi(x,\rho) = cos\rho(x-b) + \frac{1}{\rho}\left(h + B_1(x)\right)sin\rho(x-b) - \frac{1}{\rho}\int_{b-x}^{x-b} A_{23}^1(x,\tau_{23},b)sin\rho\tau d\tau + \xi_1. \quad (6')$$

Далее, дифференцируя равенство (6') по x и используя оценку (6'), нетрудно получить оценку:

$$\varphi'_x(x,\rho) = \rho sin\rho(x-b) + \left(h + B_1(x)\right)cos\rho(x-b) - A_{23}^1(x,\tau_{23},b)\frac{sin\rho\tau}{\rho}$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_b^x A_{23}^1(x,\tau_{23},b)_x \frac{sin\rho\tau}{\rho}d\tau + \xi_1. \quad (7)$$

Теперь, подставляя значения функций $\varphi(x,\rho)$ и $\varphi'_x(x,\rho)$ из оценок (6') и (7) во второе краевое условие (2), для определения собственных значений получим следующее уравнение:

$$cos\rho b - \left(h + B_1(x)\right)\frac{sin\rho\tau}{\rho} + \int_{-b}^{b} A_{23}^1(0,\tau_{23},b)\frac{sin\rho\tau}{\rho}d\tau + \xi_1 = 0$$

$$\rho \to \infty: cos\rho b = 0, \rho_0 = \frac{\pi}{2b}(2m+1), m \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Корень ищем в виде $\rho = \frac{\pi}{2b(2m+1)} + \delta(m), m \in \mathbb{Z}$. Тогда из уравнения (8) имеем соотношение:

$$cos\left(\frac{\pi}{2}(2m+1) + b\delta\right) - \left(h + B_1(0)\right)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1) + \delta\right)^{-1} sin\left(\frac{\pi}{2}(2m+1) + b\delta\right) +$$
$$+\int_{-b}^{b} A_{23}^1(0,\tau_{23},b)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1) + \delta\right)^{-1} sin\left(\frac{\pi}{2}(2m+1) + b\delta\right)d\tau + \xi_1 = 0 \quad (9)$$

или

$$(-1)^{m+1}sinb\delta + (-1)^{m+1}\left(h + B_1(0)\right)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1) + \delta\right)^{-1} cosb\delta$$
$$+ (-1)^m \int_{-b}^{b} A_{23}^1(0,\tau_{23},b)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1) + \delta\right)^{-1} cosb\delta d\tau + \xi_1 = 0$$

Отсюда при $m \to \infty$ следует предельное соотношение

$$\lim_{m\to\infty} sinb\delta(m) = 0,$$

которое эквивалентно равенству

$$\lim_{m\to\infty} \delta(m) = 0 \qquad (10)$$

Из соотношения (9) с учетом пределного равенства (10) имеем

$$(-1)^{m+1}sinb\delta + (-1)^{m+1}(h + B_1(0))\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1)+\delta\right)^{-1} cosb\delta$$
$$+ (-1)^m \int_{-b}^{b} A_{23}^1(0,\tau_{23},b)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1)+\delta\right)^{-1} cosb\delta d\tau + \xi_1 = 0$$

Отсюда находим приближенное значение $\delta(m)$. Указанный процесс уточнения вычисления корней можно продолжить до требуемой точности. Таким образом, полученное приближённое значение можно использовать в качестве решения с необходимой точностью. Продолжая процесс уточнения вычисления корней, можно добиться ещё большей точности.

Литература

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. Москва: Наука, 1970. 672 стр.
2. Bondarenko N. An inverse problem for Sturm-Liouville operators on trees with partial information given on the potentials. // Math. Meth. Appl. Sci. - 2018. - Vol. 41.
3. Bondarenko N. Inverse problem for a differential operator on a star-shaped graph with nonlocal matching condition.
4. Law C., Pivovarchik V. Characteristic functions on quantum graphs // J. Phys. A: Math. Theor. 2009.
5. R. Carlson, V. Pivovarchik. Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths. J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 145202, 16 pp.
6. V.V. Kravchenko, R.M. Porter, Spectral parameter power series for Sturm–Liouville problems. Math. Method Appl. Sci. 33, 459–468 (2010).
7. Berkolaiko G., Carlson R., Fulling S., Kuchment P. Quantum Graphs and Their Applications // Amer. Math. Soc. 2006.

УДК 517.956
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_11

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЛИНИЕЙ СОПРЯЖЕНИЯ $x=0$

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, д.ф.-м.н., профессор
kudayberdi.kozhobekov@mail.ru
Сопуев Акылбек Адахимжанович, преподаватель
sopuevv@gmail.com
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Доказаны существование единственного решения нелокальной задачи сопряжений в прямоугольной области для уравнения в частных производных 3-го порядка, когда при x>0 уравнение характеристик имеет 3 кратных корня, а при x<0 имеет 1 простой и 2 кратных корней. Используя функции Грина и метод интегральных уравнений, решение задачи эквивалентным образом сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода со слабым ядром, разрешимость которого доказывается методом последовательных приближений. Решение задачи при x>0 строится методом функции Грина, а при x<0 методом функции Римана, сведением задачи к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.*

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, задача сопряжения, краевые условия, единственность, существование, функция Грина, интегральные уравнения.*

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ АРАЛАШ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕШҮҮ ҮЧҮН БИР НОКАЛДЫК ЭМЕС МАСЕЛЕ ЖӨНҮНДӨ

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, ф.-м.и.д., профессор
kudayberdi.kozhobekov@mail.ru
Сопуев Акылбек Адахимжанович, окутуучу
sopuevv@gmail.com
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *3-даражадагы жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн тик бурчтуу областта локалдык эмес маселесинин жалгыз чечиминин бар экендиги далилденет, мында x>0 үчүн мүнөздүк теңдеме 3 эселүү тамырга ээ, ал эми x<0 үчүн ал 1 жөнөкөй жана 2 эселүү тамырга ээ. Гриндин функциясын жана интегралдык теңдемелер ыкмасын колдонуу менен маселенин чечилиши 2-түрдөгү начар ядролуу Вольтерра интегралдык теңдемесин чыгарууга эквиваленттүү келтирилет, анын чечилиши удаалаш жакындоо ыкмасы менен далилденет. x>0 үчүн маселенин чечими Грин функциясынын методу менен, ал эми x<0 үчүн Риман функциясынын методу менен курулуп, маселенинин чечилиши 2-түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесинин чечимине келтирет.*

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдеме, үчүнчү тартиптеги, эселик мүнөздөмөлөр, жабыштыруу маселеси, чектик шарттар, чечимдин жалгыздыгы жана жашашы, Грин функциясы, интегралдык теңдеме.*

ON A NONLOCAL PROBLEM FOR A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE EQUATION OF THIRD ORDER WITH A CONJUGATION LINE $x=0$

Kozhobekov Kudaiberdi Gaparalievich, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor,

kudayberdi.kozhobekov@mail.ru
Sopuev Akylbek Adakhimzhanovich, teacher
sopuevv@gmail.com
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The existence of a unique solution to a nonlocal conjugacy problem in a rectangular domain for a third-order partial differential equation is proved, when for x>0 the equation of characteristics has 3 multiple roots, and for x<0 it has 1 simple and 2 multiple roots. Using Green's functions and the integral equation method, the solution to the problem is equivalently reduced to solving a Volterra integral equation of the second kind with a weak kernel, the solvability of which is proved by the method of successive approximations. The solution to the problem for x>0 is constructed by the Green's function method, and for x<0 by the Riemann function method, reducing the problem to solving a Volterra integral equation of the second kind.*

Key words: *Differential equation, third order, multiple characteristics, conjugation problem, boundary conditions, uniqueness, existence, Green's function, integral equations.*

ВВЕДЕНИЕ

Исследование краевых и нелокальных задач, задачи со смещениями, задачи с интегральными условиями, прямые и обратные задачи для уравнений в частных производных и уравнений смешанного типа второго, третьего и четвертого порядков, посвящены многочисленные работы [1 - 29].

Нелокальная задача с интегральными условиями вида

$$\int_0^{\chi(t)} u(x,t)dx = E(t)$$

для уравнения теплопроводности изучена в работе J.R. Cannon [1].

На важность исследования нелокальных задач указана в работе А.В.Бицадзе, А.А. Самарского [2], где рассматривается обобщения линейных эллиптических краевых задач с условием

$$u(0,y) = u(\ell,y)$$

В работе Н.И. Ионкина [3] решена краевая задача для уравнения теплопроводности с неклассическим краевым условием вида

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \mu(t),$$

которая описывает процесс диффузии частиц в турбулентной плазме, а также в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон ($\mu(t)$) изменения общего количества тепла стержня.

В работах М.В. Стригуна [4], Л.С. Пулькиной, А.Н. Савенковой [5] исследованы начально-краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными граничными условиями, содержащим интегралы от искомого решения вида

$$u(0,t) + \int_0^\ell K_1(x)u(x,t)dx = 0, \; u(\ell,t) + \int_0^\ell K_2(x)u(x,t)dx = 0 .$$

В работе А.И. Кожанова, Г.И. Тарасовой [6] изучена задача Самарского–Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболичес-кого уравнения третьего порядка вида с нелокальным условием вида

$$u(0,t) = \gamma(t)u(1,t) + \int_0^1 N(y)u(y,t)dy, \; t \in (0,T) .$$

В работе Садыбеков М.А., Дилдабек Г., Тенгаева А.А. [7] сформулирована новая краевая задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным условием вида

$$u(\theta(t))=(1+\alpha)u(\theta_0(t))+(1-\alpha)u(\theta_1(t)),\, 0\le t\le 1,$$

где $\theta(t)=(t,1),\, \theta_0(t)=(\frac{t}{2},-\frac{t}{2}),\, \theta_1(t)=(\frac{t+1}{2},\frac{t-1}{2}),\, \alpha$ - произвольное число.

Классификация нелокальных задач и их классификации для уравнений в частных производных, а также многочисленные их применения рассмотрены в работе А.М. Нахушева [8]. Обзор нелокальных задач и задачи со смещением для уравнений в частных производных приведены в работе А.М. Нахушева [9]. Прямы и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа К.Б Сабитова [10].

Классификация и приведения к каноническому виду дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков с двумя независимыми переменными приведены в работах [11], [12].

Постановка и исследование разрешимости краевых задач с смещениями, с интегральными и нелокальными условиями в настоящее время стала одним важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных. Однако, нелокальные задачи для уравнений смешанного типа третьего и высокого порядков мало исследованы.

1. Постановка задачи 1. В области $D=\{(x,y):-\ell_1<x<\ell,0<y<h\}$ $(\ell,\ell_1,h>0)$, рассмотрим уравнения

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}=0,\ (x,y)\in D_1=D\cap(x>0),\qquad(1)$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+au_x+bu_y+cu=0,\ (x,y)\in D_2=D\cap(x<0),\qquad(2)$$

где a,b,c – заданные функции, причем

$$a(x,y),\ a_x(x,y),\ b(x,y),\ b_y(x,y),\ c(x,y)\in C(\bar{D}_2).\qquad(3)$$

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x,y)$ *из класса* $C(\bar{D})\cap C^1(D)\cap[C^{3,1}(D_1)\cup C^{2,1}(D_2)]$, *удовлетворяющее уравнению (1) в области* D_1 *и краевым условиям*

$$u(\ell,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h,\qquad(4)$$

$$u_{xx}(\ell,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h,,\qquad(5)$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ 0\le x\le\ell,\qquad(6)$$

удовлетворяющее уравнению (2) в области D_2 *и краевым условиям*

$$u(-\ell_1,y)+\alpha(y)u(x_0,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h,\qquad(7)$$

$$u(x,0)=\psi_2(x),\ -\ell_1\le x\le 0,\qquad(8)$$

где $\varphi_1(y),\varphi_2(y),\varphi_3(y),\psi_1(x),\psi_2(x),\alpha(y)$ – *заданные функции, причем*

$$\psi_2(-\ell_1)+\alpha(0)\psi_2(x_0)=\varphi_3(0),\ -\ell_1<x_0<0, \psi_1(\ell)=\varphi_1(0).\qquad(9)$$

Из постановки задачи 1 следует, что на линии $x=0$ выполняются следующие условия склеивания:

$$\forall y\in[0,h]: u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu(y),\qquad(10)$$

где $\tau(y)$ и $\nu(y)$ – пока неизвестные функции, подлежащие определению.

2. Соотношение, полученное из области D_1**.** Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача 2. Найти в области D_1 *функцию* $u(x,y)\in C(\bar{D}_1)\cap C^1(D_1)\cap \ \cap C^{3,1}(D_1)$, *удовлетворяющее уравнению (1), условиям (4), (5), (6) и*

$$u_x(0,y)=\nu(y), 0\le y\le h. \qquad (11)$$

Интегрируя уравнение (1) в пределах от x до ℓ получим уравнение

$$u_{xx}-u_y=\omega(y),(x,y)\in D_1, \qquad (12)$$

где $\omega(y)=\varphi_2(y)-\varphi_1'(y)$ – известная функция.

Тогда, решение задачи 2, удовлетворяющее уравнения (12), краевым условиям (4), (6) и (11), имеет вид

$$\begin{gathered}u(x,y)=-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta+\\+\int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi-\int_0^y \omega(\eta)d\eta\int_0^\ell G(x,y;\xi,\eta)d\xi,\ (x,y)\in D_1,\end{gathered} \qquad (13)$$

где $G(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина, которая представима в виде [32]:

$$\begin{gathered}G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left[exp\left(-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)+exp\left(-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-\right.\\\left.-exp\left(-\frac{(x-\xi+2(2n+1)\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-exp\left(-\frac{(x+\xi+2(2n+1)\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)\right].\end{gathered}$$

Полагая $x=0$ в (13) имеем соотношение между функциями $\tau(y)$ и $\nu(y)$ в виде

$$\tau(y)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\nu(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta+\int_0^y N(y,\eta)\nu(\eta)d\eta+\Phi_1(y), \qquad (14)$$

где $N(y,\eta)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\left\{exp\left(-\dfrac{4n^2}{y-\eta}\right)-\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{n=+\infty}\left[exp\left(-\dfrac{4n^2\ell^2}{y-\eta}\right)-exp\left(-\dfrac{(2n+1)^2\ell^2}{y-\eta}\right)\right]\right\}$,

$$\Phi_1(y)=-\int_0^y G_\xi(0,y;\ell,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta+\int_0^\ell G(0,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi-\int_0^y\omega(\eta)d\eta\int_0^\ell G(0,y;\xi,\eta)d\xi .$$

3. Построение решение задачи 1 в области D_2**.** Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача 3. Найти в области D_2 *функцию* $u(x,y)\in C(\bar{D}_2)\cap C^1(D_2)\cap C^{2,1}(D_2)$, *удовлетворяющее уравнению (2) и условиям (8)*

$$u(0,y)=\tau(y), 0\le y\le h, \qquad (15)$$

$$u_x(0,y)=\nu(y),\ \ 0\le y\le h, \qquad (16)$$

где $\tau(y),\nu(y)$ – пока неизвестные функции.

Решение задачи 3 построим методом функции Римана [13, 14]. Пусть $w(x,y;\xi,\eta)$ – произвольная функция, определенная в области $D_2^*=\{(\xi,\eta):x<\xi<0,\ 0<\eta<y\}$ с границей

$$\partial D_2^*=MP\cup PA\cup AQ\cup QM\ ,$$

где $MP=\{(\xi,\eta):\xi=x, 0<\eta<y\}$, $PA=\{(\xi,\eta):x<\xi<\ell,\eta=0\}$, $AQ=\{(\xi,\eta):\xi=0, 0<y<h\}$, $QM=\{(\xi,\eta):x<\xi<0,\eta=y\}$ (Рис. 1).

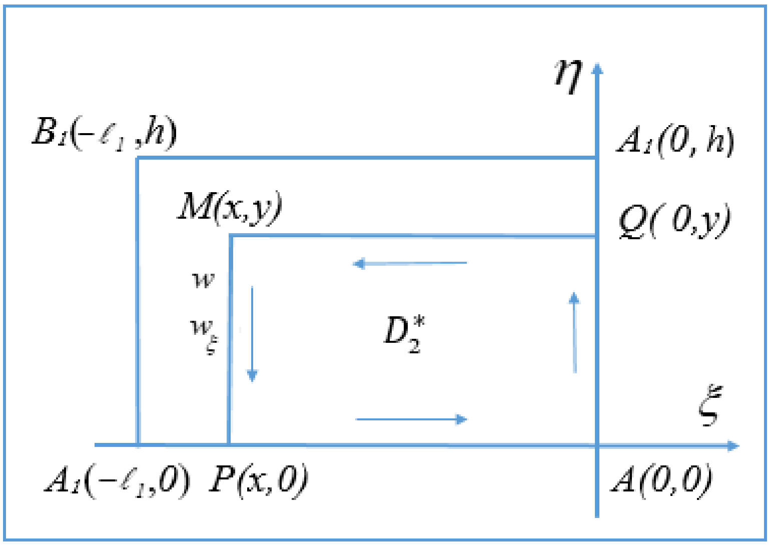


Рис. 1 – К построению функции Римана

Потребуем, чтобы функция $w(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяла по переменным (ξ,η) уравнению:

$$L_2^*(w)\equiv -w_{\xi\eta\xi}-(aw)_\xi-(bw)_\eta+cw=0 \qquad (17)$$

Рассмотрим тождество

$$wL_2(u)-uL_2^*(w)=[wu_{\xi\eta}+w_{\xi\eta}u+awu]_\xi-[w_\xi u_\xi-bwu]_\eta. \qquad (18)$$

Пусть $M(x,y)$ произвольная точка области D_2. Рассмотрим область $D_2^*=\{(\xi,\eta):x<\xi<0,\ 0<\eta<y\}$ с границей $\partial D_2^*=MP\cup PA\cup AQ\cup QM$, где $MP=\{(\xi,\eta):\xi=x, 0<\eta<y\}$, $PA=\{(\xi,\eta):x<\xi<\ell,\eta=0\}$, $AQ=\{(\xi,\eta):\xi=0, 0<y<h\}$, $QM=\{(\xi,\eta):x<\xi<0,\eta=y\}$.

Интегрируя тождество (18) по области D_2^* имеем

$$\iint\limits_{D_2^*}[wL_2(u)-uL_2^*(w)]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D_2^*}(w_\xi u_\xi-bwu)d\xi+(wu_{\xi\eta}+w_{\xi\eta}u+awu)d\eta. \qquad (19)$$

Пусть $w(x,y;\xi,\eta)\in C(\bar{D}_2^*)\cap C^{2,1}(D_2^*)$ является решением уравнения (17), удовлетворяющая следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} &w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0,\ 0\le\eta\le y,\\ &w_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=1,\ 0\le\eta\le y,\\ &w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\theta(x,y;\xi),\ x\le\xi\le 0,\end{aligned} \qquad (20)$$

где $\theta(x,y;\xi)$ – определяется как решение задачи Коши:

$$w_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-b(\xi,y)w(x,y;\xi,y)=0, \qquad (21)$$

$$w(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ w_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1. \qquad (22)$$

Очевидно, что решение задачи (21) – (22) существует и единственно.

Методом интегрирования из уравнения (17) получим интегральное уравнение типа Вольтерра, допускающее единственное решение:

$$w(x,y;\xi,\eta)=\xi-x-\int_x^{\xi}(\xi-\xi_1)b(\xi_1,\eta)w(x,y;\xi_1,\eta)d\xi_1+$$
$$+\int_x^{\xi}d\xi_1\int_{\eta}^{y}\left[a(\xi_1,\eta_1)-(\xi-\xi_1)c(\xi_1,\eta_1)\right]w(x,y;\xi_1,\eta_1)d\eta_1. \qquad (23)$$

Интегрируя тождество (19) по области $D_2^*=\{(\xi,\eta):x<\xi<0,0<\eta<y\}$ и учитывая свойства функции $w(x,y;\xi,\eta)$, получим решение задачи 3 в виде:

$$u(x,y)=w_{\xi}(x,y;0,y)\tau(y)+w_{\xi}(x,y;x,0)\psi_2(x)-w_{\xi}(x,y;0,0)\psi_2(0)-$$
$$-w(x,y;0,y)\nu(y)+w(x,y;0,0)\psi_2'(0)+\int_0^y w_{\eta}(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta- \qquad (24)$$
$$-\int_0^y[w_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)+a(0,\eta)w(x,y;0,\eta)]\tau(\eta)]d\eta.$$

Рассмотрим теперь следующую нелокальную задачу для уравнения (2) в области D_2.

Задача 4. *Найти в области* D_2 *функцию* $u(x,y)\in C(\bar{D}_2)\cap C^1(D_2)\cap C^{2,1}(D_2)$, *удовлетворяющее уравнению (2) и условиям (7), (8) и (15).*

Нетрудно заметить, что для решения задачи 4, достаточно найти функцию $\nu(y)$. Используя нелокальное условие (7), из (24) имеем

$$A(y)\nu(y)=A(y)\tau(y)-\int_0^y B_1(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\int_0^y B_2(y,\eta)\nu(\eta)d\eta+\Psi_1(y),\ 0\le y\le h, \qquad (25)$$

где $A(y)=w(-\ell_1,y;0,y)+\alpha(y)w(x_0,y;0,y)$, $B_1(y,\eta)=w_{\xi\eta}(-\ell_1,y;0,\eta)+a(0,\eta)w(-\ell_1,y;0,\eta)+$

$$+\alpha(y)\left[w_{\xi\eta}(x_0,y;0,\eta)+a(0,\eta)w(x_0,y;0,\eta)\right],$$

$$B_2(y,\eta)=w_{\eta}(-\ell_1,y;0,\eta)+\alpha(y)w(x_0,y;0,\eta),$$

$$\Psi_1(y)=-\varphi_3(y)+w_{\xi}(-\ell_1,y;-\ell_1,0)\psi_2(-\ell_1)-\left[w_{\xi}(-\ell_1,y;0,0)+\alpha(y)w_{\xi}(x_0,y;0,0)\right]\psi_2(0)+$$
$$+\left[w(-\ell_1,y;0,0)+\alpha(y)w(x_0,y;0,0)\right]\psi_2'(0)+\alpha(y)w_{\xi}(x_0,y;x_0,0)\psi_2(x_0).$$

Имеет место

Лемма 1. Если

$$\forall(x,y)\in\bar{D}_2: a(x,y)\ge 0,\ b(x,y)\le 0,\ c(x,y)\le 0,\ \alpha(y)\ge 0, \qquad (26)$$

тогда

$$\forall y\in[0,h]: A(y)\ge\ell. \qquad (27)$$

При доказательстве леммы 1 используется свойства функции Римана, которая определяется как решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (23).

Используя неравенств (26), из (25) определим

$$\nu(y)=\tau(y)+\int_0^y B(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\Psi_2(y),\ 0\le y\le h, \qquad (28)$$

где $B(y,\eta)=R_1(y,\eta)-\dfrac{B_1(y,\eta)}{A(y)}+\int\limits_0^y\dfrac{B_1(\eta_1,\eta)}{A(\eta_1)}d\eta_1$,

$\Psi_2(y)=\Psi_1(y)+\int\limits_0^y R_1(y,\eta)\Psi_1(\eta)d\eta$, $R_1(y,\eta)$ – резольвента ядра $\dfrac{B_2(y,\eta)}{A(y)}$.

Исключая $\nu(y)$ из (14) и (28), получаем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода со слабым ядром относительно $\tau(y)$:

$$\tau(y)=\int\limits_0^y K(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\Psi(y),\ 0\le y\le h, \tag{29}$$

где

$$K(y,\eta)=-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}+N(y,\eta)+\int\limits_\eta^y\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta_1)}}+N(y,\eta_1)\right]B(\eta_1,\eta)d\eta_1,$$

$$\Psi(y)=\Psi_2(y)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\frac{\Psi_2(\eta)}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}d\eta+\int\limits_0^y N(y,\eta)\Psi_2(\eta)d\eta,$$

допускающее единственное решение. После определения $\tau(y)$, последовательно находим $\nu(y)$, решение задачи 3, 2 и 1.

Таким образом, доказана следующая основная

Теорема 1. Если выполняются условия (3), (9), (26), тогда решение задачи 1 в области D существует и единственно.

Литература

1. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. - 1963. T. 21, № 2. – P. 155 - 160.
2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185, №4. – С. 739-740.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. - 1977, т. 13, № 2. – С. 294–304.
4. Стригун М.В. Об одной нелокальной задаче с интегральными граничным условием для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. 2009. № 8(74). С. 78–87.
5. Пулькина Л.С., Савенкова А.Н. Нелокальная задача с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2016. №1-2. – Стр. 33-45.
6. Кожанов А.И., Тарасова Г.И. Задача Самарского – Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 42 (2022), Стр. 59–74.
7. Садыбеков М.А., Дилдабек Г., Тенгаева А.А. О новой нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатики. №1(83). 2016. – Стр. 55 – 66.
8. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии.–М.: Высш. шк. 1995.–301 с.
9. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
10. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. – М.: Наука, 2016. – 272 с.
11. Джураев Т.Д. Попёлек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1734-1745.
12. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
13. Шхануков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: Дис … докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Нальчик, 1985. – 225 с.

14. Жегалов В.И. Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными // Казань: Изд. Казанского математического общества, 2001. – 226 с.
15. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
16. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 144 с.
17. Dzhuraev T. D. and Apakov Yu. P. On a self-similar solution of one third-order equation with multiple characteristics // Vestn. Samar. Tekh. Univ., Ser.: Fiz.-Mat. Nauki. 2007. 2 (15). 18–26.
18. Кожобеков К. Г. Нелокальная задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2009. №1 (60). 3–40.
19. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издание, 2009. – 457 с.
20. Юлдашев Т.К. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2017. Выпуск 1(38). 42–54.
21. Yuldashev T. K. On a boundary value problem for an integro-differential partial differential equations of the fourth order with a degenerate kernel. Itogi Nauki Tekh. Ser.: Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obzory. 2018. 145. 95–109.
22. Апаков Ю. П., Мамажонов С. М. Разрешимость одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24. - С.25–38. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.402
23. Yuldashev T. K., Apakov Yu. P. and Zhuraev A. Kh. Boundary value problem for third order partial integrodifferential equation with a degenerate kernel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021, 42, 1317–1327. DOI: 10.1134/S1995080221060329.
24. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Разрешимость одной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области. Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, № 4. С. 25–38. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.402
25. Сопуев А., Апаков Ю.П., Мирзаев О.М. Решение второй краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками // Вестник ОшГУ. 2022. №1. – С. 136–148. DOI: 10.52754/16947452-2022-1-136.
26. Apakov Yu. P., Umarov R.A. On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 41, 738-748. DOI: 10.1134/S199508022206004X.
27. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2022. Том 25, №3(91). – С. 93-103.
28. Apakov Yu. P., Sopuev A.A. Boundary Value Problems for a Mixed Equation of Parabolic-Hyperbolic Type of the Third Order // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 12, pp. 5149–5157.
29. Сопуев А., Нуранов Б.С. Краевые задачи для смешанного параболическо-гиперболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Лобачевский Я. Математика 45, 3424–3431 (2024). https://doi.org/10.1134/S1995080224604089
30. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 190 с.
31. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 192 с.
32. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_12

ФУНКЦИЙ ГРИНА НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ КОРРЕКТНЫЕ СУЖЕНИЯ

Кошанов Бакытбек Данебекович, д.ф-м.н., профессор
koshanov@list.ru
Институт математики и математического моделирования
Алматы, Казахстан
Сабиржанов Музаффар Тахирович, Phd докторант
msabirjanov@oshsu.kg
Ошский Государственный Университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В данной статье исследуются функции Грина для краевых задач Дирихле, Неймана и Робена уравнений Пуассона в многомерном единичном шаре. Приведен конструктивный способ построения функции Грина для бигармонического уравнения в круге. Также представлена теория сужения и расширения операторов, что позволяет описать корректные краевые задачи для бигармонических операторов. Основная цель работы — предложить явные формы функций Грина для указанных задач и описать корректные условия для этих операторов. Новизна работы заключается в явных конструкциях функций Грина для задач Неймана и Робена в многомерных шарах, что ранее не было полностью решено для этих случаев.*

Ключевые слова: *уравнение Пуассона, бигармонические уравнения, задача Дирихле, задача Неймана, задача Робена, корректные сужения оператора.*

БИГАРМОНИКАЛЫК ОПЕРАТОРЛОР УЧУН КЭЭ БИР ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИН ГРИН ФУНКЦИЯСЫ ЖАНА АЛАРДЫК КОРРЕКТТУУ ЧЕКТӨӨЛӨРҮ

Кошанов Бакытбек Данебекович, ф-м.н.д., профессор
koshanov@list.ru
Математика жана математикалык моделдөө институту
Алматы, Казахстан
Сабиржанов Музаффар Тахирович, Phd докторант
msabirjanov@oshsu.kg
Ош Мамлекеттик Университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Бул макалада көп өлчөмдүү бирдиктүү шардагы Пуассон теңдемелеринин Дирихле, Нейман жана Робен маселелери үчүн Грин функциялары изилденет. Бигармониялык теңдеме үчүн Грин функциясын куруунун конструктивдүү ыкмасы келтирилген. Ошондой эле, операторлорду кыскартуу жана кеңейтүү теориясы сунушталып, бул бигармониялык операторлор үчүн туура чектештик маселелерин сүрөттөөгө мүмкүндүк берет. Иштин негизги максаты – аталган маселелер үчүн Грин функцияларынын так формаларын сунуштап, бул операторлор үчүн туура шарттарды сүрөттөө. Изилдөөнүн жаңылыгы Нейман жана Робен маселелери үчүн көп өлчөмдүү шарларда Грин функцияларынын так формаларын түзүүдө, буга чейин бул маселелер толугу менен чечилген эмес.*

Ачкыч сөздөр: *Пуассон теңдемеси, бигармониялык теңдемелер, Дирихле маселеси, Нейман маселеси, Робен маселеси, Грин функциясы, операторлордун туура кыскарышы.*

GREEN'S FUNCTIONS OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR BYHARMONIC OPERATORS AND THEIR CORRECT CONSTRICTIONS

Koshanov Bakytbek Danebekovich, Doctor of Ph. Math. Sc., Professor
koshanov@list.ru
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
Almaty, Kazakhstan
Sabirzhanov Muzaffar Takhirovich, PhD doctoral student
msabirjanov@oshsu.kg
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *In this paper, we explicitly present Green's functions for Dirichlet, Neumann, and Robin problems of Poisson equations in a multidimensional unit ball.A constructive method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for a biharmonic equation in a circle is given. The theory of operator narrowing and expansion is briefly described, and the correct boundary value problems for byharmonic operators are described.*

Key words: *Poisson equation, byharmonic equations, Dirichlet problem, Neumann problem, Roben problem, correct narrowings of the operator.*

1. Введение

Необходимость исследования краевых задач для эллиптических уравнений продиктована с многочисленными практическими приложениями при теоретическом изучении процессов гидродинамики, электростатики, механики, теплопроводности, теории упругости, квантовой физики [1,2]. Распределения потенциала электростатического поля описываются с помощью уравнения Пуассона. При исследовании колебаний тонких пластин малых прогибов возникают бигармонические уравнения.

Настоящая работа посвящена построению функции Грина классических задач Дирихле, Неймана и Робена для уравнения Пуассона в многомерном шаре и описанию корректных краевых задач для бигармонических операторов.

Существуют различные способы построения функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Для многих видов областей она построена в явном виде. А для задачи Неймана в многомерных областях построение функции Грина является открытой задачей. Для шара функция Грина внутренней и внешней задачи Неймана построена в явном виде только для двумерном и трехмерном случаев. В общем случае для многомерного шара явный вид функции Грина задач Неймана и Робена для уравнения Пуассона построены недавно в работах [3,4].

Отметим, что в последнее время возобновился интерес к построению в явном виде функций Грина классических задач. В работах [5-7] построена в явном виде функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в многомерном шаре. В работе Г. Бегера [8] с помощью гармонических функций Грина задач Дирихле, Неймана и Робена построены функции Грина бигармонических задач Дирихле, Неймана и Робена в двумерном круге. Аналогичные результаты в классе неоднородных бигармонических и тригармонических функций в секторе были получены в работах [9-12]. Заметим также, что построению в явном виде функций Грина задачи Робена в круге, когда параметр в граничном условий равен единице посвящена работы [13,14]. Результаты этих работ основаны на классической теории интегральных представлений для аналитических, гармонических и полигармонических функций на плоскости.

Исследованию разрешимости различных краевых задач для бигармонического уравнения в многомерном шаре посвящены работы [15-18].

Нахождение общих корректных краевых задач для дифференциальных уравнений всегда является актуальной задачей. Абстрактная теория сужения и расширения операторов берет свое начало с работы Джонфон Нейман[19], в которой был описан метод построения самосопряженных расширений симметрического оператора и подробно разработана теория расширения симметрических операторов с конечными индексами дефекта. Многие задачи для дифференциальных уравнений в частных производных приводят к операторам с бесконечными индексами дефекта.

М.И. Вишик [20,21] рассмотрел расширения минимального оператора, отказавшись от его симметричности, и описал области определения расширения, обладающие теми или иными свойствами разрешимости. Свои результаты М.И. Вишик приложил к исследованию общих краевых задач для общих эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. Затем А.В.Бицадзе и А.А.Самарский[22] обнаружили корректную задачу, которая несодержится среди задач, описанных М.И. Вишиком. Такого типа задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений изучались А.А. Дезином [23].

В начале 80-х годов прошлого столетия М.О. Отелбаевым и его учениками[24-26] была построена абстрактная теория, которая позволяет описать все корректные сужения некоторого максимального оператора и отдельно -все корректные расширения некоторого минимального оператора, независимо друг от друга, в терминах обратного оператора. Эта теория была распространена на случай банаховых пространств [27].

Таким образом, данная работа посвящена построению функции Грина классических задач Дирихле, Неймана и Робена для уравнения Пуассона в многомерном шаре, конструктивному способу построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в многомерном шаре и описанию корректных краевых задач для бигармонических операторов.

Функция Грина задачи Дирихле, Неймана и Робена для уравнения Пуассона в многомерном единичном шаре

Пусть $\Omega \subseteq R^n, n \geq 2$ - ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$.Рассмотрим в области Ω следующую задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) = \varphi(x), x \in \partial\Omega, \tag{1.2}$$

Классическое решение $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле (1.1), (1.2) существует, единственно и оно представляется с помощью функции Грина $G_D(x,y)$ в следующем виде[1]

$$u(x) = \int_{\Omega} G_D(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_D(x,y)}{\partial n_y} \varphi(y) dS_y, \tag{1.3}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y}$ - внешний нормаль $\partial\Omega$,и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial}{\partial n_y} = \sum_{k=1}^{n} (n_y)_k \frac{\partial}{\partial x_k}, n_y \equiv \overrightarrow{n_y} = \{(n_y)_1 (n_y)_2, ..., (n_y)_n\}, |n_y| = 1.$$

Функция Грина задачи Дирихле(1.1), (1.2) определяется следующим образом

$$-\Delta G_D(x,y)=\delta(x-y), x,y\in\Omega, \tag{1.4}$$

$$G_D(x,y)=0, x\in\partial\Omega, x\in\Omega, \tag{1.5}$$

где $\delta(x-y)$ - дельта функция Дирака.

В частности, когда $\Omega=\{x\in R^n:|x|<1\}$ является единичным шаром, функция Грина задачи Дирихле(1.1), (1.2) может быть построена методом отражений и имеет вид

$$G_D(x,y)=\frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon_n(x-y)-\varepsilon_n\left(x|y|-\frac{y}{|y|}\right)\right], \tag{1.6}$$

где $\omega_n=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ - поверхностная площадь единичного шара, а $\varepsilon_n(x-y)$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа [2]

$$\varepsilon_n(x-y)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x-y|}, & n=2, |x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},\\ \dfrac{1}{n-2}|x-y|^{2-n} & n\ge 3, |x-y|=\sqrt{\sum\limits_{k=3}^{n}(x_k-y_k)^2}.\end{cases}$$

Наряду с задачей Дирихле, классической и хорошо исследованной является задача Неймана для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x)=f(x), x\in\Omega, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}=\psi(x), x\in\partial\Omega. \tag{1.7}$$

Известно, что решение задачи Неймана (1.1), (1.7) из класса $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ не единственно с точностью до постоянного слагаемого. Для существования решения задачи необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_\Omega f(y)dy+\int_{\partial\Omega}\psi(y)dS_y=0. \tag{1.8}$$

Если решение задачи (1.1), (1.7) существует, то это решение может быть представлено в интегральном виде с помощью функции Грина задачи Неймана $G_N(x,y)$ по формуле [1]

$$u(x)=\int_\Omega G_N(x,y)f(y)dy+\int_{\partial\Omega}G_N(x,y)\psi(y)dS_y+const. \tag{1.9}$$

Подфункцией Грина задачи Неймана(1.1), (1.7) понимают [1] функцию, имеющую представление

$$G_N(x,y)=\frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon_n(x-y)+g(x,y)\right], \tag{1.10}$$

где $g(x,y)$ - гармоническая в области Ω функция.

При этом должно выполняться краевое условие

$$\frac{\partial G_N}{\partial n_y}(x,y) = -\frac{1}{\omega_n}, y \in \partial\Omega.. \qquad (1.11)$$

Если такая функция Грина $G_N(x,y)$ существует, то из (1.8) и (1.11) следует, что функция (1.9) удовлетворяет всем условиям задачи (1.1),(1.7).

Для единичного шара Функция Грина задачи Неймана представлена в явном виде для случаев $n = 2$ и $n = 3$

$$G_N(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|x-y|} + \ln\frac{1}{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|}\right], n = 2,$$

$$G_N(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|} - \ln\left|1 + (x,y) + \left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|\right|\right], n = 3, \qquad (1.12)$$

где $(x,y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ - скалярное произведение в R^n векторов x и y.

Функция Грина задачи Неймана (1.1),(1.7) имеет следующее представление[3]

$$G_N(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon_n(x-y) + \varepsilon_n(x|y| - \frac{y}{|y|}) + \tilde{\varepsilon}(x,y)\right] + const, \qquad (1.13)$$

где $\tilde{\varepsilon}(x,y)$ выражается тождеством

$$\tilde{\varepsilon}(x,y) = \int_0^1\left[(n-2)s\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right| - 1\right]\frac{ds}{s} = \int_0^1\left[s\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{2-n} - 1\right]\frac{ds}{s}, n \ge 3,$$

и они выписываются через элементарные функции

$$\tilde{\varepsilon}(x,y) = \ln\frac{2}{\left|1 - (x,y) + \left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|\right|}, n = 3; \qquad (i)$$

$$\tilde{\varepsilon}(x,y) = \ln\frac{(x,y)}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - (x,y)^2}}\arctan\frac{\sqrt{|x|^2|y|^2 - (x,y)^2}}{1 - (x,y)} - \ln\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|, n = 4; \qquad (ii)$$

$$\tilde{\varepsilon}(x,y) = \ln\frac{2}{\left|1 - (x,y) + \left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|\right|} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{(2k-1)}\left\{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{1-2k} - 1\right\} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-k-1}\frac{2^i(k+i-1)(2k-3)!!(x,y)x^{2i}y^{2i}}{(k-1)!(2k+2i-1)!!(|x|^2|y|^2 - (x,y)^2)^{i+1}}$$

$$\left[\frac{|x|^2|y|^2 - (x,y)}{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{2k-1}} + (x,y)\right], n \ge 5, n = 2m+1, m \ge 2;$$

(iii)

$$\tilde{\varepsilon}(x,y) = -\ln\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right| + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2k}\left\{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{-2k} - 1\right\} +$$

$$(x,y)\arctan\frac{\sqrt{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}}{1-(x,y)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2k-1)!}{2^k k!}$$

$$\frac{|x|^{2k}|y|^{2k}}{\left(|x|^2|y|^2-(x,y)^2\right)^{k-1/2}} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-k-1}\frac{(2k+2i-1)!!(k+1)!(x,y)|x|^{2i}|y|^{2i}}{2^{i+1}(2k-1)!!(k+i)!\left(|x|^2|y|^2-(x,y)^2\right)^{i+1}} \qquad \text{(iv)}$$

$$\left[\frac{|x|^2|y|^2-(x,y)}{\left|x|y|-\dfrac{y}{|y|}\right|^{2k}} - (x,y)\right], n \ge 6, n = 2m+2, m \ge 2;$$

Наряду с задачами Дирихле и Неймана, классической и хорошо исследованной является задача Робена (третья краевая задача) для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} + au(x) = \psi(x), x \in \partial\Omega, \qquad (1.14)$$

Решение задачи Робена (1.1), (1.14) из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ представляется в следующем виде

$$u(x) = \int_{\Omega} G_a(x,y) f(y)dy - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G_a(x,y)}{\partial n_y}\varphi(y)dS_y. \qquad (1.15)$$

Функция Грина задачи Робена (1.1), (1.14) имеет вид [4]

a) если $a > 0$, то

$$G_a(x,y) = G_D(x,y) + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 s^{a-1}P(r\rho s,\gamma)ds = \varepsilon(x-y) - \varepsilon\left(x|y| - \frac{y}{|y|}\right) +$$
$$\frac{n-2-2a}{\omega_n}\int_0^1 s^{a-1}\varepsilon(sx|y| - \frac{y}{|y|})ds, \qquad (1.16)$$

где $\gamma = \theta - \varphi$ и $P(r\rho s,\gamma) = \dfrac{1-t^2}{1-2t\cos\gamma + t^2}$ - ядро Пуассона;

b) если $a < 0$ и a - нецелое, то

$$G_a(x,y) = G_D(x,y) + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{a} + 2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+a}(r\rho)^s\cos k\gamma + \int_0^1 s^{a-1}(P(r\rho s,\gamma) + 1 - 2\sum_{k=0}^{m}(r\rho s)^k\cos k\gamma)ds\right], \qquad (1.17)$$

где $m = -[a] + 1$.

2. Функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в многомерном шаре

Пусть m - натуральные число и в круге $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : |x| < r\}$ рассмотрим задачу Дирихле для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^j u(x)}{\partial n_x^j} = \varphi_j(x),\ j = 0,1, x \in \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Классическое решение $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m-1}(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле (2.1), (2.2) из класса существует, единственно и оно представляется с помощью функции Грина $G_{2m,n}(x,y)$ в следующем виде [2]

$$u(x) = \int_\Omega G_{4,2}(x,y) f(y) dy + \sum_{j=0}^{1} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^j G_{4,2}(x,y) \cdot \Delta_y^{1-j} \varphi(y) - \Delta_y^j G_{4,2}(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^{1-j} \varphi(y) \right] dS_y, \tag{2.3}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y}$ - внешний нормаль $\partial\Omega$.

Функция Грина задачи Дирихле (2.1), (2.2) определяется следующим образом

$$\Delta^2 G_{4,2}(x,y) = \delta(x-y), x, y \in \Omega, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^j G_{4,2}(x,y)}{\partial n^j} = 0, x \in \partial\Omega, y \in \Omega,\ j = 0,1, \tag{2.5}$$

где $\delta(x-y)$ - дельта функция Дирака.

Теорема 2.1. В случае честного n при $2m \geq n$ функция Грина задачи Дирихле (2.4), (2.5) представима в виде

$$G_{4,2}(x,y) = |x-y|^2 \ln|x-y|^2 - |x-y|^2 \ln\left[\left|\frac{y}{r}\right|^2 \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right|^2 \right] + r^2 \left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2\right)\left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2\right). \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. В следующих обозначениях для функций

$$|x-y|^2 = X^2(x,y) = X^2,\ \left|\frac{y}{r}\right|^2 \cdot \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right|^2 = Y^2(x,y) = Y^2,$$

$$\left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2\right)^k \left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2\right) r^2 = Z^2(x,y) = Z^2 \tag{2.7}$$

имеет место тождество

$$X^2 - Y^2 = -Z^2, x, y \in \Omega. \tag{2.8}$$

Данное тождество следует из следующих цепочек равенств

$$X^2 - Y^2 = |x-y|^2 - \left|\frac{y}{r}\right|^2 \cdot \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right|^2 = |x|^2 - 2(x,y) + |y|^2 - \left|\frac{y}{r}\right|^2 \left(|x|^2 - 2\frac{(x,y)}{|y|^2} r^2 + \frac{(x,y)}{|y|^2} r^4 \right) =$$

$$|x|^2 - 2(x,y) + |y|^2 - \frac{|x|^2 |y|^2}{r^2} + 2(x,y) - r^2 = |x|^2 - \frac{|x|^2 |y|^2}{r^2} - r^2 + |y|^2 = |x|^2 \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right) - r^2 \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right) =$$

$$\left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right)(|x|^2 - r^2) = -\left(1 - \frac{|y|^2}{r}\right)\left(1 - \frac{|x|^2}{r}\right) r^2 = -Z^2.$$

Лемма 2.3. Для любых $0 < x \le 1$ имеет место разложение [28]

$$(1-x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1) \cdot x^{k},$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k}}{k},$$

также имеет место разложение бином-Ньютона

$$(a-b)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} a^{n-k} (-b)^{k}.$$

Доказательство теоремы 2.1. В этом случае фундаментальное решение $\varepsilon_{4,2}(x,y)$ разлагаем в ряд с помощью второй и третьей части леммы

$$\varepsilon_{4,2}(x,y) = |x-y|^{2} \ln \frac{|x-y|^{2}}{\left|\frac{y}{r}\right|^{2} \left| x - \frac{y}{|y|^{2}} r^{2} \right|^{2}} = X^{2} \ln \frac{X^{2}}{Y^{2}} = (Y^{2} - Z^{2}) \cdot \ln\left(1 - \frac{Z^{2}}{Y^{2}}\right) =$$

$$(Y^{2} - Z^{2}) \cdot \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Y^{2})^{-k} (Z^{2})^{k}}{k} \right) = -Z^{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y^{2(1-k)} Z^{2k}}{k};$$

Отсюда одну слагаемую переносим в левую сторону, тогда получим равенство

$$G_{4,2}(x,y) = G_{4,2}^{2}(x,y) = G_{4,2}^{\infty}(x,y),$$

где

$$G_{4,2}^{2}(x,y) = X^{2} \ln X^{2} - X^{2} \ln Y^{2} - Z^{2},$$

$$G_{4,2}^{\infty}(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y^{2(1-k)} Z^{2k}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{y}{r}\right|^{2(1-k)} \left| x - \frac{y}{|y|^{2}} r^{2} \right|^{2(1-k)} r^{2k} \left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^{2}\right)^{k} \left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^{2}\right)^{k}}{k}.$$

Так как

$$\left(X^{2} - Y^{2}\right)\Big|_{x\in\partial\Omega, y\in\Omega} = -Z^{2}\Big|_{x\in\partial\Omega, y\in\Omega} = -r^{2}\left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^{2}\right)\left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^{2}\right)\Bigg|_{x\in\partial\Omega, y\in\Omega} = 0,$$

то в силу равенства

$$-\frac{\partial^{j}}{\partial n_{x}^{j}} Z^{4}\Bigg|_{x\in\partial\Omega, y\in\Omega} = 0, \ j = 0,1,$$

Легко проверить, что функция

$$G_{4,2}^{\infty}(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{y}{r}\right|^{2(1-k)} \left| x - \frac{y}{|y|^{2}} r^{2} \right|^{2(1-k)} r^{2k} \left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^{2}\right)^{k} \left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^{2}\right)^{k}}{k}$$

удовлетворяет граничному условию (2.5).

Согласно лемме 2.1 и последнему равенству, имеем

$$\Delta^2 G_{4,2}(x,y) = \Delta^2 G_{4,2}^2(x,y) = \delta(x-y),\ x,y \in \Omega,$$

$$\left.\frac{\partial^j G_{4,2}(x,y)}{\partial n_x^j}\right|_{x\in\partial\Omega,\, y\in\Omega} = \left.\frac{\partial^j G_{4,2}^{\infty}(x,y)}{\partial n_x^j}\right|_{x\in\partial\Omega,\, y\in\Omega} = 0,\ j = 0{,}1.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения, функция Грина задачи (2.4), (2.5) является

$$G_{4,2}(x,y) = |x-y|^2 \ln|x-y|^2 - |x-y|^2 \ln\left[\left|\frac{y}{r}\right|^2 \left|x - \frac{y}{|y|^2} r^2\right|^2\right] + r^2\left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2\right)\left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2\right).$$

Надо отметить, что в работах[9, 10, 11] построены функции Грина задач Дирихле, Неймана, Робина для бигармонических и полигармонических уравнений в круге, полукруге, полукольце, треугольнике и в других стандартных плоских областях. Результаты этих работ основаны на классической теории интегральных представлений для аналитических, гармонических и полигармонических функций на плоскости.

3. Корректные сужения и расширения дифференциальных операторов

Нахождение общих корректных краевых задач для дифференциальных уравнений всегда является актуальной задачей. Абстрактная теория сужения и расширения операторов берет свое начало с работы Джон фон Нейман[14], в которой было писан метод построения самосопряженных расширений симметрического оператора и подробно разработана теория расширения симметрических операторов с конечными индексами дефекта. Многие задачи для дифференциальных уравнений в частных производных приводят к операторам с бесконечными индексами дефекта.

М.И. Вишик [15, 16] рассмотрел расширения минимального оператора, отказавшись от его симметричности, и описал области определения расширения, обладающие теми или иными свойствами разрешимости. Свои результаты М.И. Вишик приложил к исследованию общих краевых задач для общих эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. Затем А.В.Бицадзе и А.А.Самарский[17] обнаружили корректную задачу, которая несодержится среди задач, описанных М.И. Вишиком. Такого типа задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений изучались А.А. Дезином [18].

В начале 80-х годов прошлого столетия М.О. Отелбаевым и его учениками[19,20,21] была построена абстрактная теория, которая позволяет описать все корректные сужения некоторого максимального оператора и отдельно -все корректные расширения некоторого минимального оператора, независимо друг от друга, в терминах обратного оператора. Причем эта теория была распространена на случай банаховых пространств и удалось частично отказаться от линейности операторов. Приведем краткое содержание этой теории в случае гильбертовыхпространств.

Пусть в гильбертовом пространстве H линейный оператор L с областью определения $D(L)$ и областью значения $R(L)$. Ядром оператора L назовем множество

$$KerL = \{f \in D(L) : Lf = 0\}.$$

Определение1. Линейный замкнутый оператор $\hat{L}$ в гильбертовом пространстве H называется максимальным, если $R(\hat{L}) = H$ и $Ker\hat{L} \neq \{0\}$.

Определение2. Линейный замкнутый оператор L_0 в гильбертовом пространстве H называется минимальным, если $\overline{R(L_0)} \neq H$ и существует ограниченный обратный оператор L_0^{-1} на $R(L_0)$.

Определение 3. Линейный замкнутый оператор L в гильбертовом пространстве H называется корректным, если существует ограниченный обратный оператор L^{-1} определенный на всем H .

Определение 4. Оператор L называется сужением оператора L_1, а оператор L_1 называется расширением оператора L, и кратко пишут $L \subset L_1$, если

$1) D(L) \in D(L_1),$

$2) Lf = L_1 f, \forall f \in D(L).$

Определение 5. Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовем корректным сужением максимального оператора $\hat{L}$ (корректным расширением минимального оператора L_0) если $L \subset \hat{L}$ $(L_0 \subset L).$

Определение 6. Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовем граничным корректным расширением, если L является одновременно корректным сужением максимального оператора $\hat{L}$ и корректным расширением минимального оператора L_0, т.е. $L_0 \subset L \subset \hat{L}.$

Теорема 3.1. [21]Пусть $\hat{L}$ максимальный линейный оператор в гильбертовом пространстве $H, L-$ известное корректное сужение оператора $\hat{L}$ и K-произвольный линейный ограниченный в H оператор, удовлетворяющий следующему условию

$$R(K) \subset Ker\hat{L}. \tag{3.1}$$

Тогда оператор L_K^{-1}, определенный формулой

$$L_K^{-1} = L^{-1} f + Kf, \forall f \in H, \tag{3.2}$$

является обратным к некоторому корректному сужению L_K максимального оператора $\hat{L}$, т.е. $L_K \subset \hat{L}.$

Обратно, если L_1 некоторое корректное сужение максимального оператора $\hat{L}$, то существует линейный ограниченный в H оператор K_1, удовлетворяющий условию (3.1), такой, что выполняется равенство

$$L_1^{-1} f = L^{-1} f + K_1 f, \forall f \in H.$$

Как правило, трудно описать ядро максимального оператора. Поэтому часто следующая теорема 3.2 более эффективна, чем теорема 3.1

Теорема 3.2. Пусть $\hat{L}$ –максимальный оператор, L_ϕ - известное корректное сужение $\hat{L}$ и K – непрерывный оператор, действующий из H в $D(\hat{L})$ – область определения оператора $\hat{L}$. Тогда оператор L_K^{-1}, определяемый формулой

$$L_K^{-1} f = L_\phi^{-1} f + (\mathrm{E} - L_\phi^{-1}\hat{L})Kf \tag{3.3}$$

является обратным к некоторому корректному сужению $\hat{L}$, т.е. $L_K \subset \hat{L}.$

Обратно, любое корректное сужение оператора $\hat{L}$ представимо в виде (3.3). Далее эта теория будет применена для бигармонического оператора.

4. Корректные краевые задачи для полигармонического оператора в многомерном шаре

В предыдущем разделе была доказана, что краевая задача Дирихле для полигармонического уравнения

$$\Delta_x^2 u(x) = f(x), x \in \Omega = \{x : |x| < r\}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial^j u(x)}{\partial n_x^j} = 0,\ j = 0,1,\ x \in \partial\Omega, \tag{4.2}$$

имеет единственное решение $u(x)$,которое имеет интегральное представление

$$u(x) = \int_\Omega G_{4,2}^D(x,y) f(y) dy, \tag{4.3}$$

где $G_{4,2}^D(x,y) \equiv G_{4,2}(x,y)$ - функция Грина задачи Дирихле из (2.6).

Заметим, что нулевые краевые условия Дирихле для полигармонического уравнения эквивалентны следующим краевым условиям для того же уравнения.

Теорема 4.1. Функция $u(x)$, задаваемая формулой (4.3) является решением краевой задачи:

$$\Delta_x^2 u(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{4.4}$$

$$u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial}{\partial n_x} u(x)\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.5}$$

С помощью явного вида функции Грина задачи Дирихле [5] для полигармонического уравнения (2.1) рассмотрим функцию

$$\omega(x) = \int_\Omega G_{4,2}(x,y) f(y) dy + \sum_{j=0}^{1} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^j G_{4,2}(x,y) \cdot \Delta_y^{1-j} h(y) - \Delta_y^j G_{4,2}(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^{1-j} h(y) \right] dS_y, \tag{4.6}$$

где $h(x) = (Kf)(x), K -$ некоторый произвольный оператор, ставящий каждой функций $f(x), x \in \Omega = \{x : |x| < r\} \subseteq R^n$ в соответствие единственную достаточно гладкую функцию $h(x)$.

На основе теоремы 4.1 и представлений (4.6) мы получим следующую теорему

Теорема 4.2. Функция $\omega(x)$, задаваемая формулой (4.6) является решением краевой задачи:

$$\Delta_x^2 \omega(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered} \omega(x)\big|_{\partial\Omega} = Kf(x)\big|_{\partial\Omega}, \\ \frac{\partial}{\partial n_x} \omega(x)\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n_x} Kf(x)\big|_{\partial\Omega}, \end{gathered} \tag{4.8}$$

Теорема 4.3. (о единственности). Решение краевой задачи (4.7), (4.8) единственно.

Теорема 4.4 (о существовании). Пусть неоднородное полигармоническое уравнение (4.7) с некоторыми краевыми условиями при всех допустимых $f(x)$ имеет единственное регулярное решение $u(x)$.Тогда найдется некоторый оператор К такой, что данное решение $u(x)$ удовлетворяет либо краевым условиям (4.8), где $h(x)=(K\cdot\Delta_x^2 u)(x), x\in\Omega.$

Замечание 4.1. Если R обратимый оператор на всем $L_2(\Omega)$, то граничные условия в (4.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} R\omega(x)\big|_{\partial\Omega} &= R(Kf(x))\big|_{\partial\Omega}, \\ \frac{\partial}{\partial n_x}\omega(x)\big|_{\partial\Omega} &= \frac{\partial}{\partial n_x}Kf(x)\big|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Потому для проверки корректности граничной задачи нужно пытаться преобразовать граничные условия к виду (4.9).

Замечание 4.2. Если линейный оператор L-есть корректное сужение максимального, то переходя к сопряженным, получаем корректные расширения минимального оператора, соответствующего формально сопряженному. Это приводит также к классу "нагруженных"уравнений.

Замечание 4.3. Отметим, что в теореме 3.2 в качестве K можно взять $K-$ нелинейные преобразования.

Другие применения результатов М.Отелбаева в различных разделах теории дифференциальных уравнений можно найти в работах [29-32].

Литература

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа.1970.–712с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука,1981. -512с.
3. Зорич В.А. Математический анализ: Учебник.Ч.II. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. (1984) 640с.
4. Sadybekov M.A., Torebek B.T., TurmetovB.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for amulti-dimensional ball //Complex Variables and Elliptic Equation,61:1 (2016) 104-123.
5. Sadybekov M.A., TurmetovB.Kh., Torebek B.T. On an explicit form of the Green function of the Roben problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 6:3 (2015) 163-172.
6. KalmenovT.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations, 53:2 (2008), 177-183. Doi: http://dx.doi.org/10.1080/17476930701671726
7. KalmenovT.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equations in a ball // Siberian Mathematical Journal. 49:3 (2008) 423-428. http://dx.doi.org/10.1007/s11202-008-0042-8
8. КальменовТ.Ш., Сураган Д. О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 48:3 (2012) 435–438. DOI: http://dx.doi.org/10.1134/S0012266112030160
9. Begehr H. Biharmonic Green functions // Le matematiche. – 2006. –Vol. LXI. - P. 395-405.
10. Wang Y., Ye L. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector //Complex Variables and Elliptic Equations. 58:1 (2013)7-22.
11. WangY. Tri-harmonicboundaryvalueproblemsinasector // ComplexVariables and Elliptic Equations.59:5 (2014) 732-749.
12. Begehr H., Du J., Wang Y. A Dirichlet problem for polyharmonic functions // Ann. Math. Pura Appl.187:4 (2008) 435-457.
13. Begehr H., VaitekhovichT.Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math.40:2 (2009) 251-282.

14. Begehr H., Vaitekhovich V., Some harmonic Robin functions in the complex plane //Advances in Pure and Applied Mathematics. 1:1 (2010)19-34.
15. Begehr H., VaitekhovichT.Modified harmonic Roben function // Complex Variables and Elliptic Equations.58:4 (2013) 483-496.
16. Кошанов Б.Д., Кошанова М.Д. Задача Дирихле с гельдеровыми и Lp граничными данными для полигармонических функций в единичном шаре // Доклады НАН РК.Сер. физ-мат. 4(2013) 35-41.
17. Қошанов Б.Д., Еділ К. Дөңгелектегі бигармониялы теңдеу үшін Дирихле есебінің Грин функциясы және Пуассон теңдеуінің полиномиалды шешімі // ҚР ҰҒА жаршысы, Серия физ.-мат. 3(2016)102-121.
18. Кошанов Б.Д., Нурикенова Ж.С. О разрешимости обобщенной задачи Дирихле – Неймана для эллиптического уравнения высокого порядка // Известие НАН РК, Серия физ.- мат. 3 (2017) 125-131.
19. KoshanovB.D., KoshanovaG.D., AzimkhanG.E., Segizbayeva R.U. Solvability of boundary value problems with non-local conditions for multidimensional hyperbolic equations // Bulletin of the NAS of the Republic of Kazakhstan, Series of Physics and Mathematics, 2:312 (2020), 116-125.
20. J.vonNeumann. Allgemeine Eigenwert theorie Hermitesche rFunktional operatoren// Math. Ann. 102 (1929) 49-131.
21. Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптическихдифференциальных уравнений //ТрудыМатем.о-ва. 3(1952) 187–246.
22. Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области //Матем.сборник.77:3 (1954)1307-1311.
23. Бицадзе А.В.,Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 185:4 (1969) 739– 740.
24. DezinA.A. Partial differential equations.-Berlinetc.:Springer-Verlag,1987.
25. Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов. I // Известие АН КазССР. Сер. физ-мат. 5(1982) 24-27.
26. Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов. II // Известие АН КазССР. Сер. физ-мат. 1. (1983)24-27.
27. ОтелбаевМ.,Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов//ДокладыАНСССР.6. (1983)1307-1311.
28. Ойнаров Р., Парасиди И.Н. Корректно разрешимые расширения операторов с конечными деффектами в банаховом пространстве // Известие АН КазССР. Сер. физ-мат. 5 (1988) 35-44.
29. Koshanov B.D., Otelbaev M.O. Correct Contractions stationary Navier-Stokes equations and boundary conditions for the setting pressure // AIP Conference Proceedings. 1759 (2016) http://dx.doi.org/10.1063/1.4959619
30. Kanguzhin B.E. Changes in a finite part of the spectrum of the Laplace operator unterdelta-likeperturbations//Differential Equations. 55:10 (2019) 1428–1335. DOI: http://dx.doi.org/10.1134/S0012266119100082
31. Kanguzhin B.E., TulenovK.S. Singular perturbations Changes of Laplace operator and their recolvents //ComplexVariables and Elliptic Equations. 65:9 (2020) 1433- 1444. DOI: http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2019.1655551
32.

УДК 517.9

DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_13

ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ АЙРЫМ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРДИН БАШТАПКЫ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ ЖАНА ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН СТРУКТУРАСЫ

Кыдыралиев Төрөгелди Раимжанович, ф.-м.и.к., доцент
torogeldi1@mail.ru
Кыргыз Республикасынын Эл аралык университети
Бишкек, Кыргызстан
Чамашев Марат Какарович, ф.-м.и.к., доцент
marat2771@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Сызыктуу эмес айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеменин баштапкы маселесини чыгарымдуулугунун актуалдуулугу мурдагыдай эле көйгөйлүүлүгүн жогото элек. Чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү- изнилдөө ыкмалардын бири болуп саналат. Бул ыкманын жардамында сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемесине, баштапкы маселе өзгөртүп түзүлөт жана ал алгачкы маселеге эквиваленттүү болот. Алынган теңдемеге топологиялык ыкма колдонулат. Төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарылышы изилденген жана чыгарылышы интегралдык көрүнүштө табылган. Алгачкы маселени изилдөө үчүн атайын нормалдуу мейкиндик тандалып алынган. Интеграл белгиси астындагы параметр боюнча дифференцирлөө, интегралдын предели параметрден көз каранды болгону учур үчүн да колдонулган. Сызыктуу эмес экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемеси жалгыз чыгарылышка ээ болгон шарт аныкталып, интегралдык көрүнүшүндө алынган.*

Ачкыч сөздөр: *интегро-дифференциалдык тендеме, Коши маселеси, кысып чагылтуу, жекече туунду, интегралдык көрүнүш.*

РАЗРЕШИМОСТИ И СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Кыдыралиев Торогелди Раимжанович, к.ф.-м.н., доцент
torogeldi1@mail.ru
Международный университет Кыргызской Республики
Бишкек, Кыргызстан
Чамашев Марат Какарович, к.ф.-м.н., доцент
marat2771@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Актуальность вывода исходной задачи нелинейного Интегро-дифференциального уравнения в частных производных по- прежнему не утратила своей актуальности. Преобразования является одним из методов исследования. С помощью этого метода преобразуется в нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, исходную задачу, которая эквивалентна исходной задаче. Топологический метод применяется к полученному уравнению. Для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка было исследовано решение задачи Коши, и решение было найдено в интегральном форма. Для изучения первичного вопроса было выбрано специальное нормальное* *пространство. Дифференцирование по параметру под знаком интеграла также применялось в случае, когда предел интеграла зависел от параметра. Было определено условие, при котором интегральное уравнение Вольтерра второго рода нелинейно имеет единственное решение и получено в интегральной форме.*

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнения, задача Коши, сжимающее отображение, частная производная, интегральная форма.*

SOLVABILITY AND STRUCTURE OF SOLUTIONS TO THE INITIAL PROBLEM OF HIGH-ORDER INTEGRO-DIFFERENTIAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kydyraliev Torogeldi Raimzhanovich, Candidate of Ph. and Math.Sc., Docent
torogeldi1@mail.ru
International University of the Kyrgyz Republic
Bishkek, Kyrgyzstan
Chamashev Marat Kakarovich? Candidate of Ph. and Math.Sc., Docent
marat2771@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The relevance of the derivation of the initial problem of a nonlinear Integro-differential partial differential equation has not lost its relevance. Transformation is one of the research methods. Using this method, it is transformed into the nonlinear Volterra integral equation, the original problem, which is equivalent to the original problem. The topological method is applied to the resulting equation. For integro-differential equations with partial derivatives of the fourth order, the solution of the Cauchy problem was investigated, and the solution was found in the integral representation.*

A special normal space was chosen to study the primary issue. Differentiation by parameter under the sign of the integral was also applied in the case when the limit of the integral depended on the parameter. The condition was determined under which the Volterra integral equation of the second kind has a unique nonlinear solution and is obtained in integral form.

Keywords: *integro-differential equations, Cauchy problem, contraction mapping, partial derivative, integral form.*

Киришүү. Төртүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу изилденген жана изделүүчү чыгарылыштын интегралдык көрүнүшү табылган.

Маселенинкоюлушу. Төртүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесин карайлы

$$
\begin{aligned}
&u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)\ +\\
&+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+\\
&+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)\ +\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=f\left(t,x,y,u(t,x,y)\right)+\int_0^t K(t,s,x,y,u(s,x,y))ds,
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
u(0,x,y)=\varphi(x,y), \tag{2}
$$

$$
u_t(0,x,y)=\psi(x,y), \tag{3}
$$

мында $\alpha,\beta,\gamma\in R_+\equiv(0,+\infty)$.

(1)-(3) маселесинин чыгарылышын төмөндөгү түрдө табабыз

$$
\begin{aligned}
&u(t,x,y)=c(t,x,y)+\\
&+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}(1-\sin(t-s))Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds,
\end{aligned} \tag{4}
$$

мында $c(t,x,y)$ - белгилүү функция

$c(0,x,y)=\varphi(x,y), c_t(0,x,y)=\psi(x,y)$ барабардыктары аткарылуучу. $Q(t,x,y)$ - жаңы изделүүчү функция.

(T) шарт.

$f(t,x,y,u)\in \bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip(L|_u)$,

$K(t,s,x,y,u)\in \bar{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip(L_1|_u)$ жана

$\dfrac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T$ болсун.

$$H(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\beta c_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, c_{ty}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2 c_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+\gamma c_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha c_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta c_{tt}(t,x,y)+$$
$$+2\alpha\beta\gamma c_t(t,x,y)+\alpha^2 c_x\gamma(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma c(t,x,y).$$

Тандап алуунун негизинде $c(t,x,y)$ти

$\max\limits_{[0,T]\times R\times R}\|H(t,x,y)\|<+\infty.$ деп эсептөөгө болот

(4)тү (1)ге коебуз. (4)түн t боюнча туундусу:

$$u_t(t,x,y)=c_t(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds-$$
$$-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y (1-\sin(t-s))e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds \text{ болот.}$$

Мындан (4)дөн

$$u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)=\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds. \quad \text{алабыз} \quad (5).$$

(5)тин эки жагынын тең t боюнча туундусу төмөндөгүнү берет :

$$u_{tt}(t,x,y)+\alpha u_t(t,x,y)=\alpha c_t(t,x,y)+c_{tt}(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu- \quad (6)$$
$$-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds.$$

(6)дан, (5)ни эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз

$$u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2 u(t,x,y)=c_{tt}(t,x,y)+2\alpha c_t(t,x,y)+\alpha^2 c(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu. \quad (7)$$

(7)нин эки бөлүгунунун тең x боюнча туундусу төмөндөгүнү берет:

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)=c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu-\beta\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)d\nu d\mu.$$

Мындан (7)ни колдонуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)=c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu-\beta[u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2 u(t,x,y)-$$
$$-c_{tt}(t,x,y)-2\alpha c_t(t,x,y)-\alpha^2 c(t,x,y)],$$

же

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\beta u_{tt}(t,x,y)+2\alpha\beta u_t(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta u(t,x,y)=$$
$$c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+\beta c_{tt}(t,x,y)+ \tag{8}$$
$$+2\alpha\beta c_t(t,x,y)+\alpha^2\beta c(t,x,y)+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu.$$

(8)ди y боюнча дифференцирлейбиз:

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta u_{ty}(t,x,y)+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\alpha^2 c_{xy}(t,x,y)+\beta c_{tty}(t,x,y)+ \tag{9}$$
$$+2\alpha\beta c_{ty}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+Q(t,x,y)-\gamma\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu.$$

(8)ди γ ге көбөйтүп, (9) менен мүчөлөп топтоштуруп төмөндөгүнү алабыз

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta u_{ty}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+ \tag{11}$$
$$+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)+\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=H(t,x,y)+Q(t,x,\nu).$$

(11)ден , (1) теңдеменин негизинде, (4)деги $Q(t,x,y)$ белгисиз функциясын аныктоо үчүн сызыктуу эмес интегралдык теңдемени алабыз

$$Q(t,x,y)=f\left[t,x,y,c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}(1-\sin(t-s))e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu\, d\mu\, ds\right]+$$
$$+\int_0^t K(t,s,x,y,c(s,x,y)+\int_0^s\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}(1-\sin(t-\tau))e^{-\alpha(t-\tau)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu\, d\mu\, d\tau)ds-H(t,x,y)\equiv PQ, \quad 12)$$

(12)теңдемесине кысып чагылтуу принцибин колдонобуз.

Мейли

$$Q=\left\{Q\left(t,x,y\right):Q\left(t,x,y\right)\in C\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)\cap\left\|Q\left(t,x,y\right)\right\|\le h\right\}.$$

Анда (11) теңдемесинен $\|PQ\|\le M+N+KT_0$ барабарсыздыгы келип чыгат, мында $M\equiv\max f(t,x,y,u),\ N\equiv\max\left\|H\left(t,x,y\right)\right\|, \mathrm{K}\equiv\max\mathrm{K}(t,\mathrm{s},x,y,u)$.

Эгерде T_0 жана h ды,

$$M+N+KT_0\le h \quad (13)$$

тандасак, анда PQ оператору $PQ:Q\to Q$ болот.

Эми PQ оператору кысуу оператору экендигин далилдейбиз. (11)ден (Т) шартын пайдаланып төмөндөгүнү алабыз

$$\|PQ_1-PQ_2\|\le(L+L_1t)\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}(1-sin(t-s))e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\,d\nu\,d\mu\,ds$$
$$\times\|Q_1-Q_2\|\le$$
$$\le\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}\left\|Q_1-Q_2\right\|. \qquad (14)$$

Жогорудагы келтирилген баалоодо төмөндөгү барабарсыздыктар колдонулган.

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu d\mu ds\le\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^{x}e^{-\beta(x-\mu)}\left(\int_{-\infty}^{y}e^{-\gamma(y-\nu)}d\nu\right)d\mu\right]ds\le$$
$$\le\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^{x}e^{-\beta(x-\mu)}\left(\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma y}\cdot e^{\gamma\nu}\Big|_{\nu=-\infty}^{y}\right)d\mu\right]ds\le\frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

$\alpha,\beta,\gamma\in R_+\,u\,T_0$ турактууларын $\dfrac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1$ барабарсыздыгы орун ала тургандай тандайбыз. Анда (Т) шарттын негизинде (14)төн PQ оператору Q көптүгүндө кысып чагылтуу оператору экендиги келип чыгат. (12) сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системасы кысып чагылтуу принциби боюнча жалгыз үзгүлтүксүз чыгарылышка ээ болоору келип чыгат. Табылган функцияны (4)ге коюп, (1)-(3) Коши маселесинин чыгарылышын алабыз.

Эми (1)-(3) Коши маселесинин чыгарылышынын дифференциалдык касиетин изилдейбиз. Бардык $Q(t,x,y)\in Q$ үчүн (4) барабардыгынан алынган, төмөндөгү барабарсыздык келип чыгат

$$\|u(t,x,y)\| \le \|c(t,x,y)\|$$

$$+\left\| \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y (1-sin(t-s)) e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} Q(s,\mu,\nu) d\nu\, d\mu\, ds \right\| \le$$

$$\le C_0 + \frac{T_0 h}{\alpha\beta\gamma} = M_0 = const\,.$$

(5)тен төмөндөгү келип чыгат:

$$\left\|u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)\right\| \le \left\|\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)\right\| +$$

$$+\left\| \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} Q(s,\mu,\nu)\, d\nu d\mu ds \right\| \le C_1 + \frac{h}{\alpha\beta\gamma} = M_1 = const\,.$$

Аналогиялык жол менен (7)- (9)дагы (1) теңдемеге кирген баардык туундуларды бир калыпта чектелгенин далилдөөгө болот.

Ошондой эле төмөндөгү орун алат

Теорема. Мейли (T) шарты аткарылсын. Анда (1)-(3) Коши маселеси (4)-көрүнүштө жазууга мүмкүн болгон чыгарылышка ээ болот $u(t,x,y) \in \bar{C}^{(2,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$.

Корутунду. Айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу изилденди жана изделүүчү чыгарылыштын интегралдык көрүнүшү табылды.

Адабияттар

1. Imanaliev M.I., Baizakov A.B., Kydyraliev T.R. Sufficient conditions for the existense of solutions of the Cauchy problem of partial differential eguations of third order.Proceedings of V Congress of the Turkic World mathematicians. Bishkek, 2014.-v.1.-P.121-126.
2. Baizakov A.B., Dzheenbaeva G.A., Sharshenbekov M.M. On the structure of solutions of the initial problem of nonlinear integro-differential equations in partial derivatives of the fourth order. Вестник Института математики НАН КР. - 2022.-№1.- С.32-38.
3. Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р. Применение метода преобразования решений к начальной задаче интегро-дифференциальных уравнений в частных производных пятого порядка// Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2018. №3, С 26-31.
4. Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р., Асанкулова А.С. Начальной задаче интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Вестник ИМ АН КР, Бишкек.2014. №1, С. 84-90

УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_14

О ПОСТАНОВКЕ И ИЗУЧЕНИЮ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СМЕШАННОЙ ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Мамажонов Мирза
mirzamamajonov@gmail.com
КГПИ, «Математика»
Фергана, Узбекистан

Аннотация. *В настоящей работе ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в смешанной области с тремя линиями изменения типа. Доказана теорема об однозначной разрешимости этой поставленной задачи. В ходе доказательства этой теоремы применены методы построения решения, дифференциальных и интегральных уравнений, а также метод продолжения.*

Ключевые слова: *Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, метод продолжения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость.*

ON THE FORMULATION AND STUDY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER EQUATION OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE IN A MIXED PENTAGONAL DOMAIN

Mamajonov Mirza
mirzamamajonov@gmail.com
KSPI, "Mathematics"
Fergana, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we pose and study a boundary value problem for a fourth-order parabolic-hyperbolic equation in a mixed domain with three lines of type change. We prove a theorem on the unique solvability of this problem. In proving this theorem, we apply methods of constructing a solution, differential and integral equations, and the continuation method.*

Keywords: *Differential and integral equations, solution construction method, continuation method, boundary value problem, parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

Изучение краевых задач для уравнений третьего, четвертого и высокого порядков параболо-гиперболического типа интенсивно развивалось со второй половины прошлого века. Краевые задачи для таких уравнений изучены в основном в работах [1], [2] и др.

Затем началось исследование ряд различных краевых задач для таких уравнений в различных областях с двумя и тремя линиями изменения типа {см. [3]-[18]}.

В настоящей статье в пятиугольной области G плоскости xOy ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвёртого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0, \qquad (1)$$

где $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup J_1 \cup J_2 \cup$, G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках $D(-1,0)$, $E(1/2,-3/2)$, $C(2,0)$; G_3 и G_4 – прямоугольники с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0 и B, B_0, $C_0(2,1)$, $C(2,0)$ соответственно; J_1, J_2 и J_3 – открытые отрезки с вершинами в точках C, D; A, A_0 и B, B_0 соответственно; $u = u(x,y)$ – неизвестная функция, а $Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, \ (x,y) \in G_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, \ (x,y) \in G_j, \ j = 2,3,4. \end{cases}$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

<u>Задача-1.</u> Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G \setminus J_1 \setminus J_2 \setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G \setminus J_1 \setminus J_2 \setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(2,y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{2}$$

$$u(-1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{3}$$

$$u_x(-1,y) = \varphi_4(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{4}$$

$$u_{xx}(-1,y) = \varphi_6(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{5}$$

$$u\big|_{DE} = \psi_1(x), \ -1 \le x \le 1/2; \tag{6}$$

$$u\big|_{ES} = \psi_2(x), \ 1/2 \le x \le 1; \tag{7}$$

$$u\big|_{RC} = \psi_3(x), \ 3/2 \le x \le 2; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DE} = \psi_4(x), \ -1 \le x \le 1/2; \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{DE} = \psi_5(x), \ -1 \le x \le 1/2; \tag{10}$$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = T(x), \ -1 \le x \le 1; \tag{11}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = N(x), \ -1 \le x \le 1; \tag{12}$$

$$u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = M(x), \ x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2); \tag{13}$$

$$u(+0,y) = u(-0,y) = \tau_4(y), \ 0 \le y \le 1; \tag{14}$$

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y) = \nu_4(y), \ 0 \le y \le 1; \tag{15}$$

$$u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y) = \mu_4(y), \ 0 < y < 1; \tag{16}$$

$$u_{xxx}(+0,y) = u_{xxx}(-0,y) = \theta_4(y), \ 0 < y < 1; \tag{17}$$

$$u(1+0,y) = u(1-0,y) = \tau_5(y), \ 0 \le y \le 1; \tag{18}$$

$$u_x(1+0,y) = u_x(1-0,y) = \nu_5(y), \ 0 \le y \le 1; \tag{19}$$

$$u_{xx}(1+0,y) = u_{xx}(1-0,y) = \mu_5(y), \ 0 < y < 1; \tag{20}$$

$$u_{xxx}(1+0,y)=u_{xxx}(1-0,y)=\theta_5(y),\ 0<y<1, \tag{21}$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_4,\varphi_6$, ψ_j $\left(j=\overline{1,5}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=-1$ или $x-y=2$, а $S(1,-1)$, $R(3/2,-1/2)$,

$$T(x)=\begin{cases}\tau_1(x),\ \text{если}\ 0\le x\le 1,\\ \tau_2(x),\ \text{если}\ -1\le x\le 0,\\ \tau_3(x),\ \text{если}\ 1\le x\le 2;\end{cases}\quad N(x)=\begin{cases}\nu_1(x),\ \text{если}\ 0\le x\le 1,\\ \nu_2(x),\ \text{если}\ -1\le x\le 0,\\ \nu_3(x),\ \text{если}\ 1\le x\le 2;\end{cases}$$

$$M(x)=\begin{cases}\mu_1(x),\ \text{если}\ 0<x<1,\\ \mu_2(x),\ \text{если}\ -1<x<0,\\ \mu_3(x),\ \text{если}\ 1<x<2;\end{cases}$$ $\tau_i,\ \nu_i,\ \mu_i$ $(i=\overline{1,5})$, θ_4,θ_5 – неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Теорема. Если $\varphi_1,\varphi_2\in C^4[0,1]$, $\varphi_4\in C^3[0,1]$, $\varphi_6\in C^2[0,1]$, $\psi_1\in C^4[-1,1/2]$, $\psi_2\in C^4[1/2,1]$, $\psi_3\in C^4[3/2,2]$, $\psi_4\in C^3[-1,1/2]$, $\psi_5\in C^2[-1,1/2]$, причем выполняется условие согласования $\tau_2(-1)=\psi_1(-1)=\varphi_2(0)$, $\tau_3(2)=\varphi_1(0)=\psi_3(2)$, $\psi_1(1/2)=\psi_2(1/2)$, $\tau_1(1)=\tau_3(1)$, $\tau_1(0)=\tau_2(0)$, $\tau_1'(1)=\tau_3'(1)$, $\tau_1'(0)=\tau_2'(0)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(y)+\omega_{12}(x-y),\ (x,y)\in G_1, \tag{22}$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_{i1}(y)+\omega_{i2}(x-y),\ (x,y)\in G_i\quad (i=2,3,4), \tag{23}$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$, причем функции $\omega_{i1}(y),\ \omega_{i2}(x-y)$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в области G_2. Решение уравнения (23) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (11), (12) представляется в виде

$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[T(x+y)+T(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_{22}(\xi-\eta)\,d\xi-\int_0^y(y-\eta)\,\omega_{21}(\eta)\,d\eta. \tag{24}$$

Подставляя (24) в условия (9) и (10) после упрощений, имеем

$$\omega_{21}(-1-x)+\omega_{22}(2x+1)=\sqrt{2}\psi_4'(x),\ -1\le x\le 1/2, \tag{25}$$

$$\omega_{22}(2x+1)=2\psi_5(x)+\sqrt{2}\psi_4'(x)-2T''(-1)-2N'(-1)+\omega_{22}(-1),\ -1\le x\le 1/2. \tag{26}$$

А подставляя (26) в (25), находим

$$\omega_{21}(-1-x)=-2\psi_5(x)+2T''(-1)+2N'(-1)-\omega_{22}(-1),\ -1\le x\le 1/2.$$

В этом равенстве меняя аргумент $-1-x$ на y, получим

$$\omega_{21}(y) = -2\psi_5(-1-y) + 2T''(-1) + 2N'(-1) - \omega_{22}(-1), \ -3/2 \le y \le 0, \qquad (27)$$

В равенстве (26) меняя аргумент $2x+1$ на $x-y$, находим

$$\omega_{22}(x-y) = 2\psi_5\left(\frac{x-y-1}{2}\right) + \sqrt{2}\psi_4'\left(\frac{x-y-1}{2}\right) -$$

$$-2T''(-1) - 2N'(-1) + \omega_{22}(-1), \ -1 \le x-y \le 2. \qquad (28)$$

Слагая (27) и (28), имеем

$$\omega_{21}(y) + \omega_{22}(x-y) = \sqrt{2}\psi_4'\left(\frac{x-y-1}{2}\right) + 2\left[\psi_5\left(\frac{x-y-1}{2}\right) - \psi_5(-1-y)\right],$$

$$-1 \le x-y \le 2, \ -3/2 \le y \le 0.$$

Теперь подставляя (24) в (6), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$:

$$T'(x) - N(x) = \alpha_1(x), \ -1 \le x \le 2, \qquad (29)$$

где $\alpha_1(x) = \psi_1'\left(\frac{x-1}{2}\right) - \int\limits_0^{-\frac{x+1}{2}} \omega_{21}(\eta)\,d\eta + \frac{x+1}{2}\omega_{22}(x)$.

При $0 \le x \le 1$ уравнение (29) имеет вид

$$\tau_1'(x) - \nu_1(x) = \alpha_1(x), \ 0 \le x \le 1, \qquad (30)$$

б) При $-1 \le x \le 0$ –

$$\tau_2'(x) - \nu_2(x) = \alpha_1(x), \ -1 \le x \le 0, \qquad (31)$$

в) а при $1 \le x \le 2$ –

$$\tau_3'(x) - \nu_3(x) = \alpha_1(x), \ 1 \le x \le 2. \qquad (32)$$

Далее, подставляя (24) в (7), получим соотношение

$$\tau_2'(x) + \nu_2(x) = \delta_1(x), \ -1 \le x \le 0, \qquad (33)$$

где $\delta_1(x) = \psi_2'\left(\frac{x+2}{2}\right) + \int\limits_0^{\frac{x-2}{2}} \left[\omega_{21}(\eta) + \omega_{22}(x-2\eta)\right]d\eta$.

А подставляя (24) в (8), имеем

$$\tau_3'(x) + \nu_3(x) = \delta_2(x), \ 1 \le x \le 2, \qquad (34)$$

где $\delta_2(x) = \psi_3'\left(\frac{x+2}{2}\right) + \int\limits_0^{\frac{x-2}{2}} \left[\omega_{21}(\eta) + \omega_{22}(x-2\eta)\right]d\eta$.

Из (31) и (33) находим функции $\tau_2'(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\tau_2'(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(x) + \delta_1(x)\right], \qquad \nu_2(x) = \frac{1}{2}\left[\delta_1(x) - \alpha_1(x)\right]. \qquad (35)$$

Интегрируя первое из (35) от -1 до x, находим

$$\tau_2(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x}\left[\alpha_1(t) + \delta_1(t)\right]dt + \psi_1(-1).$$

Далее, из (32) и (34) находим функции $\tau_3'(x)$ и $\nu_3(x)$:

$$\tau_3'(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\delta_2(x)\right], \qquad \nu_3(x)=\frac{1}{2}\left[\delta_2(x)-\alpha_1(x)\right] \tag{36}$$

Интегрируя первое из (36) от 2 до x, находим

$$\tau_3(x)=\frac{1}{2}\int_2^x\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt+\psi_3(2).$$

Теперь переходя в уравнении (23) $(i=2)$, к пределу при $y\to 0$, в силу (11) и (13) получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\mu_1(x)=\tau_1''(x)-\omega_{21}(0)-\omega_{22}(x). \tag{37}$$

Далее, применяя оператор $\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (22) и устремляя y к нулю, получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\tau_1'''(x)+\nu_1''(x)-\nu_1'(x)-\mu_1(x)=\omega_{11}'(0). \tag{38}$$

Исключая из (30), (37) и (38) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение дважды от 0 до x, имеем

$$\tau_1'(x)-\tau_1(x)=\alpha_2(x)+\frac{1}{2}\omega_{11}'(0)\frac{x^2}{2}+k_1x+k_2,\ 0\le x\le 1,$$

где $\alpha_2(x)=\dfrac{1}{2}\left[\alpha_1(x)-\int_0^x\alpha_1(t)\,dt-\int_0^x(x-t)\left[\omega_{21}(0)+\omega_{22}(t)\right]dt\right]$, а $\omega_{11}'(0)$, k_1, k_2 – неизвестные пока постоянные.

Теперь решая последнее уравнение при условиях $\tau_1(0)=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^0\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_1(-1)$,

$$\tau_1'(0)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right], \qquad \tau_1'(1)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right], \qquad \tau_1(1)=\psi_3(2)-\frac{1}{2}\int_1^2\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt,$$

находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x)=\int_0^x e^{x-t}\alpha_2(t)\,dt+\frac{\omega_{11}'(0)}{2}\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right)+k_1\left(e^x-x-1\right)+k_2\left(e^x-1\right)+k_3e^x,$$

где

$$k_3=\frac{1}{2}\int_{-1}^0\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_1(-1),\ k_2=\frac{1}{2}\delta_1(0)-k_3,$$

$$\omega_{12}'(0)=\frac{4}{e-3}\left\{\frac{2-e}{2}\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right]+\alpha_2(1)(e-2)-\int_0^1 e^{1-t}\alpha_2(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\psi_3(2)(e-1)-\frac{e-1}{2}\int_1^2\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt-k_2-k_3e\right\},$$

$$k_1=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right]-\alpha_2(1)-\psi_3(2)+\frac{1}{2}\int_1^2\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt-k_2-\frac{1}{4}\omega_{11}'(0).$$

Тогда будут известными и функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Переходя в уравнениях (23) $(i=2)$ и (23) $(i=3)$ к пределу при $y\to 0$ с учетом условий (11), (13) и производя замену $x \,\square\, x-y$, находим

$$\omega_{32}(x-y)=\omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)-\omega_{31}(0),\ -1\le x-y\le 0. \qquad (39)$$

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3. Сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx}-u_{3yy}=\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)+\Omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0), \\ u_3(x,0)=T_2(x),\ u_{3y}(x,0)=N_2(x),\ -2\le x\le 1, \\ u_3(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{3x}(-1,y)=\varphi_4(y),\ u_{3xx}(-1,y)=\varphi_6(y), u_3(0,y)=\tau_4(y),\ 0\le y\le 1, \end{cases}$$

где функции $T_2(x)$, $N_2(x)$, $\Omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)$ определяются следующим образом: в промежутке $-1\le x\le 0$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ имеют вид: $T_2(x)=\tau_2(x)$, $N_2(x)=\nu_2(x)$, функция $\Omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)$ при $-1\le x-y\le 0$ имеет вид: $\Omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)=\omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)$, а в промежутках $-2\le x\le -1$ и $0\le x\le 1$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ и в промежутках $-2\le x-y\le -1$ и $0\le x-y\le 1$ функция $\Omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условий $u_{3x}(-1,y)=\varphi_4(y)$, $u_{3xx}(-1,y)=\varphi_6(y)$, будем искать в виде

$$u_3(x,y)=u_{31}(x,y)+u_{32}(x,y)+u_{33}(x,y), \qquad (40)$$

где $u_{31}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx}-u_{31yy}=0, \\ u_{31}(x,0)=T_2(x),\ u_{31y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1, \\ u_{31}(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{31}(0,y)=\tau_4(y),\ 0\le y\le 1; \end{cases} \qquad (41)$$

$u_{32}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx}-u_{32yy}=\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0), \\ u_{32}(x,0)=0,\ u_{32y}(x,0)=N_2(x),\ -2\le x\le 1, \\ u_{32}(-1,y)=0,\ u_{32}(0,y)=0,\ 0\le y\le 1; \end{cases} \qquad (42)$$

$u_{33}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{33xx}-u_{33yy}=\Omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0), \\ u_{33}(x,0)=0,\ u_{33y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1, \\ u_{33}(-1,y)=0,\ u_{33}(0,y)=0,\ 0\le y\le 1. \end{cases} \qquad (43)$$

Методом продолжения находим решения задач (41)-(43). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right], \qquad (44)$$

$$u_{32}(x,y)=\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt-\int_0^y(y-\eta)\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta, \qquad (45)$$

$$u_{33}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\left[\Omega_{22}(\xi-\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\xi. \qquad (46)$$

где

$$T_2(x)=\begin{cases}2\varphi_2(-1-x)-\tau_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \tau_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\tau_4(x)-\tau_2(-x),\ 0\le x\le 1,\end{cases}$$

$$N_2(x)=\begin{cases}2\int\limits_0^{-1-x}\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta-\nu_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \nu_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\int\limits_0^{x}\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta-\nu_2(-x),\ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

А функция $\Omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)$ определяется следующим образом. Первые два условия задачи (43) выполняются автоматически. удовлетворяя третье условию, находим

$$y\left[\Omega_{22}(-1-y)+\omega_{21}(0)\right]=-\frac{1}{2}\int\limits_0^y\left[\Omega_{22}(-1-z)+\omega_{21}(0)\right]dz-\frac{1}{2}\int\limits_0^y\left[\omega_{22}(z-1)+\omega_{21}(0)\right]dz. \quad (47)$$

Дифференцируя (47), получим

$$y\Omega'_{22}(-1-y)=\frac{3}{2}\left[\Omega_{22}(-1-y)+\omega_{21}(0)\right]+\frac{1}{2}\left[\omega_{22}(y-1)+\omega_{21}(0)\right]. \quad (48)$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (43), имеем

$$\int\limits_0^y\left[\Omega_{22}(z)+\omega_{21}(0)\right]dz=-\int\limits_0^y\left[\omega_{22}(-z)+\omega_{21}(0)\right]dz-2y\left[\omega_{22}(-y)+\omega_{21}(0)\right]. \quad (49)$$

Дифференцируя (49), находим

$$\Omega_{22}(y)+\omega_{21}(0)=-3\left[\omega_{22}(-y)+\omega_{21}(0)\right]+2y\omega'_{22}(-y). \quad (50)$$

Подставляя (44), (45), (46) в (40), получим

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N_2(t)dt-$$

$$-\int\limits_0^y(y-\eta)\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\left[\Omega_{22}(\xi-\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\xi. \quad (51)$$

Дифференцируя (51) по x дважды, имеем

$$u_{3x}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T'_2(x+y)+T'_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_2(x+y)-N_2(x-y)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^y\left[\Omega_{22}(x+y-2\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\eta+\frac{y}{2}\left[\Omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)\right], \quad (52)$$

$$u_{3xx}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T''_2(x+y)+T''_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N'_2(x+y)-N'_2(x-y)\right]-$$

$$+\frac{1}{4}\left[\Omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)\right]-\frac{1}{4}\left[\Omega_{22}(x+y)+\omega_{21}(0)\right]+\frac{y}{2}\Omega'_{22}(x-y). \quad (53)$$

Полагая в (52) $x=-1$ в силу условия $u_{3x}(-1,y)=\varphi_4(y)$, имеем

$$\varphi_4(y)=\tau'_2(y-1)-\varphi'_2(y)+\nu_2(y-1)-\int\limits_0^y\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta-\frac{1}{4}\int\limits_0^y\left[\omega_{22}(z-1)+\omega_{21}(0)\right]dz-$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^y\left[\Omega_{22}(-1-z)+\omega_{21}(0)\right]dz+\frac{1}{2}y\left[\Omega_{22}(-1-y)+\omega_{21}(0)\right]. \qquad (54)$$

Дифференцируя (54), в силу (48), после некоторых выкладок, имеем соотношение

$$\varphi_4'(y)=\tau_2''(y-1)-\varphi_2''(y)+\nu_2'(y-1)-\left[\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\omega_{22}(y-1)+\omega_{21}(0)\right]-\frac{1}{2}\left[\Omega_{22}(-1-y)+\omega_{21}(0)\right]. \qquad (55)$$

Подставляя (53) в условие (5), приходим к соотношению

$$\varphi_6(y)=\varphi_2''(y)+\left[\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)\right]+\left[\Omega_{22}(-1-y)+\omega_{21}(0)\right]. \qquad (56)$$

Слагая равенства (55) и (56), находим

$$\Omega_{22}(-1-y)+\omega_{21}(0)=2\left[\varphi_4'(y)+\varphi_6(y)-\tau_2''(y-1)-\nu_2'(y-1)\right]+\left[\omega_{22}(y-1)+\omega_{21}(0)\right].$$

Подставляя последнее равенство в (56), имеем

$$\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)=2\left[\tau_2''(y-1)+\nu_2'(y-1)-\varphi_4'(y)\right]-\varphi_6(y)-\varphi_2''(y)-\left[\omega_{22}(y-1)+\omega_{21}(0)\right].$$

Далее, полагая в (52) $x\to 0$, после некоторых вычислений, получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_4(y)$ и $\nu_4(y)$:

$$\nu_4(y)=\tau_4'(y)+\beta_1(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (57)$$

где

$$\beta_1(y)=\tau_2'(-y)-\nu_2(-y)+\int_0^y\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta-\frac{1}{4}\int_0^y\left[\Omega_{22}(z)+\omega_{21}(0)\right]dz-$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^y\left[\omega_{22}(-z)+\omega_{21}(0)\right]dz+\frac{1}{2}\left[\omega_{22}(-y)+\omega_{21}(0)\right].$$

Теперь переходя в уравнениях (22) и

$$u_{3xx}-u_{3yy}=\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)+\Omega_{22}(x-y)-\omega_{21}(0) \qquad (58)$$

к пределу при $x\to 0$ в силу условий (14) и (16), находим

$$\mu_4(y)-\tau_4'(y)=\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(-y), \qquad (59)$$

$$\mu_4(y)-\tau_4''(y)=\left[\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)\right]+\left[\omega_{22}(-y)+\omega_{21}(0)\right], \qquad (60)$$

где положено $\omega_{12}(x-y)=\begin{cases}\overline{\omega}_{12}(x-y),\ -1\le x-y\le 0,\\ \overline{\overline{\omega}}_{12}(x-y),\ 0\le x-y\le 1,\end{cases}$ причем $\overline{\omega}_{12}(0)=\overline{\overline{\omega}}_{12}(0)$.

А переходя в уравнении (22) к пределу при $y\to 0$, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{12}(x)=\tau_1''(x)-\nu_1(x)-\omega_{11}(0).$$

Дифференцируя уравнения (22) и (58) по x и полагая в полученных уравнениях $x\to 0$ в силу условий (15)-(17), получим

$$\theta_4(y)-\nu_4'(y)=\overline{\omega'}_{12}(-y), \qquad (61)$$

$$\theta_4(y)-\nu_4''(y)=\omega_{22}'(-y). \qquad (62)$$

Исключая из (59), (60) функцию $\mu_4(y)$, а из (61), (62) функцию $\theta_4(y)$ после некоторых выкладок, находим

$$\omega_{11}(y)=-\overline{\omega}_{12}(-y)+\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\left[\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)\right]+\left[\omega_{22}(-y)+\omega_{21}(0)\right], \qquad (63)$$

$$\overline{\omega'}_{12}(-y)=\left[\nu_4''(y)-\nu_4'(y)\right]+\omega_{22}'(-y), \qquad (64)$$

Интегрируя (64) и подставляя (57) в полученное равенство, находим

$$\overline{\omega}_{12}(-y)-\overline{\omega}_{12}(0)=-\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]-\left[\beta_1'(y)-\beta_1(y)\right]+$$
$$+\nu_1'(0)-\tau_1'(0)+\omega_{22}(-y)-\omega_{22}(0). \qquad (65)$$

А подставляя (65) в (63), получим

$$\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(0)=2\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\gamma_1(y), \qquad (66)$$

где

$$\gamma_1(y)=\left[\beta_1'(y)-\beta_1(y)\right]-\nu_1'(0)+\tau_1'(0)+\left[\omega_{22}(0)+\omega_{21}(0)\right]+\left[\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)\right].$$

Переходя в уравнении (22) к пределу при $y\to 0$ в силу условий (11) и (12), находим

$$\omega_{11}(0)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(x)=\tau_1''(x)-\nu_1(x). \qquad (67)$$

Таким образом, мы нашли следующие соотношения:

$$\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(x-y)=2\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]-\left[\tau_4''(y-x)-\tau_4'(y-x)\right]+\gamma_1(y)+$$
$$+\gamma_2(x-y),\ -1\le x-y\le 0,\ 0\le y\le 1, \qquad (68)$$

$$\omega_{11}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(x-y)=2\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\gamma_1(y)+\gamma_3(x-y)-$$
$$-\left[\omega_{11}(0)+\overline{\omega}_{12}(0)\right],\ 0\le x-y\le 1,\ 0\le y\le 1, \qquad (69)$$

где

$$\gamma_2(x-y)=-\left[\beta_1'(y-x)-\beta_1(y-x)\right]+\nu_1'(0)-\tau_1'(0)+\omega_{22}(x-y)-\omega_{22}(0),$$

$$\gamma_3(x-y)=\tau_1''(x-y)-\nu_1(x-y),\ \ \omega_{11}(0)+\overline{\omega}_{12}(0)=\mu_1(0)-\nu_1(0)+\gamma_1(0)+\gamma_2(0).$$

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_4. Переходя в уравнениях (23) $(i=2)$ и (23) $(i=4)$ к пределу при $y\to 0$ с учетом условий (11), (13) и производя замену $x\to x-y$, находим

$$\omega_{42}(x-y)=\omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)-\omega_{41}(0),\ 1\le x-y\le 2. \qquad (70)$$

Далее, переходя в уравнениях (23) $(i=4)$ и (22) к пределу при $x\to 1$, имеем

$$\mu_5(y)-\tau_5''(y)=\left[\omega_{41}(y)-\omega_{41}(0)\right]+\left[\overline{\Omega}_{22}(1-y)+\omega_{21}(0)\right],$$
$$\mu_5(y)-\tau_5'(y)=\omega_{11}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(1-y). \qquad (71)$$

Из этих равенств находим

$$\omega_{41}(y)-\omega_{41}(0)=-\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]+\left[\omega_{11}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(1-y)\right]-\left[\overline{\Omega}_{22}(1-y)+\omega_{21}(0)\right]. \qquad (72)$$

Дифференцируя уравнения (23) $(i=4)$ и (22) по x и устремляя x к единице, получим

$$\theta_5(y)-\nu_5''(y)=\overline{\Omega'}_{22}(1-y),$$
$$\theta_5(y)-\nu_5'(y)=\overline{\overline{\omega'}}_{12}(1-y).$$

Исключая из этих равенств функцию $\theta_5(y)$, находим

$$\overline{\Omega'}_{22}(1-y)=\overline{\overline{\omega'}}_{12}(1-y)-\left[\nu_5''(y)-\nu_5'(y)\right].$$

Интегрируя это равенство, имеем

$$\overline{\Omega}_{22}(1-y)+\omega_{21}(0)=\overline{\overline{\omega}}_{12}(1-y)-\overline{\overline{\omega}}_{12}(1)+\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]-$$
$$-\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]+\left[\overline{\Omega}_{22}(1)+\omega_{21}(0)\right]. \qquad (73)$$

Теперь сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу (здесь учтена формула (70)):

$$\begin{cases} u_{4xx}-u_{4yy}=\omega_{41}(y)-\omega_{41}(0)+\overline{\Omega}_{22}(x-y)+\omega_{21}(0), \\ u_4(x,0)=T_3(x),\ u_{4y}(x,0)=N_3(x),\ 0\le x\le 3, \\ u_4(1,y)=\tau_5(y),\ u_{4x}(1,y)=\nu_5(y),\ u_4(2,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le 1, \end{cases}$$

где функции $T_3(x)$, $N_3(x)$, $\overline{\Omega}_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)$ определяются следующим образом: в промежутке $1\le x\le 2$ функции $T_3(x)$, $N_3(x)$ имеют вид: $T_3(x)=\tau_3(x)$, $N_3(x)=\nu_3(x)$, функция $\overline{\Omega}_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)$ при $1\le x-y\le 2$ имеет вид: $\overline{\Omega}_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)=\omega_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)$, а в промежутках $0\le x\le 1$ и $2\le x\le 3$ функции $T_3(x)$, $N_3(x)$ и в промежутках $0\le x-y\le 1$ и $2\le x-y\le 3$ функция $\overline{\Omega}_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условия $u_{4x}(1,y)=\nu_5(y)$, будем искать в виде

$$u_4(x,y)=u_{41}(x,y)+u_{42}(x,y)+u_{43}(x,y), \qquad (74)$$

где $u_{41}(x,y)-$ решение задачи

$$\begin{cases} u_{41xx}-u_{41yy}=0, \\ u_{41}(x,0)=T_3(x),\ u_{41y}(x,0)=0,\ 0\le x\le 3, \\ u_{41}(1,y)=\tau_5(y),\ u_{41}(2,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le 1; \end{cases} \qquad (75)$$

$u_{42}(x,y)-$ решение задачи

$$\begin{cases} u_{42xx}-u_{42yy}=\omega_{41}(y)-\omega_{41}(0), \\ u_{42}(x,0)=0,\ u_{42y}(x,0)=N_2(x),\ 0\le x\le 3, \\ u_{42}(1,y)=0,\ u_{42}(2,y)=0,\ 0\le y\le 1; \end{cases} \qquad (76)$$

$u_{43}(x,y)-$ решение задачи

$$\begin{cases} u_{43xx}-u_{43yy}=\overline{\Omega}_{22}(x-y)+\omega_{21}(0), \\ u_{43}(x,0)=0,\ u_{43y}(x,0)=0,\ 0\le x\le 3, \\ u_{43}(1,y)=0,\ u_{43}(2,y)=0,\ 0\le y\le 1. \end{cases} \qquad (77)$$

Методом продолжения находим решения задач (75)-(77). Они имеют вид

$$u_{41}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_3(x+y)+T_3(x-y)\right], \qquad (78)$$

$$u_{42}(x,y)=\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_3(t)\,dt-\int_0^y(y-\eta)\left[\omega_{41}(\eta)-\omega_{41}(0)\right]d\eta, \qquad (79)$$

$$u_{43}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\left[\overline{\Omega}_{22}(\xi-\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\xi\,, \tag{80}$$

где

$$T_3(x)=\begin{cases}2\tau_5(1-x)-\tau_3(2-x),\ 0\le x\le 1,\\ \tau_3(x),\ 1\le x\le 2,\\ 2\varphi_1(x-2)-\tau_3(4-x),\ 2\le x\le 3,\end{cases}$$

$$N_3(x)=\begin{cases}2\int_0^{1-x}\left[\omega_{41}(\eta)-\omega_{41}(0)\right]d\eta-\nu_3(2-x),\ 0\le x\le 1,\\ \nu_3(x),\ 1\le x\le 2,\\ 2\int_0^{x-2}\left[\omega_{41}(\eta)-\omega_{41}(0)\right]d\eta-\nu_3(4-x),\ 2\le x\le 3.\end{cases}$$

А функция $\overline{\Omega}_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)$ определяется следующим образом. Первые два условия задачи (77) для функции (80) выполняются автоматически. Удовлетворяя третье условие, после некоторых преобразований находим

$$y\left[\overline{\Omega}_{22}(1-y)+\omega_{21}(0)\right]=-\frac{1}{2}\int_0^y\left[\overline{\Omega}_{22}(1-z)+\omega_{21}(0)\right]dz-\frac{1}{2}\int_0^y\left[\omega_{22}(1+z)+\omega_{21}(0)\right]dz\,. \tag{81}$$

Дифференцируя (81), получим

$$3\left[\overline{\Omega}_{22}(1-y)+\omega_{21}(0)\right]-2y\overline{\Omega}'_{22}(1-y)=-\left[\omega_{22}(1+y)+\omega_{21}(0)\right]. \tag{82}$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (77), после некоторых преобразований, имеем

$$\int_0^y\left[\overline{\Omega}_{22}(2+z)+\omega_{21}(0)\right]dz=-\int_0^y\left[\omega_{22}(2-z)+\omega_{21}(0)\right]dz-2y\left[\omega_{22}(2-y)+\omega_{21}(0)\right]. \tag{83}$$

Дифференцируя (83), находим

$$\overline{\Omega}_{22}(2+y)+\omega_{21}(0)=-3\left[\omega_{22}(2-y)+\omega_{21}(0)\right]+2y\omega'_{22}(2-y)\,. \tag{84}$$

Подставляя (78), (79), (80) в (74), получим

$$u_4(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_3(x+y)+T_3(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_3(t)dt-$$

$$-\int_0^y(y-\eta)\left[\omega_{41}(\eta)-\omega_{41}(0)\right]d\eta-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\left[\overline{\Omega}_{22}(\xi-\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\xi\,. \tag{85}$$

Дифференцируя (85) по x, имеем

$$u_{4x}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T'_3(x+y)+T'_3(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_3(x+y)-N_3(x-y)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^y\left[\overline{\Omega}_{22}(x+y-2\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\eta+\frac{y}{2}\left[\overline{\Omega}_{22}(x-y)+\omega_{21}(0)\right], \tag{86}$$

Полагая в (86) $x=1$ в силу условия $u_{4x}(1,y)=\nu_5(y)$, после некоторых вычислений и преобразований, имеем

$$\nu_5(y)=-\tau_5'(y)+\tau_3'(1+y)+\nu_3(1+y)-\int_0^y\left[\omega_{41}(\eta)-\omega_{41}(0)\right]d\eta-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^y\left[\omega_{22}(1+z)+\omega_{21}(0)\right]dz-\frac{1}{2}\int_0^y\left[\overline{\Omega}_{22}(1-z)+\omega_{21}(0)\right]dz.$$

Подставляя (72) и (73) в последнее соотношение, после некоторых вычислений и преобразований, приходим к дифференциальному уравнению относительно $\nu_5(y)$:

$$\nu_5'(y)+\nu_5(y)=-2\tau_5'(y)-4\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\gamma_4'(y), \tag{87}$$

где

$$\gamma_4(y)=4\left[\nu_1(0)-\tau_1(0)\right]-2\int_0^y\left[\gamma_1(\eta)+\gamma_3(1-\eta)\right]d\eta+2\left[\omega_{11}(0)+\overline{\omega}_{12}(0)\right]y+$$

$$+\int_0^y\left[\overline{\overline{\omega}}_{12}(1-\eta)-\overline{\overline{\omega}}_{12}(1)\right]d\eta-2\tau_3'(1)-2\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]y+2\left[\overline{\Omega}_{22}(1)+\omega_{21}(0)\right]y-$$

$$-\int_0^y\left[\omega_{22}(1+\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\eta.$$

Решая уравнение (87) при условии $\nu_5(0)=\tau_3'(1)$, находим

$$\nu_5(y)=-2\int_0^y e^{\eta-y}\tau_5'(\eta)d\eta-4\int_0^y e^{\eta-y}\tau_4''(\eta)d\eta+4\int_0^y e^{\eta-y}\tau_4'(\eta)d\eta+\gamma_5(y), \tag{88}$$

где

$$\gamma_5(y)=\int_0^y e^{\eta-y}\gamma_4'(\eta)d\eta+\tau_3'(1).$$

Теперь переходим в область G_1. Записывая решение уравнения (22), удовлетворяющего условиям (11), (14), (18), в силу (68) и (69), имеем

$$u_1(x,y)=\int_0^y\tau_4(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y\tau_5(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta+\int_0^1\tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-$$

$$-2\int_0^y\left[\tau_4''(\eta)-\tau_4'(\eta)\right]d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi-\int_0^y d\eta\int_0^\eta\left[\tau_4''(\eta-\xi)-\tau_4'(\eta-\xi)\right]G(x,y;\xi,\eta)d\xi-$$

$$-\int_0^y\gamma_1(\eta)d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi+\left[\omega_{11}(0)+\overline{\omega}_{12}(0)\right]\int_0^y d\eta\int_\eta^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi-$$

$$-\int_0^y d\eta\int_0^\eta\gamma_2(\xi-\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\xi-\int_0^y d\eta\int_\eta^1\gamma_3(\xi-\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\xi. \tag{89}$$

Дифференцируя (89) по x, затем устремляя x к нулю и к единице, с учетом равенств (57) и (87) после длинных вычислений, получим систему интегральных уравнений типа Абеля относительно $\tau_4''(y)$ и $\tau_5'(y)$. Применяя обращение Абеля к этим уравнениям, получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\tau_4''(y)$ и $\tau_5'(y)$:

$$\tau_4''(y)+\int_0^y K_1(y,\eta)\tau_4''(\eta)d\eta+\int_0^y K_2(y,\eta)\tau_5'(\eta)d\eta=g_1(y),\ 0\le y\le 1, \tag{90}$$

$$\tau_5'(y)+\int_0^y K_3(y,\eta)\tau_5'(\eta)d\eta+\int_0^y K_4(y,\eta)\tau_4''(\eta)d\eta=g_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{91}$$

где $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – известные функции, причем $K_1(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$ имеют слабую особенность $(1/2)$, $K_2(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – непрерывные функции, а

$$\left.\begin{matrix} G(x,y;\xi,\eta) \\ N(x,y;\xi,\eta)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\mp\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}\ -$$

функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (22).

Решая систему (90), (91), находим функции $\tau_4''(y)$ и $\tau_5'(y)$, тем самым и функции $\tau_4(y)$, $\tau_5(y)$, $\nu_4(y)$, $\nu_5(y)$, $\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(x-y)$, $\omega_{11}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(x-y)$, $T_2(x)$. $T_3(x)$, $\overline{\Omega}_{22}(1-y)+\omega_{21}(0)$, $\omega_{41}(y)-\omega_{41}(0)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$ и $u_1(x,y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

Замечание 1. Аналогичная задача для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0$$

в случае, когда $0<\dfrac{b_2}{a_2}<1$, исследуется как и в случае $\gamma_2=\dfrac{b_2}{a_2}=1$ в областях G_2, G_3, G_4, а в области G_1 исследование проводится разделением область G_1 на n частей, высоты которых первые $n-1$ областей равны на $\dfrac{b_2}{a_2}$, а последней – не больше чем $\dfrac{b_2}{a_2}$. Задача решается в каждых областях последовательно, аналогично случаю $\gamma_2=\dfrac{b_2}{a_2}=1$, т.е. в случае уравнения (1).

Замечание 2. Если вместо условия (6), (7) и (8) взять условия

$$u|_{CE}=\psi_1(x),\ 1/2\le x\le 2;$$

$$u|_{DP}=\psi_2(x),\ -1\le x\le -1/2;$$

$$u|_{QE}=\psi_3(x),\ 0\le x\le 1/2;$$

соответственно, то вместо уравнения

$$\tau_1'(x)-\tau_1(x)=\alpha_2(x)+\frac{1}{2}\omega_{11}'(0)\frac{x^2}{2}+k_1x+k_2,\ 0\le x\le 1$$

получим равенство

$$\alpha_1''(x)-\alpha_1'(x)-\omega_{11}'(0)+\omega_{21}(0)+\omega_{22}(x)=0,\ 0\le x\le 1,$$

то есть нельзя получить уравнение относительно неизвестной функции $\tau_1(x)$.

В этом случае такая постановка задачи некорректна в случае 4 при $\gamma_2=1$.

Литература

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.
3. Мамажанов М., Шерматова Х.М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Наманган Давлат университети илмий ахборотномаси. Наманган, 2022 й., 2-сон, 41-51 б.
4. Mamajonov M., Shermatova X.M. On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines. ISSN 1990-4789, Journal of applied and industrial mathematics. 2022, vol. 16, no. 3, pp. 481-489.
5. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения. Сибирский журнал индустриальной математики, 2022, 25(3), с. 93-103.
6. Mamajonov M., Shermatova Kh.M., Mukhtorova T. On a boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third-order, when the characteristic of the first order operator is parallel to the yordinate axis. International journal of social science and interdisciplinary research. 2022, ISSN, 2277-3630 Impact factor: 7.429, 11, pp. 105-110.
7. Mamajonov M., Shermatova H.M. Statement and study of a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type in a mixed pentagonal domain, when the slope of the characteristic of the operator the first order is greater than one. International journal of research in commerce., IT, engineering and social sciences. ISSN: 2349-7793 Impact Factor: 6.876., Volume: 16 Issue: 05 in May 2022. pp. 117-130.
8. Mamajonov M., Yu.Kharimova. On one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a quadrangular domain with two lines type changes. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 68-77.
9. Mamajonov M., Aroev D.D., Shermatova G. Statement and investigation of one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a pentagonal domain with three lines of type change. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 332-342.
10. Mamajonov M., Turdiboeva M.M. On one boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third order, when characteristics of the first order operator parallel to the X-axis. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ), ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 343-349.
11. Мамажанов М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Сборник международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования», Ош ГУ, г. Ош., 12-13 мая, 2023 г., с. 120-132.
12. Mamazhonov M., Mamazhonov S.M., Mamadalieva Kh. B. Some boundary value problems for a third-order parabolic-hyperbolic equation in a pentagonal domain. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016, 13 (2), pp. 31-38.
13. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary-Value Problem for the Fourth-Order Equation with Multiple Characteristics in a Rectangular Domain // Journal of Mathematical Sciences. 2023, 272(2), p. 185-201. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06409-x
14. Apakov, Y.P., Mamazhonov, S.M. Boundary Value Problem for an Inhomogeneous Fourth-Order Equation with Lower-Order Terms // Differential Equations. 2023, 59(2), p. 188-198. https://doi.org/10.1134/S0012266123020040
15. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary value problem for a inhomogeneous fourth order equation with constant coefficients // Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023, 8(2), p. 157-172. https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-18201
16. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2022). Boundary Value Problem for a Fourth-Order Equation of the Parabolic-Hyperbolic Type with Multiple Characteristics with Slopes Greater Than One. Russian Mathematics, 66(4), 1-11. https://doi.org/10.3103/S1066369X22040016
17. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2021). Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 15(4), 586-596. https://doi.org/10.1134/S1990478921040025
18. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2024). Boundary Value Problem for Fourth Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients. Journal of Mathematical Sciences (United States), 284(2), 153–165. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07340-5

УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_15

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СМЕШАННОЙ ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА, КОГДА ОДНА ИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПАРАЛЛЕЛЬНА ОСИ АБСЦИСС, А ДРУГАЯ – УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОТОРОЙ БОЛЬШЕ ЕДИНИЦЫ

Мамажонов Мирза
mirzamamajonov@gmail.com
КГПИ, «Математика»
Мамажонов Санжарбек Мирзаевич
sanjarbekmamajonov@gmail.com
Кокандский университет
Фергана, Узбекистан

Аннотация. *В настоящей статье исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в смешанной области с тремя линиями изменения типа. Доказана теорема существования и единственности решения этой поставленной задачи. В ходе доказательства этой теоремы применены методы построения решения, дифференциальных и интегральных уравнений, а также метод продолжения.*

Ключевые слова: *Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, метод продолжения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость.*

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER EQUATION OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE IN A MIXED PENTAGONAL DOMAIN WITH THREE LINES OF TYPE CHANGE, WHEN ONE OF THE CHARACTERISTICS OF THE FIRST-ORDER OPERATORS IS PARALLEL TO THE AXIS, AND THE OTHER HAS A SLOPE COEFFICIENT GREATER THAN ONE

Mamajonov Mirza
mirzamamajonov@gmail.com
KSPI, "Mathematics"
Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich
sanjarbekmamajonov@gmail.com
Kokand University
Fergana, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we study a boundary value problem for a fourth-order parabolic-hyperbolic equation in a mixed domain with three lines of type change. We prove a theorem on the existence and uniqueness of a solution to this problem. In proving this theorem, we apply methods of constructing a solution, differential and integral equations, and the continuation method.*

Keywords: *Differential and integral equations, solution construction method, continuation method, boundary value problem, parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

Краевые задачи для уравнений третьего, четвертого и высокого порядков параболо-гиперболического типа интенсивно изучались со второй половины прошлого века. Краевые задачи для таких уравнений изучены, в основном, в работах [1], [2] и др.

После этого началось исследование ряд различных краевых задач для таких уравнений в различных областях с двумя и тремя линиями изменения типа {см. [3]-[19]}.

В настоящей статье в пятиугольной области G плоскости xOy ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвёртого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0, \tag{1}$$

где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup$, G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2- треугольник с вершинами в точках $D(-1,0)$, $E(1/2,-3/2)$, $C(2,0)$; G_3 и G_4- прямоугольники с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0 и B, B_0, $C_0(2,1)$, $C(2,0)$ соответственно; J_1, J_2 и J_3- открытые отрезки с вершинами в точках C, D; A, A_0 и B, B_0 соответственно; $u=u(x,y)-$ неизвестная функция, а $a_2,b_2\in R$, $\gamma_2=\dfrac{b_2}{a_2}$ – угловой коэффициент оператора $a_2\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2\dfrac{\partial}{\partial y}$, причем $1<\gamma_2<+\infty$, $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_j,\ j=2,3,4.\end{cases}$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

<u>Задача-1.</u> Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(2,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1; \tag{2}$$

$$u(-1,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1; \tag{3}$$

$$u_x(-1,y)=\varphi_4(y),\quad 0\le y\le 1; \tag{4}$$

$$u_{xx}(-1,y)=\varphi_6(y),\quad 0\le y\le 1; \tag{5}$$

$$u\big|_{CE}=\psi_1(x),\ 1/2\le x\le 2; \tag{6}$$

$$u\big|_{DP}=\psi_2(x),\ -1\le x\le -1/2; \tag{7}$$

$$u\big|_{QE}=\psi_3(x),\ 0\le x\le 1/2; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DE}=\psi_4(x),\ -1\le x\le 1/2; \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{DE} = \psi_5(x),\ -1 \le x \le 1/2; \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{CE} = \psi_6(x),\ 1/2 \le x \le 2; \tag{11}$$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = T(x),\ -1 \le x \le 1; \tag{12}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = N(x),\ -1 \le x \le 1; \tag{13}$$

$$u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = M(x),\ -1 < x < 2; \tag{14}$$

$$u(+0,y) = u(-0,y) = \tau_4(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{15}$$

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y) = \nu_4(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{16}$$

$$u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y) = \mu_4(y),\ 0 < y < 1; \tag{17}$$

$$u_{xxx}(+0,y) = u_{xxx}(-0,y) = \theta_4(y),\ 0 < y < 1; \tag{18}$$

$$u(1+0,y) = u(1-0,y) = \tau_5(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{19}$$

$$u_x(1+0,y) = u_x(1-0,y) = \nu_5(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{20}$$

$$u_{xx}(1+0,y) = u_{xx}(1-0,y) = \mu_5(y),\ 0 < y < 1; \tag{21}$$

$$u_{xxx}(1+0,y) = u_{xxx}(1-0,y) = \theta_5(y),\ 0 < y < 1, \tag{22}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_6$, $\psi_j\ \left(j = \overline{1,6}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x + y = -1$ или $x - y = 2$, а $P(-1/2, -1/2)$, $Q(0,-1)$,

$$T(x) = \begin{cases} \tau_1(x), & если\ \ 0 \le x \le 1, \\ \tau_2(x), & если\ \ -1 \le x \le 0, \\ \tau_3(x), & если\ \ 1 \le x \le 2; \end{cases} \qquad N(\ ) = \begin{cases} \nu_1(x),\ e\ \ \le\ \le c \\ \nu_2(\ )x,\ e\ \ -\ \le\ c\le \\ \nu_3(x),\ e\ \ \le\ \le c \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} \mu_1(x), & если\ \ 0 < x < 1, \\ \mu_2(x), & если\ \ -1 < x < 0, \\ \mu_3(x), & если\ \ 1 < x < 2; \end{cases}$$ $\tau_i,\ \nu_i,\ \mu_i\ (i = \overline{1,5})$, θ_4, θ_5 – неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Теорема. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_4 \in C^3[0,1]$, $\varphi_6 \in C^2[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[1/2, 2]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3 \in C^4[0,1/2]$, $\psi_4 \in C^3[-1,1/2]$, $\psi_5 \in C^2[-1,1/2]$, $\psi_6 \in C^3[1/2, 2]$, причем выполняется условие согласования $\psi_1(1/2) = \psi_3(1/2)$, $\tau_1(0) = \tau_2(0)$, $\tau_1'(0) = \tau_2'(0)$,

$\tau_1(1)=\tau_3(1)$, $\tau_1'(1)=\tau_3'(1)$, $\tau_2(-1)=\psi_2(-1)=\varphi_2(0)$, $\tau_3(2)=\varphi_1(0)=\psi_1(2)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(y)+\omega_{12}(b_2x-a_2y),\ (x,y)\in G_1, \tag{23}$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_{i1}(y)+\omega_{i2}(b_2x-a_2y),\ (x,y)\in G_i\quad (i=2,3,4), \tag{24}$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$, причем функции $\omega_{i1}(y),\ \omega_{i2}(b_2x-a_2y)\ \left(i=\overline{1,4}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Исследование будем провести сначала в области G_2. Решение уравнения (24) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (12), (13) представляется в виде

$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[T(x+y)+T(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_{22}(b_2\xi-a_2\eta)\,d\xi-\int\limits_0^y(y-\eta)\,\omega_{21}(\eta)\,d\eta. \tag{25}$$

Подставляя (25) в условия (9) и (10) после упрощений, имеем

$$\omega_{21}(-1-x)+\omega_{22}\left((b_2+a_2)x+a_2\right)=\sqrt{2}\psi_4'(x),\ -1\le x\le 1/2, \tag{26}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_2+a_2}\omega_{22}\left((b_2+a_2)x+a_2\right)-\omega_{21}(-1-x)=2\psi_5(x)-2T''(-1)-2N'(-1)+$$

$$+\frac{2b_2}{b_2+a_2}\omega_{22}(-1),\ -1\le x\le 1/2. \tag{27}$$

Из (26) и (27), находим

$$\omega_{21}(-1-x)=\sqrt{2}\psi_4'(x)-\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\psi_5(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_4'(x)\right]+$$

$$+\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[T''(-1)+N'(-1)\right]-\omega_{22}(-b_2),\ -1\le x\le 1/2,$$

$$\omega_{22}\left((b_2+a_2)x+a_2\right)=\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\psi_5(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_4'(x)\right]-$$

$$-\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[T''(-1)+N'(-1)\right]+\omega_{22}(-b_2),\ -1\le x\le 1/2.$$

В первом из этих равенств меняя аргумент $-1-x$ на y, а во втором – аргумент $(b_2+a_2)x+a_2$ на b_2x-a_2y, получим

$$\omega_{21}(y)=\sqrt{2}\psi_4'(-1-y)-\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\psi_5(-1-y)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_4'(-1-y)\right]+$$

$$+\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[T''(-1)+N'(-1)\right]-\omega_{22}(-b_2),\ -3/2\le y\le 0, \tag{28}$$

$$\omega_{22}\left(b_2x-a_2y\right)=\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\psi_5\left(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2+a_2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_4'\left(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2+a_2}\right)\right]-$$

$$-\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[T''(-1)+N'(-1)\right]+\omega_{22}\left(-b_2\right),\ -b_2\le b_2x-a_2y\le\frac{b_2+3a_2}{2}. \qquad (29)$$

Слагая (28) и (29), имеем

$$\omega_{21}(y)+\omega_{22}\left(b_2x-a_2y\right)=\sqrt{2}\psi_4'(-1-y)+\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\psi_5\left(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2+a_2}\right)-\psi_5(-1-y)\right]+$$

$$+\frac{\sqrt{2}\left(b_2+a_2\right)}{2b_2}\left[\psi_4'\left(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2+a_2}\right)-\psi_4'(-1-y)\right],\ -3/2\le y\le 0,\ -b_2\le b_2x-a_2y\le\frac{b_2+3a_2}{b_2}$$

Далее, подставляя (25) в условие (11), получим

$$\omega_{22}\left(\left(b_2-a_2\right)x+2a_2\right)+\omega_{21}(x-2)=-\sqrt{2}\psi_6'(x),\ 1/2\le x\le 2.$$

Полагая в (28) $y=x-2$ и подставляя значение $\omega_{21}(x-2)$ в последнее равенство, имеем

$$\omega_{22}\left(\left(b_2-a_2\right)x+2a_2\right)=-\sqrt{2}\psi_6'(x)-\sqrt{2}\psi_4'(1-x)+\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\psi_5(1-x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_4'(1-x)\right]-$$

$$-\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[T''(-1)+N'(-1)\right]+\omega_{22}\left(-b_2\right),\ 1/2\le x\le 2.$$

В последнем равенстве меняя аргумент $\left(b_2-a_2\right)x+2a_2$ на b_2x-a_2y, получим

$$\omega_{22}\left(b_2x-a_2y\right)=-\sqrt{2}\psi_6'\left(\frac{b_2x-a_2y-2a_2}{b_2-a_2}\right)-\sqrt{2}\psi_4'\left(\frac{b_2+a_2-\left(b_2x-a_2y\right)}{b_2-a_2}\right)+$$

$$+\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\psi_5\left(\frac{b_2+a_2-\left(b_2x-a_2y\right)}{b_2-a_2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_4'\left(\frac{b_2+a_2-\left(b_2x-a_2y\right)}{b_2-a_2}\right)\right]-$$

$$-\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[T''(-1)+N'(-1)\right]+\omega_{22}\left(-b_2\right),\ \frac{b_2+3a_2}{2}\le b_2x-a_2y\le 2b_2. \qquad (30)$$

Слагая (28) и (30), находим

$$\omega_{21}(y)+\omega_{22}\left(b_2x-a_2y\right)=-\sqrt{2}\psi_6'\left(\frac{b_2x-a_2y-2a_2}{b_2-a_2}\right)+$$

$$+\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\psi_5\left(\frac{b_2+a_2-\left(b_2x-a_2y\right)}{b_2-a_2}\right)-\psi_5(-1-y)\right]+$$

$$+\frac{\sqrt{2}a_2}{b_2}\left[\psi_4'\left(\frac{b_2+a_2-\left(b_2x-a_2y\right)}{b_2-a_2}\right)-\psi_4'(-1-y)\right],\ -3/2\le y\le 0,\ \frac{b_2+3a_2}{2}\le b_2x-a_2y\le 2b_2$$

Теперь подставляя (25) в (6), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$:

$$T'(x)+N(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 2, \qquad (31)$$

где $\alpha_1(x)=\psi_1'\left(\frac{x+2}{2}\right)-\int\limits_0^{-\frac{x-2}{2}}\left[\omega_{21}(\eta)+\omega_{22}\left(b_2x-\left(b_2+a_2\right)\eta\right)\right]d\eta$.

При $0 \le x \le 1$ уравнение (31) имеет вид

$$\tau_1'(x) + \nu_1(x) = \alpha_1(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{32}$$

б) При $-1 \le x \le 0$ –

$$\tau_2'(x) + \nu_2(x) = \alpha_1(x),\ -1 \le x \le 0, \tag{33}$$

в) а при $1 \le x \le 2$ –

$$\tau_3'(x) + \nu_3(x) = \alpha_1(x),\ 1 \le x \le 2. \tag{34}$$

Далее, подставляя (25) в (7), получим соотношение

$$\tau_2'(x) - \nu_2(x) = \delta_1(x),\ -1 \le x \le 0, \tag{35}$$

где $\delta_1(x) = \psi_2'\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + \displaystyle\int_0^{-1-x} \left[\omega_{21}(\eta) + \omega_{22}\left(b_2 x + (b_2 - a_2)\eta\right)\right] d\eta$.

А подставляя (25) в (8), имеем

$$\tau_3'(x) - \nu_3(x) = \delta_2(x),\ 1 \le x \le 2, \tag{36}$$

где $\delta_2(x) = \psi_3'\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + \displaystyle\int_0^{-1-x} \left[\omega_{21}(\eta) + \omega_{22}\left(b_2 x + (b_2 - a_2)\eta\right)\right] d\eta$.

Из (33) и (35) находим функции $\tau_2'(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\tau_2'(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(x) + \delta_1(x)\right], \qquad \nu_2(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(x) - \delta_1(x)\right]. \tag{37}$$

Интегрируя первое из (37) от -1 до x, находим

$$\tau_2(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} \left[\alpha_1(t) + \delta_1(t)\right] dt + \psi_2(-1).$$

Далее, из (34) и (36) находим функции $\tau_3'(x)$ и $\nu_3(x)$:

$$\tau_3'(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(x) + \delta_2(x)\right], \qquad \nu_3(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(x) - \delta_2(x)\right]. \tag{38}$$

Интегрируя первое из (38) от 2 до x, находим

$$\tau_3(x) = \frac{1}{2}\int_{2}^{x} \left[\alpha_1(t) + \delta_2(t)\right] dt + \psi_1(2).$$

Теперь переходя в уравнении (24) $(i = 2)$, к пределу при $y \to 0$, в силу (12) и (14) получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\mu_1(x) = \tau_1''(x) - \omega_{21}(0) - \omega_{22}(x). \tag{39}$$

Далее, применяя оператор $a_2 \dfrac{\partial}{\partial x} + b_2 \dfrac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (23) и устремляя y к нулю, получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$a_2\tau_1'''(x)+b_2\nu_1''(x)-a_2\nu_1'(x)-b_2\mu_1(x)=b_2\omega_{11}'(0). \qquad (40)$$

Исключая из (32), (39) и (40) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение дважды от 0 до x, имеем

$$\tau_1'(x)+\tau_1(x)=\alpha_2(x)+\frac{b_2}{2}\omega_{11}'(0)x^2+k_1x+k_2,\ 0\le x\le 1,$$

где $\alpha_2(x)=\dfrac{b_2}{b_2-a_2}\left[\alpha_1(x)-\int\limits_0^x\alpha_1(t)dt-\int\limits_0^x(x-t)\left[\omega_{21}(0)+\omega_{22}(b_2t)\right]dt\right]$, а $\omega_{11}'(0)$, k_1, k_2 – неизвестные пока постоянные.

Теперь решая последнее уравнение при условиях

$$\tau_1(0)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1),\ \tau_1'(0)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right],$$

$$\tau_1(1)=\psi_1(2)-\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt,\ \tau_1'(1)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right],$$

находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x)=\int\limits_0^x e^{x-t}\alpha_2(t)dt+b_2\omega_{11}'(0)\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right)+k_1\left(e^x-1-x\right)+k_2\left(e^x-1\right)+k_3e^x,$$

где

$$k_3=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1),\ k_2=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right]-\alpha_2(0)-k_3,$$

$$\omega_{11}'(0)=\frac{2}{b_2(e-3)}\left\{\frac{2-e}{2}\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right]+\alpha_2(1)(e-2)-\int\limits_0^1 e^{1-t}\alpha_2(t)dt+\right.$$

$$\left.+\psi_1(2)(e-1)-\frac{e-1}{2}\int\limits_1^2\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt-k_2-k_3e\right\},$$

$$k_1=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right]-\alpha_2(1)-\psi_1(2)+\frac{1}{2}\int\limits_1^2\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt-k_2-\frac{b_2}{2}\omega_{11}'(0).$$

Тогда будут известными и функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Переходя в уравнениях (24) $(i=2)$ и (24) $(i=3)$ к пределу при $y\to 0$ с учетом условий (12), (14) и производя замену $x \to b_2x-a_2y$, находим

$$\omega_{32}(b_2x-a_2y)=\omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0)-\omega_{31}(0),\ -b_2\le b_2x-a_2y\le 0. \qquad (41)$$

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3. Сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx}-u_{3yy}=\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)+\Omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0), \\ u_3(x,0)=T_2(x),\ u_{3y}(x,0)=N_2(x),\ -2\le x\le 1, \\ u_3(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{3x}(-1,y)=\varphi_4(y),\ u_{3xx}(-1,y)=\varphi_6(y), u_3(0,y)=\tau_4(y),\ 0\le y\le 1, \end{cases}$$

где функции $T_2(x)$, $N_2(x)$, $\Omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0)$ определяются следующим образом: в промежутке $-1\le x\le 0$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ имеют вид: $T_2(x)=\tau_2(x)$, $N_2(x)=\nu_2(x)$, функция $\Omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0)$ при $-b_2\le b_2x-a_2y\le 0$ имеет вид: $\Omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0)=\omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0)$, а в промежутках $-2\le x\le -1$ и $0\le x\le 1$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ и в промежутках $-2b_2\le b_2x-a_2y\le -b_2$ и $0\le b_2x-a_2y\le b_2$ функция $\Omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условий $u_{3x}(-1,y)=\varphi_4(y)$, $u_{3xx}(-1,y)=\varphi_6(y)$, будем искать в виде

$$u_3(x,y)=u_{31}(x,y)+u_{32}(x,y)+u_{33}(x,y), \tag{42}$$

где $u_{31}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx}-u_{31yy}=0, \\ u_{31}(x,0)=T_2(x),\ u_{31y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1, \\ u_{31}(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{31}(0,y)=\tau_4(y),\ 0\le y\le 1; \end{cases} \tag{43}$$

$u_{32}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx}-u_{32yy}=\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0), \\ u_{32}(x,0)=0,\ u_{32y}(x,0)=N_2(x),\ -2\le x\le 1, \\ u_{32}(-1,y)=0,\ u_{32}(0,y)=0,\ 0\le y\le 1; \end{cases} \tag{44}$$

$u_{33}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{33xx}-u_{33yy}=\Omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0), \\ u_{33}(x,0)=0,\ u_{33y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1, \\ u_{33}(-1,y)=0,\ u_{33}(0,y)=0,\ 0\le y\le 1. \end{cases} \tag{45}$$

Методом продолжения находим решения задач (43)-(45). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right], \tag{46}$$

$$u_{32}(x,y)=\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt-\int_0^y(y-\eta)\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta, \tag{47}$$

$$u_{33}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\left[\Omega_{32}(b_2\xi-a_2\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\xi. \tag{48}$$

где

$$T_2(x)=\begin{cases} 2\varphi_2(-1-x)-\tau_2(-2-x),\ -2\le x\le -1, \\ \tau_2(x),\ -1\le x\le 0, \\ 2\tau_4(x)-\tau_2(-x),\ 0\le x\le 1, \end{cases}$$

$$N_2(x)=\begin{cases}2\int\limits_0^{-1-x}\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta-\nu_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \nu_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\int\limits_0^{x}\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta-\nu_2(-x),\ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

А функция $\Omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0)$ определяется следующим образом. Первые два условия задачи (45) выполняются автоматически для функции (48). Удовлетворяя третье условию, находим

$$\frac{2a_2^2}{b_2^2-a_2^2}\int\limits_0^y\left[\Omega_{22}(-b_2-a_2z)+\omega_{21}(0)\right]dz=\frac{b_2}{b_2-a_2}\int\limits_0^y\left[\Omega_{22}(b_2(-1-z))+\omega_{21}(0)\right]dz+$$

$$+\frac{b_2}{b_2+a_2}\int\limits_0^y\left[\omega_{22}(b_2(z-1))+\omega_{21}(0)\right]dz. \qquad (49)$$

Дифференцируя (49), получим

$$\frac{2a_2^2}{b_2^2-a_2^2}\left[\Omega_{22}(-b_2-a_2y)+\omega_{21}(0)\right]=\frac{b_2}{b_2-a_2}\left[\Omega_{22}(b_2(-1-y))+\omega_{21}(0)\right]+$$

$$+\frac{b_2}{b_2+a_2}\left[\omega_{22}(b_2(y-1))+\omega_{21}(0)\right]. \qquad (50)$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (45), имеем

$$\frac{b_2}{b_2+a_2}\int\limits_0^y\left[\Omega_{22}(b_2z)+\omega_{21}(0)\right]dz=\frac{a_2}{b_2+a_2}\int\limits_0^y\left[\omega_{22}(-a_2z)+\omega_{21}(0)\right]dz-$$

$$-\frac{b_2}{b_2-a_2}\int\limits_0^y\left[\omega_{22}(-b_2z)+\omega_{21}(0)\right]dz-\frac{a_2}{b_2-a_2}\int\limits_0^y\left[\omega_{22}(-a_2z)+\omega_{21}(0)\right]dz. \qquad (51)$$

Дифференцируя (51), находим

$$\Omega_{22}(b_2y)+\omega_{21}(0)=\frac{2a_2}{b_2-a_2}\left[\omega_{22}(-a_2y)+\omega_{21}(0)\right]-\frac{b_2+a_2}{b_2-a_2}\left[\omega_{22}(-b_2y)+\omega_{21}(0)\right]. \qquad (52)$$

Подставляя (46), (47), (48) в (42), получим

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N_2(t)dt-$$

$$-\int\limits_0^y(y-\eta)\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\left[\Omega_{22}(b_2\xi-a_2\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\xi. \qquad (53)$$

Дифференцируя (53) по x дважды, имеем

$$u_{3x}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2'(x+y)+T_2'(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_2(x+y)-N_2(x-y)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^y\left[\Omega_{22}(b_2(x+y)-(b_2+a_2)\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\eta+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\left[\Omega_{22}((b_2-a_2)+b_2(x-y))+\omega_{21}(0)\right]d\eta, \qquad (54)$$

$$u_{3xx}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2''(x+y)+T_2''(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_2'(x+y)-N_2'(x-y)\right]-$$

$$-\frac{b_2}{2}\int_0^y \Omega_{22}'\left(b_2(x+y)-(b_2+a_2)\eta\right)d\eta+\frac{b_2}{2}\int_0^y \Omega_{22}'\left(b_2(x-y)+(b_2-a_2)\eta\right)d\eta. \qquad (55)$$

Полагая в (54) $x=-1$ в силу условия $u_{3x}(-1,y)=\varphi_4(y)$, после длинных вычислений, имеем

$$\varphi_4(y)=\tau_2'(y-1)-\varphi_2'(y)+\nu_2(y-1)-\int_0^y\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta-$$

$$-\frac{b_2}{2(b_2+a_2)}\int_0^y\left[\omega_{22}\left(b_2(z-1)\right)+\omega_{21}(0)\right]dz-\frac{a_2}{2(b_2+a_2)}\int_0^y\left[\Omega_{22}(-b_2-a_2z)+\omega_{21}(0)\right]dz+$$

$$+\frac{b_2}{2(b_2-a_2)}\int_0^y\left[\Omega_{22}\left(b_2(-1-z)\right)+\omega_{21}(0)\right]dz-\frac{a_2}{2(b_2-a_2)}\int_0^y\left[\Omega_{22}(-b_2-a_2z)+\omega_{21}(0)\right]dz. \quad (56)$$

Дифференцируя (56), после некоторых выкладок, находим

$$\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)=\tau_2''(y-1)+\nu_2'(y-1)-\varphi_2''(y)-\varphi_4'(y)-\frac{b_2}{2(b_2+a_2)}\left[\omega_{22}\left(b_2(y-1)\right)+\omega_{21}(0)\right]-$$

$$-\frac{a_2b_2}{b_2^2-a_2^2}\left[\Omega_{22}(-b_2-a_2y)+\omega_{21}(0)\right]+\frac{b_2}{2(b_2-a_2)}\left[\Omega_{22}\left(b_2(-1-y)\right)+\omega_{21}(0)\right]. \qquad (57)$$

Подставляя (55) в условие (5), приходим к соотношению

$$\varphi_6(y)=\varphi_2''(y)+\left[\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)\right]+\frac{b_2^2}{b_2^2-a_2^2}\Omega_{22}(-b_2-a_2y)-$$

$$-\frac{b_2}{2(b_2+a_2)}\omega_{22}\left(b_2(y-1)\right)-\frac{b_2}{2(b_2-a_2)}\Omega_{22}\left(b_2(-1-y)\right). \qquad (58)$$

Подставляя (57) в (58), находим

$$\Omega_{22}(-b_2-a_2y)+\omega_{21}(0)=\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\varphi_6(y)+\varphi_4'(y)-\tau_2''(y-1)-\nu_2'(y-1)\right]+$$

$$+\left[\omega_{22}\left(b_2(y-1)\right)+\omega_{21}(0)\right]. \qquad (59)$$

Подставляя последнее равенство в (50), имеем

$$\Omega_{22}\left(b_2(-1-y)\right)+\omega_{21}(0)=\frac{2a_2^2}{b_2^2}\left[\varphi_6(y)+\varphi_4'(y)-\tau_2''(y-1)-\nu_2'(y-1)\right]+$$

$$+\frac{2a_2-b_2}{b_2}\left[\omega_{22}\left(b_2(y-1)\right)+\omega_{21}(0)\right]. \qquad (60)$$

А подставляя (59) и (60) в (57), находим

$$\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)=\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\tau_2''(y-1)+\nu_2'(y-1)-\varphi_4'(y)-\varphi_6(y)\right]+$$

$$+\left[\varphi_6(y)-\varphi_2''(y)-\omega_{22}\left(b_2(y-1)\right)-\omega_{21}(0)\right]. \qquad (61)$$

Далее, полагая в (54) $x\to 0$, после некоторых вычислений, получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_4(y)$ и $\nu_4(y)$:

$$\nu_4(y)=\tau_4'(y)+\beta_1(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (62)$$

где

$$\beta_1(y)=\tau_2'(-y)-\nu_2(-y)+\int_0^y\left[\omega_{31}(\eta)-\omega_{31}(0)\right]d\eta-\frac{b_2}{b_2-a_2}\int_0^y\left[\omega_{22}(-b_2z)+\omega_{21}(0)\right]dz-$$

$$-\frac{a_2}{b_2-a_2}\int_0^y\left[\omega_{22}(-a_2z)+\omega_{21}(0)\right]dz\,.$$

Теперь переходя в уравнениях (23) и

$$u_{3xx}-u_{3yy}=\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)+\omega_{22}(b_2x-a_2y)-\omega_{21}(0) \qquad (63)$$

к пределу при $x\to 0$ в силу условий (15) и (17), находим

$$\mu_4(y)-\tau_4'(y)=\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(-a_2y), \qquad (64)$$

$$\mu_4(y)-\tau_4''(y)=\left[\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)\right]+\left[\omega_{22}(-a_2y)+\omega_{21}(0)\right], \qquad (65)$$

где положено $\omega_{12}(b_2x-a_2y)=\begin{cases}\overline{\omega}_{12}(b_2x-a_2y),\ -b_2\le b_2x-a_2y\le 0,\\ \overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2x-a_2y),\ 0\le b_2x-a_2y\le b_2,\end{cases}$ причем $\overline{\omega}_{12}(0)=\overline{\overline{\omega}}_{12}(0)$.

А переходя в уравнении (23) к пределу при $y\to 0$, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2x)+\omega_{11}(0)=\tau_1''(x)-\nu_1(x)\,. \qquad (66)$$

Дифференцируя уравнения (23) и (24) $(i=3)$ по x и полагая в полученных уравнениях $x\to 0$ в силу условий (16), (18), получим

$$\theta_4(y)-\nu_4'(y)=b_2\overline{\omega'}_{12}(-a_2y)\,, \qquad (67)$$

$$\theta_4(y)-\nu_4''(y)=b_2\omega_{22}'(-a_2y)\,. \qquad (68)$$

Исключая из (64), (65) функцию $\mu_4(y)$, а из (67), (68) функцию $\theta_4(y)$ после некоторых выкладок, находим

$$\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(0)=-\overline{\omega}_{12}(-a_2y)+\overline{\omega}_{12}(0)+\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+$$

$$+\left[\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)\right]+\left[\omega_{22}(-a_2y)+\omega_{21}(0)\right], \qquad (69)$$

$$\overline{\omega'}_{12}(-a_2y)=\frac{1}{b_2}\left[\nu_4''(y)-\nu_4'(y)\right]+\omega_{22}'(-a_2y)\,,$$

Интегрируя последнее уравнение от 0 до y и подставляя (62) в полученное равенство, находим

$$\overline{\omega}_{12}(-a_2y)-\overline{\omega}_{12}(0)=-\frac{a_2}{b_2}\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]-\frac{a_2}{b_2}\left[\beta_1'(y)-\beta_1(y)\right]+$$

$$+\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]+\left[\omega_{22}(-a_2y)-\omega_{22}(0)\right]. \qquad (70)$$

А подставляя (70) в (69), получим

$$\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(0)=\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\gamma_1(y), \qquad (71)$$

где

$$\gamma_1(y)=\frac{a_2}{b_2}\left[\beta_1'(y)-\beta_1(y)\right]-\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]+\left[\omega_{22}(0)+\omega_{21}(0)\right]+$$

$$+\left[\omega_{31}(y)-\omega_{31}(0)\right]-2\left[\omega_{22}(-a_2y)+\omega_{21}(0)\right].$$

В (70) меняя аргумент $-a_2y$ на b_2x-a_2y, имеем

$$\overline{\omega}_{12}(b_2x-a_2y)-\overline{\omega}_{12}(0)=-\frac{a_2}{b_2}\left[\tau_4''\left(y-\frac{b_2}{a_2}x\right)-\tau_4'\left(y-\frac{b_2}{a_2}x\right)\right]-\gamma_2\left(y-\frac{b_2}{a_2}x\right), \quad (72)$$

где

$$\gamma_2\left(y-\frac{b_2}{a_2}x\right)=\left[\omega_{22}\left(y-\frac{b_2}{a_2}x\right)+\omega_{21}(0)\right]-\frac{a_2}{b_2}\left[\beta_1'\left(y-\frac{b_2}{a_2}x\right)-\beta_1\left(y-\frac{b_2}{a_2}x\right)\right]-$$

$$-\left[\omega_{22}(0)+\omega_{21}(0)\right]+\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right].$$

Таким образом, мы нашли следующие соотношения:

$$\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(b_2x-a_2y)=\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]-$$

$$-\frac{a_2}{b_2}\left[\tau_4''\left(y-\frac{b_2}{a_2}x\right)-\tau_4'\left(y-\frac{b_2}{a_2}x\right)\right]+\gamma_3(x,y),\ -a_2\le b_2x-a_2y\le 0,\ 0\le y\le 1, \quad (73)$$

$$\omega_{11}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2x-a_2y)=\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\gamma_5(x,y),\ 0\le b_2x-a_2y\le b_2,\ 0\le y\le 1, \quad (74)$$

где

$$\gamma_3(x,y)=\gamma_1(y)+\gamma_2\left(y-\frac{b_2}{a_2}x\right),\ \gamma_4\left(x-\frac{a_2}{b_2}y\right)=\tau_1''\left(x-\frac{a_2}{b_2}y\right)-\nu_1\left(x-\frac{a_2}{b_2}y\right),$$

$$\gamma_5(x,y)=\gamma_1(y)+\gamma_4\left(x-\frac{a_2}{b_2}y\right)-\left[\omega_{11}(0)+\overline{\omega}_{12}(0)\right],$$

а $\omega_{11}(0)+\overline{\omega}_{12}(0)=\mu_1(0)-\nu_1(0)+\gamma_3(0,0)$ – известное число.

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_4. Переходя в уравнениях (24) $(i=2)$ и (24) $(i=4)$ к пределу при $y\to 0$ с учетом условий (12), (14) и производя замену $x\ \square\ b_2x-a_2y$, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{42}(b_2x-a_2y)=\omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0)-\omega_{41}(0),\ b_2\le b_2x-a_2y\le 2b_2, \quad (75)$$

здесь введено обозначение $\omega_{42}(b_2x-a_2y)=\begin{cases}\overline{\omega}_{42}(b_2x-a_2y),\ b_2-a_2\le b_2x-a_2y\le b_2,\\ \overline{\overline{\omega}}_{42}(b_2x-a_2y),\ b_2\le b_2x-a_2y\le 2b_2.\end{cases}$

Далее, переходя в уравнениях (24) $(i=4)$ и (23) к пределу при $x\to 1$, имеем

$$\mu_5(y)-\tau_5''(y)=\omega_{41}(y)+\overline{\omega}_{42}(b_2-a_2y),$$

$$\mu_5(y)-\tau_5'(y)=\omega_{11}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2-a_2y). \quad (76)$$

Из этих равенств находим

$$\omega_{41}(y)=-\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]+\left[\omega_{11}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2-a_2y)\right]-\overline{\omega}_{42}(b_2-a_2y). \quad (77)$$

Дифференцируя уравнения (24) $(i=4)$ и (23) по x и устремляя x к единице, получим

$$\theta_5(y)-\nu_5''(y)=b_2\overline{\omega'}_{42}(b_2-a_2y),$$

$$\theta_5(y)-\nu_5'(y)=b_2\overline{\overline{\omega'}}_{12}(b_2-a_2y).$$

Исключая из этих равенств функцию $\theta_5(y)$, находим

$$b_2\overline{\omega'}_{42}(b_2-a_2y)=b_2\overline{\overline{\omega'}}_{12}(b_2-a_2y)-\left[\nu_5''(y)-\nu_5'(y)\right].$$

Интегрируя это равенство от 0 до y, имеем

$$\overline{\omega}_{42}(b_2-a_2y)=\overline{\omega}_{42}(b_2)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2-a_2y)-\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2)+$$

$$+\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]-\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]. \qquad (78)$$

Подставляя (78) в (77), получим

$$\omega_{41}(y)=-\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]+\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\gamma_1(y)-$$

$$-\overline{\omega}_{12}(0)-\overline{\omega}_{42}(b_2)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2)-\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]+\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]. \qquad (79)$$

В (78) меняя аргумент b_2-a_2y на b_2x-a_2y, имеем

$$\overline{\omega}_{42}(b_2x-a_2y)=\overline{\omega}_{42}(b_2)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2x-a_2y)-\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2)+$$

$$+\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_5'\left(y-\frac{b_2}{a_2}(x-1)\right)-\nu_5\left(y-\frac{b_2}{a_2}(x-1)\right)\right]-\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]. \qquad (80)$$

Слагая (79) и (80), а также (79) и (75), соответственно получим

$$\omega_{41}(y)+\overline{\omega}_{42}(b_2x-a_2y)=-\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]+\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]-\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]+$$

$$+\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_5'\left(y-\frac{b_2}{a_2}(x-1)\right)-\nu_5\left(y-\frac{b_2}{a_2}(x-1)\right)\right]+\gamma_1(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2x-a_2y)-\overline{\omega}_{12}(0), \quad (81)$$

$$\omega_{41}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{42}(b_2x-a_2y)=-\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]+\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]-\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]+$$

$$+\gamma_1(y)-\overline{\omega}_{12}(0)-\overline{\omega}_{42}(b_2)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2)+\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]+\omega_{22}(b_2x-a_2y)+\omega_{21}(0)-\omega_{41}(0). \quad (82)$$

Теперь сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{4xx}-u_{4yy}=\omega_{41}(y)+\Omega_{42}(b_2x-a_2y), \\ u_4(x,0)=T_3(x),\ u_{4y}(x,0)=N_3(x),\ 0\le x\le 3, \\ u_4(1,y)=\tau_5(y),\ u_{4x}(1,y)=\nu_5(y),\ u_4(2,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le 1, \end{cases}$$

где функции $T_3(x)$, $N_3(x)$, $\Omega_{42}(b_2x-a_2y)$ определяются следующим образом: в промежутке $1\le x\le 2$ функции $T_3(x)$, $N_3(x)$ имеют вид: $T_3(x)=\tau_3(x)$, $N_3(x)=\nu_3(x)$, функция $\Omega_{42}(b_2x-a_2y)$ при $b_2\le b_2x-a_2y\le 2b_2$ имеет вид: $\Omega_{42}(b_2x-a_2y)=\overline{\overline{\omega}}_{42}(b_2x-a_2y)$, а в промежутках $0\le x\le 1$ и $2\le x\le 3$ функции $T_3(x)$, $N_3(x)$ и в промежутках $0\le b_2x-a_2y\le b_2$ и $2b_2\le b_2x-a_2y\le 3b_2$ функция $\Omega_{42}(b_2x-a_2y)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условия $u_{4x}(1,y)=\nu_5(y)$, будем искать в виде

$$u_4(x,y)=u_{41}(x,y)+u_{42}(x,y)+u_{43}(x,y), \tag{83}$$

где $u_{41}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{41xx}-u_{41yy}=0, \\ u_{41}(x,0)=T_3(x),\ u_{41y}(x,0)=0,\ 0\le x\le 3, \\ u_{41}(1,y)=\tau_5(y),\ u_{41}(2,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le 1; \end{cases} \tag{84}$$

$u_{42}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{42xx}-u_{42yy}=\omega_{41}(y), \\ u_{42}(x,0)=0,\ u_{42y}(x,0)=N_2(x),\ 0\le x\le 3, \\ u_{42}(1,y)=0,\ u_{42}(2,y)=0,\ 0\le y\le 1; \end{cases} \tag{85}$$

$u_{43}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{43xx}-u_{43yy}=\Omega_{42}(b_2x-a_2y), \\ u_{43}(x,0)=0,\ u_{43y}(x,0)=0,\ 0\le x\le 3, \\ u_{43}(1,y)=0,\ u_{43}(2,y)=0,\ 0\le y\le 1. \end{cases} \tag{86}$$

Методом продолжения находим решения задач (84)-(86). Они имеют вид

$$u_{41}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_3(x+y)+T_3(x-y)\right], \tag{87}$$

$$u_{42}(x,y)=\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_3(t)\,dt-\int_0^y(y-\eta)\,\omega_{41}(\eta)\,d\eta, \tag{88}$$

$$u_{43}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{42}(b_2\xi-a_2\eta)\,d\xi, \tag{89}$$

где

$$T_3(x)=\begin{cases} 2\tau_5(1-x)-\tau_3(2-x),\ 0\le x\le 1, \\ \tau_3(x),\ 1\le x\le 2, \\ 2\varphi_1(x-2)-\tau_3(4-x),\ 2\le x\le 3, \end{cases}$$

$$N_3(x)=\begin{cases} 2\int_0^{1-x}\omega_{41}(\eta)\,d\eta-\nu_3(2-x),\ 0\le x\le 1, \\ \nu_3(x),\ 1\le x\le 2, \\ 2\int_0^{x-2}\omega_{41}(\eta)\,d\eta-\nu_3(4-x),\ 2\le x\le 3. \end{cases}$$

А функция $\Omega_{42}(b_2x-a_2y)$ определяется следующим образом. Первые два условия задачи (86) для функции (89) выполняются автоматически. Удовлетворяя третье условие, получим

$$\int_0^y\Omega_{42}\big(b_2(1-y)+(b_2-a_2)\eta\big)d\eta+\int_0^y\Omega_{42}\big(b_2(1+y)-(b_2+a_2)\eta\big)d\eta=0. \tag{90}$$

Производя замену переменных в интегралах (90) и дифференцируя полученное равенство, после некоторых преобразований в силу (78), находим

$$\Omega_{42}\left(b_2\left(1-y\right)\right)=\frac{2a_2^2}{b_2\left(b_2+a_2\right)}\overline{\omega}_{42}\left(b_2-a_2y\right)-\frac{b_2-a_2}{b_2+a_2}\omega_{42}\left(b_2\left(1+y\right)\right). \qquad (91)$$

Подставляя (78) в (91), имеем

$$\Omega_{42}\left(b_2\left(1-y\right)\right)=\frac{2a_2^2}{b_2\left(b_2+a_2\right)}\overline{\omega}_{42}\left(b_2\right)+\frac{2a_2^2}{b_2\left(b_2+a_2\right)}\left[\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(b_2-a_2y\right)-\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(b_2\right)\right]+$$

$$+\frac{2a_2^3}{b_2^2\left(b_2+a_2\right)}\left[\nu_5'\left(y\right)-\nu_5\left(y\right)\right]-\frac{2a_2^3}{b_2^2\left(b_2+a_2\right)}\left[\nu_3'\left(1\right)-\tau_3'\left(1\right)\right]-\frac{b_2-a_2}{b_2+a_2}\omega_{42}\left(b_2\left(1+y\right)\right). \qquad (92)$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (86), после некоторых преобразований, находим

$$\Omega_{42}\left(b_2\left(2+y\right)\right)=\frac{2a_2^2}{b_2\left(b_2-a_2\right)}\omega_{42}\left(2b_2-a_2y\right)-\frac{b_2+a_2}{b_2-a_2}\omega_{42}\left(b_2\left(2-y\right)\right). \qquad (93)$$

Подставляя (87), (88), (89) в (83), получим

$$u_4\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\left[T_3\left(x+y\right)+T_3\left(x-y\right)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N_3\left(t\right)dt-$$

$$-\int\limits_0^y\left(y-\eta\right)\omega_{41}\left(\eta\right)d\eta-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{42}\left(b_2\xi-a_2\eta\right)d\xi\,. \qquad (94)$$

Дифференцируя (94) по x, имеем

$$u_{4x}\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\left[T_3'\left(x+y\right)+T_3'\left(x-y\right)\right]+\frac{1}{2}\left[N_3\left(x+y\right)-N_3\left(x-y\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^y\Omega_{42}\left(b_2\left(x+y\right)-\left(b_2+a_2\right)\eta\right)d\eta+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\Omega_{42}\left(b_2\left(x-y\right)+\left(b_2-a_2\right)\eta\right)d\eta\,, \qquad (95)$$

Полагая в (95) $x=1$ в силу условия $u_{4x}\left(1,y\right)=\nu_5\left(y\right)$, после некоторых вычислений и преобразований, имеем

$$\frac{b_2}{b_2+a_2}\nu_5\left(y\right)+\frac{a_2}{b_2+a_2}\int\limits_0^y\nu_5\left(\eta\right)d\eta=-\tau_5\left(y\right)-\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\tau_4'\left(y\right)-\tau_4\left(y\right)\right]+\tau_3'\left(1+y\right)+$$

$$+\nu_3\left(1+y\right)-\left[\nu_3\left(1\right)-\tau_3\left(1\right)\right]+\frac{b_2+a_2}{b_2}\left[\nu_1\left(0\right)-\tau_1\left(0\right)\right]-\int\limits_0^y\gamma_1\left(\eta\right)d\eta+$$

$$+\left[\overline{\omega}_{12}\left(0\right)-\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(b_2\right)+\overline{\omega}_{42}\left(b_2\right)\right]y-\frac{a_2}{b_2}\tau_3'\left(1\right)-\frac{a_2}{b_2}\left[\nu_3'\left(1\right)-\tau_3'\left(1\right)\right]y-$$

$$-\frac{b_2}{b_2+a_2}\int\limits_0^y\omega_{42}\left(b_2\left(1+\eta\right)\right)d\eta-\frac{a_2}{b_2+a_2}\left[\overline{\omega}_{42}\left(b_2\right)-\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(b_2\right)\right]y-\frac{a_2}{b_2+a_2}\int\limits_0^y\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(b_2-a_2\eta\right)d\eta-$$

$$+\frac{a_2^2}{b_2\left(b_2+a_2\right)}\tau_3'\left(1\right)+\frac{a_2^2}{b_2\left(b_2+a_2\right)}\left[\nu_3'\left(1\right)-\tau_3'\left(1\right)\right]y\,.$$

Дифференцируя последнее соотношение, после некоторых вычислений и преобразований, приходим к дифференциальному уравнению относительно $\nu_5\left(y\right)$:

$$\nu_5'\left(y\right)+\frac{a_2}{b_2}\nu_5\left(y\right)=-\frac{b_2+a_2}{b_2}\tau_5'\left(y\right)-\left(\frac{b_2+a_2}{b_2}\right)^2\left[\tau_4''\left(y\right)-\tau_4'\left(y\right)\right]+\gamma_6\left(y\right), \qquad (96)$$

где

$$\gamma_6(y)=\frac{b_2+a_2}{b_2}\left\{\tau_3''(1+y)+\nu_3'(1+y)-\gamma_1(y)+\bar{\omega}_{12}(0)-\frac{b_2}{b_2+a_2}\omega_{42}\left(b_2(1+y)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{a_2}{b_2+a_2}\bar{\bar{\omega}}_{12}(b_2-a_2y)+\frac{b_2}{b_2+a_2}\left[\bar{\omega}_{42}(b_2)-\bar{\bar{\omega}}_{12}(b_2)\right]-\frac{a_2}{b_2+a_2}\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]\right\}.$$

Решая уравнение (96) при условии $\nu_5(0)=\tau_3'(1)$, находим

$$\nu_5(y)=\int_0^y H_1(y,\eta)\tau_5'(\eta)d\eta+\int_0^y H_2(y,\eta)\tau_4''(\eta)d\eta+\gamma_7(y), \qquad (97)$$

где

$$H_1(y,\eta)=-\frac{b_2+a_2}{b_2}e^{\frac{a_2}{b_2}(\eta-y)},\ \ H_2(y,\eta)=\left(\frac{b_2+a_2}{b_2}\right)^2 e^{\frac{a_2}{b_2}(\eta-y)}+\left(\frac{b_2+a_2}{b_2}\right)^2\frac{b_2}{a_2}\left[1-e^{\frac{a_2}{b_2}(\eta-y)}\right],$$

$$\gamma_7(y)=\left(\frac{b_2+a_2}{b_2}\right)^2\frac{b_2}{a_2}\left(1-e^{-\frac{a_2}{b_2}y}\right)+\int_0^y e^{\frac{a_2}{b_2}(\eta-y)}\gamma_6(\eta)d\eta+\tau_3'(1)e^{-\frac{a_2}{b_2}y}.$$

Теперь переходим в область G_1. Записывая решение уравнения (23), удовлетворяющего условиям (12), (15), (19), в силу (66), (69) и (72), после длинных преобразований, имеем

$$u_1(x,y)=\int_0^y\tau_4(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y\tau_5(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta+\int_0^1\tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-$$

$$-\frac{b_2+a_2}{b_2}\int_0^y\tau_4''(\eta)d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi+\int_0^y\tau_4'(\eta)d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi+$$

$$+\frac{a_2}{b_2}\int_0^y d\eta\int_0^\eta\tau_4''(z)dz\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi+\frac{a_2}{b_2}\nu_1(0)\int_0^y d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi-$$

$$-\int_0^y\gamma_1(\eta)d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi+\frac{a_2^2}{b_2^2}\int_0^y\tau_4''(\eta)d\eta\int_\eta^y G\left(x,y;\frac{a_2}{b_2}(z-\eta),z\right)dz-$$

$$-\frac{a_2^2}{b_2^2}\int_0^y\tau_4''(\eta)d\eta\int_\eta^y dz\int_z^y G\left(x,y;\frac{a_2}{b_2}(t-z),t\right)dt-\frac{a_2^2}{b_2^2}\nu_1(0)\int_0^y dz\int_z^y G\left(x,y;\frac{a_2}{b_2}(t-z),t\right)dt-$$

$$\frac{a_2}{b_2}\int_0^y\gamma_2(\eta)d\eta\int_\eta^y G\left(x,y;\frac{a_2}{b_2}(z-\eta),z\right)dz-$$

$$-\int_0^y d\eta\int_{\frac{a_2}{b_2}\eta}^1\left[\tau_1''\left(\xi-\frac{a_2}{b_2}\eta\right)-\tau_1''(0)-\nu_1\left(\xi-\frac{a_2}{b_2}\eta\right)+\nu_1(0)\right]G(x,y;\xi,\eta)d\xi. \qquad (98)$$

Дифференцируя (98) по x, затем устремляя x к нулю и к единице, с учетом равенств (62) и (97) после длинных вычислений, получим систему интегральных уравнений типа Абеля относительно $\tau_4''(y)$ и $\tau_5'(y)$:

$$\int_0^y P_1(y,\eta)\tau_4''(\eta)d\eta+\int_0^y P_2(y,\eta)\tau_5'(\eta)d\eta=h_1(y),\ 0\le y\le 1,$$

$$\int_0^y P_3(y,\eta)\tau_5'(\eta)d\eta+\int_0^y P_4(y,\eta)\tau_4''(\eta)d\eta=h_2(y),\ 0\le y\le 1,$$

где $P_1(y,\eta)$, $P_3(y,\eta)$, $P_4(y,\eta)$ – известные функции и имеют слабую особенность $(1/2)$, а $P_2(y,\eta)$, $h_1(y)$, $h_2(y)$ – известные непрерывные функции.

Применяя обращение Абеля к этим уравнениям, получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\tau_4''(y)$ и $\tau_5'(y)$:

$$\tau_4''(y)+\int_0^y K_1(y,\eta)\tau_4''(\eta)d\eta+\int_0^y K_2(y,\eta)\tau_5'(\eta)d\eta=g_1(y),\ 0\le y\le 1, \tag{90}$$

$$\tau_5'(y)+\int_0^y K_3(y,\eta)\tau_5'(\eta)d\eta+\int_0^y K_4(y,\eta)\tau_4''(\eta)d\eta=g_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{91}$$

где $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – известные функции, причем $K_1(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$ имеют слабую особенность $(1/2)$, $K_2(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – непрерывные функции, а

$$\left.\begin{array}{r} G(x,y;\xi,\eta) \\ N(x,y;\xi,\eta) \end{array}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\mp\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\} -$$

функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (22).

Решая систему (90), (91), находим функции $\tau_4''(y)$ и $\tau_5'(y)$, тем самым и функции $\tau_4(y)$, $\tau_5(y)$, $\nu_4(y)$, $\nu_5(y)$, $\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(b_2x-a_2y)$, $\omega_{11}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2x-a_2y)$, $T_2(x)$. $T_3(x)$, $\Omega_{42}(b_2(1-y))$, $\omega_{41}(y)+\overline{\omega}_{42}(b_2x-a_2y)$, $\omega_{41}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{42}(b_2x-a_2y)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$ и $u_1(x,y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

Литература

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.
3. Мамажанов М., Шерматова Х.М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Наманган Давлат университети илмий ахборотномаси. Наманган, 2022 й., 2-сон, 41-51 б.
4. Mamajonov M., Shermatova X.M. On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines. ISSN 1990-4789, Journal of applied and industrial mathematics. 2022, vol. 16, no. 3, pp. 481-489.
5. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения. Сибирский журнал индустриальной математики, 2022, 25(3), с. 93-103.
6. Mamajonov M., Shermatova Kh.M., Mukhtorova T. On a boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third-order, when the characteristic of the first order operator is parallel to the yordinate

axis. International journal of social science and interdisciplinary research. 2022, ISSN, 2277-3630 Impact factor: 7.429, 11, pp. 105-110.

1. Mamajonov M., Shermatova H.M. Statement and study of a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type in a mixed pentagonal domain, when the slope of the characteristic of the operator the first order is greater than one. International journal of research in commerce., IT, engineering and social sciences. ISSN: 2349-7793 Impact Factor: 6.876., Volume: 16 Issue: 05 in May 2022. pp. 117-130.
2. Mamajonov M., Suleymanov M.M., Vokhobov F.F., Gafurova M.A. Formulation and study of one boundary value problem for a third-order equation of a parabolic-hyperbolic type of the form $\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ in a concave hexagonal area with two lines of type change. International Journal of Early Childhood Special Education (INT-JECS) DOI: 10.48047/INTJECSE/V14I7.276 ISSN: 1308-5581 Vol 14, Issue 07 2022, pp. 1980-1990.
3. Mamajonov M., Yu.Kharimova. On one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a quadrangular domain with two lines type changes. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 68-77.
4. Mamajonov M., Aroev D.D., Shermatova G. Statement and investigation of one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a pentagonal domain with three lines of type change. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 332-342.
5. Mamajonov M., Turdiboeva M.M. On one boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third order, when characteristics of the first order operator parallel to the X-axis. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ), ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 343-349.
6. Мамажанов М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Сборник международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования», Ош ГУ, г. Ош., 12-13 мая, 2023 г., с. 120-132.
7. Mamazhonov M., Mamazhonov S.M., Mamadalieva Kh. B. Some boundary value problems for a third-order parabolic-hyperbolic equation in a pentagonal domain. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016, 13 (2), pp. 31-38.
8. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary-Value Problem for the Fourth-Order Equation with Multiple Characteristics in a Rectangular Domain // Journal of Mathematical Sciences. 2023, 272(2), p. 185-201. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06409-x
9. Apakov, Y.P., Mamazhonov, S.M. Boundary Value Problem for an Inhomogeneous Fourth-Order Equation with Lower-Order Terms // Differential Equations. 2023, 59(2), p. 188-198. https://doi.org/10.1134/S0012266123020040
10. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary value problem for a inhomogeneous fourth order equation with constant coefficients // Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023, 8(2), p. 157-172. https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-18201
11. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2022). Boundary Value Problem for a Fourth-Order Equation of the Parabolic-Hyperbolic Type with Multiple Characteristics with Slopes Greater Than One. Russian Mathematics, 66(4), 1-11. https://doi.org/10.3103/S1066369X22040016
12. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2021). Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 15(4), 586-596. https://doi.org/10.1134/S1990478921040025
13. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2024). Boundary Value Problem for Fourth Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients. Journal of Mathematical Sciences (United States), 284(2), 153–165. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07340-5

УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_16

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Мамажонов Мирза
mirzamamajonov@gmail.com
КГПИ, «Математика»
Шерматова Хилолахон Мирзаевна
shilola-1978@mail.ru
Ферганский государственный университет
Фергана, Узбекистан

Аннотация. *В данной работе ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в смешанной области с тремя линиями изменения типа. Доказана теорема существования и единственности решения этой поставленной задачи. В ходе доказательства этой теоремы применены методы построения решения, дифференциальных и интегральных уравнений, а также метод продолжения.*

Ключевые слова: *Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, метод продолжения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость.*

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER EQUATION OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE IN A PENTAGONAL DOMAIN WITH THREE LINES OF CHANGE IN TYPE

Mamajonov Mirza
mirzamamajonov@gmail.com
KSPI, "Mathematics"
Shermatova Hilolaxon Mirzayevna
shilola-1978@mail.ru
Fergana State University
Fergana, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we pose and study a boundary value problem for a fourth-order parabolic-hyperbolic equation in a mixed domain with three lines of type change. We prove a theorem of existence and uniqueness of a solution to this problem. In proving this theorem, we apply methods of constructing a solution, differential and integral equations, and a continuation method.*

Keywords: *Differential and integral equations, solution construction method, continuation method, boundary value problem, parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

Начиная с семидесятых годов XX века началось интенсивно развиваться изучение краевых задач для уравнений третьего, четвертого и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Краевые задачи для таких уравнений изучены в основном в работах [1], [2] и др.

После этого началось исследование краевых задач для таких уравнений в различных областях с двумя и тремя линиями изменения типа {см. [3]-[18]}.

В настоящей статье ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвёртого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0, \qquad (1)$$

в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup\ J_1\cup J_2\cup J_3$, G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2- треугольник с вершинами в точках $D(-1,0)$, $E(1/2,-3/2)$, $C(2,0)$; G_3 и G_4- прямоугольники с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0 и B, B_0, $C_0(2,1)$, $C(2,0)$ соответственно; J_1, J_2 и J_3- открытые отрезки с вершинами в точках C, D; A, A_0 и B, B_0 соответственно; $u=u(x,y)-$ неизвестная функция, а $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y,\ (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy},\ (x,y)\in G_j,\ j=2,3,4.\end{cases}$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

<u>**Задача-1.**</u> Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(2,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1; \qquad (2)$$

$$u(-1,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1; \qquad (3)$$

$$u_x(2,y)=\varphi_3(y),\ \ 0\le y\le 1; \qquad (4)$$

$$u_{xx}(2,y)=\varphi_5(y),\ \ 0\le y\le 1; \qquad (5)$$

$$u\big|_{CE}=\psi_1(x),\ 1/2\le x\le 2; \qquad (6)$$

$$u\big|_{DP}=\psi_2(x),\ -1\le x\le -1/2; \qquad (7)$$

$$u\big|_{QE}=\psi_3(x),\ 0\le x\le 1/2; \qquad (8)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{CE}=\psi_6(x),\ 1/2\le x\le 2; \qquad (9)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{CE}=\psi_7(x),\ 1/2<x<2; \qquad (10)$$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=T(x),\ -1\le x\le 1; \qquad (11)$$

$$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=N(x),\ -1\le x\le 1; \qquad (12)$$

$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=M(x),\ -1<x<2; \qquad (13)$$

$$u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_4(y),\ 0\le y\le 1; \qquad (14)$$

$$u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_4(y),\ 0\le y\le 1; \qquad (15)$$

$$u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_4(y),\ 0<y<1; \qquad (16)$$

$$u_{xxx}(+0,y)=u_{xxx}(-0,y)=\theta_4(y),\ 0<y<1; \tag{17}$$
$$u(1+0,y)=u(1-0,y)=\tau_5(y),\ 0\le y\le 1; \tag{18}$$
$$u_x(1+0,y)=u_x(1-0,y)=\nu_5(y),\ 0\le y\le 1; \tag{19}$$
$$u_{xx}(1+0,y)=u_{xx}(1-0,y)=\mu_5(y),\ 0<y<1; \tag{20}$$
$$u_{xxx}(1+0,y)=u_{xxx}(1-0,y)=\theta_5(y),\ 0<y<1, \tag{21}$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_5$, $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_6,\psi_7$ – заданные достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x-y=2$, а $P(-1/2,-1/2)$, $Q(0,-1)$, $T(x)=\begin{cases}\tau_1(x), & если\ \ 0\le x\le 1,\\ \tau_2(x), & если\ \ -1\le x\le 0,\\ \tau_3(x), & если\ \ 1\le x\le 2;\end{cases}$

$N(x)=\begin{cases}\nu_1(x), & если\ \ 0\le x\le 1,\\ \nu_2(x), & если\ \ -1\le x\le 0,\\ \nu_3(x), & если\ \ 1\le x\le 2;\end{cases}$ $M(x)=\begin{cases}\mu_1(x), & если\ \ 0<x<1,\\ \mu_2(x), & если\ \ -1<x<0,\\ \mu_3(x), & если\ \ 1<x<2;\end{cases}$ $\tau_i,\ \nu_i,\ \mu_i\ (i=\overline{1,5})$, θ_4,θ_5 – неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Теорема. Если $\varphi_1,\varphi_2\in C^4[0,1]$, $\varphi_3\in C^3[0,1]$, $\varphi_5\in C^2[0,1]$, $\psi_1\in C^4[1/2,2]$, $\psi_2\in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3\in C^4[0,1/2]$, $\psi_6\in C^3[1/2,2]$, $\psi_7\in C^2[1/2,2]$, причем выполняется условие согласования $\tau_2(-1)=\psi_2(-1)=\varphi_2(0)$, $\tau_3(2)=\varphi_1(0)=\psi_1(2)$, $\psi_1(1/2)=\psi_3(1/2)$, $\tau_1(1)=\tau_3(1)$, $\tau_1(0)=\tau_2(0)$, $\tau_1'(1)=\tau_3'(1)$, $\tau_1'(0)=\tau_2'(0)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде
$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(y)+\omega_{12}(x+y),\ (x,y)\in G_1, \tag{22}$$
$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_{i1}(y)+\omega_{i2}(x+y),\ (x,y)\in G_i\quad (i=2,3,4), \tag{23}$$
где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$, причем функции $\omega_{i1}(y),\ \omega_{i2}(x+y)\ \left(i=\overline{1,4}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в области G_2. Решение уравнения (23) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (11), (12) представляется в виде
$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[T(x+y)+T(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N(t)\,dt-$$
$$-\int_0^y(y-\eta)\,\omega_{21}(\eta)\,d\eta-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_{22}(\xi+\eta)\,d\xi. \tag{24}$$

Подставляя (24) в условия (9) и (10) после упрощений, имеем
$$\omega_{21}(x-2)+\omega_{22}(2x-2)=-\sqrt{2}\psi_6'(x),\ 1/2\le x\le 2, \tag{25}$$
$$-\omega_{21}(x-2)+\omega_{22}(2x-2)=2\psi_7(x)-2T''(2)+2N'(2)+\omega_{22}(2),\ 1/2\le x\le 2. \tag{26}$$

Из (25) и (26) находим

$$\omega_{22}(2x-2)=\psi_7(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_6'(x)-T''(2)+N'(2)+\frac{1}{2}\omega_{22}(2),\ 1/2\le x\le 2,$$

$$\omega_{21}(x-2)=-\psi_7(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_6'(x)+T''(2)-N'(2)-\frac{1}{2}\omega_{22}(2),\ 1/2\le x\le 2.$$

В первом равенстве меняя аргумент $2x-2$ на $x+y$, а во втором – аргумент $x-2$ на y, получим

$$\omega_{22}(x+y)=\psi_7\left(\frac{x+y+2}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_6'\left(\frac{x+y+2}{2}\right)-T''(2)+N'(2)+\frac{1}{2}\omega_{22}(2),-1\le x+y\le 2, \quad (27)$$

$$\omega_{21}(y)=-\psi_7(y+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_6'(y+2)+T''(2)-N'(2)-\frac{1}{2}\omega_{22}(2),\ -3/2\le y\le 0. \quad (28)$$

Слагая (27) и (28), имеем

$$\omega_{21}(y)+\omega_{22}(x+y)=\psi_7\left(\frac{x+y+2}{2}\right)-\psi_7(y+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\psi_6'\left(\frac{x+y+2}{2}\right)+\psi_6'(y+2)\right],$$

$$-3/2\le y\le 0,\ -1\le x+y\le 2.$$

Теперь подставляя (24) в (6), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$:

$$T'(x)+N(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 2, \quad (29)$$

где $\alpha_1(x)=\psi_1'\left(\frac{x+2}{2}\right)+\int\limits_0^{-\frac{x-2}{2}}\omega_{21}(\eta)\,d\eta-\frac{x-2}{2}\omega_{22}(x).$

При $0\le x\le 1$ уравнение (29) имеет вид

$$\tau_1'(x)+\nu_1(x)=\alpha_1(x),\ 0\le x\le 1, \quad (30)$$

б) При $-1\le x\le 0$ –

$$\tau_2'(x)+\nu_2(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 0, \quad (31)$$

в) а при $1\le x\le 2$ –

$$\tau_3'(x)+\nu_3(x)=\alpha_1(x),\ 1\le x\le 2. \quad (32)$$

Далее, подставляя (24) в (7), получим соотношение

$$\tau_2'(x)-\nu_2(x)=\delta_1(x),\ -1\le x\le 0, \quad (33)$$

где $\delta_1(x)=\psi_2'\left(\frac{x-1}{2}\right)-\int\limits_0^{-\frac{x+1}{2}}\left[\omega_{21}(\eta)+\omega_{22}(x+2\eta)\right]d\eta.$

А подставляя (24) в (8), имеем

$$\tau_3'(x)-\nu_3(x)=\delta_2(x),\ 1\le x\le 2, \quad (34)$$

где $\delta_2(x)=\psi_3'\left(\frac{x-1}{2}\right)-\int\limits_0^{-\frac{x+1}{2}}\left[\omega_{21}(\eta)+\omega_{22}(x+2\eta)\right]d\eta.$

Из (31) и (33) находим функции $\tau_2'(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\tau_2'(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\delta_1(x)\right],\qquad \nu_2(x)=\frac{1}{2}\left[\delta_1(x)-\alpha_1(x)\right]. \quad (35)$$

Интегрируя первое равенство из (35) от -1 до x, находим

$$\tau_2(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1).$$

Далее, из (32) и (34) находим функции $\tau_3'(x)$ и $\nu_3(x)$:

$$\tau_3'(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\delta_2(x)\right], \qquad \nu_3(x)=\frac{1}{2}\left[\delta_2(x)-\alpha_1(x)\right]. \tag{36}$$

Интегрируя первое равенство из (36) от 2 до x, находим

$$\tau_3(x)=\frac{1}{2}\int_{2}^{x}\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt+\psi_1(2).$$

Теперь переходя в уравнении (23) $(i=2)$, к пределу при $y\to 0$, в силу (11) и (13) получим соотношение между функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\mu_1(x)=\tau_1''(x)-\omega_{21}(0)-\omega_{22}(x). \tag{37}$$

Далее, применяя оператор $-\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (22) и устремляя y к нулю, получим еще одно соотношение между $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$-\tau_1'''(x)+\nu_1''(x)+\nu_1'(x)-\mu_1(x)=\omega_{11}'(0). \tag{38}$$

Исключая из (30), (37) и (38) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение дважды от 0 до x, имеем

$$\tau_1'(x)+\tau_1(x)=\alpha_2(x)+\frac{1}{2}\omega_{11}'(0)\frac{x^2}{2}+k_1x+k_2,\ 0\le x\le 1,$$

где $\alpha_2(x)=\dfrac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\int_0^x\alpha_1(t)dt+\int_0^x(x-t)\left[\omega_{21}(0)+\omega_{22}(t)\right]dt\right]$, а $\omega_{11}'(0)$, k_1, k_2 – неизвестные пока постоянные.

Теперь решая последнее уравнение при условиях $\tau_1(0)=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1)$,

$$\tau_1'(0)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right], \qquad \tau_1'(1)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right], \qquad \tau_1(1)=\psi_1(2)-\frac{1}{2}\int_1^2\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt,$$

находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x)=\int_0^x e^{t-x}\alpha_2(t)dt+\frac{\omega_{11}'(0)}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x+1-e^{-x}\right)+k_1\left(x-1+e^{-x}\right)+k_2\left(1-e^{-x}\right)+k_3e^{-x},$$

где $k_3=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1)$, $k_2=\dfrac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right]-\alpha_2(0)+k_3$,

$$k_1=\frac{e-2}{2(e-3)}\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right]+\frac{e-2}{3-e}\alpha_2(1)+\frac{2}{3-e}\psi_1(2)+\frac{1}{e-3}\int_1^2\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt+$$

$$+\frac{1}{e-3}\int_0^x e^t\alpha_2(t)dt+\frac{1}{3-e}k_2+\frac{1}{3-e}k_3,$$

$$\omega_{12}'(0)=-2(e-1)k_1+e\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right]-2e\alpha_2(1)+2\int_0^1 e^t\alpha_2(t)dt+2k_2-2k_3.$$

Тогда будут известными и функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_4. Переходя в уравнениях (23) $(i=2)$ и (23) $(i=4)$ к пределу при $y \to 0$ с учетом условий (11), (13) и производя замену $x \square x+y$, находим

$$\omega_{42}(x+y) = \omega_{22}(x+y) + \omega_{21}(0) - \omega_{41}(0),\ 1 \le x+y \le 2. \tag{39}$$

Далее, сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{4xx} - u_{4yy} = \omega_{41}(y) + \Omega_{42}(x+y), \\ u_4(x,0) = T_3(x),\ u_{4y}(x,0) = N_3(x),\ 0 \le x \le 3, \\ u_4(1,y) = \tau_5(y),\ u_4(2,y) = \varphi_1(y),\ u_{4x}(2,y) = \varphi_3(y),\ u_{4xx}(2,y) = \varphi_5(y),\ 0 \le y \le 1, \end{cases}$$

где функции $T_3(x)$, $N_3(x)$, $\Omega_{42}(x+y)$ определяются следующим образом: в промежутке $1 \le x \le 2$ функции $T_3(x)$, $N_3(x)$ имеют вид: $T_3(x) = \tau_3(x)$, $N_3(x) = \nu_3(x)$, функция $\Omega_{42}(x+y)$ при $1 \le x+y \le 2$ имеет вид: $\Omega_{42}(x+y) = \omega_{22}(x+y) + \omega_{21}(0) - \omega_{41}(0)$, а в промежутках $0 \le x \le 1$ и $2 \le x \le 3$ функции $T_3(x)$, $N_3(x)$ и в промежутках $0 \le x+y \le 1$ и $2 \le x+y \le 3$ функция $\Omega_{42}(x+y)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условий $u_{4x}(2,y) = \varphi_3(y)$, $u_{4xx}(2,y) = \varphi_5(y)$, будем искать в виде

$$u_4(x,y) = u_{41}(x,y) + u_{42}(x,y) + u_{43}(x,y), \tag{40}$$

где $u_{41}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{41xx} - u_{41yy} = 0, \\ u_{41}(x,0) = T_3(x),\ u_{41y}(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 3, \\ u_{41}(1,y) = \tau_5(y),\ u_{41}(2,y) = \varphi_1(y),\ 0 \le y \le 1; \end{cases} \tag{41}$$

$u_{42}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{42xx} - u_{42yy} = \omega_{41}(y), \\ u_{42}(x,0) = 0,\ u_{42y}(x,0) = N_2(x),\ 0 \le x \le 3, \\ u_{42}(1,y) = 0,\ u_{42}(2,y) = 0,\ 0 \le y \le 1; \end{cases} \tag{42}$$

$u_{43}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{43xx} - u_{43yy} = \Omega_{42}(x+y), \\ u_{43}(x,0) = 0,\ u_{43y}(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 3, \\ u_{43}(1,y) = 0,\ u_{43}(2,y) = 0,\ 0 \le y \le 1. \end{cases} \tag{43}$$

Методом продолжения находим решения задач (41)-(43). Они имеют вид

$$u_{41}(x,y) = \frac{1}{2}\left[T_3(x+y) + T_3(x-y)\right], \tag{44}$$

$$u_{42}(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} N_3(t)\,dt - \int\limits_0^y (y-\eta)\left[\omega_{41}(\eta) - \omega_{41}(0)\right]d\eta, \tag{45}$$

$$u_{43}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\left[\overline{\Omega}_{22}(\xi-\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\xi\,, \qquad (46)$$

где

$$T_3(x)=\begin{cases}2\tau_5(1-x)-\tau_3(2-x),\ 0\le x\le 1,\\ \tau_3(x),\ 1\le x\le 2,\\ 2\varphi_1(x-2)-\tau_3(4-x),\ 2\le x\le 3,\end{cases}\qquad N_3(x)=\begin{cases}2\int\limits_0^{1-x}\omega_{41}(\eta)d\eta-\nu_3(2-x),\ 0\le x\le 1,\\ \nu_3(x),\ 1\le x\le 2,\\ 2\int\limits_0^{x-2}\omega_{41}(\eta)d\eta-\nu_3(4-x),\ 2\le x\le 3.\end{cases}$$

А функция $\Omega_{42}(x+y)$ определяется следующим образом. Первые два условия задачи (43) для функции (46) выполняются автоматически. Удовлетворяя третье условие, после некоторых преобразований находим

$$\Omega_{42}(1-y)=3\omega_{42}(1+y)-2y\omega_{42}'(1+y)\,. \qquad (47)$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (43), после некоторых преобразований, имеем

$$y\Omega_{42}(2+y)=-\frac{1}{2}\int_0^y\Omega_{42}(2+z)dz-\frac{1}{2}\int_0^y\omega_{22}(2-z)dz\,. \qquad (48)$$

Подставляя (44), (45), (46) в (40), получим

$$u_4(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_3(x+y)+T_3(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_3(t)dt-$$
$$-\int_0^y(y-\eta)\omega_{41}(\eta)d\eta-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{42}(\xi+\eta)d\xi\,. \qquad (49)$$

Дифференцируя (49) по x дважды, имеем

$$u_{4x}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_3'(x+y)+T_3'(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_3(x+y)-N_3(x-y)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}y\Omega_{42}(x+y)+\frac{1}{2}\int_0^y\Omega_{42}(x-y+2\eta)d\eta\,, \qquad (50)$$

$$u_{4xx}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_3''(x+y)+T_3''(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_3'(x+y)-N_3'(x-y)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}y\Omega_{42}'(x+y)+\frac{1}{4}\left[\Omega_{42}(x+y)-\Omega_{42}(x-y)\right]. \qquad (51)$$

Полагая в (50) и (51) $x=2$ в силу условий $u_{4x}(2,y)=\varphi_3(y)$, $u_{4xx}(2,y)=\varphi_5(y)$ после некоторых вычислений и преобразований, имеем

$$2\omega_{41}(y)+\Omega_{42}(2+y)=2\left[\varphi_3'(y)-\varphi_1''(y)+\tau_3''(2-y)-\nu_3'(2-y)\right]-\omega_{42}(2-y)$$
$$\omega_{41}(y)+\Omega_{42}(2+y)=\varphi_5(y)-\varphi_1''(y)\,.$$

Из этих соотношений находим

$$\omega_{41}(y)=2\left[\varphi_3'(y)+\tau_3''(2-y)-\nu_3'(2-y)\right]-\varphi_5(y)-\varphi_1''(y)-\omega_{42}(2-y)\,, \quad (52)$$

$$\Omega_{42}(2+y)=2\left[\varphi_5(y)-\varphi_3'(y)-\tau_3''(2-y)+\nu_3'(2-y)\right]+\omega_{42}(2-y)\,. \qquad (53)$$

В (53) меняя аргумент $2+y$ на $x+y$, получим

$$\Omega_{42}(x+y)=2\left[\varphi_5(x+y-2)-\varphi_3'(x+y-2)-\tau_3''(4-x-y)+\nu_3'(4-x-y)\right]+\omega_{42}(4-x-y).$$

Слагая последнее равенство и (52), имеем

$$\omega_{41}(y)+\Omega_{42}(x+y)=2\left[\varphi_3'(y)+\tau_3''(2-y)-\nu_3'(2-y)\right]-\varphi_5(y)-\varphi_1''(y)-\omega_{42}(2-y)+$$

$$+2\left[\varphi_5(x+y-2)-\varphi_3'(x+y-2)-\tau_3''(4-x-y)+\nu_3'(4-x-y)\right]+\omega_{42}(4-x-y),2\le x+y\le 3.$$

Далее, полагая в (50) $x=1$, после некоторых преобразований, приходим к соотношению

$$\nu_5(y)=-\tau_5'(y)+\beta_2(y), \tag{54}$$

где

$$\beta_2(y)=\tau_3'(1+y)+\nu_3(1+y)-\int_0^y\omega_{41}(\eta)\,d\eta-\frac{1}{2}y\omega_{42}(1+y)+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^y\Omega_{42}(1-z)\,dz+\frac{1}{4}\int_0^y\omega_{42}(1+z)\,dz.$$

Переходя в уравнениях (22) и (23) $(i=4)$ к пределу при $x\to 1$, получим соотношения

$$\mu_5(y)-\tau_5'(y)=\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(1+y),\ \mu_5(y)-\tau_5''(y)=\omega_{41}(y)+\omega_{42}(1+y),$$

где введено обозначение

$$\omega_{12}(x+y)=\begin{cases}\overline{\omega}_{12}(x+y),\ 1\le x+y\le 2,\\ \overline{\overline{\omega}}_{12}(x+y),\ 0\le x+y\le 1.\end{cases}$$

Из этих соотношений находим

$$\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(1+y)=\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]+\left[\omega_{41}(y)+\omega_{42}(1+y)\right]. \tag{55}$$

Дифференцируя уравнения (22) и (23) $(i=4)$ по x и переходя в полученных уравнениях к пределу при $x\to 1$, имеем

$$\theta_5(y)-\nu_5'(y)=\overline{\omega'}_{12}(1+y),\ \theta_5(y)-\nu_5''(y)=\omega_{42}'(1+y).$$

Из этих соотношений получим

$$\overline{\omega}_{12}(1+y)=\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]-\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]+\omega_{42}(1+y)-\omega_{42}(1)+\overline{\omega}_{12}(1). \tag{56}$$

В последнем соотношении меняя аргумент $1+y$ на $x+y$, имеем

$$\overline{\omega}_{12}(x+y)=\left[\nu_5'(x+y-1)-\nu_5(x+y-1)\right]-\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]+$$

$$+\omega_{42}(x+y)-\omega_{42}(1)+\overline{\omega}_{12}(1),1\le x+y\le 2. \tag{57}$$

Подставляя (56) в (55), находим

$$\omega_{11}(y)=\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]-\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]+\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]+\omega_{41}(y)+\omega_{42}(1)-\overline{\omega}_{12}(1). \tag{58}$$

Слагая последнее равенство и (57), получим

$$\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(x+y)=\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]-\left[\nu_5'(y)-\nu_5'(x+y-1)\right]+$$

$$+\left[\nu_5(y)-\nu_5(x+y-1)\right]+\left[\omega_{41}(y)+\omega_{42}(x+y)\right],\ 0\le y\le 1,\ 1\le x+y\le 2. \tag{59}$$

Далее, дифференцируя уравнение (22) по x и устремляя в полученном уравнении y к нулю, имеем

$$\overline{\overline{\omega'}}_{12}(x)=\tau_1'''(x)-\nu_1'(x).$$

Интегрируя это равенство от 1 до x и меняя аргумент x на $x+y$, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(x+y\right)=\tau_1''\left(x+y\right)-\nu_1\left(x+y\right)-\tau_1''\left(1\right)+\nu_1\left(1\right)+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(1\right). \qquad (60)$$

Слагая это равенство и (58), получим

$$\omega_{11}\left(y\right)+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(x+y\right)=\left[\tau_5''\left(y\right)-\tau_5'\left(y\right)\right]-\left[\nu_5'\left(y\right)-\nu_5\left(y\right)\right]+\left[\nu_3'\left(1\right)-\tau_3'\left(1\right)\right]+$$

$$+\omega_{41}\left(y\right)+\omega_{42}\left(1\right)+\tau_1''\left(x+y\right)-\nu_1\left(x+y\right)-\tau_1''\left(1\right)+\nu_1\left(1\right), 0\le y\le 1, 0\le x+y\le 1, \qquad (61)$$

здесь положено $\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(1\right)=\overline{\omega}_{12}\left(1\right)$.

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3. Переходя в уравнениях (23) $\left(i=3\right)$ и (22) к пределу при $x\to 0$, получим

$$\mu_4\left(y\right)-\tau_4''\left(y\right)=\omega_{31}\left(y\right)+\overline{\omega}_{32}\left(y\right),\ \mu_4\left(y\right)-\tau_4'\left(y\right)=\omega_{11}\left(y\right)+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(y\right),$$

где введено обозначение $\omega_{32}\left(x+y\right)=\begin{cases}\overline{\omega}_{32}\left(x+y\right),\ 0\le x+y\le 1,\\ \overline{\overline{\omega}}_{32}\left(x+y\right),\ -1\le x+y\le 0.\end{cases}$

Исключая из этих соотношений функцию $\mu_4\left(y\right)$, находим

$$\omega_{31}\left(y\right)+\overline{\omega}_{32}\left(y\right)=-\left[\tau_4''\left(y\right)-\tau_4'\left(y\right)\right]+\omega_{11}\left(y\right)+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(y\right). \qquad (62)$$

Переходя в уравнениях (23) $\left(i=2\right)$ и (23) $\left(i=3\right)$ к пределу при $y\to 0$ с учетом условий (11), (13) и производя замену x □ $x+y$, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{32}\left(x+y\right)=\omega_{22}\left(x+y\right)+\omega_{21}\left(0\right)-\omega_{31}\left(0\right),\ -1\le x+y\le 0. \qquad (63)$$

Далее, дифференцируя уравнения (22) и (23) $\left(i=3\right)$ по x и устремляя x к нулю, получим соотношения

$$\theta_4\left(y\right)-\nu_4'\left(y\right)=\overline{\overline{\omega}}'_{12}\left(y\right),\ \theta_4\left(y\right)-\nu_4''\left(y\right)=\overline{\omega}'_{32}\left(y\right).$$

Исключая из этих соотношений функцию $\theta_4\left(y\right)$, имеем

$$\overline{\omega}'_{32}\left(y\right)=\overline{\overline{\omega}}'_{12}\left(y\right)-\left[\nu_4''\left(y\right)-\nu_4'\left(y\right)\right],$$

а интегрируя это соотношение от 0 до y, определяем

$$\overline{\omega}_{32}\left(y\right)=-\left[\nu_4'\left(y\right)-\nu_4\left(y\right)\right]+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(y\right)-\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(0\right)+\left[\nu_1'\left(0\right)-\tau_1'\left(0\right)\right]+\overline{\omega}_{32}\left(0\right). \qquad (64)$$

Подставляя (64) в (62), находим

$$\omega_{31}\left(y\right)=-\left[\tau_4''\left(y\right)-\tau_4'\left(y\right)\right]+\omega_{11}\left(y\right)+\left[\nu_4'\left(y\right)-\nu_4\left(y\right)\right]+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(0\right)-\overline{\omega}_{32}\left(0\right)-\left[\nu_1'\left(0\right)-\tau_1'\left(0\right)\right]. \qquad (65)$$

В (64) меняя аргумент y на $x+y$, получим

$$\overline{\omega}_{32}\left(x+y\right)=-\left[\nu_4'\left(x+y\right)-\nu_4\left(x+y\right)\right]+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(x+y\right)-\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(0\right)+$$

$$+\left[\nu_1'\left(0\right)-\tau_1'\left(0\right)\right]+\overline{\omega}_{32}\left(0\right), 0\le x+y\le 1. \qquad (66)$$

Слагая (65) и (66) в силу (58), находим

$$\omega_{31}\left(y\right)+\overline{\omega}_{32}\left(x+y\right)=-\left[\tau_4''\left(y\right)-\tau_4'\left(y\right)\right]+\left[\nu_4'\left(y\right)-\nu_4'\left(x+y\right)\right]-$$

$$-\left[\nu_4\left(y\right)-\nu_4\left(x+y\right)\right]+\left[\tau_5''\left(y\right)-\tau_5'\left(y\right)\right]-\left[\nu_5'\left(y\right)-\nu_5\left(y\right)\right]+\left[\nu_3'\left(1\right)-\tau_3'\left(1\right)\right]+$$

$$+\omega_{41}\left(y\right)+\omega_{42}\left(1\right)+\tau_1''\left(x+y\right)-\nu_1\left(x+y\right)-\tau_1''\left(1\right)-\nu_1\left(1\right), 0\le y\le 1, 0\le x+y\le 1. \qquad (67)$$

А слагая (63) и (65) в силу (58), получим

$$\omega_{31}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{32}(x+y)=-\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\left[\nu_4'(y)-\nu_4(y)\right]+\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]-$$
$$-\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]+\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]-\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]+\left[\omega_{22}(x+y)+\omega_{21}(0)\right]-$$
$$-\left[\omega_{31}(0)+\overline{\omega}_{32}(0)\right]+\left[\omega_{41}(y)+\omega_{42}(1)\right]+\overline{\overline{\omega}}_{12}(0)-\overline{\omega}_{12}(1),0\le y\le 1,-1\le x+y\le 0. \qquad (68)$$

Далее, сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx}-u_{3yy}=\omega_{31}(y)+\Omega_{32}(x+y), \\ u_3(x,0)=T_2(x),\ u_{3y}(x,0)=N_2(x),\ -2\le x\le 1, \\ u_3(-1,y)=\varphi_2(y), u_3(0,y)=\tau_4(y), u_{3x}(0,y)=\nu_4(y),\ 0\le y\le 1, \end{cases}$$

где функции $T_2(x)$, $N_2(x)$, $\Omega_{32}(x+y)$ определяются следующим образом: в промежутке $-1\le x\le 0$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ имеют вид: $T_2(x)=\tau_2(x)$, $N_2(x)=\nu_2(x)$, функция $\Omega_{32}(x+y)$ при $-1\le x-y\le 0$ имеет вид: $\Omega_{32}(x+y)=\omega_{32}(x+y)$, а в промежутках $-2\le x\le -1$ и $0\le x\le 1$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ и в промежутках $-2\le x+y\le -1$ и $0\le x+y\le 1$ функция $\Omega_{32}(x+y)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условия $u_{3x}(0,y)=\nu_4(y)$, будем искать в виде

$$u_3(x,y)=u_{31}(x,y)+u_{32}(x,y)+u_{33}(x,y), \qquad (69)$$

где $u_{31}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx}-u_{31yy}=0, \\ u_{31}(x,0)=T_2(x),\ u_{31y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1, \\ u_{31}(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{31}(0,y)=\tau_4(y),\ 0\le y\le 1; \end{cases} \qquad (70)$$

$u_{32}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx}-u_{32yy}=\omega_{31}(y), \\ u_{32}(x,0)=0,\ u_{32y}(x,0)=N_2(x),\ -2\le x\le 1, \\ u_{32}(-1,y)=0,\ u_{32}(0,y)=0,\ 0\le y\le 1; \end{cases} \qquad (71)$$

$u_{33}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{33xx}-u_{33yy}=\Omega_{32}(x+y), \\ u_{33}(x,0)=0,\ u_{33y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1, \\ u_{33}(-1,y)=0,\ u_{33}(0,y)=0,\ 0\le y\le 1. \end{cases} \qquad (72)$$

Методом продолжения находим решения задач (70)-(72). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right], \qquad (73)$$

$$u_{32}(x,y)=\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt-\int_0^y(y-\eta)\,\omega_{31}(\eta)\,d\eta, \qquad (74)$$

$$u_{33}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{32}(\xi+\eta)\,d\xi. \qquad (75)$$

где

$$T_2(x)=\begin{cases}2\varphi_2(-1-x)-\tau_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \tau_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\tau_4(x)-\tau_2(-x),\ 0\le x\le 1,\end{cases}$$

$$N_2(x)=\begin{cases}2\int\limits_0^{-1-x}\omega_{31}(\eta)d\eta-\nu_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \nu_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\int\limits_0^{x}\omega_{31}(\eta)d\eta-\nu_2(-x),\ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

А функция $\Omega_{32}(x+y)$ определяется следующим образом. Первые два условия задачи (72) для функции (75) выполняются автоматически. удовлетворяя третье условие, находим

$$\int\limits_0^y\Omega_{32}(-1-z)dz+\int\limits_0^y\omega_{32}(z-1)dz=-2y\omega_{32}(y-1). \tag{76}$$

Дифференцируя (75), получим

$$\Omega_{32}(-1-y)=-2y\omega'_{32}(-1-y)-3\omega_{32}(y-1). \tag{77}$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (72), имеем

$$y\Omega_{32}(y)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^y\Omega_{32}(z)dz-\frac{1}{2}\int\limits_0^y\omega_{32}(-z)dz. \tag{78}$$

Подставляя (73), (74), (75) в (69), получим

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N_2(t)dt-$$

$$-\int\limits_0^y(y-\eta)\omega_{31}(\eta)d\eta-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{32}(\xi+\eta)d\xi. \tag{79}$$

Дифференцируя (79) по x, имеем

$$u_{3x}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T'_2(x+y)+T'_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_2(x+y)-N_2(x-y)\right]-$$

$$-\frac{y}{2}\Omega_{32}(x+y)+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\Omega_{32}(x-y+2\eta)d\eta, \tag{80}$$

Полагая в (80) $x=0$ в силу условия $u_{3x}(0,y)=\nu_4(y)$ и равенства (78), имеем

$$\nu_4(y)=\tau'_4(y)+\tau'_2(-y)-\nu_2(-y)+\int\limits_0^y\omega_{31}(\eta)d\eta+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\Omega_{32}(z)dz+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\omega_{32}(-z)dz. \tag{81}$$

Дифференцируя (81), в силу (67) и (68), после некоторых выкладок, имеем соотношение

$$\nu'_4(y)+\nu_4(y)=2\tau'_4(y)+4\left[\tau''_5(y)-\tau'_5(y)\right]+\lambda_1(y), \tag{82}$$

где

$$\lambda_1(y)=-2\left[\beta'_1(y)-\beta_1(y)\right]-2\tau''_2(-y)+2\nu'_2(-y)+2\left[\omega_{41}(y)+\omega_{42}(1)\right]-$$

$$-2\overline{\omega}_{12}(1)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(0)+\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]+\left[\omega_{22}(-y)+\omega_{21}(0)\right]-\left[\omega_{31}(0)+\overline{\omega}_{32}(0)\right]+\overline{\overline{\omega}}_{12}(y).$$

Решая уравнение (82) при условии $\nu_4(0)=\tau_1'(0)$ после некоторых преобразований, приходим к соотношению

$$\nu_4(y)=4\tau_5'(y)+2\int_0^y e^{\eta-y}\tau_4'(\eta)\,d\eta-8\int_0^y e^{\eta-y}\tau_5'(\eta)\,d\eta+\beta_1(y), \qquad (83)$$

где $\beta_1(y)=\int_0^y e^{\eta-y}\lambda_1(\eta)\,d\eta+\tau_1'(0)e^{-y}-4\nu_3(1)e^{-y}$.

Теперь переходим в область G_1. Записывая решение уравнения (22), удовлетворяющего условиям (11), (14), (18), в силу (57), (58) и (60), имеем

$$u_1(x,y)=\int_0^y \tau_4(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)\,d\eta-\int_0^y \tau_5(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)\,d\eta+\int_0^1 \tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)\,d\xi-$$

$$-2\int_0^y\left[\tau_5''(\eta)-\tau_5'(\eta)\right]d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi-\int_0^y\Big\{\left[\beta_2'(\eta)-\beta_2(\eta)\right]+\left[\omega_{41}(\eta)+\omega_{42}(1)\right]+$$

$$+\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\Big\}-\int_0^y d\eta\int_0^{1-\eta}\left[\tau_1''(\xi+\eta)-\nu_1(\xi+\eta)-\tau_1''(1)+\nu_1(1)\right]G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi+$$

$$+\int_0^y\left[\tau_5''(\eta)-\tau_5'(\eta)\right]d\eta\int_\eta^y G(x,y;\eta-z+1,z)\,dz-\int_0^y\left[\beta_2'(\eta)-\beta_2(\eta)\right]d\eta\int_\eta^y G(x,y;\eta-z+1,z)\,dz-$$

$$-\int_0^y d\eta\int_\eta^1\Big\{\left[\omega_{42}(\xi+\eta)-\omega_{42}(1)\right]-\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]\Big\}G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi. \qquad (84)$$

Дифференцируя (84) по x, затем устремляя x к нулю и к единице, с учетом равенств (54) и (83) после длинных вычислений, получим систему интегральных уравнений типа Абеля относительно $\tau_4'(y)$ и $\tau_5''(y)$.

$$\int_0^y H_1(y,\eta)\tau_5''(\eta)\,d\eta+\int_0^y H_2(y,\eta)\tau_4'(\eta)\,d\eta=S_1(y),\ 0\le y\le 1,$$

$$\int_0^y H_3(y,\eta)\tau_5''(\eta)\,d\eta+\int_0^y H_4(y,\eta)\tau_4'(\eta)\,d\eta=S_2(y),\ 0\le y\le 1,$$

где $H_1(y,\eta)$, $H_2(y,\eta)$, $H_3(y,\eta)$, $H_4(y,\eta)$, $S_1(y)$, $S_2(y)$ – известные функции, причем $H_1(y,\eta)$, $H_2(y,\eta)$, $H_3(y,\eta)$ – имеют слабую особенность $(1/2)$, а $H_4(y,\eta)$, $S_1(y)$, $S_2(y)$ – непрерывные функции.

Применяя обращение Абеля к этим уравнениям, получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\tau_4'(y)$ и $\tau_5''(y)$:

$$\tau_5''(y)+\int_0^y K_1(y,\eta)\tau_5''(\eta)\,d\eta+\tau_4'(y)+\int_0^y K_2(y,\eta)\tau_4'(\eta)\,d\eta=g_1(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (85)$$

$$\tau_5''(y)+\int_0^y K_3(y,\eta)\tau_5''(\eta)\,d\eta+\int_0^y K_4(y,\eta)\tau_4'(\eta)\,d\eta=g_2(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (86)$$

где $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – известные функции, причем $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$ – имеют слабую особенность $(1/2)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – непрерывные функции, а

$$\left.\begin{array}{r} G(x,y;\xi,\eta) \\ N(x,y;\xi,\eta) \end{array}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \mp \exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\} -$$

функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (22).

Решая систему (85), (86), находим функции $\tau_5''(y)$ и $\tau_4'(y)$, тем самым и функции $\tau_4(y)$, $\tau_5(y)$, $\nu_4(y)$, $\nu_5(y)$, $\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(x+y)$, $\omega_{11}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(x+y)$, $T_2(x)$. $T_3(x)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$ и $u_1(x,y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

Замечание 1. Аналогичная задача для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)(Lu) = 0$$

в случае, когда $-1 < \frac{b_2}{a_2} < 0$, исследуется как и в случае $\gamma_2 = \frac{b_2}{a_2} = -1$ в областях G_2, G_3, G_4, а в области G_1 исследование проводится разделением область G_1 на n частей, высоты которых первые $n-1$ областей равны на $-\frac{b_2}{a_2}$, а последней – не больше чем $-\frac{b_2}{a_2}$. Задача решается в каждых областях последовательно, аналогично случаю $\gamma_2 = \frac{b_2}{a_2} = -1$, т.е. в случае уравнения (1).

Замечание 2. Если вместо условия (6), (7) и (8) взять условия

$$u|_{DE} = \psi_1(x),\ -1 \le x \le 1/2;$$

$$u|_{SE} = \psi_2(x),\ 1/2 \le x \le 1;$$

$$u|_{RC} = \psi_3(x),\ 3/2 \le x \le 2$$

соответственно, то вместо уравнения

$$\tau_1'(x) + \tau_1(x) = \alpha_2(x) + \frac{1}{2}\omega_{11}'(0)\frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2,\ 0 \le x \le 1$$

получим равенство

$$\alpha_1''(x) + \alpha_1'(x) + \omega_{11}'(0) - \omega_{21}(0) + \omega_{22}(x) = 0,\ 0 \le x \le 1,$$

то есть нельзя получить уравнение относительно неизвестной функции $\tau_1(x)$. В этом случае такая постановка задачи некорректна в случае 6 при $\gamma_2 = -1$.

Литература

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.

3. Мамажанов М., Шерматова Х.М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Наманган Давлат университети илмий ахборотномаси. Наманган, 2022 й., 2-сон, 41-51 б.

4. Mamajonov M., Shermatova X.M. On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines. ISSN 1990-4789, Journal of applied and industrial mathematics. 2022, vol. 16, no. 3, pp. 481-489.

5. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения. Сибирский журнал индустриальной математики, 2022, 25(3), с. 93-103.

6. Mamajonov M., Shermatova Kh.M., Mukhtorova T. On a boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third-order, when the characteristic of the first order operator is parallel to the yordinate axis. International journal of social science and interdisciplinary research. 2022, ISSN, 2277-3630 Impact factor: 7.429, 11, pp. 105-110.

7. Mamajonov M., Shermatova H.M. Statement and study of a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type in a mixed pentagonal domain, when the slope of the characteristic of the operator the first order is greater than one. International journal of research in commerce., IT, engineering and social sciences. ISSN: 2349-7793 Impact Factor: 6.876., Volume: 16 Issue: 05 in May 2022. pp. 117-130.

8. Mamajonov M., Yu.Kharimova. On one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a quadrangular domain with two lines type changes. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 68-77.

9. Mamajonov M., Aroev D.D., Shermatova G. Statement and investigation of one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a pentagonal domain with three lines of type change. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 332-342.

10. Mamajonov M., Turdiboeva M.M. On one boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third order, when characteristics of the first order operator parallel to the X-axis. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ), ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 343-349.

11. Мамажанов М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Сборник международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования», Ош ГУ, г. Ош., 12-13 мая, 2023 г., с. 120-132.

12. Mamazhonov M., Mamazhonov S.M., Mamadalieva Kh. B. Some boundary value problems for a third-order parabolic-hyperbolic equation in a pentagonal domain. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016, 13 (2), pp. 31-38.

13. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary-Value Problem for the Fourth-Order Equation with Multiple Characteristics in a Rectangular Domain // Journal of Mathematical Sciences. 2023, 272(2), p. 185-201. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06409-x

14. Apakov, Y.P., Mamazhonov, S.M. Boundary Value Problem for an Inhomogeneous Fourth-Order Equation with Lower-Order Terms // Differential Equations. 2023, 59(2), p. 188-198. https://doi.org/10.1134/S0012266123020040

15. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary value problem for a inhomogeneous fourth order equation with constant coefficients // Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023, 8(2), p. 157-172. https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-18201

16. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2022). Boundary Value Problem for a Fourth-Order Equation of the Parabolic-Hyperbolic Type with Multiple Characteristics with Slopes Greater Than One. Russian Mathematics, 66(4), 1-11. https://doi.org/10.3103/S1066369X22040016

17. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2021). Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 15(4), 586-596. https://doi.org/10.1134/S1990478921040025

18. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2024). Boundary Value Problem for Fourth Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients. Journal of Mathematical Sciences (United States), 284(2), 153–165. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07340-5

УДК 514.75
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_17

ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИКТИ БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУДА ТӨРТ ЧЕНЕМДҮҮ БӨЛҮШТҮРҮҮЛӨРДҮН ТҮГӨЙҮНҮН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШАШЫ

Матиева Гулбадан, ф.-м.и.д., профессор
gulbadan_57@mail.ru
Папиева Толкун Маматаевна, ф.-м.и.к., доцент
tpapka73@mail.ru
Шамшиева Гулмира Асилидиновна, улук окутуучу
gshamsbieva@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *$\Omega \subset E_5$ аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген: ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана ω^1 сызыгы өтөт. Ушул сызык үчүн Френенин репери [1] боло тургандай кыймылдуу репер тандалып алынган. Бул репердин координаталык векторлорунун интегралдык сызыктары Френенин торчосун [2] түзүшөт. Ушул торчонун ω^1 сызыгынын жанымасында F_1^5 чекити инварианттык түрдө аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде F_1^5 чекити өзүнун $\Omega_1^5 \subset E_5$ аймагын "сызып" чыгат. Натыйжада $f_1^5(X) = F_1^5$ боло тургандай $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ бөлүктөп чагылтуусу аныкталат.*

$\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$, $\Delta'_4 = f_1^5(\Delta_4)$ бөлүштүрүүлөрү каралат.

$\gamma \subset \Delta_4$ жана $f_1^5(\gamma) = \bar{\gamma}$ сызыктары (Δ_4, Δ'_4) түгөйүнүн квазикошмок сызыктары болушу үчүн γ сызыгынын жаныма векторунун координаталары төмөндөгү шарттарды канааттандырышы зарыл жана жетиштүү шарттары табылган.

Ачкыч сөздөр: *бөлүктөп чагылтуу, Френенин репери, евклиддик мейкиндик, бөлүштүрүү, Френенин циклдик торчосу, квазикошмок сызык.*

СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ПАРЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ЧАСТИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Матиева Гулбадан, д.ф.-м.н., профессор
gulbadan_57@mail.ru
Папиева Толкун Маматаевна, к.ф.-м.н., доцент
tpapka73@mail.ru
Шамшиева Гулмира Асилидиновна, старший преподаватель
gshamsbieva@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В области $\Omega \subset E_5$ рассмотрено семейство гладких линий: через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия ω^1 заданного семейства. Подвижной репер пространства E_5 выбран так, что он является репером Френе [1] для линии ω^1. Интегральные линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [2]. На касательной к линии ω^1 этой сети инвариантным образом определяется* *точка F_1^5. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_1^5 описывает свою область $\Omega_1^5 \subset E_5$. В результате получается частичное отображение $f_1^5: \Omega \to \Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X) = F_1^5$.*

Рассмотрены четырехмерные распределения $\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ и $\Delta'_4 = f_1^5(\Delta_4)$. Найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии $\gamma \subset \Delta_4$ и $f_1^5(\gamma) = \bar{\gamma}$ являлись квазидвойными линиями пары распределений (Δ_4, Δ'_4) в частичном отображении f_1^5.

Ключевые слова: *частичное отображение, репер Френе, евклидово пространство, распределение, циклическая сеть Френе, квазидвойная линия.*

EXISTENCE OF QUASI-DOUBLE LINES OF THE PAIR OF FOUR DIMENSIONAL DISTRIBUTIONS IN PARTIAL MAPPING OF EUCLIDEAN SPACE

Matieva Gulbadan, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor
gulbadan_57@mail.ru
Papieva Tolkun Mamataevna, Candidate of Ph. & Math. Sc., docent
tpapka73@mail.ru
Shamshieva Gulmira Asilidinovna, Senior Lecturer
gshamsbieva@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *A family of smooth lines given in the domain $\Omega \subset E_5$ so that through each point $X \in \Omega$ passes one line ω^1 of given family. A movable frame is chosen so that it was Frenet's frame for the line ω^1 of the given family. The integral lines of the coordinate vectors fields of this frame form a Frenet's net. On a tangent to the line ω^1 a point F_1^5 is defined in an invariant way. When the point X moves in the domain Ω, the point F_1^5 describes it's domain $\Omega_1^5 \subset E_5$. In this way we get a partial mapping $f_1^5: \Omega \to \Omega_1^5$ such, that $f_1^5(X) = F_1^5$.*

It is considered the four dimensional distributions $\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ and $\Delta'_4 = f_1^5(\Delta_4)$. It is found the necessary and sufficient conditions for lines $\gamma \subset \Delta_4$ and $f_1^5(\gamma) = \bar{\gamma}$ to be quasi-double lines of the pair of distributions (Δ_4, Δ'_4) in the partial mapping f_1^5.

Key words: *partial mapping, Frenet's frame, Euclidean space, distribution, cyclic net of Frenet, quasi-double line.*

Киришүү. $\Omega \subset E_5$ мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген $X \in \Omega$ ар бир чекити аркылуу берилген көптүктүн бирден гана сызыгы өтөт. Ортонормаланган, $\mathcal{R} = (X, \vec{e}_{i,})$ $(i, j, k = \overline{1,5})$ реперин Ω аймагында бул репер берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери [1], [2] боло тургандай тандап алабыз. $\mathcal{R}$ реперинин деривациондук формулалары төмөнкүдөй көрүнүштө болушат:

$$d\overrightarrow{X} = \omega^i \vec{e}_i, d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \qquad (1)$$

Мындагы ω^i, ω_i^k дифференциалдык формалары евклиддик мейкиндиктин структуралык теңдемелерин канаатандырышат:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \qquad (2)$$

$\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин торчосун [1] Σ_5 түзүшөт. $\mathcal{R}$ репери Σ_5, торчосунун сызыктарынын жанымаларына тургузулгандыктан, ω_i^k формалары башка формалар болушат, б.а.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \qquad (3)$$

(2) формулалардын акыркы барбардыгын эске алсак, анда төмөндөгү келип чыгат:

$$\Lambda_{ij}^{k} = -\Lambda_{kj}^{i}. \tag{4}$$

(3) барабардыкты сырттан дифференцирлеп төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Мындан, (2) формуланы колдонсок, төмөндөгү келип чыгат:

$$.\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

(3) формуланын негизинде акыркы барабардык төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell,$$

же

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_j^\ell \wedge \omega^j.$$

(барабардыктын оң жагындагы экинчи мүчөдө жана индекстеринин ордун алмаштырдык). Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0\ ,$$

же

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Акыркы барабардыкка Картандын леммасын [3] колдонуп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m,$$

же

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l\right)\omega^m. \tag{5}$$

Чоңдуктардын $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ системасы экинчи тартиптеги геометриялык объектти түзүшөт.

Берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин формулалары төмөндөгүдөй көрүнүштө болушат:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$

$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$

$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$

$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5,$$

$$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4 \vec{e}_4$$

жана

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^3 = 0, \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0, \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{51}^1 = 0 \tag{6}$$

$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{51}^2 = 0, \Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0, \Lambda_{31}^5 = -\Lambda_{51}^3 = 0. \tag{7}$$

Мындагы $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = -\Lambda_{51}^4$ – ω^1 сызыгынын биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи ийриликтери (тиешелеш түрдө), d_1 – ω^1 сызыгы боюнча дифференцирлөөнүн символу.

Σ_5 торчосунун ω^i сызыгынын жанымасындагы F_i^j $(i \neq j)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (8)$$

Ар бир $(X, \vec{e}_i)$ жанымасында бештен псевдофокус жашайт:

$(X, \vec{e}_1)$ жанымасында – F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5, F_1^6;

$(X, \vec{e}_2)$ жанымасында – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5, F_2^6$;

$(X, \vec{e}_3)$ жанымасында – $F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5, F_3^6$;

$(X, \vec{e}_4)$ жанымасында – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_4^5, F_4^6$;

$(X, \vec{e}_5)$ жанымасында – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4, F_5^6$;

Σ_5 торчосу Френенин циклдик торчосу [4] болсун деп алабыз.

Изилдөөнүн материалдары.

$\overrightarrow{F_1^5} \in (X, \vec{e}_1)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_1^5} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{55}^1}\vec{e}_1. \qquad (9)$$

X чекити $\Omega \subset E_5$ аймагында кыймылга келгенде, F_1^5 чекити өзүнүн $\Omega_1^5 \subset E_5$ аймагын “сызып” чыгат Натыйжада $f_1^5(X) = F_1^5$ боло тургандай $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз.

(9) барабардыктарды дифференцирлеп, деривациялык формулаларды колдонуп, төмөндөгүнү алабыз.

$$\overrightarrow{dF_1^5} = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1\right) = d\,\vec{X} + d\left(\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\,d\vec{e}_1 == \omega^i\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 + \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega^i\vec{e}_i,$$

(3), (5) формулаларды эске алсак, анда

$$\overrightarrow{dF_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{15m}^5\omega^m}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i\omega^m}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

келип чыгат. Мында

$$B_{15m}^5 = \Lambda_{15m}^5 + \Lambda_{1\ell}^5\Lambda_{5m}^\ell + \Lambda_{\ell 5}^5\Lambda_{1m}^\ell$$

Акыркы барабардыкты төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$\overrightarrow{dF_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{15m}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i\omega^m}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

$$же\ d_1\overrightarrow{F_1^5}\left[\vec{e}_1+\frac{B_{151}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^1+\left[\vec{e}_2+\frac{B_{152}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^2$$
$$+\left[\vec{e}_3+\frac{B_{153}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^3+\left[\vec{e}_4+\frac{B_{154}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^4$$
$$+\left[\vec{e}_5+\frac{B_{155}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^5$$

Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизебиз:

$$\overrightarrow{b_1}=\vec{e}_1+\frac{B_{151}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

$$\overrightarrow{b_2}=\vec{e}_2+\frac{B_{152}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

$$\overrightarrow{b_3}=\vec{e}_3+\frac{B_{153}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

$$\overrightarrow{b_4}=\vec{e}_4+\frac{B_{154}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

$$\overrightarrow{b_5}=\vec{e}_5+\frac{B_{155}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

Анда

$d\,\overrightarrow{F_1^5}=\omega^1\,\overrightarrow{b_1}+\omega^2\,\overrightarrow{b_2}+\omega^3\,\overrightarrow{b_3}+\omega^4\,\overrightarrow{b_4}+\omega^5\,\overrightarrow{b_5}$ барабардыгына ээ болобуз. Берилген Френенин торчосу $\widetilde{\Sigma_5}$ циклдик торчо болгон учурда $\overrightarrow{b_i}$ векторлору төмөндөгүдөй көрүнүштө болушат:

$$\overrightarrow{b_1}=\left[1+\frac{B_{151}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\right]\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_2;$$

$$\overrightarrow{b_2}=\frac{B_{152}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1+\vec{e}_2-\frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_5;$$

$$\overrightarrow{b_3}=\frac{B_{153}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_2+\vec{e}_3-\frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_5;$$

$$\overrightarrow{b_4}=\frac{B_{154}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_2+\vec{e}_4-\frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_5;$$

$$\overrightarrow{b_5}=\frac{B_{155}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_2.$$

Жалпы учурда бул векторлор сызыктуу көз каранды болушпайт. Ω_1^5 аймагында $\mathcal{R}'=\left(F_1^5,\vec{b}_{i,}\right)$ реперин карайбыз.

$\Delta_4=(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5)$, $\Delta'_4=F_1^5(\Delta_4)$ бөлүштүрүүлөрүн карайбыз.

Аныктама. Эгерде $\gamma \subset \Delta_4$ сызыгынын X чекитиндеги жанымасы жана $\bar{\gamma} = f_1^5(\gamma)$ сызыгынын F_1^5 чекитиндеги жанымасы бир эле төрт ченемдүү мейкиндикте ($\vec{e}_2,\vec{e}_3,\ \vec{e}_4\ \vec{e}_5,$ векторлоруна керилген) жатышса, анда γ жана $\bar{\gamma}$ сызыктары f_1^5 бөлүктөп чагылтуусунда (Δ_4, Δ'_4) түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары деп аталышат. [4]

$\gamma \subset \Delta_4$ сызыгынын жаныма вектору $\bar{\gamma} = \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^4\vec{e}_4 + \gamma^5\vec{e}_5$ көрүнүшүндө болот. $\bar{\gamma}$ сызыгынын F_1^5 чекитиндеги жаныма вектору төмөндөгүдөй аныкталат:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2\vec{b}_2 + \gamma^3\vec{b}_3 + \gamma^4\vec{b}_4 + \gamma^5\vec{b}_5.$$

Мындан (10) формулаларды эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\vec{\bar{\gamma}} = (\gamma^2 b_2^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^4 b_4^1 + \gamma^5 b_5^1)\vec{e}_1 + (\gamma^2 + \gamma^3 b_3^2 + \gamma^4 b_4^2 + \gamma^5 b_5^2)\vec{e}_2 +$$

$$+\gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^4\vec{e}_4 + (\gamma^2 b_2^5 + \gamma^3 b_3^5 + \gamma^4 b_4^5)\vec{e}_5, \qquad (11)$$

мында $b_i^j - \vec{b}_i$ векторунун j-чы координаталары.

$\vec{\gamma},\ \vec{\bar{\gamma}} \epsilon (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ шарттарынан

$$\gamma^2 b_2^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^4 b_4^1 + \gamma^5 b_5^1 = 0$$

келип чыгат. Мындан (10) формуланы колдонуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\gamma^2 B_{152}^5 + \gamma^3 B_{153}^5 + \gamma^4 B_{154}^5 + \gamma^5 B_{155}^5 = 0. \qquad (12)$$

Тескерисинче, (12) шарт орун алса, анда $\gamma, \bar{\gamma}$ сызыктары (Δ_4, Δ'_4) түгөй бөлүштүрүүлөрдүн f_1^5 бөлүктөп чагылтуусундагы квазикошмок сызытары болушат.

Төмөндөгүдөй теорема далилденди.

Теорема. $\gamma \subset \Delta_5$ жана $\bar{\gamma} = f_1^5(\gamma)$ сызыктары f_1^6 бөлүктөп чагылтуусунда (Δ_4, Δ'_4) түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары болушу үчүн (12) шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү.

Адабияттар

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ // Москва: Наука, 1967. – С. 481-482.
2. Матиева Г., Абуллаева Ч.Х., Нышанбаева Н.Т. Е5 евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [текст] // Илим. Билим. Техника. – Ош, 2022. – № 3 (75). – С. 32-39.
3. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С. П. Фиников. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 432 с.
4. Матиева Г., Папиева Т.М., Курбанбаева Н.Н. Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной сетью Френе / Монография. – Ош: «Билим»ОшГУ, 2022. – 130 с.

УДК 519.622
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_18

ЖЫЛУУЛУК ПРОЦЕССТЕРИН ОПТИМАЛДАШТЫРУУДАГЫ ОПТИМАЛДУУ ЧЕКТИК БАШКАРУУНУ СИНТЕЗДӨӨ

Момбекова Гулназ Береновна, улук окутуучу
gmombekova78@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада интегралдык-дифференциалдык теңдемелер менен сүрөттөлгөн жылуулук процесстерин оптималдаштыруудагы чек аралык оптималдуу башкаруунун синтез маселесинин чечилимге ээ болушу жөнүндөгү суроолор изилденген. Чек аралык таасир берүүчү функциясы башкаруу функциясына салыштырмалуу сызыктуу эмес болгон учур каралган. Синтездөөдө оптималдуу башкарууну тургузуунун алгоритми иштелип чыккан жана Беллман тибиндеги теңдеменин чечиминин түзүлүшү аныкталган.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселе, жалпыланган чечим, функционал, Беллман-Егоровдун схемасы, Беллман тибиндеги интегралдык-дифференциалдык теңдеме, чек аралык башкаруунун синтези.*

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Момбекова Гулназ Береновна, ст. преподаватель
gmombekova78@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза оптимального граничного управления при оптимизации тепловых процессов в случае, когда процесс описывается интегро-дифференциальным уравнением и функция граничного источника нелинейна относительно функции управления. Разработан алгоритм построения синтезирующего оптимального управления и определена структура решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Беллмана.*

Ключевые слова: *Краевая задача, обобщенное решение, функционал, схема Беллмана-Егорова, интегро-дифференциальное уравнение типа Беллмана, синтез граничного управления.*

SYNTHESIS OF OPTIMAL BOUNDARY CONTROL WHEN MINIMIZING OF THERMAL PROCESSES

Mombekova Gulnaz Berenovna, teacher
gmombekova78@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The paper studies the solvability of the optimal boundary control synthesis problem in the optimization of thermal processes described by partial integro-differential equations. The case when the function of the boundary action depends nonlinearly on the control function is considered. An algorithm for constructing a synthesizing optimal control has been developed. The structure of the solution to a nonlinear integro-differential equation of Bellman type is determined.*

Keywords: *Boundary value problem, generalized solution, functional, Bellman-Egorov scheme, Bellman-type integro-differential equation, synthesis of boundary control.*

Киришүү

Синтездөө маселесин чечүү жана бул багытта илимий изилдөөлөрдү жүргүзүү А.И.Егоровдун [1] эмгектери пайда болгондон кийин мүмкүн болду. Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер менен сүрөттөлгөн жылуулук процесстерин оптималдаштыруунун синтездик маселелерин изилдөөгө арналган аз сандагы эмгектер жарык көрдү. Макалада интегралдык-дифференциалдык теңдемелер менен сүрөттөлгөн жылуулук процесстерин оптималдаштыруудагы чек аралык оптималдуу башкаруунун синтез маселесинин чечилимге ээ болушу жөнүндөгү суроолор изилденген. Чек аралык таасир берүүчү функциясы башкаруу функциясына салыштырмалуу сызыктуу эмес болгон учур каралган. Синтездөөдө оптималдуу башкарууну тургузуунун алгоритми иштелип чыккан жана Беллман тибиндеги теңдеменин чечиминин түзүлүшү аныкталган

Синтез маселесинин коюлушу

$$J[u(t)] = \int_0^T\int_0^1 \left[V(t,x) - \xi(t,x)\right]^2 dxdt + \beta\int_0^T p\left[t,u(t)\right]dt,\ \beta > 0 \tag{1}$$

функционалынын

$$\begin{aligned} &V_t = V_{xx} + \gamma\int_0^T K(t,\tau)V(t,x)d\tau, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T \\ &V(0,x) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1 \\ &V_x(t,0) = f[t,u(t)],\ V_x(t,1) = 0,\ 0 < t < T \end{aligned} \tag{2}$$

чектик маселесинин жалпыланган чечимдеринин көптүгүндөгү минималдаштыруу маселесин карайлы, мында

$$\begin{aligned} &\xi(t,x) \in H(Q), Q = (0,1)\times(0,T),\ \psi(x) \in H(0,1), \\ &P[t,u(t)] \in H(0,T),\ f[t,u(t)] \in H(0,T), K(t,\tau) \in H(D), D = (0,T)\times(0,T) \end{aligned}$$

- квадраттык суммалануучу функциялардын H Гильберттик мейкиндиктеринин тиешелеш келген элементтери болушкан берилген функциялар,

$u(t)] \in H(0,T)$ - башкаруу функциясы, мында $f[t,u(t)]$ чек ара булагы функциясы $u(t)$ функционалдык өзгөрүлмөсү боюнча монотондуулук шартын канаттандырат, б.а.

$$f[t,u(t)] \neq 0, \forall t \in (0,T) \tag{3}$$

Синтез маселесинде $V(t,x)$ башкарылуучу процессинин абалына жараша

$$u^0(t) = \varphi[t,V(t,x)] \tag{4}$$

функциясы (же функционалы) түрүндөгү керектүү башкарууну табуу талап кылынат.

(2) - чектик маселесинин жалпыланган чечими катары $V_x(t,x) \in H(Q)$ жалпыланган туундусуна ээ болгон жана

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(V(t,x)\Phi(t,x)\right)_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[V(t,x)\Phi_t(t,x) - V_x(t,x)\Phi_x(t,x)\right]dxdt + \\ &+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left(\gamma\int_0^t K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)\Phi(t,x)dxdt - \int_{t_1}^{t_2}\Phi(t,0)f[t,u(t)]dt \end{aligned} \tag{5}$$

интегралдык теңдештигин канааттандырган $V(t,x) \in H(Q)$ функциясын түшүнөбүз. Мында, (5)-шарт каалагандай $t \in [t_1, t_2]$ жана каалагандай $\Phi(t,x) \in H_1(Q)$ функциясы үчүн, ошондой эле алсыз маанидеги баштапкы шарт аткарылат, б.а.

$$\lim_{t\to 0}\int_0^1 [V(t,x)-\Phi(x)]\Phi_0(x)dx = 0 \quad \forall\,\Phi_0(x)\in H(0,1)\,. \tag{6}$$

(2) - чектик маселесинин жалпыланган чечимин

$$V(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t)z_n(x),\;\; V_n(t)=\int_0^1 V(t,x)z_n(x)dx, \tag{7}$$

Фурье катары түрүндө тургузабыз. Мында $z_n(x)$ - бул

$$z_n''(x)+\lambda_n^2 z_n(x),\; z_n'(0)=0, z_n'(1)=0 \tag{8}$$

чектик маселесинин чечими жана төмөнкү көрүнүштө:

$$z_n(x)=\begin{cases}1, n=0\\ \sqrt{2}\cos\lambda_n x, n\neq 1,2,3,..., \lambda_n = n\pi\end{cases} \tag{9}$$

Ал эми $v_n(t)$ Фурье коэффициенттери 2-түрдөгү Фредгольм теңдемесинин чечимдери катары аныкталат:

$$V_n(t)=\gamma\int_0^T K_n(t,s)V_n(s)ds + a_n(t) \tag{10}$$

Мында

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau\,, \tag{11}$$

ядро, ал эми

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}-\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}z_n(0)f(\tau,u(\tau))d\tau \tag{12}$$

бош мүчө.

(4)-формулага ылайык Фурье коэффициенттери

$$V_n(t)=\gamma\int_0^T R_n(t,s,\gamma)a_n(s)ds + a_n(t), \tag{13}$$

формула боюнча аныкталышат. Бул жерде

$$R_n(t,s,\gamma)=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma^{i-1}K_{n,i}(t,s), \tag{14}$$

резольвентасы жана

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^t K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta,\; K_{n,1}(t,s)\equiv K_n(t,s)$$

интеграцияланган ядролору белгилүү функциялар болушат.

Төмөнкү баалоолор далилденди:

$$\left|K_{n,i}(t,s)\right|^2 \le \frac{\left(K_0T\right)^{i-1}}{\left(2\lambda_n^2\right)^i}\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau,\ n=0,1,2,...$$

$$\left|R_n(t,s,\gamma)\right| \le \left(\frac{\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau}{\sqrt{2\lambda_n^2}-|\gamma|\sqrt{K_0T}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^T R_n^2(t,s,\gamma)ds \le \frac{\int_0^0\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau ds}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\gamma|\sqrt{K_0T}\right)^2} = \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\gamma|\sqrt{K_0T}\right)^2},$$

Анын негизинде (14) Нейман функциясы

$$|\gamma|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}<1,\ \left(|\gamma|<\frac{\sqrt{2\lambda_n^2}}{\sqrt{K_0T}}\xrightarrow{n\to\infty}\infty\right) \quad (15)$$

шартында үзгүлтүксүз функцияга жыйналат.

Андан ары (7), (13) формулалар менен аныкталган $V(t,x)$ функциясы квадраттык суммалануучу функция экендиги, б.а. $V(t,x)\in H(Q)$ далилденди.

Синтез маселесинин чечилиши

Синтез маселесинин чечилишин Беллман-Егоров схемасына ылайык изилдейбиз. Беллман функционалын

$$S[t,V(t,x)] = \min_{\substack{u\in P\\ t\le\tau\le T}}\left\{\beta\int_t^T P^2[\tau,u(\tau)]d\tau + \int_0^T\int_0^1\left[V(\tau,x)-\xi(t,x)\right]^2 dxdt\right\} \quad (16)$$

көрүнүшүндө аныктайбыз.

Беллман тибиндеги теңдеменин алынышы

$$S[t,V(t,x)] = \min_{\substack{u\in P\\ t\le\tau\le t+\Delta t}}\left\{\beta\int_t^{t+\Delta t} P[\tau,u(\tau)]d\tau + \min_{\substack{u\in P\\ t+\Delta t\le\tau\le t}}\left[\beta\int_{t+\Delta t}^T P[\tau,u(\tau)]d\tau + \int_0^T\int_0^1\left[V(t,x)-\xi(t,x)\right]^2 dxdt\right]\right\} =$$
$$= \min_{\substack{u\in P\\ t\le\tau\le t+\Delta t}}\left\{\beta\int_t^{t+\Delta t} P[\tau,u(\tau)]d\tau + S[t+\Delta t, V(t+\Delta t,x)]\right\} \quad (17)$$

Андан ары $S[t+\Delta t, V(t+\Delta t,x)]$ ти карайбыз жана $S[t,V(t,x)]$ функциясын t боюнча дифференцирленүүчү функция, ал эми $V(t,x)$ боюнча Фреше эрежесинин негизинде дифференцирленүүчү деп болжолдойбуз.

$V(t+\Delta t,x)=V(t,x)+\Delta V(t,x)$ экендигин эске алып,

$$\begin{aligned} &S[t+\Delta t, V(t+\Delta t,x)] = S[t+\Delta t, V(t,x)+\Delta V(t,x)] = \\ &= S[t,V(t,x)] + \frac{\partial S[t,V]}{\partial t}\Delta t + dS[t,V(t,x);\Delta V(t,x)] + \\ &+ o(\Delta t) + \tau[t,V(t,x);\Delta V] \end{aligned} \quad (18)$$

барабардык алынат. Мында $o(\Delta t)$ жана $\tau[t,V(t,x);\Delta V]$ – чексиз кичине чоңдуктар, ал эми $dS[t,V(t,x);\Delta V(t,x)]$- Фреше дифференциалы жана $\Delta V(t,x)$ өсүндүсүнө салыштырмалуу сызыктуу функционал болот. Фреше дифференциалы үчүн

$$dS[t,V(t,x);\Delta V(t,x)]=\int_0^1 m(t,x)\Delta V(t,x)dx \tag{19}$$

катышы (Рисстин теоремасы) орун алат, мында $m(t,x)$ - Беллман функционалынын градиенти.

$$\int_0^1 m(t,x)\Delta V(t,x)dx=\int_0^1\left(m(t,x)\Delta V(t,x)\right)_t^{t+\Delta t}dx-\int_0^1 V(t+\Delta t,x)\Delta m(t,x)dx$$

экендигин жана (18)-көрүнүштү эске алып, (17)-катышты төмөнкүчө жазууга болот:

$$\begin{gathered}-\frac{\partial S[t,V(t,x)]}{\partial t}\Delta t+\min_{\substack{u\in P\\ t\le\tau\le t+\Delta t}}\left\{\beta\int_t^{t+\Delta t}p[\tau,u(\tau)]d\tau+\int_0^1\left(m(t,x)V(t,x)\right)_t^{t+\Delta t}dx-\right.\\ \left.-\int_0^1 V(t+\Delta t,x)\Delta m(t,x)dx+o(\Delta x)+r[t,V(t,x);\Delta V(t,x)]\right\}\end{gathered} \tag{20}$$

Эми (5) интегралдык катышын колдонобуз. $\Phi(t,x)\equiv m(t,x)$ деп алып төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{gathered}\int_0^1\left(V(t,x)m(t,x)\right)_t^{t+\Delta t}dx=\int_t^{t+\Delta t}\int_0^1\left\{m_t(t,x)V(t,x)-m_x(t,x)V_x(t,x)+\right.\\ \left.+\left(\gamma\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)m(t,x)\right\}dxdt-\int_t^{t+\Delta t}m(t,0)f[\tau,u(\tau)]d\tau\end{gathered}.$$

Бул барабардыкты (20)-формулага коюп жана Δt га бөлөбүз:

$$\begin{gathered}-\frac{\partial S[t,V(t,x)]}{\partial t}=\min_{\substack{u\in P\\ t\le\tau\le t+\Delta t}}\left\{\beta p[t,u(t)]+\frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t}+\int_0^1\left\{m_x(t,x)V(t,x)-\right.\right.\\ \left.-m_x(t,x)V(t,x)+\left(\mu\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)m(t,x)]\right\}dx-\\ -m(t,0)f[t,u(t)]+\frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t}-\int_0^1 V(t+\Delta t,x)\frac{\Delta m(t,x)}{\Delta t}dx+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}+\\ \left.+\frac{1}{\Delta t}r[t,V(t,x);\Delta V(t,x)]\right\}\end{gathered}$$

Андан ары $\Delta t\to 0$ пределге өтөбүз

жана $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta t}\to 0,\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}r[t,V(t,x);\Delta V(t,x)]=0$

экендигин эске алып,

$$\begin{gathered}-\frac{\partial S[t,V(t,x)]}{\partial t}=\min_{u\in P}\left\{\beta p[t,u(t)]-m(t,0)f[t,u(t)]+\int_0^1\left\{-m_x(t,x)V_x(t,x)+\right.\right.\\ \left.\left.+\left(\gamma\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)m(t,x)]dx\right\}\right.\end{gathered} \tag{21}$$

көрүнүшүндөгү бардык $t\in[0,T]$ өзгөрүлмөсү боюнча ар дайым аткарылган Беллман тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемени алабыз.

Бул теңдемени (16) формуланын негизинде Беллман функционалынын негизинде алынган

$$S[t,V(t,x)] = \int_0^T \int_0^1 \left[V(t,x) - \xi(t,x)\right]^2 dx \qquad (22),$$

шарт менен бирге кароо керек.

(21)-(22) маселелер Коши-Беллман маселеси деп аталат. Ал эки этапта чыгарылат. Биринчи этапта min маселесин чыгарабыз. Мүмкүн болгон чечимдердин көптүгү ачык көптүк болгондуктан, функцияны минималдаштыруу маселеси

$$\Pi(\cdot,u) = \beta P[t,u(t)] - m(t,0) f[t,u(t)] \to \min$$

классикалык усулдар менен чыгарылат. Биринчи тартиптеги оптималдуулук шарты

$$\Pi_u(\cdot,u) = \beta P_u(t,u(t)) - m(t,0) f_u(t,u(t)) = 0 \qquad (23)$$

көрүнүшүндө, ал эми экинчи тартиптеги оптималдуулук шарты

$$\Pi_{uu}(\cdot,u) = \beta P_{uu}(t,u(t)) - m(t,0) f_{uu}(t,u(t)) > 0$$

көрүнүшүндөгү дифференциалдык барабарсыздык түрүндө болот.

Оптималдуулуктун экинчи шартын

$$\Pi_{uu}(\cdot,u) = \beta f_u(t,u(t)) \left(\frac{P_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))} \right)_u > 0 \qquad (24)$$

көрүнүшүндө жазсак болот.

Эгерде (23)-шартты

$$\beta \frac{P_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))} = m(t,0), \qquad (25)$$

түрүнө өзгөртсөк, анда (24)-шарттын негизинде бул барабардык $u(t)$ га салыштырмалуу бир маанилүү чечилет, б.а. бир маанилүү $\varphi(\cdot)$ функциясы табылып,

$$u^0(t) = \varphi[t,\beta,m(t,0)] = \varphi\left(t,\beta, gradS[t,V(t,x)]\right) \qquad (26)$$

орун алат.

(26)-формуланын негизинде $u(t)$ чектик башкаруунун синтези ишке ашат.

Экинчи этапта $u^0(t)$ ны (21)-теңдемеге коебуз жана min белгиси жок теңдемени алабыз, б.а.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S[t,V]}{\partial t} &= \beta p[t,u^0(t)] - m(t,0) f[t,u^0(t)] + \int_0^1 [-m_x(t,x)V_x(t,x) + \\ &+ (\gamma \int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau) m(t,x)]dx \end{aligned} \qquad (27)$$

мында $u^0(t)$ (26)-көрүнүшүндө болот.

Мындан ары бул теңдемени (22)-шарт менен бирге чыгаруу керек. Теңдемедеги Фредгольм интегралдык операторунун бар болушу анын чечимин тургузуу процедурасына таасир этет. Бирок, эгерде чечимдин түзүлүшүн

$$S[t,V(t,x)] = S_0[t,V(t,x)] + \gamma S_1[t,V(t,x)] \qquad (28)$$

көрүнүшүндө аныктасак, анда маселе бир аз жөнөкөйлөнөт, мында $S_0[t,V(t,x)]$ жана $S_1[t,V(t,x)]$ аныкталышы керек болгон функциялар. (28)-ни (27)-ге коебуз.

Анда

$$-\frac{\partial S_0[t,V]}{\partial t}-\gamma\frac{\partial S_1[t,V]}{\partial t}=\beta p[t,u^0(t)]-m(t,0)f[t,u^0(t)]+$$
$$+\int_0^1[-m_x(t,x)V_x(t,x)+(\gamma\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau)m(t,x)]dx$$

теңдемеси $\{1,\gamma\}$ системасынын элементтеринин сызыктуу көз каранды эместигинин негизинде төмөнкү көрүнүштөгү эки теңдемеге ажырайт:

$$-\frac{\partial S_0[t,V(t,x)]}{\partial t}=\beta p[t,u^0(t)]-m(t,0)f[t,u^0(t)]+\int_0^1[-m_x(t,x)V_x(t,x)]dx, \qquad (29)$$

жана

$$-\frac{\partial S_1[t,V(t,x)]}{\partial t}=\int_0^1\left(\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)m(t,x)dx, \qquad (30)$$

Бул теңдемелерди (22) жана (28) негизинде

$$S_0[T,V(t,x)]=\int_0^1[V(T,x)-\xi(T,x)]^2dx, \qquad (31)$$

жана

$$S_1[T,V(t,x)]=0 \qquad (32)$$

шарттары менен бирге кароо керек.

Ошентип, (28) дин түзүлүшүнө ылайык, интегро-дифференциалдык теңдеменин чечимин тургузуу маселеси эки маселеге ажырайт жана алардын бири экинчисинен көз карандысыз чечилет. Бул шарт болсо башкарылуучу процесс жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме менен сүрөттөлгөн учурда чек аралык оптималдуу башкаруунун синтез маселесинин чечимин тургузуу процедурасын бир кыйла жөнөкөйлөтөт.

Литература

1. Egorov A.I. Optimal stabilization of systems with distributed parameters // Optimization Techniques IFIP Technical Conference (1974) / ed. G.I. Marchuk. Novosibirsk, 1974. Berlin; Heidelberg: Springer, 1975. P. 167–172 . (Lecture Notes in Computer Science; vol 27). doi: 10.1007/3-540-07165-2_22 .
2. Керимбеков А. О разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при оптимизации колебательных процессов //Труды института математики и механики. Уральское Отделение Российской Академии Наук 2021 С-128-140
3. Керимбеков А. Синтез распределенного оптимального управления в задаче слежения при оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями //Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 183 (2020). DOL:10/36535/0233-6723-2020-283-85-97. С. 85-97
4. Kerimbekov A., Abdyldaeva E. On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal - 2016, Vol. 10, No. I, P. 215-223.

УДК: 517.928

DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_19

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ.

Мусакулова Назгул Куралбековна, преподаватель
kuralbekovna79@inbox.ru
ЖАГУ им. Б. Осмонова
Джалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *В данной работе проведен структурный анализ решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях. Необходимость такого подхода объясняется тем, что асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений в разных частях рассматриваемых комплексных областях разное. Данная работа посвящается решению этой задачи для систем СВУ состоящих из двух уравнений первого порядка. Решение задачи состоит из двух частей. В первой части проведены некоторые геометрические построения, которые служат базой для дальнейших исследований. Во второй его части, согласно геометрических построений, проведено исследование асимптотического поведения решений поставленной задачи.*

Для структурного анализа решение рассматриваемой задачи расщепляется на три составляющие. Одна из них решение невозмущенного уравнения, а вторая характеризует погранслойные линии и области, а третья область притяжения.

Ключевые слова: *сингулярно возмущенные уравнения, аналитические и гармонические функции, расщепление решений, погранслойные линии и области, линии уровня, асимптотическое поведение решений.*

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН КОМПЛЕКСТИК АЙМАКТАРДАГЫ СТРУКТУРАЛЫК АНАЛИЗИ.

Мусакулова Назгул Куралбековна, окутуучу
kuralbekovna79@inbox.ru
Б. Осмонов атындагы ЖАМУ
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *Бул макалада комплекстик областтардагы сингулярдуу козголгон теңдемелердин чечимдеринин структуралык анализи жүргүзүлөт. Мындай зарылдыг каралып жаткан комплекстүү областтардын ар кайсы бөлүктөрүндө сингулярдуу козголгон теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык жүрүм-туруму ар түрдүү экендиги менен түшүндүрүлөт. Бул эмгек эки биринчи даражадагы теңдемелерден турган СКТ (сингулярдуу козголгон теңдемелердин) системалары үчүн бул маселени чечүүгө арналган. Маселени чечүү эки бөлүктөн турат. Биринчи бөлүгүндө кийинки изилдөөлөр үчүн негиз болуп кызмат кыла турган кээ бир геометриялык түзүүлөр жүргүзүлдү. Анын экинчи бөлүгүндө геометриялык түзүүлөр боюнча маселенин чечимдеринин асимптотикалык жүрүм-турумун изилдөө жүргүзүлгөн.*

Структуралык талдоо үчүн каралып жаткан маселени чечүү үч компонентке бөлүнөт. Алардын бири козголбогон теңдеменин чечими, экинчиси чек ара катмарынын сызыктарын жана аймактарын мүнөздөйт, үчүнчүсү тартылуу аймагын аныктайт.

Ачкыч сөздөр: *сингулярдуу козголгон теңдемелер, аналитикалык жана гармоникалык функциялар, чечимдердин ажыралышы, чек ара катмар сызыктары жана аймактары, деңгээл сызыктары, чечимдердин асимптотикалык жүрүм-туруму.*

STRUCTURAL ANALYSIS OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS IN COMPLEX DOMAINS.

Musakulova Nazgul Kuralbekovna, teacher
kuralbekovna79@inbox.ru
JAGU named after B. Osmonov
Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Abstract. *This paper presents a structural analysis of solutions to singularly perturbed equations in complex domains. The need for such an approach is explained by the fact that the asymptotic behavior of solutions to singularly perturbed equations in different parts of the considered complex domains is different. This paper is devoted to solving this problem for SPE systems consisting of two first-order equations. The solution to the problem consists of two parts. The first part presents some geometric constructions that serve as a basis for further research. The second part, according to the geometric constructions, presents a study of the asymptotic behavior of solutions to the problem.*

For structural analysis, the solution to the problem under consideration is split into three components. One of them is the solution to the unperturbed equation, the second characterizes the boundary layer lines and domains, and the third is the attraction domain.

Key words: *singularly perturbed equations, analytic and harmonic functions, splitting of solutions, boundary layer lines and domains, level lines, asymptotic behavior of solutions.*

Введение

Исследованию асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уранений (СВУ) в комплексных областях, посвящены работы [1,2,3,4,6]. Таким образом возник вопрос: можно ли провести структурный анализ решения разделением решений на несколько составляющих? Для полной картины асимптотического поведения решений были введены понятия: погранслойная линия, погранслойные регулярные и сингулярные области. При этом исследования проведены без структорного анализа решений. В [5] для линейных СВУ первого порядка проведено расщепление решения при иррегулярном вырождении т.е. решение невозмущенного уравнения имеет особенность в одной точке.

Объект исследования и постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon z' = \big(\Lambda(t) + \varepsilon A(t)\big)z(t,\varepsilon) + b(t), \qquad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0 \qquad (2)$$

где $0< \varepsilon -$ малый вещественный параметр; $t \in D \subset C -$ множество комплексных чисел, а $D -$ ограниченная область,

$$z(t,\varepsilon) = colon\big(z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon)\big), \Lambda(t) = diag\big(\lambda_1(t), \lambda_2(t)\big),$$
$$A(t) = \big(a_{mk}(t)\big)\ (m,k = 1,2), b(t) = colon\ \big(b_1(t), b_2(t)\big).$$

Поставим задачу о расщеплении решения задачи (1)-(2) на несколько составляющих. Задачу решим при следующих предположениях:

П1. $\lambda_j(t), a_{mk}(t), b_j(t) \in D$ – простанство аналитических функций в $D, j = 1,2\ , m,k = 1,2.$

П2. $\forall t \in D\ \big(\lambda_j(t) \neq 0\big).$

В (1) пологая $\varepsilon = 0$ получим невозмущенное уравнение

$$\Lambda(t)\xi(t) + b(t) = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет решение

$$\xi(t) = -\Lambda^{-1}(t)b(t), \qquad (4)$$

где $\Lambda^{-1}(t) = diag\big(1/\lambda_1(t), 1/\lambda_2(t)\big).$

Согласно П2 $\xi(t) \in Q(D).$

В (1) произведем замену

$$z(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon) + \xi(t), \tag{5}$$

где $u(t,\varepsilon)$ – новая неизвестная функция. (5) подставляя в (1) получим

$$\varepsilon u'(t,\varepsilon) + \varepsilon\xi'(t) = \big(\Lambda(t) + \varepsilon A(t)\big)\big(u(t,\varepsilon) + \xi(t) + b(t)\big)$$

или

$$\varepsilon u'(t,\varepsilon) = \big(\Lambda(t) + \varepsilon A(t)\big)\, u(t,\varepsilon) + \varepsilon A(t)\xi(t). \tag{6}$$

Введем обозначение

$$A(t)\xi(t) \equiv \varphi(t).$$

Тогда (6) можем переписать в виде (далее аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$\varepsilon u' = \big(\Lambda(t) + \varepsilon A(t)\big)u + \varepsilon\varphi(t), \tag{7}$$

с начальным условием

$$u(t_0,\varepsilon) = u^0 \equiv z^0 - \xi(t_0). \tag{8}$$

Таким образом поставленная задача сводится к расщеплению решения задачи (7) - (8). В (7) произведем замену

$$u = x(t,\varepsilon) + \Pi(t,\varepsilon), \tag{9}$$

где $x(t,\varepsilon), \Pi(t,\varepsilon)$ – новые неизвестные функции.

(9) подставляя в (7) получим

$$\varepsilon\Pi_1' = (\lambda_1(t) + \varepsilon a_{11}(t))\Pi_1, \qquad \Pi_1(t_0,\varepsilon) = u_1^0, \tag{10}$$

$$\varepsilon\Pi_2' = (\lambda_2(t) + \varepsilon a_{22}(t))\Pi_2 \qquad \Pi_2(t_0,\varepsilon) = u_2^0, \tag{11}$$

$$\varepsilon x_1' = (\lambda_1(t) + \varepsilon a_{11})x_1 + \varepsilon a_{12}(t)x_2 + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon a_{12}(t)\Pi_2,$$

$$x_1(t_0,\varepsilon) = 0, \tag{12}$$

$$\varepsilon x_2' = (\lambda_2(t) + \varepsilon a_{22})x_2 + \varepsilon a_{21}(t)x_1 + \varepsilon\varphi_2(t) + \varepsilon a_{21}(t)\Pi_1,$$

$$x_2(t_0,\varepsilon) = 0, \tag{13}$$

Если учесть (5), (9), решение $\xi(t) \in Q(D)$ т.е. не имеет особенностей в области D. Таким образом для представления полной картины асимптотического поведения решения $z(t,\varepsilon)$остаётся исследовать задачи (10) – (11) и (12) - (13).

Решение задачи

Решение задачи разделим на две части. В первой части проведём некоторые геометрические построения в области D, а во второй его части, согласно геометрических построений, проведём исследование асимптотического поведения решений задач (10) – (11) и (12) - (13).

Задачи (10) – (11) и (12) - (13) заменим следующими:

$$\Pi_1 = u_1^0 exp\frac{F_1(t)}{\varepsilon}, \tag{14}$$

$$\Pi_2 = u_2^0 exp\frac{F_2(t)}{\varepsilon}, \tag{15}$$

$$x_1 = \int_{t_0}^{t} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{16}$$

$$x_2 = \int_{t_0}^{t} [a_{21}(\tau)x_1 + \varphi_2(\tau) + a_{21}(\tau)\Pi_1] exp\frac{F_2(t) - F_2(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{17}$$

где $F_j(t) = \int_{t_0}^{t}\big(\lambda_j(\tau) + \varepsilon a_{jj}(\tau)\big)d\tau, \qquad j = 1{,}2.$

1. Геометрические построения

На асимптотическое поведение решений уравнений (14), (15), (16), (17) существенное влияние оказывают функции

$$F_{j0}(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau)d\tau, \qquad j = 1,2.$$

Для геометрических построений используем линии уровня функций

$ReF_{j0}(t), \qquad ImF_{j0}(t).$

Определение. Множества

$$(p^j) = \{t \in D, ReF_{j0}(t) = p^j - const\},$$

$$(q^j) = \{t \in D, ImF_{j0}(t) = q^j - const\}$$

назовём линиями уровней функций $ReF_{j0}(t), ImF_{j0}(t)$.

Введем в рассмотрение линии уровня

$$(p_0^j) = \{t \in D, ReF_{j0}(t) = 0\}.$$

Линии (p_0^j), согласно определения функций $F_{j0}(t)$, проходят через точку t_0. Относительно (p_0^j) сделаем следующее предположение:

П3. $\forall t \in D$ линии (p_0^j) не имеют общих точек, кроме t_0.

Возьмём линию (p_0^1). Согласно П2 линия уровня (p_0^1) не имеет точек ветвления и область D разделяется на части D_1^1 и D_1^2 линией (p_0^1). Анологично (p_0^2) разделяет область D на частти D_2^1 и D_2^2 (рис. 1).

Если рассмотреть (p_0^1) и (p_0^2) совместно, то область D разделяется на четыре части (рис. 1).

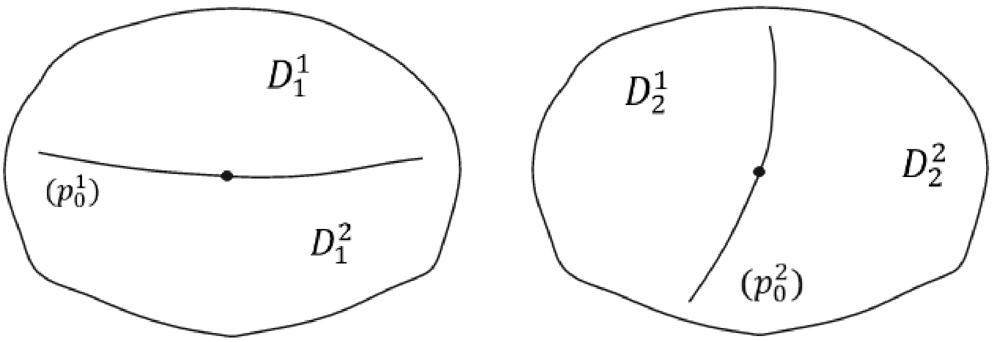


Рис. 1. Деление области D линиями (p_0^1), (p_0^2).

Лемма1. Пусть выполняются П1, П2, П3. Тогда существует область $D_0 \subset D$ и выполняется соотношение

$\forall t \in D_0 \ (ReF_{j0}(t) \leq 0),$

причем равенство имеет место только на границе области D_0.

Доказательство. Если выполняется П1, П2, то область D линиями (p_0^j) разделяется на части D_j^k $(k, j = 1,2)$. На линии (p_0^j) возьмём произвольную точку $\tilde{t}_0$ и проведём линию

$(q^j) = \{t \in D, ImF_{j0}(t) = q^j - const\}.$

Функцию $ReF_{j0}(t)$ рассмотрим вдоль (q^j). Известно [6,7] вдоль (q^j) функция $ReF_{j0}(t)$ строго монотонна. Если учесть $ReF_{j0}(t)$=0, то справедливы, одно из следующих соотношений:

$$\begin{gathered}\forall t \in D_1^1\ (ReF_{10}(t) \leq 0 \vee ReF_{10}(t) \geq 0,\\ \forall t \in D_1^2\ (ReF_{10}(t) \geq 0 \vee ReF_{10}(t) \leq 0;\\ \forall t \in D_2^1\ (ReF_{20}(t) \leq 0 \vee ReF_{20}(t) \geq 0,\\ \forall t \in D_2^2\ (ReF_{20}(t) \geq 0 \vee ReF_{20}(t) \leq 0.\end{gathered} \qquad (18)$$

Соотношения (18) взаимно-равнозначны. Пусть выполняются соотношения

$$\forall t \in D_1^1\ (ReF_{10}(t) \leq 0), \forall t \in D_1^2\ (ReF_{10}(t) \geq 0); \qquad (19)$$

$$\forall t \in D_2^1\ (ReF_{20}(t) \leq 0), \forall t \in D_2^2\ (ReF_{20}(t) \geq 0) \text{ (рис.2).}$$

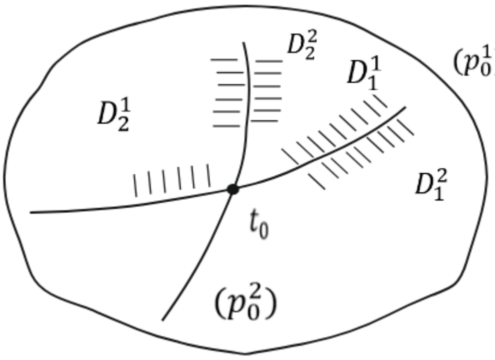


Рис. 2. Области $D_j^k\ (k, j = 1,2)$.

Из соотношений (19) следует

$$D_1^1 \cap D_2^1 = D_0 \quad \text{и}$$

$$\forall t \in D_0 \quad ReF_{j0}(t) \leq 0,\ j=1,2),$$

причем равенства имеют место на границах (p_0^1) и (p_0^2), ограничивающие D_0 (рис.3).

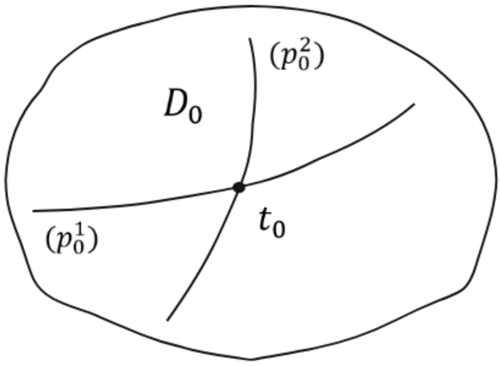


Рис. 3. Область D_0.

Лемма доказана.

Определим линии уровня

$(p_0^{j-\varepsilon}) = \{t \in D_0, ReF_{j0}(t) = \varepsilon ln\varepsilon\}\ (j = 1,2)$.

Часть области D_0 ограниченные $(p_0^j), (p_0^{j-\varepsilon})\ (j = 1,2)$ обозначим $D_{0\varepsilon}$, а $D_0 \setminus D_{0\varepsilon} = D_{01}$, причем будем считать части $(p_0^{1-\varepsilon}) \cup (p_0^{2-\varepsilon}) \in D_{01}$ (рис.4).

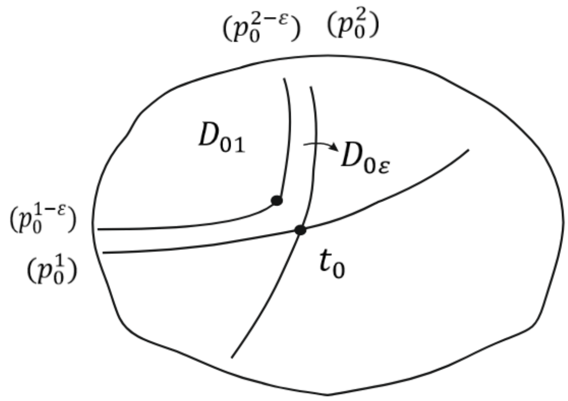


Рис. 4. Области $D_{01}, D_{0\varepsilon}$.

Определим множества линии уровней

$\{(q^j)\}$ $(j = 1,2)$

Сделаем следующее предположение:

П4. Произвольная линия из множества $\{(q^1)\}$, часть (p_0^2) (границу D_0), пересекает только в одной точке и произвольная линия из множества $\{(q^2)\}$, часть (p_0^1) (граница D_0), пересекает только в одной точке (рис. 5).

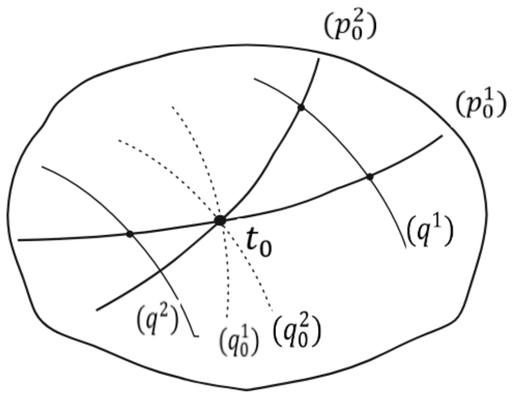


Рис. 5. Линии $(q^1), (q^2)$.

П5. По части (p_0^2)(граница D_0) функция $ReF_{10}(t)$ убывает, по части (p_0^1) (граница D_0) функция $ReF_{20}(t)$ убывает.

Примечание. Предположения П4, П5 носят локальный характер и сформулированы для простоты дальнейших вычислений.

В каждом конкретном случае эти предположения можно заменить другими.

Справедлива

Лемма 2. По выбранным путям функции $ReF_{j0}(t)$ не возрастают.

Доказательство. По (p_0^j) согласно П5 функции $ReF_{j0}(t)$ постоянны или убывают, а по (q^j) убывают. Лемма доказана.

2. Аналитическая часть.

Функции (14) – (15) и уравнения (16) – (17) будем рассматривать в области D_0.

Рассмотрим функции (14) – (15).

Если $t \in D_{0\varepsilon}$, то $(\Pi = colon(\Pi_1, \Pi_2))$

$\|\Pi\| \leq M_1 max\ exp\frac{ReF_{j0}(t)}{\varepsilon} \leq M_1$.

Если $t \in D_{01}$, то

$\|\Pi\| \leq M_1\varepsilon^n, n \in N$.

Объединяя полученные оценки имеем

$$\|\Pi\| \le M_1 \begin{cases} 1, \ t \in D_{0\varepsilon}; \\ \varepsilon^n, t \in D_{01} \end{cases} \tag{20}$$

Таким образом функция $\Pi(t,\varepsilon)$ существенна только в области $D_{0\varepsilon}$ и как только t пересекает границу области D_{01}, функция $\Pi(t,\varepsilon)$ становится достаточно малой по ε.

Теперь рассмотрим функции (16) – (17).

Сначала определим пути интегрирования.

Пути интегрирования выберем, согласно предположений П3, П4, П5, для каждой компоненты $x_j(t,\varepsilon)(j = 1,2)$.

Для: $x_1(t,\varepsilon)$ путь состоит из части: $(p_0^1)[t_0,\tilde{t}]$ или $(p_0^2)[t_0,\tilde{t}]$ и $(q^1)[\tilde{t},t]$; $x_2(t,\varepsilon)$ путь состоит из части $(p_0^2)[t_0,\tilde{t}]$ или $(p_0^1)[t_0,\tilde{t}]$ и $(q^1)[\tilde{t},t]$.

К (16), (17) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом:

$$x_{1m} = \int_{t_0}^{t} [\varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2 + a_{12}(\tau)x_{2m-1}] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{21}$$

$$x_{10} \equiv 0, m = 1,2,\dots,$$

$$x_{2m} = \int_{t_0}^{t} [\varphi_2(\tau) + a_{21}(\tau)\Pi_1 + a_{21}(\tau)x_{1m-1}] exp\frac{F_2(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau,$$

$$x_{20} \equiv 0, m = 1,2,\dots .$$

Оценим и докажем равномерную сходимость последовательных приближений. Случай $t \in (p_0^1) \cup (p_0^2)$ рассмотрим отдельно.

Из (21) при $m = 1$ имеем

$$x_{11} = \int_{t_0}^{t} [\varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{22}$$

$$x_{21} = \int_{t_0}^{t} [\varphi_2(\tau) + a_{21}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_2(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

Оценим x_{11} для $t \in (p_0^1)$. Учитывая выбранный путь интегрирования имеем

$$x_{11} = \int_{(p_0^1)} [\varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

Интеграл в правой части разделим на два

$$x_{11} = \int_{(p_0^1)} \varphi_1(\tau) exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau + \int_{(p_0^1)} a_{12}(\tau)\Pi_2 exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \tag{23}$$

Примечание. При оценке последовательных приближений используем параметрические уравнения кривых (p_0^j) $(j = 1,2)$ [7], которые можно записать в виде $t_1 = t_1(s), t_2 = t_2(s)$, где $0 \le s \le s_0$ и s длина кривой от точки t_0 до $t \in (p_0^j)$.

В (23), первый интеграл проинтегрировав по частям (согласно принятых предположений эта операция выполнима), получим, что он имеет порядок ε.

Во втором интеграле перейдем к модулю

$$\left| \int\limits_{(p_0^1)} a_{12}(\tau)\Pi_2 exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau \right| \le M_2 \left| \int\limits_{(p_0^1)} exp\frac{ReF_{02}(\tau)}{\varepsilon} d\tau \right|.$$

Согласно П5 функция $ReF_{02}(\tau)$ убывает по выбранному пути интегрирования. Если учесть $ReF_{02}(t_0) = 0$, то $\forall t \in (p_0^1)$ $(ReF_{02}(t) \le 0)$.

Учитывая сказанное, интеграл $\int_{(p_0^1)} exp\frac{ReF_{02}(\tau)}{\varepsilon} |d\tau|$ проинтегрировав по частям, получим, что он имеет порядок ε. На основе проведенных оценок получим

$$|x_{11}| \le M_2\ \varepsilon, t \in (p_0^1).$$

Пусть $t \in (p_0^2)$. Для этого случая имеем

$$x_{11} = \int\limits_{(p_0^2)} [\varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

В рассматриваемом случае, согласно П5, функция $ReF_{01}(t)$ убывает и $\forall t \in (p_0^2)$ $(ReF_{01}(t) \le 0)$, причем только при $t = t_0$, $(ReF_{01}(t_0) = 0)$.

Таким образом для оценки x_{11} достаточно перейти к модулю и проинтегрировать $\int_{(p_0^2)} exp\frac{ReF_{01}(t) - ReF_{01}(\tau)}{\varepsilon} |d\tau|$ по частям. Тогда получим

$$|x_{11}| \le M_2\ \varepsilon, t \in (p_0^2).$$

В итоге имеем

$$|x_{11}| \le M_2\ \varepsilon, t \in (p_0^1) \cup (p_0^2).$$

Для $x_{11}(t,\varepsilon)$ оценка рассматривается аналогично и

$$|x_{21}| \le M_2\ \varepsilon, t \in (p_0^1) \cup (p_0^2).$$

Оценим последующие приближения. Имеем

$$x_{12} = x_{11} + \int\limits_{t_0}^{t} a_{12}(\tau) x_{12} exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \qquad (24)$$

Учитывая Лемму 2 и переходя в (24) к модулю получим

$|x_{12}| \le M_2\varepsilon\ (1 + M_3 s)$.

Аналогично

$$|x_{22}| \le M_2\varepsilon\ (1 + M_3 s).$$

Продолжая процесс получим

$$|x_{1m}| \le M_2\varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(M_3 s)^k}{k!}, \qquad (25)$$

$$|x_{2m}| \le M_2\varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(M_3 s)^k}{k!}, \quad t \in (p_0^1) \cup (p_0^2).$$

Из (25) следует

$$|x_{1m}| \le M_2\varepsilon\, exp M_3 s < M_2\varepsilon\, exp M_3 s_0, \tag{26}$$

$$|x_{2m}| \le M_2\varepsilon\, exp M_3 s < M_2\varepsilon\, exp M_3 s_0, \qquad m = 1,2,\dots .$$

Для доказательства сходимости (21) оценим

$\|x_m - x_{m-1}\|, \qquad m = 1,2,\dots .$

Если $m = 1,$ то учитывая (26), получим $\|x_m\| < M_4\varepsilon$, где $M_4 = M_2 exp M_3 s_0$.

Далее имеем

$$\|x_m - x_{m-1}\| < M_4\varepsilon \frac{(M_3 s)^{m-1}}{(m-1)!}, \tag{27}$$

Учитывая (27), можем утверждать, ряд $\sum_{m=1}^{\infty}(x_m - x_{m-1})$ $\forall t \in (p_0^1) \cup (p_0^2)$ сходится равномерно. Отсюда следует равномерная сходимость (21) к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$ – которая является решением (16) – (17) и для этого решения, согласно (26), справедлива оценка

$$\|x(t,\varepsilon)\| < M_4\varepsilon, t \in (p_0^1) \cup (p_0^2). \tag{28}$$

Прежде, до рассмотрения случая $t \in D_{0\varepsilon} \cup D_{01}$, в (16) – (17) проведем некоторые преобразования, с учетом выбранных путей интегрирования.

Пусть $\tilde{t} \in (p_0^1) \cup (p_0^2)$.

$$x_1 = \int_{t_0}^{\tilde{t}} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau +$$

$$+ \int_{\tilde{t}}^{t} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau =$$

$$= exp \frac{F_1(t) - F_1(\tilde{t})}{\varepsilon} \left\{ \int_{t_0}^{\tilde{t}} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp \frac{F_1(\tilde{t}) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau \right\} +$$

$$+ \int_{\tilde{t}}^{t} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

Выражение, содержащееся в скобке $\{\dots\}$, даёт решение (16) при

$t = \tilde{t} \in (p_0^1) \cup (p_0^2)$. Тогда

$$x_1 = x_1(\tilde{t},\varepsilon) exp \frac{F_1(t) - F_1(\tilde{t})}{\varepsilon} +$$

$$+\int_{\tilde{t}}^{t}[a_{12}(\tau)x_2+\varphi_1(\tau)+a_{12}(\tau)\Pi_2]exp\frac{F_1(t)-F_1(\tau)}{\varepsilon}d\tau. \qquad (29)$$

Аналогично

$$x_2=x_2(\tilde{t},\varepsilon)exp\frac{F_2(t)-F_2(\tilde{t})}{\varepsilon}+$$

$$+\int_{\tilde{t}}^{t}[a_{21}(\tau)x_1+\varphi_2(\tau)+a_{21}(\tau)\Pi_1]exp\frac{F_2(t)-F_2(\tau)}{\varepsilon}d\tau. \qquad (30)$$

Для исследования асимптотического поведения решений (29) - (30), применим метод последовательных приближений, которые определяются как в (21). Проведём оценку последовательных приближений и докажем равномерную сходимость. Повторяются все вычисления, проведенные для случая $t\in(p_0^1)\cup(p_0^2)$. Только в этом случае надо учесть

$$\left|\int_{t_0}^{t}exp\frac{F_j(t)-F_j(\tau)}{\varepsilon}|d\tau|\right|=O(\varepsilon).$$

Для этого достаточно проинтегрировать этот интеграл по частям.

В итоге получается

$$\|x(t,\varepsilon)\|<M_5\varepsilon, t\in D_{0\varepsilon}\cup D_{01}. \qquad (31)$$

Таким образом доказана

Теорема (о расщеплении решений). Пусть рассматривается задача (1) – (2) и выполняются предположения П1, П2, П3, П4, П5. Тогда существует область

$D_0=D_{0\varepsilon}\cup D_{01}$ и решение $z(t,\varepsilon)$ задачи (1) – (2) определенное в D_0 и это решение представляется в виде

$z(t,\varepsilon)=\xi(t)+\Pi(t,\varepsilon)+x(t,\varepsilon),$

причем для $\Pi(t,\varepsilon)$ справедлива оценка (20), а для $x(t,\varepsilon)$ оценка (31),

$\xi(t)-$ решение невозмущённого уравнения.

Вывод

Из доказанной Теоремы вытекает: Решение рассматриваемой задачи расщепляется на три составляющие. Одна из них решение невозмущенного уравнения, а вторая характеризует погранслойные линии и области, а третья область притяжения $z(t,\varepsilon)$ к $\xi(t)$.

Литература

1. Алыбаев, К.С. (2001) Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Вестник КГНУ, сер. 3, вып. 6. Бишкек,.
2. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б., Нарбаев М.Р. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями. Вестник ОшГУ, 2013-№1 (специальный выпуск). – С. 227-231.
3. Мурзабаева, А. Б. (2019) Исследование сингулярно возмущенных уравнений с разделением множеств при вырождении. .(кандидатская диссертация). ОшГУ, Ош.
4. Нарымбетов, Т. К. (2022) Существования и связь областей притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений.(кандидатская диссертация). ОшГУ, Ош.
5. Алыбаев, К.С., Мусакулова, Н.К. (2022) Расщепление решений иррегулярно вырожденных линейных сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях Наука. Образование. Техника. № 3. сс. 22–32, https://doi: 10.54834/16945220_2022_3_22.
6. Лаврентьев, М. А. (1973). Методы теории функций комплексного. Москва: Издательство Наука.
7. Федорюк, М. В. (1977). Метод перевала. Москва: Издательство Наука.

УДК 514.75
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_20

$\mathbf{E_6}$ МЕЙКИНДИГИН БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУДА ҮЧ ЧЕНЕМДҮҮ БӨЛҮШТҮРҮҮЛӨРДҮН ТҮГӨЙҮНҮН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШАШЫ

Папиева Толкун Маматаевна, ф.-м.и.к., доцент
tpapka73@mail.ru
Артыкова Жылдыз Абдисаламовна, ф.-м.и.к., доцент
jartykova@oshsu.kg
Мустапакулова Чолпон Абакуловна, окутуучу
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *$\Omega \subset E_6$ аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген: ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана ω^1 сызыгы өтөт. Ушул сызык үчүн Френенин репери [1] боло тургандай кыймылдуу репер тандалып алынган. Бул репердин координаталык векторлорунун интегралдык сызыктары Френенин торчосун [2] түзүшөт. Ушул торчонун ω^3 сызыгынын жанымасында F_3^2 чекити инварианттык түрдө аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде F_3^2 чекити өзүнүн $\Omega_3^2 \subset E_6$ аймагын "сызып" чыгат. Натыйжада $f_3^2(X) = F_3^2$ боло тургандай $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ бөлүктөп чагылтуусу аныкталат.*

$\Delta_{(145)} = (X,\ \vec{e}_1, \vec{e}_4,\ \vec{e}_5)$ жана $f_3^2\left(\Delta_{(145)}\right) = \Delta'_{(145)}$ үч ченемдүү бөлүштүрүүлөрү каралган.

Аныктама. Эгерде $\beta \subset \Delta_{(145)}$ сызыгынын X чекитиндеги жанымасы жана $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$ сызыгынын F_3^2 чекитиндеги жанымасы бир эле үч ченемдүү мейкиндикте ($\vec{e}_1, \vec{e}_4,\ \vec{e}_5$ векторлоруна керилген) жатышса, анда β жана $\bar{\beta}$ сызыктары f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунда $\left(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)}\right)$ түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары деп аталышат.

f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунда $\beta \subset \Delta_{(145)}$ жана $f_3^2(\beta) = \bar{\beta}$ сызыктары үч ченемдүү бөлүштүрүүлөрдүн $\left(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)}\right)$ түгөйүнүн квазикошмок сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген.

Ачкыч сөздөр: *евклиддик мейкиндик, Френенин репери, Френенин торчосу, бөлүктөп чагылтуу, бөлүштүрүү, түгөй бөлүштүрүүлөрдүн квазикошмок сызыгы.*

СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ПАРЫ ТРЕХМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ЧАСТИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПРОСТРАНСТВА $\mathbf{E_6}$

Папиева Толкун Маматаевна, к.ф.-м.н., доцент
tpapka73@mail.ru
Артыкова Жылдыз Абдисаламовна, к.ф.-м.н., доцент
jartykova@oshsu.kg
Мустапакулова Чолпон Абакуловна, преподаватель
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В области $\Omega \subset E_6$ задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия ω^1 заданного семейства. Выбран подвижный репер так, чтобы он был репером Френе*

[1] для линии ω^1. Интегральные линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [2]. На касательной к линии ω^1 этой сети инвариантным образом определяется точка F_3^2. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_6$. В результате получается частичное отображение $f_3^2: \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2$.

Рассматриваются трехмерные распределения $\Delta_{(145)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ и $f_3^2(\Delta_{(145)}) = \Delta'_{(145)}$.

Аныктама. Если касательная к линии $\beta \subset \Delta_{(145)}$ в точке X и касательная к линии $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$ сызыгынын в точке F_3^2 принадлежат одному и тому же трехмерному пространству (натянутому на векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5$), то линии β и $\bar{\beta}$ называются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$ в частичном отображении f_3^2.

Доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии $\beta \subset \Delta_{(145)}$ и $f_3^2(\beta) = \bar{\beta}$ являлись квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$ в частичном отображении f_3^2.

Ключевые слова: *евклидово пространство, репер Френе, сеть Френе, частичное отображение, распределение, квазидвойная линия пары распределений.*

EXISTENCE OF QUASI-DOUBLE LINES OF THE PAIR OF THREE DIMENSIONAL DISTRIBUTIONS IN THE PARTIAL MAPPING OF SPACE E_6

Papieva Tolkun Mamataevna, Candidate of Ph. & Math. Sc., docent
tpapka73@mail.ru
Artykova Zhyldyz Abdisalamovna, Candidate of Ph. & Math. Sc., docent
jartykova@oshsu.kg
Mustapakulova Cholpon Abakulovna, teacher
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *A family of smooth lines given in the domain $\Omega \subset E_6$ so that through each point $X \in \Omega$ passes one line ω^1 of given family. A movable frame is chosen so that it was Frenet's frame for the line ω^1 of the given family. The integral lines of the coordinate vectors fields of this frame form a Frenet's net. On a tangent to the line ω^1 of this net a point F_3^2 is defined in an invariant way. When the point X moves in the domain Ω, the point F_3^2 describes it's domain $\Omega_3^2 \subset E_6$.. In this way we get a partial mapping $f_3^2: \Omega \to \Omega_3^2$ such, that $f_3^2(X) = F_3^2$.*

It is considered the three dimensional distributions $\Delta_{(145)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ and $f_3^2(\Delta_{(145)}) = \Delta'_{(145)}$.

Definition. Lines $\beta \subset \Delta_{(145)}$ and $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$ are called quasi-double lines of the pair of distributions $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$, If the tangent to line β at the point X and the tangent to line $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$ at point $f_3^2(X) = F_3^2$ belong to the same three dimensional space, spanned by vectors $\vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5$.

Necessary and sufficient conditions have been proven for lines $\beta \subset \Delta_{(145)}$ and $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$ to be quasi-double lines of the pair of distributions $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$, in the partial mapping f_3^2.

Key words: *Euclidean space, Frenet's frame, net of Frenet, partial mapping, distribution, the quasi-double line of a pair of distributions.*

$\Omega \subset E_6$ мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген $X \in \Omega$ ар бир чекити аркылуу берилген көптүктүн бирден гана сызыгы өтөт. Ортонормаланган, $\mathcal{R} = (X, \vec{e}_{i,})$ $(i, j, k = \overline{1,6})$ реперин Ω аймагында бул репер берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери [1,2] боло тургандай тандап алабыз. $\mathcal{R}$ реперинин деривациондук формулалары төмөнкүдөй көрүнүштө болушат:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \quad (1)$$

Мындагы ω^i, ω_i^k дифференциалдык формалары евклиддик мейкиндиктин структуралык теңдемелерин канаатандырышат:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \quad (2)$$

$\vec{e_i}$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин торчосун Σ_6 түзүшөт. $\mathcal{R}$ репери Σ_6, торчосунун сызыктарынын жанымаларына тургузулгандыктан, ω_i^k формалары башкы формалар болушат, б.а.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \qquad (3)$$

(3) формулалардын акыркы барбардыгын эске алсак, анда төмөндөгү келип чыгат:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \qquad (4)$$

(4) барабардыкты сырттан дифференцирлеп төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Мындан, (2) формуланы колдонсок, төмөндөгү келип чыгат:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

(3) формуланын негизинде акыркы барабардык төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell,$$

же

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j.$$

(барабардыктын оң жагындагы экинчи мүчөдө жана индекстеринин ордун алмаштырдык). Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0\ ,$$

же

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Акыркы барабардыкка Картандын леммасын [3] колдонуп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m,$$

Же

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l\right)\omega^m. \qquad (5)$$

Чоңдуктардын $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ системасы экинчи тартиптеги геометриялык обьектти түзүшөт.

Берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин формулалары төмөндөгүдөй көрүнүштө болушат:

$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$
$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$
$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$
$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5,$
$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4 \vec{e}_4 + \Lambda_{51}^6 \vec{e}_6,$
$d_1\vec{e}_6 = \Lambda_{61}^5 \vec{e}_5,$

жана

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^3 = 0, \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0, \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{51}^1 = 0, \Lambda_{11}^6 = -\Lambda_{61}^1 = 0 \qquad (6)$$

$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{51}^2 = 0, \Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0, \Lambda_{31}^5 = -\Lambda_{51}^3 = 0.$$

$$\Lambda_{21}^6 = -\Lambda_{61}^2 = 0, \Lambda_{31}^6 = -\Lambda_{61}^3 == 0,\ \Lambda_{61}^4 = -\Lambda_{41}^6 = 0 \qquad (7)$$

Мындагы $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = -\Lambda_{51}^4$, $k_5^1 = \Lambda_{51}^6 = -\Lambda_{61}^5$ – ω^1 сызыгынын биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи ийриликтери (тиешелеш түрдө), $d_1 - \omega^1$ сызыгы боюнча дифференцирлөөнүн символу.

Σ_6 торчосунун ω^iсызыгынын жанымасындагы $F_i^{\,j}$ $(i \neq j)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (8)$$

Ар бир $(X, \vec{e}_i)$ жанымасында бештен псевдофокус жашайт:

$(X, \vec{e}_1)$ жанымасында – $F_1^2,\ F_1^3,\ F_1^4,\ F_1^5,\ F_1^6$;

$(X, \vec{e}_2)$ жанымасында – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5, F_2^6$;

$(X, \vec{e}_3)$ жанымасында – $F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5, F_3^6$;

$(X, \vec{e}_4)$ жанымасында – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_4^5, F_4^6$;

$(X, \vec{e}_5)$ жанымасында – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4, F_5^6$;

$(X, \vec{e}_6)$ жанымасында – $F_6^1, F_6^2, F_6^3, F_6^4, F_6^5$.

$\Omega \subset E_6$ аймагындагы Σ_6 торчосу Френенин циклдик торчосу деп аталат, эгерде төмөндөгү реперлер бир учурда ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5, ω^6 сызыктары үчүн (тиешелеш түрдө) Френенин реперлери болушса:

$\mathcal{R}_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$, $\mathcal{R}_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1)$,

$\mathcal{R}_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathcal{R}_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

$\mathcal{R}_5 = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, $\mathcal{R}_5 = (X, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$.

Σ_6 торчосу Френенин циклдик торчосу болсун деп эсептейли жана аны $\tilde{\Sigma}_6$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

Изилдөөнүн материалдары.

$F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_3^2} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3. \qquad (9)$$

X чекити $\Omega \subset E_6$ аймагында кыймылга келгенде, F_3^2 чекити өзүнүн $\Omega_3^2 \subset E_6$ аймагын “сызып” чыгат Натыйжада $f_3^2(X) = F_3^2$ боло тургандай $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз.

Ω_3^2 аймагында $\mathcal{R}' = \left(F_3^2, \vec{c}_{i,}\right)$ кыймылдуу репери пайда болот жана $\vec{c}_i = f_3^2(\vec{e}_{i,})$ векторлору төмөнкүдөй көрүнүштө болушат [4]:

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^5}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_5;$$

$$\vec{c}_2 = \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_3 = \left[1 + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\right]\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4; \qquad (10)$$

$$\vec{c}_4 = -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 + \vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_5 = -\frac{\Lambda_{35}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{35}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4 + \vec{e}_5;$$

$$\vec{c}_6 = -\frac{\Lambda_{36}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{326}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{36}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4 + \vec{e}_6.$$

$\Delta_{(145)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон β сызыгынын жаныма вектору $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^4\vec{e}_4 + \beta^5\vec{e}_5$көрүнүшүндө болот.

$f_3^2(\beta) = \overline{\beta}$ сызыгынын жаныма вектору төмөнкүдөй табылат.

$\vec{\beta} = \beta^1 \vec{C}_1 + \beta^4 \vec{C}_4 + \beta^5 \vec{C}_5$. Мындан (10) формулаларды эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\vec{\beta} = \beta^1 \vec{e}_1 + (\beta^1 C_1^2 + \beta^4 C_4^2 + \beta^5 C_5^2)\vec{e}_2 + (\beta^1 C_1^3 + \beta^4 C_4^3 + \beta^5 C_5^3)\vec{e}_3 + (\beta^1 C_1^4 + \beta^4 + \beta^5 C_5^4)\vec{e}_4 + \beta^5 \vec{e}_5,$$

мында $C_i^j - \vec{c}_i$ векторунун j-координатасы.

$\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\overline{\beta}} \in \Delta_{(145)}$ шартынан төмөндөгү келип чыгат.

$$\begin{cases} \beta^1 C_1^2 + \beta^4 C_4^2 + \beta^5 C_5^2 = 0, \\ \beta^1 C_1^3 + \beta^4 C_4^3 + \beta^5 C_5^3 = 0. \end{cases}$$

Мындан (10) формулаларды колдонуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\begin{cases} \beta^1 \Delta_{31}^2 + \beta^4 \Delta_{34}^2 + \beta^5 \Delta_{35}^2 = 0 \\ \beta^1 C_{321}^2 + \beta^4 C_{324}^2 + \beta^5 \Delta_{325}^2 = 0. \end{cases}$$

Мындан

$$\beta^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{34}^2 & \Lambda_{35}^2 \\ C_{324}^2 & C_{325}^2 \end{vmatrix}; \beta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{35}^2 & \Lambda_{31}^2 \\ C_{325}^2 & C_{321}^2 \end{vmatrix}; \beta^5 = \begin{vmatrix} \Lambda_{31}^2 & \Lambda_{34}^2 \\ C_{321}^2 & C_{324}^2 \end{vmatrix}; \qquad (11)$$

Тескерисинче эгерде $\beta \subset \Delta_{(145)}$ сызыгынын жаныма векторунун координаталары (11) шарттарды канааттандырышса, анда β жана $f_3^2(\beta) = \overline{\beta}$ сызыктары f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунда $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$ түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары болушат.

Төмөндөгүдөй теорема далилденген:

Теорема. $\beta \subset \Delta_{(145)}$ жана $f_3^2(\beta) = \bar{\beta}$ сызыктары $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$ түгөйүнүн квазикошмок сызыктары болушу үчүн β сызыгынын жаныма векторунун координаталары (11) шарттарды канааттандырышы зарыл жана жетиштүү.

Ушул эле теорема E_5 мейкиндигинде да орун ала тургандыгы көрсөтүлгөн.

Адабияттар

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ // Москва: Наука, 1967. – С. 481-482.
2. Матиева Г., Абдуллаева Ч.Х., Нышанбаева Н.Т. E5 евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [текст] // Илим. Билим. Техника. – Ош, 2022. – № 3 (75). – С. 32-39.
3. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С. П. Фиников. – М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.
4. Матиева Г, Абдуллаева Ч.Х. Евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашы жөнүндө / ОшМУнун жарчысы. – Ош, 2023. №1(2). – Б. 141-152.

УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_21

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ СМЕШАННО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА

Сатаров Арзымат Эминович, к.ф.-м.н., доцент
asatarov74@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи со смещением для уравнения смешанно-гиперболического типа с линией изменения типа* $y=0$. *Методом понижения порядка уравнений, разрешимость краевой задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, относительно следа искомой функции на линии изменения типа уравнения. Использованием функции Грина получена соотношение между следа искомой функции и её нормальной производной. Понижением порядка уравнения и общих решений получено представление решение задачи для гиперболического уравнения 4-го порядка при* $y<0$. *Методом функции Грина для гиперболического уравнения 4-го порядка определено решение задачи при* $y>0$.

Ключевые слова: *краевые задачи, задачи со смещением, смешанно-гиперболический оператор, интегральные уравнения, функция Грина.*

4-ТАРТИПТЕГИ АРАЛАШ-ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЖЫЛЫШУУСУ БАР МАСЕЛЕ

Сатаров Арзымат Эминович, ф.-м.и.к., доцент
asatarov74@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Теңдеме тибинин өзгөрүүсү* $y=0$ *мүнөздүк сызыгы менен берилген 4-тартиптеги аралаш-гиперболалык теңдеме үчүн жылышуусу бар чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү ыкмасын колдонуу аркылуу, чек аралык маселенин чечилиши, теңдеменин тибинин өзгөрүү сызыгында изделүүчү функциянын изине карата экинчи түрдөгү Фредгольмдун интегралдык теңдемесин чыгарууга алып келинет. Гриндин функциясын колдонуу менен изделүүчү функциянын изи жана анын нормалдуу туундусунун ортосундагы байланыш алынат. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү жана жалпы чыгарылышын тургузуу менен* $y<0$ *болгондо 4-тартиптеги гиперболалык теңдеме үчүн маселенин чечиминин көрүнүшү алынган.* $y>0$ *болгондо 4-тартиптеги гиперболалык теңдеме үчүн Гриндин функциясын колдонуу менен маселенин чечими аныкталган.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, жылышуусу бар маселелер, аралаш-гиперболалык оператор, интегралдык теңдемелер, Грин функциясы.*

PROBLEM WITH SHIFT FOR A MIXED-HYPERBOLIC EQUATION OF THE 4TH ORDER

Satarov Arzymat Eminovich,Candidate of Ph.and Math. Sc., Docent
asatarov74@mail.ru
Osh State University

Osh, Kyrgyzstan

Annotation: *A theorem of existence and uniqueness of the solution of a boundary value problem with a shift for a mixed-hyperbolic equation with a line of change of type y=0 is proved. By the method of reducing the order of equations, the solvability of the boundary value problem is reduced to solving the Fredholm integral equation of the second kind, relative to the trace of the unknown function on the line of change of the equation type. Using the Green's function, a relationship is obtained between the trace of the unknown function and its normal derivative. By reducing the order of the equation and general solutions, a representation of the solution to the problem for a hyperbolic equation of the 4th order for y>0 is obtained. Using the Green's function method for a hyperbolic equation of the 4th order, a solution to the problem is determined for y<0.*

Keywords: *boundary value problems, problems with displacement, mixed-hyperbolic operator, integral equations, Green's function.*

1. Постановка задачи. В области D, ограниченная отрезками прямых $AC: x+y=0,\quad CB: x-y=\ell,\quad BB_0: x=\ell,\quad B_0A_0: y=h,\quad A_0A: x=0$ рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

$$L_1(u) \equiv u_{xxxy} + c(x,y)u = 0,\ (x,y) \in D_1, \tag{1}$$

$$L_2(u) \equiv u_{xxxx} - u_{xxyy} = 0,\ (x,y) \in D_2, \tag{2}$$

где $c(x,y)$ – заданная функция, а $D_1 = D \cap (y>0),\ D_2 = D \cap (y<0).$

Отметим, что линия $x = const$ является простыми, $y = const$ – трехкратными характеристиками уравнения (1), а $y = const$ – двукратными, $x \pm y = const$ – простыми действительными характеристиками уравнения (2).

Уравнение (1) и (2) представляют собой канонические виды гиперболических уравнений в частных производных четвертого порядка относительно старших производных по классификации работы [1].

Различные краевые задачи, как для уравнения (1), так и для уравнения (2), рассмотрены в работах [2 - 16]. В данной работе изучается задача сопряжения со смещением для уравнений (1) и (2).

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{3+1}(D_1) \cup \cup C^{2+2}(D_2) \cup C^{4+0}(D_2)]$, удовлетворяющую в области $D \backslash (y=0)$ уравнениям (1), (2) и краевым условиям

$$\alpha(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right) + \beta(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2}\right) = \delta(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{AC} = \psi_1(x),\ 0 \le x \le \frac{\ell}{2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{BC} = \psi_2(x),\ \frac{\ell}{2} \le x \le \ell, \tag{5}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u(\ell,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \tag{6}$$

$$u_x(\ell,y) = \varphi_3(y),\ 0 \le y \le h, \tag{7}$$

где n - внутренняя нормаль, $\alpha(x),\ \beta(x),\ \delta(x),\ \psi_i(x)(i=\overline{1,2}),\ \varphi_j(y)(j=\overline{1,3})$ – заданные функции, причем

$$
\begin{aligned}
&c(x,y)\in C(\bar{D}_1),\ \alpha(x),\ \beta(x),\ \delta(x)\in C[0,\ell]\cap C^2(0,\ell),\\
&\forall\, x\in[0,\ell]:\ \alpha(x)+\beta(x)\neq 0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(y),\varphi_2(y),\varphi_3(y)\in C^1[0,h],\\
&\psi_1(x)\in C^4[0,\frac{\ell}{2}],\ \psi_2(x)\in C^4[\frac{\ell}{2},\ell],\ \psi_1'\left(\frac{\ell}{2}\right)+\psi_2'\left(\frac{\ell}{2}\right)=0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Отметим, что из постановки задачи 1, как следствие, вытекает условия сопряжения

$$
\begin{aligned}
&u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x),\ \ 0\le x\le\ell,\\
&u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\tau(x),\nu(x)$ – пока неизвестные функции. Условие со смещением вида (3) впервые рассмотрены в работах [6] и [7] при изучении краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.

2. Функциональное соотношение, полученное из области D_2. Пусть

$$
u_{xx}-u_{yy}=z(x,y),\ (x,y)\in D_2,
\tag{11}
$$

где $z(x,y)$ – новая неизвестная функция. Тогда, из условий (4) и (5), имеем

$$
u_{xx}(x,-x)-u_{yy}(x,-x)=\sqrt{2}\,\psi_1'(x),\ 0\le x\le\frac{\ell}{2},
\tag{12}
$$

$$
u_{xx}(x,x-\ell)-u_{yy}(x,x-\ell)=-\sqrt{2}\,\psi_2'(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell.
\tag{13}
$$

В силу обозначения (11), из (2), (12) и (13) для определения $z(x,y)$ получим следующую задачу Гурса

$$
z_{xx}(x,y)=0,\ (x,y)\in D_2.
\tag{14}
$$

$$
z(x,-x)=\sqrt{2}\,\psi_1'(x),\ 0\le x\le\frac{\ell}{2},
\tag{15}
$$

$$
z(x,x-\ell)=-\sqrt{2}\,\psi_2'(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell.
\tag{16}
$$

Представим общее решение уравнения (14) в виде

$$
z(x,y)=F_1(y)+xF_2(y),
\tag{17}
$$

где $F_1(y),F_1(y)$ – произвольные непрерывные функции. Из условий (15), (16) для определения $F_1(y)$ и $F_2(y)$ получаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&F_1(y)-yF_2(y)=\sqrt{2}\psi_1'(-y),\\
&F_1(y)+(y+\ell)F_2(y)=-\sqrt{2}\psi_2'(y+\ell).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Определяя из (18) неизвестные функции $F_1(y), F_1(y)$ и согласно формуле (17), получим решение задачи (14) - (16) в виде

$$z(x,y)=\sqrt{2}\,\psi_1'(-y)-\frac{\sqrt{2}(x+y)}{2y+\ell}\left[\psi_1'(-y)+\psi_2'(y+\ell)\right],\ (x,y)\in D_2. \qquad (19)$$

Решение уравнения (11), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell,$$

представим в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau(x+y)+\tau(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(\xi)d\xi+\varPhi(x,y), \qquad (20)$$

где $\varPhi(x,y)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} z(\xi,\eta)d\xi$.

Используя условие (3) из (20) имеем

$$\tau'(x)-\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)+\beta(x)}\nu(x)=f(x), \qquad (21)$$

где $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)+\beta(x)}\left[2\delta(x)-\dfrac{1}{2}\alpha(x)\dfrac{d}{dx}\varPhi\left(\dfrac{x}{2},-\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\beta(x)\dfrac{d}{dx}\varPhi\left(\dfrac{x+\ell}{2},\dfrac{x-\ell}{2}\right)\right].$

3. Функциональное соотношение, полученное из области D_1.

Из уравнения (1) переходим к пределу при $y\to+0$ и учитывая краевые условия (6) и (7), имеем следующую задачу:

$$\begin{cases}\nu'''(x)=-c(x,0)\tau(x),\\ \nu(0)=\varphi_1'(0),\ \nu(\ell)=\varphi_2'(0),\ \nu'(\ell)=\varphi_3'(0).\end{cases} \qquad (22)$$

Для решения задачи (22) введем новую функцию $\nu_1(x)$:

$$\nu(x)=\nu_1(x)+g(x), \qquad (23)$$

где $g(x)=(1-\dfrac{2x}{\ell}+\dfrac{x^2}{\ell^2})\varphi_1'(0)+\dfrac{x}{\ell}\left(2-\dfrac{x}{\ell}\right)\varphi_2'(0)+x(\dfrac{x}{\ell}-1)\varphi_3'(0)$. Тогда для $\nu_1(x)$ получим задачу

$$\nu_1'''(x)=-c(x,0)\tau(x), \qquad (24)$$

$$\nu_1(0)=0,\ \nu_1(\ell)=0,\ \nu_1'(\ell)=0. \qquad (25)$$

Решение задачи (24), (25) относительно искомой функции $\nu_1(x)$ построим методом функции Грина. Представим функции Грина в виде

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1+a_2x+a_3x^2,\ 0\le x\le\xi, \\ b_1+b_2x+b_3x^2,\ \xi\le x\le\ell, \end{cases} \tag{26}$$

где a_i, b_i $(i=\overline{1,3})$ - произвольные неизвестные коэффициенты, которые определяются из свойства функции Грина:

$$\begin{aligned} &G(0,\xi)=0,\ G(\ell,\xi)=0,\ G_x(\ell,\xi)=0, \\ &G(\xi+0,\xi)-G(\xi-0,\xi)=0, \\ &G_x(\xi+0,\xi)-G_x(\xi-0,\xi)=0, \\ &G_{xx}(\xi+0,\xi)-G_{xx}(\xi-0,\xi)=1. \end{aligned} \tag{27}$$

Из условий (27), нетрудно определить коэффициенты a_i, b_i $(i=\overline{1,3})$:

$$a_1=0,\ a_2=-\frac{\xi(\ell-\xi)}{\ell},\ a_3=-\frac{(\ell-\xi)(\ell+\xi)}{2\ell^2},\ b_1=\frac{\xi^2}{2},\ b_2=-\frac{\xi^2}{2},\ b_3=\frac{\xi^2}{2\ell^2}.$$

Следовательно, функция Грина представимо в виде

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x(\ell-\xi)}{2\ell^2}(2\ell\xi-\ell x-\xi x),\ \ 0\le x\le\xi, \\ \dfrac{\xi^2(\ell-x)^2}{2\ell^2},\ \xi\le x\le\ell. \end{cases} \tag{28}$$

Тогда решение задачи (24), (25) имеет вид:

$$v_1(x)=-\int_0^\ell c(\xi,0)G(x,\xi)\tau(\xi)d\xi. \tag{29}$$

Из (29), с учетом (23), получим соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x)=g(x)-\int_0^\ell c(\xi,0)G(x,\xi)\tau(\xi)d\xi. \tag{30}$$

4. Сведение задачи к интегральному уравнению. Исключая $\nu(x)$ из соотношений (21) и (30), имеем

$$\tau'(x)=-\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)+\beta(x)}\int_0^\ell c(\xi,0)G(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)+\beta(x)}g(x)+f(x).$$

После интегрирования полученного соотношения, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\tau(x)=g_1(x)+\int_0^\ell K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{31}$$

где $\quad K(x,\xi)=-c(\xi,0)\int\limits_0^x \frac{\beta(t)-\alpha(t)}{\alpha(t)+\beta(t)}G(t,\xi)dt, \qquad g_1(x)=\varphi_1(0)+\int\limits_0^x f(\xi)d\xi+$

$+\int\limits_0^x \frac{\alpha(\xi)-\beta(\xi)}{\alpha(\xi)+\beta(\xi)}d\xi.$ Пусть $Q=\{(x,\xi):0<x<\ell,\, 0<\xi<\ell\}$.

Если выполняется условие

$$\ell\cdot\left\|K(x,\xi)\right\|_{C(\overline{Q})}\|<1, \tag{32}$$

то уравнение (31) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$\tau(x)=g_1(x)+\int\limits_0^\ell R(x,\xi)g_1(\xi)d\xi, \tag{33}$$

где $R(x,\xi)$ – резольвента ядра $K(x,\xi)$. После определения $\tau(x)$, из (30) определим $\nu(x)$. Следовательно, решение задачи 1 в области D_2 определяется по формуле (20).

5. Решение задачи 1 в области D_1. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D}_1)\cap C^{3+1}(D_1)$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению (1) и условиям (6), (7) и начальному условию $u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell.$

Введем обозначение

$$u_y(x,y)=\upsilon(x,y),\ (x,y)\in D_1. \tag{34}$$

Тогда для определения $\upsilon(x,y)$ получаем следующую задачу:

$$\upsilon_{xxx}(x,y)=-c(x,y)u(x,y),\ (x,y)\in D_1, \tag{35}$$

$$\upsilon(0,y)=\varphi_1'(y),\ \upsilon(\ell,y)=\varphi_2'(y),\ \upsilon_x(\ell,y)=\varphi_3'(y),\ 0\le y\le h, \tag{36}$$

Введем новую функцию $\upsilon(x,y)$:

$$\upsilon(x,y)=w(x,y)+\chi(x,y), \tag{37}$$

где $\chi(x,y)=(1-\frac{2x}{\ell}+\frac{x^2}{\ell^2})\varphi_1'(y)+\frac{x}{\ell}\left(2-\frac{x}{\ell}\right)\varphi_2'(y)+x(\frac{x}{\ell}-1)\varphi_3'(y)$. Тогда для $w(x,y)$ получаем следующую задачу:

$$w_{xxx}(x,y)=-c(x,y)u(x,y),\ (x,y)\in D_1, \tag{38}$$

$$w(0,y)=0,\ w(\ell,y)=0,\ w_x(\ell,y)=0,\ 0\le y\le h. \tag{39}$$

Используя функции Грина (28), построенная в разделе 3, решение задачи (38), (39) сводится к уравнению

$$w(x,y)=-\int\limits_0^\ell c(\xi,y)G(x,\xi)u(\xi,y)d\xi, \tag{40}$$

где $G(x,\xi)$ – определена по формуле (28). Из (38), с учетом (40), имеем

$$\upsilon(x,y)=\chi(x,y)-\int_0^{\ell} c(\xi,y)G(x,\xi)u(\xi,y)d\xi. \qquad (41)$$

Тогда из (41), принимая во внимание (34), получим

$$u_y(x,y)=\chi(x,y)-\int_0^{\ell} c(\xi,y)G(x,\xi)u(\xi,y)d\xi. \qquad (42)$$

Интегрируя уравнение (42) по y в пределах от 0 до y, получим интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$u(x,y)=\Phi(x,y)+\int_0^{y} d\eta\int_0^{\ell} K(x,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi,$$

где $K(x,\xi,\eta)=-c(\xi,\eta)G(x,\xi)$, $\Phi(x,y)=\tau(x)+\int_0^{y}\chi(x,\eta)d\eta,$ которое допускает единственное решение. Тем самым получим решение задачи 1 в области D_1.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если выполняются условия (8), (9) и (32), то решение задачи 1 существует и единственно.

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
3. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. - 448 с.
5. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. — Ташкент: Фан, 1974. - 156 с.
6. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии, Учен. зап. Казан. ун-та., 1962, том 122, книга 3, 3– 16.
7. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. - 287 с.
8. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов. Автореферат диссертации д-ра физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1982.
9. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 304 с.
10. Бобылева Л.А., Смирнов М.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка // Известия вузов. Математика. – 1972, №5. – С. 15-21.
11. Смирнов М.М. Краевая задача со смещением для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. №9. – С. 1678-1686.
12. Сатаров А.Э. Об одной краевой задаче для строго гиперболического уравнения четвертого порядка // Вестник ОшГУ. Сер. физ.-мат. наук, Ош, 2001. – №3. – С. 153-157.
13. Сатаров А.Э. Задача сопряжения для уравнений в частных производных четвертого порядка // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. мат., мех., инф. № 2 (53). – Алматы, 2007. – С. 39-48.
14. Сатаров А.Э. О краевых задачах для смешанно-гиперболического уравнения 4-го порядка с линией сопряжения x=0 // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника, 2024. (1(4), 185–192. https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_35
15. Абдумиталип уулу К. Краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором колебания струны // Вестник Ошского государственного университета. – Том 3. – № 1. – Ош, 2021. – С. 10-18.
16. Абдумиталип уулу К. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка, содержащий параболо-гиперболический оператор // Вестник Ошского государственного университета. – № 1. – Ош, 2022. – С. 20-28.

УДК 519.852.3
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_22

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ-БЕЛЛМАНА ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Таирова Орозгул Каныбековна, преподаватель
tairova.orozgul@mail.ru
Баткенский государственный университет
Баткен, Кыргызстан
Эрмекбаева Айжана Турдубековна, к.ф.-м.н., доцент,
aijana.ermekbaeva@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *При решении задачи оптимального управления процессами различают случаи программного оптимального управления и синтез оптимального управления. При программном управлении оптимальное управление определяется как функция независимых переменных задачи. При таком подходе исследования проводились на основе принципа максимума (случай обыкновенных дифференциальных уравнений – принцип Л.С. Понтрягина, в случае систем с распределенными параметрами принцип максимума типа Понтрягина, А.Г. Бутковский, А.И. Егоров, Т.К. Сиразетдинов, В.И. Плотников) [1]. Задачи управления, где требуется синтезировать оптимальное управление, решаются в основном методом динамического программирования, в основе которого лежит принцип оптимальности Беллмана. В этом случае искомое оптимальное управление следует находить как функцию (или функционал) от независимых переменных задачи и состояния управляемого процесса.*

Ключевые слова: *функционал, дифференциал Фреше, обобщенное решение, задача синтеза, функция Дирака.*

ТЕРМЕЛҮҮ ПРОЦЕССТЕРИН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМИЗАЦИЯЛООДО КОШИ-БЕЛЛМАНДЫН МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИЛҮҮСҮ

Таирова Орозгул Каныбековна, окутуучу
tairova.orozgul@mail.ru
Баткен мамлекеттик университети
Баткен, Кыргызстан
Эрмекбаева Айжана Турдубековна, ф.-м.и.к., доцент
aijana.ermekbaeva@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Процессти оптималдуу башкаруу маселесин чечүүдө программалык оптималдуу башкаруунун жана оптималдуу башкаруунун синтезинин учурларынын ортосунда айырмалоо жүргүзүлөт. Программалык башкарууда оптималдуу башкаруу маселенин көз карандысыз өзгөрмөлөрүнүн функциясы катары аныкталат. Бул ыкма менен изилдөө максимум принциптин негизинде жүргүзүлгөн (кадимки дифференциалдык теңдемелерде – Л.С. Понтрягин принциби, бөлүштүрүлгөн параметрлери бар системаларда Понтрягин тибиндеги максимум принциби, А.Г. Бутковский, А.И. Егоров, Т.К. Сиразетдинов, В.И. Плотников) [1]. Оптималдуу башкарууну синтездөө зарыл болгон башкаруу маселелери негизинен Беллман оптималдуу принцибине негизделген динамикалык программалоо ыкмасы менен чечилет.Мында каалаган оптималдуу башкаруу маселенин көз карандысыз өзгөрмөлөрүнүн функциясы (же функционалдуу) жана башкарылуучу процесстин абалынын катары табылышы керек.*

Ачкыч сөздөр: *функционал, Фреше дифференциалы, жалпыланган чечим, синтез маселеси, Дирак функциясы.*

ON THE SOLVABILITY OF THE CAUCHY-BELLMAN PROBLEM FOR NONLINEAR OPTIMIZATION OF OSCILLATORY PROCESSES

Tairova Orozgul Kanybekovna, teacher
tairova.orozgul@mail.ru
Batken State University
Batken, Kyrgyzstan
Ermekbaeva Ayzhana Turdubekovna, Candidate of Ph.-Math. Sc., Docent
Osh State University
aijana.ermekbaeva @mail.ru
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *When solving the problem of optimal process control, a distinction is made between the cases of programmatic optimal control and the synthesis of optimal control. In program control, optimal control is defined as a function of the independent variables of the problem. With this approach, research was carried out based on the maximum principle (in the case of ordinary differential equations – L.S. Pontryagin's principle, in the case of systems with distributed parameters, the maximum principle of Pontryagin type, A.G. Butkovsky, A.I. Egorov, T.K. Sirazetdinov, V.I. Plotnikov) [1]. Control problems where it is necessary to synthesize optimal control are solved mainly by the dynamic programming method, which is based on the Bellman optimality principle. In this case, the desired optimal control should be found as a function (or functional) of the independent variables of the problem and the state of the controlled process.*

Key words: *Functional, Frechet differential, generalized solution, synthesis problem, Dirac function.*

Введение.

В данной статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза точечного оптимального управления при нелинейной оптимизации колебательного процесса, описываемого линейным интегро-дифференциальным уравнением в частных производных с интегральным оператором Фредгольма [2]. Найдено достаточное условие разрешимости задачи синтеза, в частности разработан алгоритм построения оптимального управления, осуществляющий синтез. При этом были исследованы вопросы разрешимости матричных и линейных дифференциальных уравнений бесконечномерного порядка.

Краевая задача управляемого колебательного процесса

Рассмотрим краевую задачу

$$V_{tt}(t,x)=V_{xx}(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+\delta\left(x-x_0\right)f[u(t)],\ \left(t,x\right)\in Q \qquad (1)$$

с начальными

$$V(0,x)=\psi_1(x),\ V_t(0,x)=\psi_2(x),\ \ 0<x<1 \qquad (2)$$

и граничными

$$V_x(t,0)=0,\ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ \ 0<t\le T \qquad (3)$$

условиями, где $V=V(t,x)$, определенная в области $Q=\{(0,1)\times(0,T)\}$, является искомой функцией; $K\left(t,\tau\right)$ – заданная функция

$$\int_0^T\int_0^T K^2\left(t,\tau\right)d\tau dt=K_0<\infty,$$

$x_0\in\left(0,1\right)$ - точка приложения внешнего воздействия $f[u(t)]\in H(0,T)$, $u(t)\in H(0,T)$- управление; относительно функции $f[u(t)]$ будем считать, что она нелинейна и монотонна по функциональной переменной $u(t)$, т.е.

$f_u(u(t))\neq 0,\ \ t\in(0,T)$;

$\delta(x)-$ дельта-функция Дирака; $\psi_1(x)\in H_1(0,1), \psi_2(x)\in H(0,1)-$ функции начального состояния управляемого процесса; $\lambda-$ параметр, $\alpha>0, T$ - фиксированный момент времени.

1. Обобщенное решение краевой задачи

В условиях рассматриваемой задачи управления краевая задача не может иметь классического решения. В этой связи исследование будем проводить с использованием понятия обобщенного решения.

Определение. *Под обобщенным решением краевой задачей (1)-(3)* будем понимать функцию $V(t,x)\in H(Q)$, имеющую в Q обобщенные производные V_t, V_x,принадлежащие пространству $H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_0^1 (V_t\Phi)_{t_1}^{t_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}\{\int_0^1[V_t\Phi_t-V_x\Phi_x+\lambda\int_0^T K(t,\tau)V\left(\tau,x\right)d\tau\Phi(t,x)+\delta\left(x-x_0\right)f[u(t)]\Phi(t,x)]dx-\alpha V(t,1)\Phi(t,1)\}dt,$$

при любых моментов времени t_1,t_2 $(0\le t_1\le t_2\le T)$, и любой функции $\Phi(t,x)\in H_1(Q)$ и в слабом смысле начальным условием (2), т.е. при $t\to+0$ для любой функции $\Phi_0(x)\in H(Q)$ выполняются условия:

$$\int_0^1[V(t,x)-\psi_1(x)]\Phi_0(x)dx\to 0,\ \int_0^1[V_t(t,x)-\psi_2(x)]\Phi_0(x)dx\to 0.$$

2. Постановка задачи синтеза точечного управления.

Будем рассматривать задачу синтеза точечного управления, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$I(u)=\int_0^1\left\{\left[V(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_t(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T p^2[u(t)]dt,\beta>0$$

на множестве решений краевой задачи (1)-(3), где $\xi_1(x)\in H(0,1),\ \xi_2(x)\in H(0,1)$ – заданные функции, описывающие желаемого состояния процесса в конечный времени $t=T$, причем управление $u(t)$ следует находит как функция(или функционал) от состояния управляемого процесса $V(t,x)$, т.е. в виде $u(t)=u[t,V(t,x)]$.

3. Вывод уравнения Беллмана

В соответствии с принципом оптимальности Беллмана вводится функционал

$$S[t,W]=\min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t\le\tau\le T}}\left\{\int_0^1\|W(T,x)-\xi(x)\|^2dx+\beta\int_t^T p^2(u(\tau))d\tau\right\}, \tag{4}$$

где $W(t,x)=(V(t,x),V_t(t,x))$, $\xi(x)=\left(\xi_1(x),\ \xi_2(x)\right)$, $\|\bullet\|-$ норма вектора.

Далее это равенство перепишем в виде

$$S[t,W]=\min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t\le\tau\le t+\Delta t}}\left\{\beta\int_t^{t+\Delta t}p^2\left(u(\tau)\right)d\tau+S[t+\Delta t,W(t,x)+\Delta W(t,x)]\right\}, \tag{5}$$

где

$$S[t+\Delta t,W(t+\Delta t,x)]=\min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t+\Delta t\le\tau\le T}}\left\{\int_0^1\|W(T,x)-\xi(x)\|^2dx+\beta\int_{t+\Delta t}^T p^2(u(\tau))d\tau\right\}.$$

Отсюда предполагая, что $S[t,W]$ из (4) как функция, дифференцируема по t, а по W как функционал, дифференцируем по Фреше, получаем

$$S[t+\Delta t, W+\Delta W] = S[t, W(t,x)] + \frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\Delta t + dS[t,W,\Delta W] + o(\Delta t) + \omega_2(t,W,\Delta W), \qquad (6)$$

где $\dfrac{\omega_2(t,u,\Delta u)}{\|\Delta u\|} \to 0$ при $\|\Delta u\| \to 0$.

Учитывая, что дифференциал Фреше является линейным функционалом относительно $\Delta W = (\Delta V, \Delta V_t)$, согласно теореме Рисса, имеем равенство

$$dS[t,W,\Delta W] = \left(m(t,x), \Delta W(t,x)\right) = \int_0^1 m^*(t,x)\Delta W(t,x)dx = \int_0^1 (m_1(t,x)\Delta V(t,x) + m_2(t,x)\Delta V_t(t,x))dx,$$

где $m(t,x) = \{m_1(t,x), m_2(t,x)\}$ - градиент функционала $S[t,W]$.

Используя полученное значение функционала $S[t+\Delta t, W(t+\Delta t, x)]$, (6) подставляем в (5) и находим, что

$$-\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\Delta t = \min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t\le\tau\le t+\Delta t}} \{\beta \int_t^{t+\Delta t} p^2\left(u(\tau)\right)d\tau + \int_0^1 m^*(t,x)\Delta W(t,x)dx + o(\Delta t) + \omega_2(t,W,\Delta W)\}. \quad (7)$$

Используя тождество

$$\int_0^1 m^*(t,x)\Delta W(t,x)dx = \int_0^1 [m_2(t,x)V_t(t,x)]_t^{t+\Delta t}dx + \int_0^1 m_1(t,x)\Delta V(t,x) - \Delta m_2(t,x)V_t(t+\Delta t,x)]dx$$

(7) перепишем в виде

$$\begin{gathered}-\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\Delta t = \min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t\le\tau\le t+\Delta t}} \{\beta \int_t^{t+\Delta t} p^2\left(u(\tau)\right)d\tau + \int_0^1 [m_2(t,x)V_t(t,x)]_t^{t+\Delta t}dx + \\ + \int_0^1 m_1(t,x)\Delta V(t,x) - \Delta m_2(t,x)V_t(t+\Delta t,x)]dx + o(\Delta t) + \omega_2(t,W,\Delta W)\}.\end{gathered} \qquad (8)$$

Тогда в (4), полагая $\Phi(t,x) = m_2(t,x)$ и $t_1 = t,\ \ t_2 = t+\Delta t$ имеем тождество

$$\begin{gathered}\int_0^1 m_2(t,x)V_t(t,x)\Big|_{t_1}^{t_2}dx = -\alpha\int_t^{t+\Delta t} V(\tau,1)m_2(\tau,1)d\tau + \lambda\int_0^T K(\tau,s)V(s,x)ds\,m_2(\tau,x) + \\ + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[V_t(\tau,x)m_{2t}(\tau,x) - V_x(\tau,x)m_{2x}(\tau,x) + \delta(x-x_0)f(u(\tau))m_2(\tau,x)\right]dxd\tau,\end{gathered}$$

которое подставляя в (8), после деления на Δt получим соотношение

$$\begin{gathered}\frac{\partial S[t,W]}{\partial t} = \min_{\substack{u(\tau)\in p\\ t\le\tau\le t+\Delta t}} \frac{1}{\Delta t}\{\beta\int_t^{t+\Delta t} p^2(u(\tau))d\tau + \int_t^{t+\Delta t}(\int_0^1 [V_t m_{t2} - V_x m_{x2} + \lambda\int_0^T K(\tau,s)V(s,x)ds\,m_2 + \\ + \delta(x-x_0)f(u(\tau))m_2]dx - \alpha V(\tau,1)m_2(\tau,1))d\tau + \int_0^1 [m_1(t,x)\Delta V(t,x) - \Delta m_2(t,x)V_t(t+\Delta t,x)]dx + \\ + o(\Delta t) + \omega_2(t,W,\Delta W)\}.\end{gathered}$$

Отсюда переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем уравнение типа Беллмана следующего вида

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=\min_{|u|\le 1}\{\beta p^2[u(t)]+f[u(t)]m_2(t,x_0)+\int_0^1[V_t(t,x)m_1(t,x)-V_x(t,x)m_{2x}(t,x)]dx+$$
$$+\alpha V(t,1)m_2(t,1)+\lambda\int_0^1 m_2(t,x)\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau dx\}. \tag{9}$$

Это уравнение следует рассматривать вместе с дополнительными условиями

$$S[t,W(t,x)]\ge 0,\ S[T,W(T,x)]=\int_0^1\|W(T,x)-\xi(x)\|^2\,dx, \tag{10}$$

которые получены из определения функционала. Задача (9)-(10) называется задачей Коши-Беллмана.

4. О преобразовании задачи Коши-Беллмана

При решении задачи (9) -(10) основным препятствием стал наличие интегрального слагаемого. В этой связи профессором Керимбековым было предложено решение задачи искать в следующем виде

$$S[t,W]=S_0[t,W]+\lambda S_1[t].$$

Тогда в силу линейной независимости системы функций $\{1,\lambda\}$ задача (9)-(10) расщепляется на следующие задачи:

$$-\frac{\partial S_0[t,W]}{\partial t}=\min_{|u|\le 1}\{\beta p^2[u(t)]+f[u(t)]m_2(t,x_0)+\int_0^1[V_t(t,x)m_1(t,x)-V_x(t,x)m_{2x}(t,x)]dx+\alpha V(t,1)m_2(t,1)\},$$
$$S_0[T,W(T,x)]=\int_0^1\|W(T,x)-\xi(x)\|^2_{R_2}\,dx\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial S_1[t]}{\partial t}=\int_0^1 m_2(t,x)\int_0^T K(\tau,x)V(\tau,x)d\tau dx, \tag{12}$$
$$S_1[T]=0\,.$$

Отметим, что в этом случае, в силу линейности правой части уравнения (12) по $V(t,x)$, градиент $S[t,W(t,x)]$ равняется градиенту $S_0[t,W(t,x)]$.

Решения задачи (11) -(12) в общем случае решение задачи синтеза является очень трудным. Рассмотрим частный случай, когда функции $f[u],\ \forall t\in[0,T]$ и $p[u]$ удовлетворяют следующим условиям

$$f_u\ne 0,\ \ p(-1)=p(1)<p(u),\ |u|<1.$$

Пусть функция $f[u],\ \forall t\in[0,T]$ – монотонно возрастающая. Тогда искомое оптимальное управление определяется по формулам

$$u^0(t)=\begin{cases}-1, & m_2(t,x_0)>0,\\ 1, & m_2(t,x_0)<0,\end{cases}$$

И уравнение (11) в области $m_2(t,x_0)>0$ имеет вид

$$-\frac{\partial S_0[t,W]}{\partial t}=\beta p^2(-1)+f[-1]m_2(t,x_0)+\int_0^1[V_t(t,x)m_1(t,x)-V_x(t,x)m_{2x}(t,x)]dx+\alpha V(t,1)m_2(t,1)\} \tag{13}$$

Решение уравнения (13) будем искать в квадратичной форме следующего вида

$$S_0[t,W(t,x)]=\int_0^1\int_0^1 W^*(t,x)N(t,x,y)W(t,y)dydx+\int_0^1 W^*(t,x)q(t,x)dx+\eta(t). \tag{14}$$

Здесь

$N(t,x,y)=\begin{pmatrix} N_{11}(t,x,y) & N_{12}(t,x,y) \\ N_{21}(t,x,y) & N_{22}(t,x,y)\end{pmatrix}$ – квадратная матрица,

$q(t,x)=\begin{pmatrix} q_1(t,x) \\ q_2(t,x)\end{pmatrix}$ – вектор-функция, $\eta(t)$ – скалярная функция. Все они подлежат определению.

Согласно (24) нетрудно подсчитать

$$m(t,x)=\{m_1(t,x),m_2(t,x)\}=\int_0^1[N(t,x,y)+N(t,y,x)]W(t,y)dy+q(t,x). \quad (15)$$

Далее используем разложения

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x)=V^*(t)z(x)=z^*(x)V(t)\,,$$

$$V_t(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n\,'(t)z_n(x)=V^*\,'(t)z(x)=z^*(x)V'(t)\,,$$

$$(27)\; N(t,x,y)=\sum_{n,k=1}^{\infty}z_n(x)R_{nk}(t)z_n(y)=z^*(x)R(t)z(y),$$

$R(t)$ - бесконечномерная квадратная матрица

$$R(t)=\left(R_{nk}(t)\right),\;\; n,k=1,2,3,..., \qquad R_{nk}(t)=\begin{pmatrix} R_{nk}^{11}(t) & R_{nk}^{12}(t) \\ R_{nk}^{21}(t) & R_{nk}^{22}(t)\end{pmatrix},\;\; n,k=1,2,3,..., \quad (16)$$

$$q(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)z_n(x)=z^*(x)q(t)\;, q_n(t)=\left(q_{n1}(t),q_{n2}(t)\right),\; n=1,2,3,....$$

(14) подставляя в (15) относительно неизвестных *R(t), q(t),* $\eta(t)$ получим следующие задачи

$$\begin{aligned} &-\dot{R}(t)=\tilde{D}(\lambda_n)R(t)+R(t)\tilde{D}^*(\lambda_n),\;\; R(T)=E \\ &-\dot{q}(t)=\tilde{D}(\lambda_n)q(t)+[R^*(t)+R(t)]F(-1,z(x_0)),\;\; q(T)=-2\xi \qquad (17) \\ &-\dot{\eta}(t)=F^*(-1,z(x_0))q(t)+\beta p^2(-1),\quad \eta(T)=\xi^*\xi \end{aligned}$$

где $\tilde{D}(\lambda_n)=diag(...D(\lambda_n)...),\; D(\lambda_n)=\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_n^2 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\; n=1,2,3,...,$

$$F[-1,z(x_0)]=(F_n[-1,z_n(x_0)),\quad F_n[-1,z_n(x_0)]=\begin{pmatrix} 0 \\ f(-1)z_n(x_0)\end{pmatrix},\; n=1,2,3,...$$

5. Решение матричного дифференциального уравнения

Из (16) и первого уравнения (17) имеем

$$\begin{aligned} &\dot{R}_{nn}(t)=-D(\lambda_n)R_{nn}(t)-R_{nn}(t)D^*(\lambda_n),\;\; n=1,2,3,...; \\ &\dot{R}_{nk}(t)=-D(\lambda_n)R_{nk}(t)-R_{nk}(t)D^*(\lambda_k),\quad n,k=1,2,3,.... \\ &R_{nn}(T)=E,\;\; R_{nk}(T)=\theta,\quad n\neq k. \end{aligned}$$

Система уравнений при $n\neq k$

$\dot{R}_{nk}(t)=-D(\lambda_n)R_{nk}(t)-R_{nk}(t)D^*(\lambda_k)$ с условием $R_{nk}(T)=\theta$ имеет только тривиальное решение $R_{nk}(t)=\theta$.

Поэтому решаем только следующую матричную систему дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\dot{R}_{nn}(t) = -D(\lambda_n)R_{nn}(t) - R_{nn}(t)D^*(\lambda_n),$$

В расписанном виде второе и третье уравнения идентичны.

$$\begin{cases} \dot{R}_{nn}^{11}(t) = \lambda_n^2 R_{nn}^{21}(t) + \lambda_n^2 R_{nn}^{12}(t) \\ \dot{R}_{nn}^{12}(t) = \lambda_n^2 R_{nn}^{22}(t) - R_{nn}^{11}(t) \\ \dot{R}_{nn}^{21}(t) = -R_{nn}^{11}(t) + \lambda_n^2 R_{nn}^{22}(t) \\ \dot{R}_{nn}^{22}(t) = -R_{nn}^{12}(t) - R_{nn}^{21}(t) \end{cases}$$

Из равенства второго и третьего уравнений $\dot{R}_{nn}^{12}(t) = \lambda_n^2 R_{nn}^{22}(t) - R_{nn}^{11}(t) = \dot{R}_{nn}^{21}(t)$ и дополнительных условий $R_{nn}^{12}(T) = R_{nn}^{21}(T) = 0$ получаем

$$R_{nn}^{12}(t) = R_{nn}^{21}(t).$$

Вместе 4 уравнений будем рассматривать 3 уравнения

$$\begin{cases} \dot{R}_{nn}^{11}(t) = 2\lambda_n^2 R_{nn}^{12}(t), \\ \dot{R}_{nn}^{12}(t) = -R_{nn}^{11}(t) + \lambda_n^2 R_{nn}^{22}(t), \\ \dot{R}_{nn}^{22}(t) = -2R_{nn}^{12}(t), \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} R_{nn}^{11}(T) \\ R_{nn}^{12}(T) \\ R_{nn}^{22}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы

$$\begin{cases} R_{nn}^{11}(t) = \dfrac{\lambda_n^2+1}{2} + \dfrac{1-\lambda_n^2}{2}\cos 2\lambda_n(T-t) \\ R_{nn}^{12}(t) = \dfrac{\lambda_n^2-1}{2\lambda_n}\sin 2\lambda_n(T-t) = R_n^{21}(t) \\ R_{nn}^{22}(t) = \dfrac{\lambda_n^2+1}{2\lambda_n^2} + \dfrac{\lambda_n^2-1}{2\lambda_n^2}\cos 2\lambda_n(T-t) \end{cases}$$

$$-\dot{q}(t) = \tilde{D}(\lambda_n)q(t) + 2R(t)F[-1, z(x_0)],\ q(T) = -2\xi.$$

Система имеет вид

$$q_n(t) = -D(\lambda_n)q_n(t) - 2R_{nn}(t)F_n[-1, z_n(x_0)],\ \ q_n(T) = -2\xi_n = -2\begin{pmatrix} \xi_{1n} \\ \xi_{2n} \end{pmatrix},\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Решение этого дифференциального уравнения

$$q_n(t) = 2\Phi_n(t,T)\xi_n - \int_t^T \Phi_n(t,\tau)R_{nn}(\tau)F_n[-1, z_n(x_0)]d\tau,$$

где $\Phi_n(t,\tau) = \Phi_n(t)\Phi_n(\tau)$ - матрица Коши

Решаем скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\eta}{dt} = -\beta p(-1) - \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*[f(-1), z_n(x_0)]q_n(t).$$

Решение которого

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_{R^2}^2 + \int_t^T \sum_{n=1}^{\infty} f(-1)z_n(x_0)q_{1n}(\tau)d\tau + \beta p(-1)(T-t).$$

Вывод.

По результатам исследований пришли к выводу, что $f[u(t)]$является монотонно возрастающей функцией для всех допустимых значений управления $u(t):\{-1 \le u(t) \le 1\}$. Тогда в области, где $m_2(t,x_0) = m_2^-(t,x_0) > 0$ искомое оптимальное управление тождественно равно $u^0(t) \equiv -1$, а в области, где $m_2(t,x_0) = m_2^+(t,x_0) < 0$ искомое оптимальное управление тождественно равно $u^0(t) \equiv 1$.

Разрешимость задачи синтеза при нелинейном точечно оптимальном управлении возможно в следующих случаях:

1-случай. Пусть $m_2^-(t,x_0) > 0$ для всех значений $t \in [0,T]$. Тогда единственным решением задачи синтеза является управление $u^0(t) \equiv -1$.

2-случай. Пусть $m_2^-(t,x_0) > 0$ имеет на отрезке $[0,T]$ несколько нулей. Например предположим, что функция $m_2^-(t,x_0)$ имеет двух нулей в точках $t = t_1$ и $t = t_2$. И $m_2^-(t,x_0) > 0$ на отрезках $[0,t_1]$ и $[t_2,T]$, а на отрезке $[t_1,t_2]$, $m_2^-(t,x_0) < 0$. В этом случае задача синтеза в целом не имеет решения, однако задача имеет решения лишь на отрезках $[0,t_1]$ и $[t_2,T]$.

3- случай. Если при управлении управление $u^0(t) \equiv -1$ не существует области, где $m_2^-(t,x_0) > 0$, то задача синтеза не имеет решения.

4-случай. Пусть $m_2^+(t,x_0) < 0$ для всех значений $t \in [0,T]$. Тогда единственным решением задачи синтеза является управление $u^0(t) \equiv 1$;

5-случай. Пусть $m_2^+(t,x_0)$ имеет на отрезке [0,T] несколько нулей. Например, предположим, что функция $m_2^+(t,x_0)$ имеет двух нулей в точках $t = t_1$ и $t = t_2$. И $m_2^+(t,x_0) < 0$ на отрезке $[t_1,t_2]$, на отрезках $[0,t_1]$ и $[t_2,T]$ произвольного знака. В этом случае задача синтеза в целом не имеет решения, однако задача имеет решения лишь на отрезке$[t_1,t_2]$.

6- случай. Если при управлении $u^0(t) \equiv 1$ не существует области, где $m_2^+(t,x_0) < 0$, то задача синтеза не имеет решения.

7-случай. В случаях 2 и 5 задача синтеза в отдельности не имеет решения. Однако в точках t_1и t_2 возможен переход от управления $u^0(t) \equiv -1$ на управление $u^0(t) \equiv 1$. В этом случае задача синтезе в целом имеет решения. Точки t_1и t_2 называются точками переключения.

Аналогичные результаты получены для случая, когда $f[u(t)]$ является монотонно убывающей функцией для всех допустимых значений управления $u(t):\{-1 \le u(t) \le 1\}$.

Литература

1. A. Kerimbekov, O., Tairova (2018). On the solvability of synthesis problem for optimal point control of oscillatory processes.] IFAC-PapersOnLine: 17th IFAC workshop on control applications of optimization, Vol. 51, №32, pp. 754-758. Available at: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.455
2. Сиразетдинов, Т.К. (1977). Оптимизация систем с распределенными параметрами. Москва: Главная редакция физико-математической литературы.
3. Беллман, Р. (1960). Динамическое программирование. Москва: ИЛ.
4. Люстерник, Л.А., Соболев В.И. (1965). Элементы функционального анализа. Москва: Наука.
5. Егоров, А.И. (1988). Оптимальное управление линейными системами. Киев: Высшая школа.

УДК 517.928
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_23

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕДЕ КЕЗДЕШҮҮЧҮ ОПТИМАЛДУУ БАШКАРУУНУН МАСЕЛЕСИ

Токторбаев Айбек Мамадалиевич, ф.-м.и.к., доцент
ain7@list.ru
Токтомуратова Жанара Эркинбаевна, окутуучу
erkinbaevnajanara@gmail.com
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада тез аракеттенүүчү маселе каралган. Ал маселе баштапкы чекитти чекебелинде козголууга ээ болот. Бул учурда интегралды айкын түрдө туюндурууга мүмкүн болот. Мына ошол себептүү интеграл астындагы туюнтма бир калыптагы асимптотикалык катарга ажырайт. Ал ажыроону алууда келишилген ажыралмалар усулун колдонобуз. Системанын тартиби экинчи даража менен чектелет.*

Ачкыч сөздөр: *козголуу, кичине параметр, дифференциалдык теңдеме, чечим, баштапкы чекит, оптималдуу башкаруу.*

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВСТЕРЕЧАЮЩИХСЯ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Токторбаев Айбек Мамадалиевич, к.ф.-м.н., доцент
ain7@list.ru
Токтомуратова Жанара Эркинбаевна, преподаватель
erkinbaevnajanara@gmail.com
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В статье рассматривается проблема быстрых действий. У этой проблемы будет отправная точка. В этом случае можно наглядно выразить интеграл. Поэтому выражение под интегралом распадается в равномерный асимптотический ряд. Для получения этого разложения воспользуемся методом согласованных разложений. Порядок системы ограничен второй степенью.*

Ачкыч сөздөр: *возбуждение, малый параметр, дифференциальное уравнение, решение, отправная точка, оптимальное управление.*

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Toktorbaev Aybek Mamadalievich, Candidate of Ph. & Math. Sc., docent
ain7@list.ru
Toktomuratova Zhanara Erkinbaevna, teacher
erkinbaevnajanara@gmail.com
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The article considers the problem of fast actions. This problem will have a starting point. In this case, the integral can be clearly expressed. Therefore, the expression under the integral decomposes into a uniform*

asymptotic series. To obtain this expansion, we will use the method of consistent expansions. The order of the system is limited to the second degree.

Keywords: *excitation, small parameter, differential equation, solution, starting point, optimal control.*

Киришүү.

Ар түрдүү маселелерде кездешүүчү кичинекей козголууларды изилдөө актуалдуу болуп саналат. Жумушта баштапкы чекитте козголууга ээ болуучу маселе каралат. Кичине козголуунун тиби пределдик маселени жана изилдөөнүн негизги максаттарын аныктайт.

Маселенин коюлушу. Сызыктуу тез кыймылдагы оптималдуу башкаруунун маселесин карайлы.

$$x'(t)=Ax(t)+Bu(t), \quad x\in R^n,\ u\in R^m \tag{1}$$

$$x|t_0) = x_0, \tag{2}$$

$$\|u(t)\| < 1, \tag{3}$$

$$x(v) = 0,\ \ (v - t_0) \to \min. \tag{4}$$

Мында (1) система башкарылуучу, ал эми (1)-(4) маселеси чечилүүчү жана

$$rank(B) = m \in [2, n-1]. \tag{5}$$

Кээ бир x_0 маанилери үчүн үзүлүшкө ээ болуучу $u(t)$ башкаруусу (3) көрүнүштөгү чектелеши менен үзгүлтүксүз болот.

Системанын толук башкарылуусу

$$rank(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B) = n, \tag{6}$$

шартына эквиваленттүү болот.

Ошону менен бирге (3) көрүнүштөгү оптималдуу башкаруунун чектөөсү үчүн Понтрегиндин прицип максимуму зарыл жана жетиштүү шарт болуп эсептелет.

Түйүндөш система

$$\psi' = -A^*\psi,$$

мына ошондуктан

$$\psi = \exp(-A^*t)\cdot l_0.$$

Максимум принциби боюнча $u(t)$ оптималдуу башкаруу

$$(\psi(t), Bu(t)) = \max_{\|v\|<1}(\psi(t), Bv) = \left\|B^*\exp(-A^*t)l_0\right\|$$

барабардыгын канааттандыруусу керек.

Мындай t -лар үчүн $B^*\exp(-A^*t)l_0 \neq 0$ болгондо $u(t)$ оптималдуу башкаруусу

$$u(t) = \frac{B^*\exp(-A^*t)l_0}{\left\|B^*\exp(-A^*t)l_0\right\|}, \tag{7}$$

$$0 = x(v_0) = \exp(A / v_0 - t_0)\int_{t_0}^{v_0} \frac{\exp(-A(t-t_0))B \cdot B\exp(-A^*t)l_0}{\left\|B^*\exp(-A^*t)l_0\right\|}dt +$$

$$+\exp(A(v_0 - t_0))x_0 \qquad (8)$$

мында $v_0 - t_0$ тез кыймылдын убакыттагы мааниси - (7) оптималдуу башкаруу жалгыз $\bar{t} \in (t_0, v_0)$ аралыгында үзүүлү чекитине ээ болот, x^0 жашайт. Мында

$$B^* \exp(-A^*\bar{t})l_0 = 0, \qquad (9)$$

бул жерден

$$B^* A\exp(-A^*t)l_0 \neq 0, t \in [t_0, v_1],\ v_1 > v_0.$$

$$x'_\varepsilon(t) = Ax_\varepsilon(t) + Bu_\varepsilon,\ \left\|u_\varepsilon\right\| \leq 1. \qquad (10)$$

$$x_\varepsilon(t_0) = x_0 + \varepsilon y,\ x_\varepsilon(v_\varepsilon) = 0,$$

$$v_0 - t_0 \to \min \qquad (11)$$

система башкарылуучу болгондуктан (1)-(4) маселе чечилип, $\forall\varepsilon > 0$ үчүн (10)-(11) чечилүүчү болот.

$$u_\varepsilon(t) = \frac{B^*\exp(-A^*t)l(\varepsilon)}{\left\|B^*\exp(-A^*t)l(\varepsilon)\right\|}, \qquad (12)$$

барабардыгынан l_0 ду $l(\varepsilon)$, v_0 ду $v_\varepsilon = v(\varepsilon)$ жана x_0 ду $x_0 + \varepsilon$ өзгөрүлмөлөрүн алмаштырсак

$$\overline{x_0} + \varepsilon\overline{y_0} = \int_{t_0}^{v(\varepsilon)} \frac{c(t)(l_0 + r(\varepsilon))}{(c(t)(l_0 + r(\varepsilon)), l_0 + r(\varepsilon))^{1/2}}dt \qquad (13)$$

Мында

$$\overline{x_0} := -\exp(-At_0)x_0,\ \overline{y} := -\exp(-At_0)y,$$
$$r(\varepsilon) := l(\varepsilon) - l_0,\ c(t) := \exp(-At)BB^*\exp(-A^*l)$$

$$c(t) = Q - t(AQ + QA^*) + \frac{t^2}{2}(A^2Q + 2AQA^* + QA^{*2}) + O(t^2) \qquad (13)$$

барабардыктын бир калыптагы асимтотикасы кичинекей r жана $\Delta v = v - v_0$ үчүн табалы. Анда

$$F(t,r) := c(t)(l_0 + r), (c(t)(l_0 + r), l_0 + r)^{-1/2}, r = \delta \cdot \rho, \left\|\rho\right\| = 1.$$

$F(t,r)$ -функциясын $\delta \to 0$ катарга ажыратып

$$F(t,\delta\rho) = c(t)(l_0 + \delta\rho)(c(t) + 2\delta b(t,\rho) + \delta^2 a(t,\rho))^{-1/2} =$$

$$= \frac{c(t)l_0}{c^{1/2}(t)} + \delta \frac{c(t)c(t)\rho - b(t,\rho)c(t)l_0}{c^{3/2}(t)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\delta^n}{c^{n+1/2}(t)} F_n(t,\rho),$$

мында $F_n(t,\rho)$ ар бир компонентасы боюнча аналитикалык вектор фукция.

Эгерде t кичинекей болсо, анда $\tau := \frac{t}{\delta}$ ордуна коюусун жүргүзүп

$$F(\tau,\delta\rho) = F(\delta\tau,\delta\rho) = c(\delta\tau)(l_0 + \delta\rho)$$

$$(l_0^* c(\delta\tau)l_0 + 2\delta\rho^* c(\delta\tau)l_0 + \delta^2\rho^* c + (\delta\tau)\rho)^{-1}$$

ээ болобуз.

Изилдөөдө бөлүмдө турган δ маанисинде жана $\rho = 1$ учурунда изилдөө маанилүү. Катарга ажыратуу менен

$$l_0^* c(\delta\tau)l_0 + 2\delta\rho^* c(\delta\tau)l_0 + \delta^2\rho^* c(\delta\tau)\rho) = \delta^2 \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(\tau,\rho)\delta^n\tau^n, \tag{14}$$

мында

$$\rho_0(\tau,\rho) = \frac{\tau^2}{2} l_0^* C^{11}(0)l_0 + 2\tau\rho^* c^1(0)l_0 + \rho^* c(0)\rho.$$

жана бардык $F_n(\tau,\rho) - (\tau,\rho)$ боюнча экинчи даражадагы бир көп мүчө.

Корутунду. Баштапкы шартта козголуу болсо оптималдуу башкаруунун маселесинин асимптотикалык ажыралмасын тургузууга болот.

Адабияттар

1. Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравненийс малыми параметрами при старших производных. Журнал вычмслительной математики и математической физики .-М. 1963.
2. Парышева Ю. В. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач оптимального управления. Дисс. …канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Екатеринбург. 2012. - 9-92 с.
3. Токторбаев А. М. Оптималдуу башкаруунун сингулярдык козголгон маселелери Ош мамлекеттик университетинин жарчысы. математика. физика. Техника, Учредители: Ошский государственный университет eISSN: 1694-8645 Ош-2022-23-29с.

УДК 519.683
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_24

ИЛИМИЙ ЖУРНАЛДАРГА LATEX ФОРМАТЫНДА МАКАЛАЛАРДЫ ДАЯРДОО БОЮНЧА ИНСТРУКЦИЯЛАР ЖАНА СУНУШТАР

Токторбаев Айбек Мамадалиевич, ф.-м.и.к., доцент
ain7@list.ru
Токтомуратова Жанара Эркинбаевна, окутуучу
erkinbaevnajanara@gmail.com
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Илимий журналдарды LATEX форматында adm.sty стилиндеги файлды колдонуу менен макалаларды даярдоо боюнча нускамалар жана сунуштар берилген. Илимий жарыялоолор үчүн ыңгайлуулук: LaTeX, айрыкча, математикалык формулалар менен иштөөдө жана цитаталарды, библиографияларды башкарууда жеңил болгондуктан, илимий коомчулукта кеңири колдонулат. Модулдуулук жана кеңейтилүүчүлүк: LaTeX көптөгөн пакеттерди жана класстарды колдоп, аны жөнөкөй документтерден татаал китептерге жана презентацияларга чейин түзүүгө ыңгайлаштырууга мүмкүндүк берет.*

Аккыч сөздөр: *LATEX, дизайн эрежелери, стилдик файл, title командасы, adm.sty файлы*

ИНСТРУКЦИИ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ СТАТЕЙ В ФОРМАТЕ LATEX ДЛЯ НАУЧНЫХ ЖУРНАЛОВ

Токторбаев Айбек Мамадалиевич, к.ф.-м.н., доцент
ain7@list.ru
Токтомуратова Жанара Эркинбаевна, преподаватель
erkinbaevnajanara@gmail.com
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Излагаются инструкции и рекомендации авторам для подготовки статей в журнал «Прикладная дискретная математика» в формате LATEX с использованием стилевого файла adm.sty. Удобство для научных публикаций: LaTeX широко используется в научном сообществе, особенно из-за простоты работы с математическими формулами и управления цитатами и библиографиями. Модульность и расширяемость: LaTeX поддерживает множество пакетов и классов, что позволяет настраивать его для создания всего: от простых документов до сложных книг и презентаций.*

Ключевые слова: *LATEX, правила оформления, стилевой файл, команда title, файл adm.sty*.

INSTRUCTIONS AND RECOMMENDATIONS FOR THE PREPARATION OF ARTICLES IN LATEX FORMAT FOR SCIENTIFIC JOURNALS

Toktorbaev Aybek Mamadalievich, Candidate of Ph. & Math. Sc., docent
ain7@list.ru
Toktomuratova Zhanara Erkinbaevna, teacher
erkinbaevnajanara@gmail.com
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *Instructions and recommendations are given to authors for preparing articles for the journal "Applied Discrete Mathematics" in LATEX format using the adm.sty style file. Convenience for scientific publishing: LaTeX is widely used in the scientific community, especially because of its ease of working with mathematical formulas and managing citations and bibliographies. Modularity and extensibility LaTeX supports many packages and classes, allowing it to be customized to create everything from simple documents to complex books and presentations.*

Key words: *LATEX, design rules, style file, title command, adm.sty file.*

Киришүү

«Үлгүлөрдү таануунун математикалык методдору» (ҮТММ) бүткүл россиялык конференциясынын баяндамалар жыйнагын калыпка салуу үчүн бул документте К.В.Воронцов тарабынан түзүлгөн mmro.sty стилдик файлынын негизинде илимий журналын калыпка салуу үчүн иштелип чыккан adm.sty стилдик файлын колдонуу менен LATEX форматында макалаларды даярдоо боюнча авторлор үчүн нускамалар жана сунуштар камтылган. [1]

Илимий журналга макалаларды жана ҮТММ жыйнагы үчүн докладдарды даярдоо боюнча нускамалар жана сунуштар негизинен бирдей, бирок журнал менен жыйнактын ортосундагы структуралык айырмачылыктарга авторлор жана басмадан чыгаруучуларга кошумча ыңгайлуулуктарды берүү менен байланышкан айырмачылыктар да бар. adm.sty стилиндеги файлдын функционалдуулугу Windows үчүн Windowsтун MiKTEX 2.7, жана Windows Linux үчүн TEXLive 2007 жана 2008де сыналган.

Макалалардын авторлору LATEX системасында текстти терүү эрежелери менен тааныш [2, 3].

1. Макаланын түзүлүшү

Илимий журнал үчүн макаланын тексти 1-листингде берилген саптар менен башталат. 1.Командага *\usepackage* макала файлы менен бир директорийда болгон *adm.sty* стилдик файлы кирет.

```
\documentclass[a4paper, twoside,12pt]{article}

\usepackage{adm}

\begin{document}
```

1-листинг. Макала файлынын баштапкы саптары

Макаланын аталышынын үлгүсү 2-листингде көрсөтүлгөн. Бардык командалардын аткарылуусу талап кылынат. Биринчи команданын милдеттүү эмес **\title** командасы аргументи жогорку колонтитулдар үчүн макаланын кыска аталышын, экинчи аргумент макаланын толук аталышын форматтоо элементтери менен, үчүнчү аргумент макаланын толук аталышын форматтоосуз орус тилиндеги мазмун үчүн көрсөтөт, төртүнчү аргумент макаланын толук аталышын форматтоосуз англис тилиндеги мазмун үчүн англис тилинде мазмуну үчүн болуп саналат. **\author**-буйругунун милдеттүү эмес биринчи аргументи жогорку колонтитулдар үчүн авторлордун кыскача тизмесин аныктайт, экинчи аргумент фамилиялардын алдына коюлган инициалдар менен авторлордун толук тизмесин, үчүнчүсү, инициалдар фамилиялардан кийин берилген авторлордун толук тизмесин көрсөтөт, жана төртүнчүсү, англис тилиндеги авторлордун толук тизмеси, инициалдар фамилиядан кийин коюлат. Эгерде кошумча биринчи аргумент берилбесе, **\title** командасы колонтитулдарга тиешелүү сапты үчүнчү аргументтен алат, ал эми **\author** командасы экинчи аргументтен алат. Эгерде макала англис тилинде жазылган болсо, анда

\title жана **\author** командаларынын биринчи үч аргументи англис тилинде, төртүнчүсү - орус тилинде түзүлөт.

Иште колдонулган долбоорго же грантка шилтеме кылуу үчүн, экинчи аргументтин аягына **\protect\footnotemark** командасын **\title** командасын экинчи аргументтин аягына коюп, шилтеме текстин негизги бөлүгүндөгү **\footnotetext** командасына макала текстинде **\make\title** командасынан кийин жалгыз аргумент катары өткөрүү. Бул учурда **\snootnote** командасын колдонуу сунушталбайт, анткени экинчи аргумент катары **\title** командасына өткөрүлгөн текст, анын ичинде шилтеме тексти баш тамгалар менен басылып чыгат.

```
\udk{XYZ}
\title [Макаланын кыскача аталышы] %
{Макаланын толук аталышы} %
{Макаланын толук аталышы форматтоосуз} %
{Full article \title without formatting}
\author[Авторлордун кыскача тизмеси]%
{Инициалдар биринчи жазылган авторлор тизмеси} %
{Инициалдар биринчи жазылган авторлор тизмеси} %
{List of the authors, initials at the end}
\organization {Мекеменин аталышы, шаар, мамлекет}
\email {электрондук почта дареги}
\make\title
```

2-листинг. Макаланын аталышынын үлгүсү

Макаланын аталышынан кийин abstract курчоосунда аннотация жайгаштырылат. Аннотация текстинен кийин**, \keywords** командасын колдонуу менен макаланын ачкыч сөздөрүнүн тизмесин көрсөтүү керек (3-тизме). Аннотацияда бош саптар (катарлар) болбошу керек, анын ичинде аннотация тексти менен ачкыч сөздөрдүн тизмесинин ортосунда.

```
1	\begin{abstract}
Аннотациянын тексти.
3  \keywords{арасына үтүр коюлган ачкыч сөздөр.}
4  \end{abstract}
```

3-листинг. Аннотацияны жазуунун үлгүсү

Макаланын тексти бир эле аргумент – бөлүмдүн аталышы менен **\section** командасы менен бөлүмдөргө бөлүнөт. Бул команданын **\section*** формасы номерсиз бөлүмдү жасоого мүмкүндүк берет. Киришүү жана корутунду үчүн **\section*** колдонуу сунушталат. Бөлүмдүн тексти **\subsection** буйругунун жардамы менен бөлүмчөлөргө бөлүнөт. \paragraph командасын колдонуу менен жеке параграфтарды тандап алууга да болот.

Макаланын текстинен кийин thebibliography курчоосунда адабияттардын тизмеси жайгаштырылат.

Ар бир библиография пункту **\bibitem{label}** командасы менен башталат. Символ **\cite{label}** командасын колдонуу менен тексттеги бул пунктка кайрылууга мүмкүндүк берет. Үтүр менен бөлүнгөн бир нече энбелгилерди көрсөтүүгө болот: **\cite{label1, label2}**. Символдордо орус тамгаларына жол берилбейт. Ушундай жол менен аныкталган символдор макала алкагында иштейт.

Авторлордун аты-жөнү **\BibAuthor** командасы менен, жыйнактардагы макалалардын аталыштары **\Bib\title** командасы менен, ал эми интернет булактарына шилтемелер **\BibUrl** командасы менен белгиленет.

Библиографиянын үлгүсү 4-листингде көрсөтүлгөн.

```
\begin{thebibliography}{1}
\bibitem{bibBook}
\BibAuthor {Автор~И.\, О.} 4 Китептин аталышы.
Шаар:~Чыгарган мекеме, 2009. 314~с.
\bibitem{bibProceedings}
\BibAuthor {Автор~И.\, О.}
\Bib\title {Макаланын аты} ~//
Конференциянын же жыйнактын аталышы,
Шаар: ~ Чыгарган мекеме, 2009. С.\,5--6.
\bibitem{bibArticle}
\BibAuthor{Автор~И.\,О., Авторлоштор~И.\,О.}
\Bib\title {Макаланын аты} ~//
Журналдын аты. 2009. Т.\,38. \No\,5. С.\,54--62.
\bibitem{bibUrl}
\BibUrl{http://www.site.ru/} "—1
Сайттын аты. 2008.
18      \end{thebibliography}
```

4-листинг. Библиографиянын үлгүсү

Эгерде макала же аннотация орус тилинде жазылса, библиографиядан кийин макаланын англис тилиндеги аннотациясы жайгаштырылат, макала англис тилинде жазылган болсо,**\enabstract** буйругу менен жайгаштырылат (5-тизмени караңыз).

Аннотацияга ошол эле тилдеги ачкыч сөздөрдүн тизмеси киргизилет.

```
\enabstract{%
Text of abstract in another language.
\protect%
\enkeywords{list of keywords separated by comma.}
}
```

5-листинг. Башка тилдеги аннотациянын мисалы

Макаланын аягында авторлор жөнүндө маалыматтардын тизмеси берилген, анын мисалы 6-листингде көрсөтүлгөн. Авторлордун фамилиялары баш тамгалар менен терилиши керек.

```
\begin{authors}
\item{ФАМИЛИЯ Аты Атасынын аты}{наамы, даражасы, кызматы,
мекеме, шаар}{author@site.ru}
\item{ФАМИЛИЯ Аты Атасынын аты}{наамы, даражасы, кызматы,
мекеме, шаар}{author@site.ru}
\end{authors}
```

6-листинг. Авторлор жөнүндө маалымат мисалы

Макаланын тексти \end{document} командасы менен аяктайт.

2. Стандарттык кражаттарды колдонуу

adm.sty стилиндеги файлды колдонуу менен ФМТ журналына макала даярдап жатканда, бардык негизги LATEX каражаттарын формулаларды, таблицаларды, тизмелерди, фигураларды, шилтемелерди ж.б. көрсөтүү үчүн колдонууга болот. Шилтемелердин аныктамалары \label, \command командалары жана библиографиялык шилтемелер **\bibitem** макаланын ичинде гана жарактуу жана башка авторлордун макалаларындагы окшош аныктамалар менен карама-каршылыктарды жаратпайт.

adm.sty стилдик файлы төмөнкү пакеттерди камтыйт: inputenc, babel, amssymb, amsmath, mathrsfs, euscript, array, theorem, algorithm, algorithmic, listings, bp-diagram, xy, graphicx, color, url, ifthen. Бул пакеттерди **\usepackage** командасын чакырбастан колдонсо болот.

adm.sty файлы тарабынан берилген каражаттарды колдонуу сунушталат. Эгер кандайдыр бир элементтин стилин өзгөртүү зарыл болсо, муну комментарийлерде түшүндүрүү сунушталат.

2.1. Формулалардын тапшырмалары

Текстте колдонулган бардык формулалар "**$**" белгилери менен курчалган. Мисалы, **`$\phi(pq) = (p - 1) \cdot (q - 1)$`** функциясы, **`$2{,}71$`** саны, өзгөрмө **`$x$`**. Саны көрсөтүлбөй киргизилген формулалар “**\[**” жана “**\]**” кашаалар менен алкакталган же эки тараптан **“$$”** символдорунун жуптары менен курчалган. Саны көрсөтүлгөн формулалар **\begin{equation}** жана **\end{equation}** командалары менен түзүлөт. **\label{белги}** командасы **\eqref{белги}** командасын колдонуу менен формулага шилтеме жасоо үчүн колдонула турган символду аныктайт. Символду көрсөтүү үчүн латын алфавитин колдонуу керек. Мисалы, **\eqref{formula}** командасын колдонуу(1) формулага шилтеме жасайт.

Формула (1) тапшырмалары үчүн командалар 7-листингде келтирилген. Көп саптуу конструкцияны долбоорлоо үчүн cases чөйрөсү колдонулат. **“&”** белгиси андан кийинки саптарга жайгаштырылган текстти вертикалдуу тегиздейт, “\\” символдору саптарды түзөт. Формуладагы орусча текст **\text** командасы жардамында жазылат.

```
\begin{equation}
\label{formula}
n! =
```

```
\begin{cases}

n \cdot (n - 1)!, & \text{если } n > 0; \\ 1, & \text{если } n = 0.

\end{cases}

\end{equation}
```

7-листинг. Номерленген формуланын мисалы

7-листингде көрсөтүлгөн фрагментти которуунун натыйжасында төмөнкү формула алынат

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)!, & \text{если } n > 0; \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Узун формулаларды бир нече сапка бөлүү үчүн align, gather, multline жана split чөйрөлөрүн колдонуу сунушталат. Төмөнкү формула **align*** чөйрөсүн колдонуунун мисалы болуп саналат:

$$\begin{aligned} b &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} a_i x_{k+i}, \\ x_{m+n} &= x_m \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} x_{m+i} \right). \end{aligned}$$

8-листингде трансляциясы төмөнкү формуланы берген текст келтирилген.

```
\begin{align*}

\label{eqalign}

b &= \bigoplus_{i=0}^{n-1}{a_i x_{k+i}}, \\

x_{m+n} &= x_m \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1}{x_{m+i}}\right).

\end{align*}
```

8-листинг. align* чөйрөлөрүн колдонуу мисалы

\left жана **\right** командалары кашаалардын бийиктиги алар рамкалаган субформуланын бийиктигине дал келүүсү үчүн колдонулат.

2.2. Сүрөттөрдүн дизайны

Иллюстрацияларды вектордук графикалык редакторлордо түзүп, андан кийин аларды SVG же EPS форматтарында сактоо сунушталат – масштабдаганда вектордук графика сапатын жоготпойт. **Epstopdf** утилитасын колдонуу менен EPS файлдарын PDFке айландыруу сунушталат. Ушундай жол менен түзүлгөн чийме файлдары башка чиймелер сыяктуу эле текстке киргизилиши мүмкүн, ал эми макала файлынын өзүн **pdflatex** утилитасынын жардамы менен PDF форматына которууга болот.

EPS файлдарын түзүп жатканда же SVGди EPSге айландырганда, сиз түзгөн файлыңызга колдонгон шрифтиңизди киргизүү керек. Эгерде вектордук чиймени түзүү мүмкүн болбосо (мисалы, фотосүрөттү киргизүү керек), анда BMP, PNG же JPG форматындагы растр сүрөттөрүн колдонсоңуз болот. Бардык чиймелер боз түстө жасалышы керек.

9-листинг 1-сүрөттү жасалгалоо (түзүү) үчүн колдонулган командаларды көрсөтөт.

```
\begin{figure}[ht]

\centering
```

```
\includegraphics[scale=0.2]{isc.pdf}
\caption{Значок кафедры защиты информации и криптографии}
\label{isc}
\end{figure}
```

9-листинг. 1-сүрөттү жасалгалоо (түзүү) мисалы

1-сүрөт. Маалыматтык коопсуздук жана криптография кафедрасынын белгиси

\centering командасы сүрөттү беттин ортосуна коюу үчүн колдонулат**. \caption** буйругу сүрөттүн аталышын аныктайт. **\label{белги}** буйругу макаланын текстиндеги сүрөткө **\ref{label}** командасын колдонуп шилтеме бергенге мүмкүндүк берет. **\label** командасы **\caption** командасынан кийин келиши керек. Белгилерде латын тамгаларына жана сандарына гана уруксат берилет; символ тамга менен башталышы керек.

Кошумча чөйрө параметри **ht** сүрөт барактын кайсы жерине жайгаштырылышы керектигин аныктайт (мисалда тексттин ортосуна же беттин башына жайгаштыруу көрсөтүлгөн). Иллюстрациянын атын графикалык сүрөттүн астына коюу сунушталат.

Графалар стандарттуу LATEX пакеттерин колдонуу менен көрсөтүлүшү мүмкүн. Графаны көрсөтүп берүү маалыматтары network тармак чөйрөсүндө көрсөтүлгөн.

\nnNode командасы чокунун атын жана координаттарын аныктайт, ал эми **\nLink** командасы эки чокусун байланыштырат. Чокулардын жана байланыштардын көрүнүшү xy пакетинин жардамы менен аныкталат. Жаалардын жана чокулардын аттарында математикалык формулаларды колдонуу үчүн тармак чөйрөсү **“\[”** жана **“\]”** кашаалары менен алып салуу формуласына жайгаштырылат. Графтын дизайнын фигура чөйрөсүнө жайгаштыруу сунуш кылынат, ал график чийме катары иштелип чыгат. Сүрөттөрдөгүдөй эле, **\ caption** жана **\label** командаларын колдонушуңуз керек. Графтын дизайнынын үлгүсү

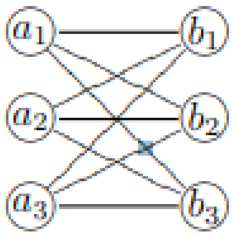
10-листингде көрсөтүлгөн.

```
\begin{figure}[H]
\centering
\[
    \begin{network}
    \nnNode"a1" (0, 10)        {+[o][F] {a_1}}
    \nnNode"a2" (0, 5)         {+[o][F] {a_2}}
    \nnNode"a3"(0, 0)          {+[o][F]{a_3}}
    \nnNode"b1"(10, 10)        {+[o][F]{b_1}}
    \nnNode"b2"(10, 5)         {+[o][F]{b_2}}
```

```
        \nnNode"b3"(10, 0)        {+[o][F]{b_3}}
        \nnLink"a1, b1"           {@{-}}
        \nnLink"a1, b2"           {@{-}}
        \nnLink"a1, b3"           {@{-}}
        \nnLink"a2, b1"           {@{-}}
        \nnLink"a2, b2"           {@{-}}
        \nnLink"a2, b3"           {@{-}}
        \nnLink"a3, b1"           {@{-}}
        \nnLink"a3, b2"           {@{-}}
        \nnLink"a3, b3"           {@{-}}
        \end{network}
    \]
    \caption {Граф $K_{3,3} $}
    \label{network}
    \end{figure}
```

10-листинг 10. Графтын үлгүсү

Бул командаларды компиляциялоонун натыйжасында, сүрөттө көрсөтүлгөн график алынат. 2. Мындай сүрөткө **\ref{network}** командасын колдонсоңуз болот.



2-сүрөт. $K_{3,3}$ графы

2.3. Таблицаларды түзүү

Таблицалар table чөйрөсүн колдонуу менен иштелип чыккан. Бул чөйрөдө сүрөттөрдү түзүүдө колдонулган командалар менен бирдей мааниге ээ болгон \centering, \caption жана \label сыяктуу кошумча командалар бар. Ошондой эле table чөйрөсүндө таблицалык маалыматтар көрсөтүлгөн tabular чөйрөсү жайгашкан. Аталышты таблицадан жогору коюу сунушталат. Таблица мисалы 11-листингде көрсөтүлгөн.

```
\begin{table}[ht]
\centering
\caption{Таблицанын аталышы}
\label{tab1}
\begin{tabular}{ | c | c | c | }
\hline
```

```
Бир & Эки & Үч \\
\hline
Төрт & Беш & Алты \\
\hline
Жети & Сегиз & Тогуз \\
\hline
\end{tabular}
\end{table}
```

11-листинг. Таблицаларды түзүүнүн мисалы

Натыйжада 1-таблица алынат

1-та б л и ц а

Таблицанын аталыши

Бир	Эки	Үч
Төрт	Беш	Алты
Жети	Сегиз	Тогуз

2.4. Алгоритмди жана программаны түзүү

Алгоритмдерди псевдокод түрүндө Algorithm чөйрөсүн колдонуу менен түзүүгө болот, анын ичинде **\STATE, \FOR, \FORALL, \ENDFOR, \IF, \ENDIF, \PRINT** ж.б. сыяктуу ачкыч сөздөр аныкталат.Алгоритмдин мисалы:

1-**алгоритм.** Топтомдун бардык элементтерин чыгаруу

1: Бардыгына a ∈ A

2: Чыгаруу a

12-листингде 1-алгоритмдин жасалгалоо командалары көрсөтүлгөн. **\caption** жана **\label** командалары сүрөттөрдү түзүүдө колдонулган командалар менен бирдей мааниге ээ. Бул алгоритмге **\ref{algo}** командасы менен шилтеме кылса болот, ал эми 2-сапка **\ref{printing}** командасы менен кайрылса болот.

```
\begin{Algorithm}[ht]
\caption{Бардык элементтердин топтомун чыгаруу}
\label{algo}
\FORALL {$a \in A$}
\PRINT $a$ \label{printing}
\ENDFOR
\end{Algorithm}
```

12-листинг. Алгоритмдердин мисалы

Программанын фрагменттерин figure чөйрөсүнө салып, verbatim чөйрөсүндө келтирүүгө болот, бул символду түзүү үчүн **\label** жана программа фрагментинин астына жайгаштырылууга тийиш болгон текстти (кол тамганы) түзүү үчүн \caption командаларын колдонууга мүмкүндүк берет. adm.sty стилиндеги файлга киргизилген listings пакетин колдонуу сунушталат. Python программасынын фрагментин кошуунун мисалы 13-листингде көрсөтүлгөн.

```
1. \lstset{float=ht,
2. caption={ Python тилиндеги программа}, label={pyprog}}
3. \begin{lstlisting}
4. from re import *
5.
6. if __name__ ==’__main__’:
7. pat = compile (’ [0-9] +’) (*@ \label{compiling} @*)
8. print search (pat, ’In a year 2009...’). group () 9 \end{lstlisting}
```

13-листинг. Программа фрагментинин мисалы

\lstset командасынын float параметри макаланын текстиндеги листингдин жайгашкан жерин аныктайт, caption жана label параметрлери сүрөттү жайгаштырууда колдонула турган **\caption** жана **\label** буйруктары менен бирдей мааниге ээ. **“(*@” “@*)”** кашааларын жана **\label** буйругун колдонуп, фрагменттин саптарына шилтемелер аныкталат. Жогорудагы мисалда 4-сапка **\ref{compiling}** командасы менен шилтеме жасаса болот. Натыйжада 14-листинг төмөнкүдөй болот:

```
1    from re import *
2
if __name__ == ’__main__’:
pat = compile (’[0-9] +’)
print search (pat, ’In a year 2009...’). group ()
```

14-листинг. Python тилиндеги программа

\lstset командасы жардамында numbers, frame, breaklines, captionpos, columns, flexiblecolumns, keepspaces, basewidth, fontadjust, basicstyle, xleftmargin, xrightmargin, aboveskip, belowskip параметрлеринин маанисин өзгөртүүгө болбойт. Бул параметрлери үчүн маанилер adm.sty стилдик файлында аныкталган.

3. Математикалык символдор

Стиль файлында кээ бир стандарттык буйруктар кайра аныкталган жана формулаларды, теорема тибиндеги чөйрөлөрдү долбоорлоо үчүн жаңы командалар киргизилген. N, Z, R сандардын топтомдорун белгилөө **\NN, \ZZ** жана **\RR** командаларынын жардамы менен аткарылат. Кээ бир математикалык символдор орус типографиясынын салттарына ылайык келтирилген: **\geq (>), \leq (6), \emptyset (∅), \epsilon (ε), \kappa (к), \phi (ϕ).** \argmin, \argmax, \diag, \sign, \Tr, \const математикалык операторлору аныкталган, \lim, \inf, \sup, \max, \min математикалык операторлору кайра аныкталып, аларда астында көрсөтүлгөн. \mylim жана \myop командалары жардамында өздүк математикалык операторлорду астынкы чеги жана чексиз аныктоого болот.

Вектордук жана матрицалык чоңдуктарды тандоо үчүн **\vec{формула}** командасын колдонууга болот. Төмөнкү командалар ыктымалдык теориясынын формулаларынын жыйындысы үчүн арналган: **\Prob** (ыктымалдык), **\Expect** (математикалык күтүү), **\Var** (дисперсия), **\Normal** (нормалдуу бөлүштүрүү). Шарттуу ыктымалдуулуктарда вертикалдык тилке(сызык) **\cond** командой менен жайгаштырылат.

Теорема тибиндеги сүйлөмдөрдүн чөйрөлөрү төмөнкүчө: Theorem - теорема, Lemma - лемма, State жана State-rm - билдирүү, Corollary - натыйжа, Def - аныктоо, Hypothesis - гипотеза, Problem - тапшырма, Example - мисал, Remark - эскертүү, Proof - далил. Ар бир элемент үзгүлтүксүз номерленет. Далил автоматтык түрдө **\qed** белгиси менен аяктайт. Төмөндө бул чөйрөлөрдү колдонуунун мисалы келтирилген.

Аныктама 1. Аныктаманын тексти.
Теорема 1. Текст теоремы.
Натыйжа 1. Натыйжанын тексти.
Натыйжа 2. Башка натыйжанын тексти.
Лемма 1. Лемманын тексти.
Далилдөө. Лемманын *далили* 1. ■
Натыйжа 3. Лемманын натыйжасы 1.
Лемма 2. Башка лемманын тексти.
Теорема 2 (аталышы же автордун аты). Теореманын аталышы менен тексти.
Далилдөө. Лемманын *далили* 2. ■
Мисал 1. Мисалдын тексти.

Компиляциясы бул мисалды түзгөн текст 15-листингде көрсөтүлгөн.

```
\begin{State}
Билдирүү тексти.
\end{State}
\begin{Definition}
 Аныктаманын тексти.
\end{Definition}
\begin{Theorem}
Теореманын тексти.
\end{Theorem}
\begin{Corollary}
 Натыйжанын тексти.
\end{Corollary}
\begin{Corollary}
 Башка натыйжанын тексти.
\end{Corollary}
\begin{Lemma}
\label{lemma1}
Лемманын тексти.
\end{Lemma}
```

```
\begin{Proof}
Лемманын далили~\ref{lemma1}.
\end{Proof}
\begin{Corollary}
Лемманын натыйжасы~\ref{lemma1}.
\end{Corollary}
\begin{Lemma}
Башка лемманын тексти.
\end{Lemma}
\begin{Theorem}[(аталышы же автордун аты)]
\label{theorem1}
Аталышы менен теореманын тексти.
\end{Theorem}
\begin{Proof}
Теореманын далили~\ref{theorem1}.
\end{Proof}
\begin{Example}
Мисалдын тексти.
\end{Example}
```

15-листинг. Теорема тибиндеги сүйлөм чөйрөлөрүн колдонуунун мисалы

4. Текстти жасалгалоо боюнча сунуштар

Илимий журналга макалаларды даярдоодо LATEX системасын колдонуу менен орус жана англис тилдеринде басылган тексттерди даярдоонун жалпы эрежелерин сактоо сунушталат.

Орус тилиндеги текстте тырмакчалар «<<» жана «>>» символдору жуптары коюлат. Уяланган тырмакчалар «„» жана «‘‘», символдорунун жуптары коюлат, мисалы "Крейсер Варяг". Англис тилиндеги текстте тырмакчалар ‘‘ жана ’’ символдорунун жуптары коюлат, мисалы, “Applied Discrete Mathematics” journal ("Илимий" журналы).

Тыныш белгилер (чекит, үтүр ж.б.) мурунку текст менен бирге терилип, кийинкиден “пробел” (боштук) белгиси менен ажыратылат. Кашаалар текст менен бирге жазылат. Орус тилиндеги тексттеги тире "---, ал эми англис тилинде --- командасы менен берилет. Тире мурунку жана кийинки тексттен “пробел” белгилери менен бөлүнөт. Сан диапазондору -- командасынын жардамы менен жасалат, мисалы “С.50–64”. Татаал сөздөрдө дефис "=, командасы менен коюлат, мисалы, визуалдык "= матрицалык, объектке "= багытталган.

Абзацтын аягындагы кыска сөздөрдү жана формулаларды жаңы сапка өткөрбөө үчүн, ошондой эле предлогдордун алардан кийинки сөздөрдөн бөлүнүшүнө жол бербөө үчүн үзүлбөгөн “пробел” ~ колдонуу сунушталат. Кыска үзүлбөгөн “пробел” \, инициалдарда жана ж.б.у.с.сыяктуу кыскартууларда колдонулат. Тизмелерди төмөнкүдөй берүү сунушталат:

1) сандан кийин кашаа коюу;

2) пункттарды чекиттүү үтүр менен аяктоо;

3) акыркы пунктту чекит менен аяктоо.

Мына ушул максаттарга enumerate* чөйрөсү колдонулат.

5. cp1251 кодунан башка коддоодо макалаларды даярдоо

Илимий журналды терүү үчүн cp1251 коддоо колдонулат. Башка коддоодо макаланы даярдап жатканда, мисалы koi8-r:

1) **adm.sty** файлын cp1251 коддоодон талап кылынган коддоого кайра коддоо;

2) **adm.sty** файлындагы \RequirePackage[cp1251]{inputenc} параметрин cp1251 кодун талап кылынган коддоо аты менен алмаштыруу.

Эгерде курамында көп байтту текст болсо, мисалы utf8, listings пакеты ката иштейт, мында орус тилиндеги сөздөрү бар листингдерди камтыган макалалар үчүн cp1251 же koi8-r коддоосун колдонуу сунушталат.

adm.sty.koi8-r, adm.sty.cp866, adm.sty.utf8 файлдары koi8-r, cp866 жана utf8 коддоолору менен иштөө үчүн adm.sty файлынын версиялары болуп саналат жана adm менен бирге жайылтылат. Зарыл болсо, алардын бири adm.sty деп өзгөртүлүп, баштапкы стиль файлынын ордуна колдонулушу мүмкүн.

Адабияттар

1. http://www.ccas.ru/voron/latex.html — Подготовка сборника трудов конференции в системе LATEX 2007.
2. Котельников И.А., Чеботаев П.З. LATEX2ε по-русски. Новосибирск: Сибирский хронограф, 2004. 489 с.
3. Балдин Е.М. Компьютерная типография LATEX. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 304 с.

УДК 517.925
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_25

INITIAL VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THIRD ORDER WITH A DEGENERATE KERNEL

Artykova Zhyldyz Abdisalamovna, Candidate of Ph. and Math. Sc., Docent
jartykova@oshsu.kg
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *In this paper, it is considered a third order nonlinear Fredholm integro-differential equations with initial value conditions and real parameters. A nonlinear functional-integral equations is derived. Theorem on a uniqueness and existence of the solution of the problem is proved for regular values of parameters. The method of compressing mapping in the space of continuous functions is applied. Continuous dependence on parameters of the solution of initial value problem is studied.*
Key words: *Initial value problem, third order integro-differential equation, unique solvability, real parameters, regular values, dependence on the parameters.*

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Артыкова Жылдыз Абдисаламовна, к.ф.-м.н., доцент
jartykova@oshsu.kg
Ошский Государственный Университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной работе рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма третьего порядка с начальными условиями и действительными параметрами. Выводится нелинейное функционально-интегральное уравнение. Доказывается теорема о единственности и существовании решения задачи при регулярных значениях параметров. Применяется метод сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций. Изучается непрерывная зависимость от параметров решения начальной задачи.*
Ключевые слова: *Начальная задача, интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка, однозначная разрешимость, действительные параметры, регулярные значения, зависимость от параметров.*

Formulation of the problem statement

Integro-differential equations are studied in the works of many mathematics (see, for examples [1-25]). Integro-differential equations with degenerate kernel are studied in the works [26-36].

In this paper we consider the solvability of the initial value problem for a third order integro-differential equation with two real parameter and degenerate kernel. So, we consider the following Fredholm integro-differential equation

$$x'''(t) + \lambda x(t) = \nu \int_0^T K(t,s)\, x(s) ds + F\left(t, \int_0^T G(s)\, x(s) ds \right), \tag{1}$$

where $K(t,s)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(t)\beta_i(s),\ 0<\alpha_i(t),\ \beta_i(s)\in C[0,T],\quad \alpha_i(t)$ and $\beta_i(s)$ are linear independent, $F(t,x)\in C([0,T]\times R),\ \ 0<G(t)\in C[0,T],\ \ T$ is given positive number, $0<\lambda$ is positive finite parameter, ν is nonzero real parameter.

In solving partial integro-differential equation (1), we use the following conditions

$$x(0)=\varphi_1,\ \ x'(0)=\varphi_2,\ \ x''(0)=\varphi_3. \tag{2}$$

Problem statement. To find a function $x(t)\in C[0,T]$, which satisfies integro-differential equation (1) and conditions (2).

Nonlinear integral equations

We use the following denotations

$$f(t)=\nu\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(t)\tau_i+F(t,\cdot), \tag{3}$$

$$\tau_i=\int_0^T\beta_i(s)x(s)ds. \tag{4}$$

Then the equation (1) takes the form

$$x'''(t)+\lambda\,x(t)=f(t). \tag{5}$$

The characteristic equation $\sigma^3+\lambda=0$ for the homogeneous equation $x'''(t)+\lambda\,x(t)=0$ has the roots

$$\sigma_1=-\sqrt[3]{\lambda},\quad \sigma_{2/3}=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\lambda}.$$

So, the general solution of the homogeneous equation can be presented as

$$x(t)=A_1x_1(t)+A_2x_2(t)+A_3x_3(t), \tag{6}$$

where $A_k\ (k=1,2,3)$ are yet arbitrary coefficients, which will be determined later,

$$x_1(t)=e^{-\sqrt[3]{\lambda}t},\qquad x_2(t)=e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}t,\quad x_3(t)=e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}t. \tag{7}$$

Taking (6) into account, we search a particular solution of the equation (5) as

$$\tilde{x}(t)=A_1(t)x_1(t)+A_2(t)x_2(t)+A_3(t)\,x_3(t). \tag{8}$$

In (8) we supposed that $A_k(t)$ are unknown functions. To find these functions we consider the following system of algebraic-differential equations

$$\begin{cases} A_1'(t)x_1(t)+A_2'(t)x_2(t)+A_3'(t)\,x_3(t)=0,\\ A_1'(t)x_1'(t)+A_2'(t)x_2'(t)+A_3'(t)\,x_3'(t)=0,\\ A_1'(t)x_1''(t)+A_2'(t)x_2''(t)+A_3'(t)\,x_3''(t)=f(t).\end{cases}$$

We solve the system as functional-algebraic equations by the Cramer rule and found:

$$A_1(t) = \frac{1}{12c^2}\int_0^t \frac{1}{x_1(s)} f(s)ds, \tag{9}$$

$$A_2(t) = -\frac{1}{12c^2}\int_0^t \left[x_1(s)x_2(s) + \sqrt{3}x_1(s)x_3(s) \right] f(s)ds, \tag{10}$$

$$A_3(t) = \frac{1}{12c^2}\int_0^t \left[\sqrt{3}x_1(s)x_2(s) - x_1(s)x_3(s) \right] f\left(s\right)ds, \tag{11}$$

where $2c = \sqrt[3]{\lambda}$. Substituting (9)-(11) into (8) and taking into account (7), we obtain a particular solution of the equation (5) as

$$\tilde{x}(t,\lambda) = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\int_0^t Q(t,s,\lambda) f(s)ds, \tag{12}$$

where

$$Q(t,s,\lambda) = \frac{1}{3}\left\{ e^{-\sqrt[3]{\lambda}(t-s)} - 2e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}(t-s)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}(s-t) + \frac{\pi}{6} \right) \right\}.$$

The presentation (12) is a particular solution of the equation (1). So, the general solution of the equation (5) can be presented as:

$$x(t) = B_1x_1(t) + B_2x_2(t) + B_3x_3(t) + \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\int_0^t Q(t,s,\lambda) f(s)ds. \tag{13}$$

To find the unknown (arbitrary) coefficients B_k $(k = 1,2,3)$, we use the boundary conditions (2). Then from the presentation (13) we obtain

$$\begin{cases} B_1x_1 = \dfrac{1}{3}x_1\varphi_1 - \dfrac{1}{6c}x_1\varphi_2 + \dfrac{1}{12c^2}x_1\varphi_3, \\ B_2x_2 = \dfrac{2}{3}x_2\varphi_1 + \dfrac{1}{6c}x_2\varphi_2 - \dfrac{1}{12c^2}x_2\varphi_3, \\ B_3x_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}c}x_3\varphi_2 + \dfrac{1}{4\sqrt{3}c^2}x_3\varphi_3. \end{cases}$$

Hence, we have that

$$B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 = \frac{x_1 + 2x_2}{3}\varphi_1 + $$
$$+\frac{-x_1 + x_2 + \sqrt{3}x_3}{6c}\varphi_2 + \frac{x_1 - x_2 + \sqrt{3}x_3}{12c^2}\varphi_3. \tag{14}$$

Substituting (14) into (13) and taking into account (3), we obtain

$$x(t,\lambda) = P(t,\lambda) +$$
$$+\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\left[\nu\sum_{i=1}^{p}\tau_i\int_0^t Q(t,s,\lambda)\alpha_i(s)ds + \int_0^t Q(t,s,\lambda)F\left(s, \int_0^T G(\theta)x(\theta,\lambda)d\theta \right)ds \right], \tag{15}$$

where

$$P(t,\lambda)=\varphi_1\psi_1(t,\lambda)+\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\varphi_2\psi_2(t,\lambda)+\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\varphi_3\psi_3(t), \tag{16}$$

$$Q(t,s,\lambda)=\frac{1}{3}\left[e^{-\sqrt[3]{\lambda}(t-s)}+2e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}(t-s)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}(t-s)+\frac{\pi}{6}\right)\right], \tag{17}$$

$$\psi_1(t,\lambda)=\frac{1}{3}\left[e^{-\sqrt[3]{\lambda}t}+2e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}t\right], \tag{18}$$

$$\psi_2(t,\lambda)=\frac{1}{3}\left[e^{-\sqrt[3]{\lambda}t}-2e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}t+\frac{\pi}{6}\right)\right], \tag{19}$$

$$\psi_{3,n}(t,\lambda)=\frac{1}{3}\left[e^{-\sqrt[3]{\lambda}t}-2e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}t-\frac{\pi}{6}\right)\right]. \tag{20}$$

There is another unknown quantity in (15). To find it we substitute (15) into (4), and obtain a system of algebraic equations (SAE)

$$\tau_i=\nu\sum_{j=1}^{p}\tau_j\Phi_{i,j}(\lambda)+\Psi_i(x,\lambda),\quad i=1,2,\cdots,p, \tag{21}$$

$$\Phi_{i,j}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\int_0^T\beta_i(s)\int_0^s Q(s,\theta,\lambda)\alpha_j(\theta)\,d\theta ds, \tag{22}$$

$$\Psi_i(x,\lambda)=\int_0^T\beta_i(s)P(s,\lambda)ds+\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\int_0^T\beta_i(s)\int_0^s Q(s,\theta,\lambda)\times$$
$$\times F\left(\theta,\int_0^T G(\xi)x(\xi,\lambda)d\xi\right)d\theta ds. \tag{23}$$

To solve the SAE we consider the following determinants

$$Z(\nu,\lambda)=\begin{vmatrix}1-\nu\Phi_{11} & \nu\Phi_{12} & \cdots & \nu\Phi_{1p}\\ \nu\Phi_{21} & 1-\nu\Phi_{22} & \cdots & \nu\Phi_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \nu\Phi_{p1} & \nu\Phi_{p2} & \cdots & 1-\nu\Phi_{pp}\end{vmatrix}, \tag{24}$$

$$Z(x,\nu,\lambda)=\begin{vmatrix}1-\nu\Phi_{11} & \dots & \nu\Phi_{1(i-1)} & \Psi_1 & \nu\Phi_{1(i+1)} & \dots & \nu\Phi_{1p}\\ \nu\Phi_{21} & \dots & \nu\Phi_{2(i-1)} & \Psi_2 & \nu\Phi_{2(i+1)} & \dots & \nu\Phi_{2p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \nu\Phi_{p1} & \dots & \nu\Phi_{p(i-1)} & \Psi_p & \nu\Phi_{p(i+1)} & \dots & 1-\nu\Phi_{pp}\end{vmatrix}, \tag{25}$$

where $\Phi_{ij}=\Phi_{ij}(\lambda),\ \Psi_\kappa=\Psi_\kappa(x,\lambda),\ \kappa=\overline{1,p}.$

SAE (21) is uniquely solvable for any finite right-hand sides, if the following non-degeneracy condition for the Fredholm determinant is satisfied: $Z(\nu,\lambda)\neq 0$. The determinant (24) $Z(\nu,\lambda)$ is a polynomial with respect to ν of degree not higher p. The equation $Z(\nu,\lambda)=0$ has at most p different real roots. We denote them by $\theta_\ell\,(\ell=\overline{1,p_\ell}\,,\ \ 1\leq p_\ell\leq p)$. Then $\nu=\nu_\ell=\theta_\ell$ called the irregular values of the parameter ν. Other values of the parameter $\nu\neq\theta_\ell$, for which $\left|Z(\nu,\lambda)\right|>0$ are called regular.

For regular values of the parameter ν the solution of the SAE (21) has the form

$$\tau_\kappa(\nu,\lambda)=\frac{Z_\kappa(x,\nu,\lambda)}{Z(\nu,\lambda)},\quad \kappa=\overline{1,p}, \tag{26}$$

where $Z_\kappa(\nu,\lambda)$ is defined from (25). Substituting for regular values of the parameter ν the presentation of solution (26) of the SAE (21) into representation (15), we derive a nonlinear system of functional integral equations (NSFIE)

$$x(t,\lambda)=P(t,\lambda)+\frac{\nu}{\sqrt[3]{\lambda}}\sum_{i=1}^{p}\frac{Z_\kappa(x,\nu,\lambda)}{Z(\nu,\lambda)}\int_0^t Q(t,s,\lambda)\alpha_i(s)\,ds+$$
$$+\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\int_0^t Q(t,s,\lambda)F\left(s,\int_0^T G(\theta)\,x(\theta,\lambda)d\theta\right)ds. \tag{27}$$

We note that the functions in (17)-(20) become zero at some values of parameter λ. We obtain the following transcendental equation

$$\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}e^{\frac{-3}{2}y},\quad y=\sqrt[3]{\lambda}\,(t-s)>0$$

for the case of function (17), and

$$\cos\frac{\sqrt{3}}{2}y=-\frac{1}{2}e^{\frac{-3}{2}y},\quad y=\sqrt[3]{\lambda}\,t>0$$

for the case of function (18), respectively. Functions in the formulas (19) and (20) become zero at some values of parameter λ. We replace these equations by the following transcendental equations

$$\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{-3y}{2}},\quad y=\sqrt[3]{\lambda}\,t>0,$$

$$\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{-3y}{2}},\quad y=\sqrt[3]{\lambda}\,t>0,$$

respectively.

The values of parameter λ, for which the functions (17)-(20) become zero, we denote by $\Lambda_j,\ \ j=1,2,3,4$, respectively. However, from the fact $\Lambda_1\cap\Lambda_2\cap\Lambda_3\cap\Lambda_4=\varnothing$ we deduce that the problem (1)-(2) is correct.

Solvability of the NSFIE (27)

To prove the unique solvability of the mixed problem (1)-(2) we require in some properties of the given functions (17)-(20).

Theorem 1. Let the following conditions be fulfilled:

1). $\alpha_0 \sum_{\kappa=1}^{p} \left| \dfrac{Z_\kappa(x^0, \nu, \lambda)}{Z(\nu, \lambda)} \right| \le \delta_0, \ \ \alpha_0 = \max_{0 \le t \le T} \int_0^t \alpha_j(s)\, ds, \ \ 0 < \delta_0, \alpha_0 = const < \infty;$

2). $\| F(t, \cdot) \| \le \delta_1, \ \ 0 < \delta_1 = const < \infty;$

3). $| F(t, u_1) - F(t, u_2) | \le l_0 | u_1 - u_2 |, \ \ 0 < l_0 = const < \infty;$

4). $\rho < 1,$ where ρ determines from (32) below.

Then for regular values of the parameter ν NSFIE (27) has a unique solution in the space $C[0,T]$ of continuous functions.

Proof. We define the successive approximations for NSFIE (27) as:

$$\begin{cases} x^0(t, \nu, \lambda) = P(t, \nu, \lambda), \\ x^{m+1}(t, \nu, \lambda) = J(t; x^m), \ m = 0,1,2,3,... \end{cases} \tag{28}$$

We estimate the zero approximation. By virtue of formulas (17)-(20), we can put

$$\max \left\{ \max_t | Q(t, s, \lambda) |; \max_{k=1,2,3} \max_t | \psi_k(t, \lambda) | \right\} \le M_0 < \infty, \ \ 0 < M_0 = const < \infty.$$

Taking into account (16), for the first approximation, from (28) we have

$$\| x^0(t, \nu, \lambda) \|_{C[0,T]} \le \max_{0 \le t \le T} | P(t, \lambda) | \le M_0 \left[|\varphi_1| + \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} |\varphi_2| + \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} |\varphi_3| \right]. \tag{29}$$

Due to the conditions of the Theorem 1, for the first difference of consecutive approximation functions $x^1(t) - x^0(t)$ we obtain

$$\| x^1(t, \nu, \lambda) - x^0(t, \nu, \lambda) \|_{C[0,T]} \le \frac{|\nu|}{\sqrt[3]{\lambda}} \sum_{\kappa=1}^{p} \left| \frac{Z_\kappa(x^0, \nu, \lambda)}{Z(\nu, \lambda)} \right| \left| \int_0^t | Q(t, s, \lambda) | \alpha_\kappa(s)\, ds + \right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} \int_0^t | Q(t, s, \lambda) | \left| F\left(s, \int_0^T G(\theta) x^0(\theta, \lambda) d\theta \right) \right| ds \le \frac{M_0 \delta_0}{\sqrt[3]{\lambda}} \left(|\nu| \alpha_0 \delta_0 + \delta_1 \right). \tag{30}$$

Now we consider the arbitrary consecutive difference $x^{m+1}(t) - x^m(t)$. Taking into account the formulas (22) and (23), we obtain the following estimate

$$\| x^{m+1}(t, \nu, \lambda) - x^m(t, \nu, \lambda) \|_{C[0,T]} \le$$

$$\le \frac{|\nu|}{\sqrt[3]{\lambda}} \sum_{i=1}^{p} \left| \frac{Z_\kappa(x^m, \nu, \lambda) - Z_\kappa(x^{m-1}, \nu, \lambda)}{Z(\nu, \lambda)} \right| \left| \int_0^t | Q(t, s, \lambda) | \alpha_i(s)\, ds + \right.$$

$$+\frac{l_0}{\sqrt[3]{\lambda}}\int_0^t |Q(t,s,\lambda)| \left| \int_0^T G(\theta) \left| x^m(\theta,\nu,\lambda) - x^{m-1}(\theta,\nu,\lambda) \right| d\theta \right| ds \le$$

$$\le \rho \cdot \left\| x^{m+1}(t,\nu,\lambda) - x^m(t,\nu,\lambda) \right\|_{C[0,T]}, \qquad (31)$$

where

$$\rho = \frac{M_0}{\sqrt[3]{\lambda}}\left(|\nu| \bar{\delta}_0 \alpha_0 + l_0 G_0 \right), \ \bar{\delta}_0 = \sum_{\kappa=1}^{p} \left| \frac{\bar{Z}_\kappa(\nu,\lambda)}{Z(\nu,\lambda)} \right|, \ 0 < \int_0^T G(s)\,ds = G_0 < \infty, \quad (32)$$

$$\bar{Z}_\kappa(\nu,\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\nu\Phi_{11} & \dots & \nu\Phi_{1(\kappa-1)} & 1 & \nu\Phi_{1(\kappa+1)} & \dots & \nu\Phi_{1p} \\ \nu\Phi_{21} & \dots & \nu\Phi_{2(\kappa-1)} & 1 & \nu\Phi_{2(\kappa+1)} & \dots & \nu\Phi_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu\Phi_{p1} & \dots & \nu\Phi_{p(\kappa-1)} & 1 & \nu\Phi_{p(\kappa+1)} & \dots & 1-\nu\Phi_{pp} \end{vmatrix}.$$

From the estimates (29)-(31) it follows that the operator $J(t;x)$ on the right-hand side of (27) is contracting and there is unique fixed point. So, the existence and uniqueness of the solution $x(t) \in C[0,T]$ to NSFIE (27) are proved. The theorem is proved.

Continuously dependence of the solution to NSFIE from parameter λ

In this section we use the following obvious lemma.

Lemma. For two values λ_1, λ_2 of positive parameter λ there true the following estimates

$$\left| e^{-\sqrt[3]{\lambda_1}(t-s)} - e^{-\sqrt[3]{\lambda_2}(t-s)} \right| \le L_{01} |\lambda_1 - \lambda_2|, \ 0 < L_{01} = const;$$

$$\left| \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda_1}(t-s) + \frac{\pi}{6} \right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda_2}(t-s) + \frac{\pi}{6} \right) \right| \le L_{02} |\lambda_1 - \lambda_2|, \ 0 < L_{02} = const;$$

$$\left| e^{\sqrt[3]{\lambda_1}\frac{t-s}{2}} - e^{\sqrt[3]{\lambda_2}\frac{t-s}{2}} \right| \le L_{03} |\lambda_1 - \lambda_2|, \ 0 < L_{03} = const;$$

$$\left| \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda_1}(t-s) - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda_2}(t-s) \right| \le L_{02} |\lambda_1 - \lambda_2|, \ 0 < L_{02} = const;$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_2}} \right| \le L_{04} |\lambda_1 - \lambda_2|, \ L_{04} = const;$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_1^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_2^2}} \right| \le L_{05} |\lambda_1 - \lambda_2|, \ L_{05} = const.$$

Theorem 2. Let be fulfilled the conditions of the Theorem 1. Then the following estimate

$$\| x(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_2) \|_{C[0,T]} \le L_M |\lambda_1 - \lambda_2|, \ 0 < L_M = const \qquad (33)$$

holds.

Proof. By virtue of the Lemma for the function (17) we obtain

$$\left| Q(t,s,\lambda_1) - Q(t,s,\lambda_2) \right| \le \frac{1}{3}\left| e^{-\sqrt[3]{\lambda_1}(t-s)} - e^{-\sqrt[3]{\lambda_2}(t-s)} \right| +$$

$$+\frac{2}{3}\left| e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda_1}}{2}(t-s)} - e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda_2}}{2}(t-s)} \right| \cdot \left| \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda_1}(t-s) + \frac{\pi}{6} \right) \right| + \frac{2}{3} e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda_2}}{2}(t-s)} \times$$

$$\times \left| \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda_1}(t-s) + \frac{\pi}{6} \right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda_2}(t-s) + \frac{\pi}{6} \right) \right| \le L_1 \left| \lambda_1 - \lambda_2 \right|, \qquad (34)$$

where

$$L_1 = L_{01} + L_{03} + e^{\sqrt[3]{\lambda_2}T} L_{02}.$$

By virtue of Lemma, for the function (18) we obtain

$$\left| \psi_1(t,\lambda_1) - \psi_1(t,\lambda_2) \right| \le \frac{1}{3}\left| e^{-\sqrt[3]{\lambda_1}t} - e^{-\sqrt[3]{\lambda_2}t} \right| + \frac{2}{3}\left| e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda_1}}{2}t} - e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda_2}}{2}t} \right| \cdot \left| \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda_1}t \right| +$$

$$+\frac{2}{3} e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda_2}}{2}t} \left| \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda_1}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda_2}t \right| \le L_1 \left| \lambda_1 - \lambda_2 \right|. \qquad (35)$$

By similarly way for the functions (19) and (20) we obtain

$$\left| \psi_j(t,\lambda_1) - \psi_j(t,\lambda_2) \right| \le L_1 \left| \lambda_1 - \lambda_2 \right|, \quad j = 2,3. \qquad (36)$$

By the aid of the estimates (34)-(36), taking properties of the functions (22), (23) and matrix (25), for the NSFIE (27) we derive

$$\left\| x(t,\nu,\lambda_1) - x(t,\nu,\lambda_2) \right\|_{C[0,T]} \le \max_{0\le t\le T}\left| P(t,\lambda_1) - P(t,\lambda_2) \right| +$$

$$+\left|\nu\right| \left| \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_2}} \right| \left| \sum_{\kappa=1}^{p} \right| \frac{Z_\kappa(x,\nu,\lambda_1)}{Z(\nu,\lambda_1)} \left| \max_{0\le t\le T} \int_0^t \right| Q(t,s,\lambda_1) \left| \alpha_j(s)\, ds + \right.$$

$$+\frac{\left|\nu\right|}{\sqrt[3]{\lambda_2}} \sum_{\kappa=1}^{p} \left| \frac{Z_\kappa(x,\nu,\lambda_1)}{Z(\nu,\lambda_1)} \right| \max_{0\le t\le T} \int_0^t \left| Q(t,s,\lambda_1) - Q(t,s,\lambda_2) \right| \alpha_j(s)\, ds +$$

$$+\alpha_0 M_0 \frac{\left|\nu\right|}{\sqrt[3]{\lambda_2}} \sum_{\kappa=1}^{p} \left| Z_\kappa(x,\nu,\lambda_1) \right| \left| \frac{1}{Z(\nu,\lambda_1)} - \frac{1}{Z(\nu,\lambda_2)} \right| +$$

$$+\alpha_0 M_0 \frac{\left|\nu\right|}{\sqrt[3]{\lambda_2}} \left| \frac{1}{Z(\nu,\lambda_2)} \right| \sum_{\kappa=1}^{p} \left| Z_\kappa(x,\nu,\lambda_1) - Z_\kappa(x,\nu,\lambda_2) \right| +$$

$$+\left| \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_2}} \right| \max_{0\le t\le T} \int_0^t Q(t,s,\lambda_1) \left| F(s,\cdot) \right| ds +$$

$$+\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_2}}\max_{0\le t\le T}\int_0^t\left|Q(t,s,\lambda_1)-Q(t,s,\lambda_2)\right|\left|F(s,\cdot)\right|ds+$$

$$+\frac{M_0}{\sqrt[3]{\lambda_2}}l_0p\int_0^T\left|G(t)\right|\left|x(t,\lambda_1)-x(t,\lambda_2)\right|dt. \qquad (37)$$

By the aid of Lemma, estimates (34)-(37) and conditions of the Theorem 1, we obtain

$$\|x(t,\nu,\lambda_1)-x(t,\nu,\lambda_2)\|_{C[0,T]}\le M_0\left[L_1|\varphi_1|+(L_1+L_{04})|\varphi_2|+(L_1+L_{05})|\varphi_3|\right]|\lambda_1-\lambda_2|+$$

$$+|\nu|M_0\delta_0L_{04}|\lambda_1-\lambda_2|+\frac{|\nu|}{\sqrt[3]{\lambda_2}}M_0\delta_0L_1|\lambda_1-\lambda_2|+$$

$$+\delta_0M_0^2\frac{|\nu|}{\sqrt[3]{\lambda_2}}\left[L_{04}+L_1\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_2}}\right]|\lambda_1-\lambda_2|+\alpha_0\beta_0\delta_2M_0^2\frac{|\nu|}{\sqrt[3]{\lambda_2^2}}\int_0^TG(t)\left|x^m(t,\lambda_1)-x^{m-1}(t,\lambda_2)\right|dt+$$

$$+M_0L_{04}T\left|F(t,\cdot)\right||\lambda_1-\lambda_2|+L_1\frac{T}{\sqrt[3]{\lambda_2}}\left|F(t,\cdot)\right||\lambda_1-\lambda_2|+$$

$$+\frac{l_0M_0}{\sqrt[3]{\lambda_2}}\int_0^TG(t)\left|x(t,\lambda_1)-x(t,\lambda_2)\right|dt, \qquad (38)$$

where

$$\beta_0=\sum_{\kappa=1}^p\left|\bar{\bar{Z}}(\nu)\right|\int_0^T\beta_\kappa(t)dt,$$

$$\bar{\bar{Z}}(\nu)=\begin{vmatrix}1-\nu\Delta_{11} & \nu\Delta_{12} & \dots & \nu\Delta_{1p}\\ \nu\Delta_{21} & 1-\nu\Delta_{22} & \dots & \nu\Delta_{2p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \nu\Delta_{p1} & \nu\Delta_{p2} & \dots & 1-\nu\Delta_{pp}\end{vmatrix},\quad \Delta_{ij}=\int_0^T\beta_i(s)\int_0^s\alpha_j(\theta)\,d\theta ds.$$

It is not difficult to check that from (38) we obtain

$$\|x(t,\nu,\lambda_1)-x(t,\nu,\lambda_2)\|_{C[0,T]}\le M_4|\lambda_1-\lambda_2|+\rho\cdot\|x(t,\nu,\lambda_1)-x(t,\nu,\lambda_2)\|_{C[0,T]}, \qquad (39)$$

where

$$M_4=M_0\left[L_1|\varphi_1|+(L_1+L_{04})|\varphi_2|+(L_1+L_{05})|\varphi_3|\right]+$$

$$+|\nu|M_0\delta_0L_{04}+\frac{|\nu|}{\sqrt[3]{\lambda_2}}M_0\delta_0L_1+\delta_0M_0^2\frac{|\nu|}{\sqrt[3]{\lambda_2}}\left[L_{04}+L_1\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_2}}\right]+$$

$$+M_0L_{04}T\left|F(t,\cdot)\right|+L_1\frac{T}{\sqrt[3]{\lambda_2}}\left|F(t,\cdot)\right|.$$

From the estimate (39) we obtain (33). Theorem 2 is proved.

Conclusion

It is considered a third order nonlinear Fredholm integro-differential equation (1) with initial value conditions (2) and with two real parameters ν, ω. A nonlinear Volterra-Fredholm functional integral equation (27) is derived. Theorem on a uniqueness and existence of the solution of initial value problem (1), (2) is proved for regular values of parameter ν. The method of compressing mapping is applied for the equation (27) in Banach space $C[0,T]$ of continuous functions. For the solution of the problem (1), (2) is studied continuous dependence on parameter λ.

We hope that this work can serve as a basis for further development of the theory of partial differential and integro-differential equations of the third and higher orders.

Reference

1. A. Anguraj, A. Vinodkumar, Global existence and stability results for partial delay integro-differential equations with random impulses, Filomat 37 (2023), No 1, 317-334. https://doi.org/10.2298/FIL2301317A
2. Zh. A. Artykova, R. A. Bandaliyev, and T. K. Yuldashev, Nonlocal direct and inverse problems for a second order nonhomogeneous Fredholm integro-differential equation with two redefinition data, Lobachevskii J. Math. 44 (2023), No 10, 4215-4230. https://doi.org/10.1134/S1995080223100050
3. S. N. Askhabov, On a second-order integro-differential equation with difference kernels and power nonlinearity, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series 106 (2022), No 2, 38–48. DOI 10.31489/2022M2/38-48
4. A. T. Assanova, A two-point boundary value problem for a fourth order partial integro-differential equation, Lobachevskii Journal of Mathematics 42 (2021), No 3, 526-535. https://doi.org/10.1134/S1995080221030082
5. A. T. Assanova and S. N. Nurmukanbet, A solvability of a problem for a Fredholm integro-differential equation with weakly singular kernel, Lobachevskii Journal of Mathematics 43 (2022), No 1, 182-191. https://doi.org/10.1134/S1995080222040047
6. N. Aviltay and M. Akhmet, Asymptotic behavior of the solution of the integral boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations, Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science 112 (2021), No 4, 13–28. https://doi.org/10.26577/JMMCS.2021.v112.i4.02
7. A. Bellour and Kh. Rouiban, Iterative continuous collacation method for solving nonlinear Volterra integro-differential equations, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. National Academy of Sciences of Azerbaijan 47 (2021), No 1, 99-111. https://doi.org/10.30546/2409-4994.47.1.99
8. V. F. Chistyakov and E. V. Chistyakova, Properties of degenerate systems of linear integro-differential equations and initial value problems for these equations, Differential Equations 59 (2023), No 1, 13-28. https://doi.org/10.1134/S0012266123010023
9. D. K. Durdiev and J. S. Safarov, Finding the two-dimensional relaxation kernel of an integro-differential wave equation, Diffential Equatations 59 (2023), No 2, 214-229. https://doi.org/10.1134/S0012266123020064
10. S. Iskandarov, Lower bounds for the solutions of a first-order linear homogeneous Volterra integro-differential equation, Differential. Equations 31 (1995), No 9, 1462-1466.
11. S. Iskandarov and G. T. Khalilov, On lower estimates of solutions and their derivatives to a fourth-order linear integro-differential Volterra equation, J. Math. Sci. (N. Y.) 230 (2018), No 5, 688-694.
12. N. A. Rautian and V. V. Vlasov, Spectral analysis of the generators for semigroups associated with Volterra integro-differential equations, Lobachevskii J. of Mathematics 44 (2023), No 3, 926-935.
13. Yu. G. Smirnov, On the equivalence of the electromagnetic problem of diffraction by an inhomogeneous bounded dielectric body to a volume singular integro-differential equation, Comput. Math. and Math. Physics 56 (2016), No 9, 1631-1640.
14. V. B. Vasilyev and Sh. H. Kutaiba, Asymptotic behavior of solution to some boundary value problem, Azerbaijan Journal of Mathematics 13 (2023), No 1, 51–61.
15. S. Yaghoubi, H. Aminikhaha, Kh. Sadri, An effective operational matrix method based on shifted sixth-kind Chebyshev polynomials for solving fractional integro-differential equations with a weakly singular kernel, Filomat 38 (2024), No 7, 2457-2486. https://doi.org/10.2298/FIL2407457Y
16. A. Yakar and H. Kutlay, Extensions of some differential inequalities for fractional integro-differential equations via upper and lower solutions, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series 109 (2023), No 1, 156-167. DOI 10.31489/2023M1/156-167
17. V. A. Yurko, Inverse problems for first-order integro-differential operators, Math. Notes 100 (2016), No 6, 876-882.

18. T. K. Yuldashev, Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type integro-differential equations, Axioms 9 (2020), No 2, ID 45, 1-21. https://doi.org/10.3390/axioms9020045
19. T. K. Yuldashev, On a boundary value problem for a fifth order partial integro-differential equation, Azerbaijan Journal of Mathematics 12 (2022), No 2, 154-172.
20. T. K. Yuldashev, Z. K. Eshkuvatov and N. M. A. Nik Long, Nonlinear Fredholm functional-integral equation of first kind with degenerate kernel and integral maxima, Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences 19 (2023), 82-92.
21. T. K. Yuldashev and A. K. Fayziyev, Inverse problem for a second order impulsive system of integro-differential equations with two redefinition vectors and mixed maxima, Nanosystems: Physics. Chemistry.Mathematics 14 (2023), No 1, 13-21. https://doi.org/10.17586/2220- 8054-2023-14-1-13-21
22. T. K. Yuldashev, and O. Sh. Kilichev, Inverse problem for a hyperbolic integro-differential equation with two redefinition conditions at the end of the interval and involution, Azerb. J. Math. 14 (2024), No 1, 3-22. https://doi.org/10.59849/2218-6816.2024.1.3
23. T. K. Yuldashev, F. D. Rakhmonov, On a Benney-Luke type differential equation with nonlinear boundary value conditions, Lobachevskii J. Math. 42 (2021), No 15, 3761-3772. https://doi.org/10.1134/S1995080222030210
24. G. V. Zavizion, Asymptotic solutions of systems of linear degenerate integro-differential equations, Ukr. Math. Journal, 55 (2003), No 4, 521-534.
25. T. K. Yuldashev and S. K. Zarifzoda, On a new class of singular integro-differential equations, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series 101 (2021), No 1, 138-148. https://doi.org/10.31489/2021M1/138-148
26. A. A. Boichuk and A. P. Strakh, Noetherian boundary-value problems for systems of linear integro-dynamical equations with degenerate kernel on a time scale, Nelineynye kolebaniya 17 (2014), No 1, 32-38. (in Russian)
27. D. S. Djumabaev and E. A. Bakirova, On one single solvability of boundary value problem for a system of Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel, Nelineynye kolebaniya 18 (2015), No 4, 489-506. (in Russian)
28. T. K. Yuldashev, Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel, Differential Equations 53 (2017), No 1, 99-108.
29. T. K. Yuldashev, Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integro-differential equation with degenerate kernel, Ukrain. Math. J. 68 (2017), No. 8, 1278-1296.
30. T. K. Yuldashev, On a boundary value problem for a fifth order partial integro-differential equation, Azerb. J. Math. 12 (2022), No 2, 154-172.
31. T. K. Yuldashev, Inverse problem for a nonlinear Benney-Luke type integro-differential equations with degenerate kernel, Russian Math. (Izv. vuz) 60 (2016), No 8, 53-60.
32. T. K. Yuldashev, Inverse boundary-value problem for an integro-differential Boussinesq-type equation with degenerate kernel, Journal of Mathematical Sciences (N. Y.) 250 (2020), No 5, 847–858. https://doi.org/10.1007/s10958-020-05050-2
33. T. K. Yuldashev, Determining of coefficients and the classical solvability of a nonlocal boundary-value problem for the Benney-Luke integro-differential equation with degenerate kernel, J. of Math. Sci. (N. Y.) 254 (2021), No 6, 793-807 (2021).
34. T. K. Yuldashev, Yu. P. Apakov and A. Kh. Zhuraev, Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel, Lobachevskii J. of Mathematics 42 (2021), No 6, 1317-1327.
35. T. K. Yuldashev, Zh. A. Artykova, and Sh. U. Alladustov, Nonlocal problem for a second order Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and real parameters, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. National Academy of Sciences of Azerbaijan 49 (2023), No 2, 228-242. https://doi.org/10.30546/2409-4994.2023.49.2.228
36. Т. К. Юлдашев, Ж. А. Артыкова, “Об одной однородной нелокальной задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка” // Вестник ОшГУ. Математика, Физика, Техника, 2023, № 1, 238-248 , https://doi.org.10.52754/16948645_2023_1_238

ТЕХНИКА

УДК 631:621.3.016.313
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_26

ИССЛЕДОВАНИЕ УРОВНЯ НЕСИММЕТРИИ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ АГРОПРОМЫШЛЕННОГО КОМПЛЕКСА

Абдиева Зарина Эдилбековна, старший преподаватель
zarinka8080@mail.ru
Международный университет инновационных технологий
Осмонов Ысман Джусупбекович, доктор т.н, профессор
osmonov.ysman@mail.ru
Кыргызский национальный аграрный университет имени К.И. Скрябина
Касмамбетов Хусейн Талантбекович, кандидат т.н, доцент
kusein@mail.ru
Кыргызский государственный технический университет имени Исхака Раззакова
Садыков Максат Амангельдиевич, кандидат ф.-м.н., доцент
sadmaks@mail.ru
Международный университет инновационных технологий
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *В статье проведены исследования уровней несимметрии на предприятии, проанализирована динамика показателя качества электрической энергии для различных периодов времени. Проведено исследование несимметрии с помощью современных многофункциональных средств измерений в течение нескольких суток. Выявлено несоответствие качества электрической энергии, получаемой потребителем, нормативным требованиям ГОСТ32144-2013, указаны наиболее вероятные виновники ухудшения качества. Проведены расчеты для установления средних величин несимметрии вида и параметров их вероятностного распределения.*

Ключевые слова: *качество электроэнергии, основные показатели электроэнергии, несимметрия, сельское хозяйство, электрификации сельского хозяйства.*

INVESTIGATION OF THE LEVEL OF ASYMMETRY AT THE ENTERPRISES OF THE AGRO-INDUSTRIAL COMPLEX

Abdieva Zarina Edilbekovna, senior lecturer
zarinka8080@mail.ru
International University of Innovative Technologies
Osmonov Isman Dzhusupbekovich, Doctor of Tech. Sc., Professor
osmonov.ysman@mail.ru
Kyrgyz National Agrarian University named after K.I. Scriabin
Kasmambetov Husein Talantbekovich, Candidate of Tech. Sc., Docent
kusein@mail.ru
Kyrgyz State Technical University named after Iskhak Razzakov
Sadykov Maksat Amangeldievich, Candidate of Ph. Math. Sc., Docent
sadmaks@mail.ru
International University of Innovative Technologies
Bishkek, Kyrgyzstan

Annotation. *The article studies the levels of asymmetry at the enterprise and analyzes the dynamics of the quality indicator of electrical energy for different periods of time. A study of asymmetry was carried out using modern multifunctional measuring instruments over several days. A discrepancy between the quality of electrical energy received by the consumer and the regulatory requirements of GOST 32144-2013 was revealed, and the most likely culprits for the deterioration in quality were identified. Calculations were carried out to establish the average values of the type of asymmetry and the parameters of their probability distribution.*

Keywords: *the quality of electricity, the main indicators of electricity, asymmetry, agriculture, electrification of agriculture.*

В настоящее время сельское хозяйство Кыргызстана находится в экономически нестабильном состоянии, которое характеризуется износом основных средств производства. Одним из основных направлений поддержания состояния сельского хозяйства на стабильном уровне является электрификация производственных процессов.

Большинство стационарных процессов сельскохозяйственного производства выполняется с использованием электрической энергии, которая может передаваться на большие расстояния и легко преобразовываться в энергию других видов. В сельском хозяйстве наибольшее распространение получили электропривод машин и механизмов, электрическое освещение помещений, облучение животных и птицы, дополнительное освещение при выращивании овощей в закрытом грунте, электрические и электротехнологические установки.

Значительная часть распределительных линий электропередачи были построены до начала 70-х годов. При этом не всегда учитывали требования надежности электроснабжения. Все еще велики потери электроэнергии при ее передаче. Недостаточное внимание уделяется автоматизации управления энергетическими установками, медленно внедряются электронные устройства и компьютерная техника.

Большое значение имеет комплексная автоматизация электрических сетей: защита от повреждений и нарушений нормальных режимов работы, повторное автоматическое включение линий, автоматический ввод резервного питания, выделение поврежденных участков, телесигнализация и телеуправление.

В сельском хозяйстве возникла необходимость применения современных систем автоматического управления технологическими процессами, которые при помощи электронных вычислительных машин не только автоматически управляли бы технологическими циклами на производственных объектах, но и выбирали оптимальный вариант производства, обеспечивающий минимальные трудовые затраты, наименьшую себестоимость продукции и наилучшее её качество.

В электрификации сельского хозяйства происходят качественные изменения электроэнергетической базы. Так, все объекты, относящиеся к первой и второй категории по обеспечению электрической энергией, имеют сложные сети внутреннего и внешнего электроснабжения от нескольких трансформаторных подстанций, присоединенных к различным районным электросетям. В основном все сельскохозяйственные потребители получают питание от линий напряжением 10 кВ или 35 кВ, реже 110 кВ.

Изменившиеся экономические условия, развитие научно-технологического прогресса, уменьшение численности работников, занятых в сельскохозяйственном производстве, требуют, с одной стороны, создания полностью механизированных и автоматизированных объектов, а с другой стороны - использование электроэнергии, уменьшение доли энергозатрат на производство единицы продукции. Всё это ведёт к развитию новой инфраструктуры сельскохозяйственного энергоснабжения.

В данной статье проведены исследования уровней несимметрии на предприятии, проанализирована динамика показателей качества электрической энергии для различных периодов времени.

Для определения состояния качества электрической энергии на предприятии применялся прибор «Ресурс-UF2».

Измерения производились в двух точках: на отходящей от КТП линии, питающей несколько птичников и на вводе птичника (рисунок 1).

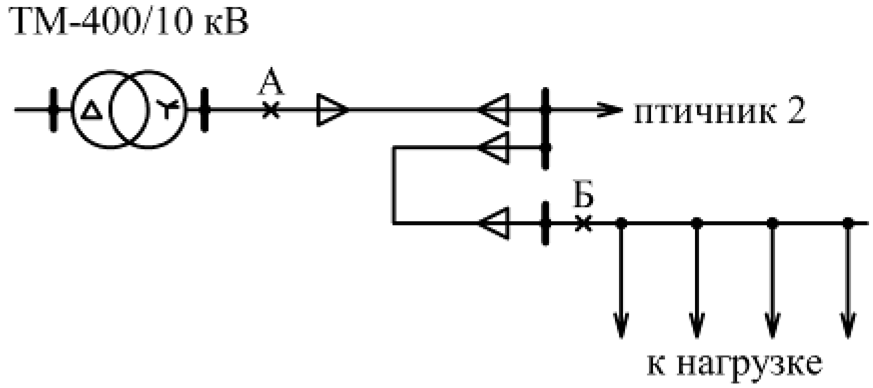


Рис. 1 – Место проведения измерений

Состояние качества электроэнергии по несимметрии. Исследование состояния качества электроэнергии проведено при помощи как аналитических методов, используемых для построения графиков и гистограмм, так и готовых табличных данных, рассчитанных прибором «Ресурс-UF2».

Для того чтобы получить гистограмму распределения, определим количество интервалов разбиения по формуле Стерджесса [4]:

$$k = 1 + \log_2 n, \tag{1}$$

где n – число измерений.

Для суточного графика с интервалом измерения $n = 24 \cdot 60 = 1440$, тогда $k = 1 + \log_2 1440 = 12.$

В рекомендациях [4] также указано, что «оптимальное» значение k зависит не только от объема выборки, но и от вида закона распределения и от способа группирования.

При асимптотически оптимальном группировании относительно скалярного параметра при 10, 11 интервалах в группированной выборке сохраняется около 98% информации, при оптимальном группировании относительно вектора параметров (два параметра) для 15 интервалов – около 95%. Дальнейшее увеличение числа интервалов существенного значения не имеет. Окончательно принимаем $k = 15.$

График и гистограмма коэффициентов несимметрии по нулевой и обратной последовательностям в точке А изображены на рисунках 2-5.

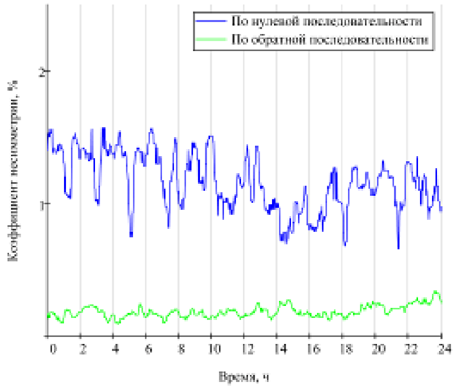


Рисунок 2 – Коэффициенты несимметрии

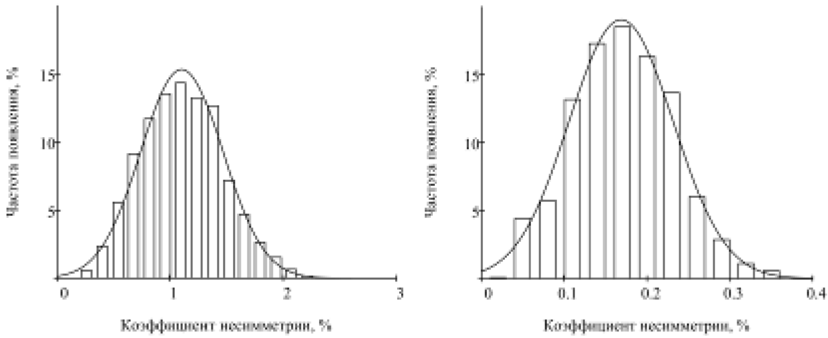


Рисунок 3 – Гистограмма коэффициентов несимметрии

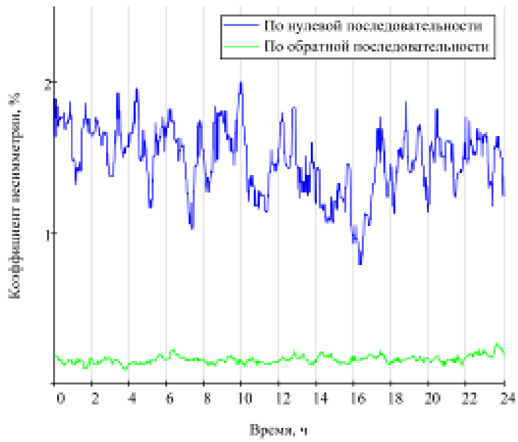


Рисунок 4 – Коэффициенты несимметрии

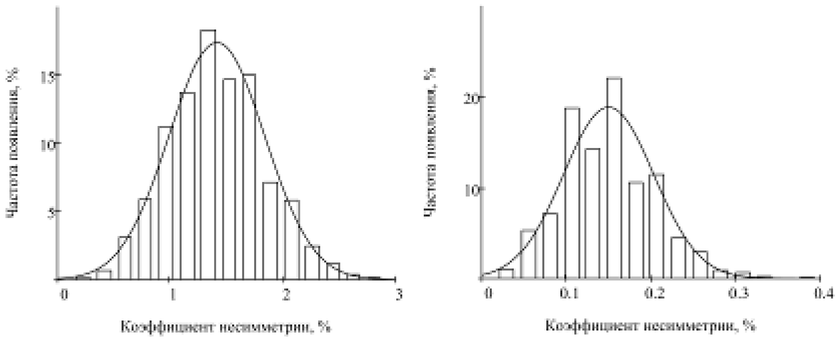


Рисунок 5 – Гистограмма коэффициентов несимметрии

Предположим, что коэффициенты несимметрии можно считать случайными величинами с нормальным распределением.

Получаем среднее значение коэффициентов несимметрии в точке А

$K_{0\ \text{ср}} = 1{,}17\ \%$,

$K_{2\ \text{ср}} = 0{,}18\ \%$

и их среднеквадратичное отклонение

$\delta K_{0\ \text{ср}} = 0{,}36\ \%$,

$\delta K_{2\ \text{ср}} = 0{,}06\ \%$.

Среднее значение коэффициентов несимметрии в точке Б

$K_{0\ \text{ср}} = 1{,}51\ \%$,

$K_{2\ \text{ср}} = 0{,}16\ \%$

и их среднеквадратичное отклонение

$\delta K_{0\ \text{ср}} = 0{,}42\ \%$,

$\delta K_{2\ \text{ср}} = 0{,}05\ \%$.

Проверим при помощи критерия согласия χ^2, удовлетворяет ли рассматриваемая величина нормальному закону распределения аналогично п. 2.1.

Для точки А получаем:

$\chi^2_{K_0} = 14{,}2$,

$\chi^2_{K_2} = 19{,}8$.

Для точки Б получаем:

$\chi^2_{K_0} = 15{,}6$,

$\chi^2_{K_2} = 20{,}8$.

Выполняется условие $\chi^2_{\text{кр}} > \chi^2$, следовательно гипотеза о нормальной распределенности коэффициентов несимметрии не противоречит материалу наблюдений.

Таблица 1 – Характеристика несимметрии напряжения в т. А

Несимметрия напряжения	Характеристика, %							
	по нулевой последовательности				по обратной последовательности			
	$K_{0\ \text{в}}$	$K_{0\ \text{нб}}$	T_1	T_2	$K_{2\ \text{в}}$	$K_{2\ \text{нб}}$	T_1	T_2
K	1,87	2,86	2,89	0,00	0,31	0,52	0,00	0,00
Нормативное значение K	2,00	4,00	5,00	0,00	2,00	4,00	5,00	0,00

Таблица 2 – Характеристика несимметрии напряжения в т. Б

Несимметрия напряжения	Характеристика, %	
	по нулевой последовательности	по обратной последовательности

	$K_{0\,в}$	$K_{0\,нб}$	T_1	T_2	$K_{2\,в}$	$K_{2\,нб}$	T_1	T_2
К	2,34	3,52	12,48	0,00	0,28	0,50	0,00	0,00
Нормативное значение К	2,00	4,00	5,00	0,00	2,00	4,00	5,00	0,00

Из результатов измерений следует, что коэффициент несимметрии напряжений по нулевой последовательности повышался более нормально допустимого уровня, но оставался в границах предельно допустимых значений.

Таким образом, коэффициент несимметрии по нулевой последовательности в точке Б выше, чем в точке А, а коэффициент несимметрии по обратной последовательности – ниже.

Выводы по соответствию качества напряжения нормативам:

- коэффициент несимметрии напряжений по нулевой последовательности повышался более нормально допустимого уровня, но оставался в границах предельно допустимых значений (время превышения в т. А – 40 мин, в т. Б – 3 ч).

В соответствии с приложением А [5], наиболее вероятными виновниками ухудшения качества электрической энергии является потребитель с несимметричной нагрузкой (коэффициент несимметрии).

Выводы по результатам расчетов: коэффициент несимметрии можно представить как нормально распределенные величины, следовательно в расчетах можно использовать вероятностные методы. Проанализировано состояние качества электрической энергии на предприятии сельскохозяйственного назначения. Выявлено несоответствие качества электрической энергии, получаемой потребителем, нормативным требованиям ГОСТ32144-2013, указаны наиболее вероятные виновники ухудшения качества.

Литература

1. Ополева Г.Н. Схемы и подстанции электроснабжения: Справочник: Учеб. пособие. / Г.Н. Ополева. – М.: Форум: Инфра-М, 2006. – 480 с.
2. Регламент по технологии откорма бройлеров при напольном выращивании. – ООО «Птицефабрика «Акашевская», 2011 – 12 с.
3. Кавтарашвили А.И. Проблема стресса в условиях интенсивного выращивания и эксплуатации птицы и пути ее решения / А.И. Кавтарашвили, Т.Н. Колокольникова // Животноводство России. – 2010. – №5. – С. 48.
4. Р 50.1.033–2001 Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа хи-квадрат. Переиздание 2006 г.
5. ГОСТ 13109–97. Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. – Взамен ГОСТ 13109–87; введ. 01.01.99. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 33 с.
6. Арриллага Дж. Гармоники в электрических системах / Дж. Арриллага, Н. Уотсон. – 2-е изд. – Чичестер: Изд-во «Вайли», 2003. – 391 с.

УДК: 631:621.31
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_27

РАЗВИТИЯ АВТОНОМНОГО ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ СЕЛЬСКИХ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ВОЗОБНОВЛЯЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Абдиева Зарина Эдилбековна, старший преподаватель
zarinka8080@mail.ru
Международный университет инновационных технологий
Осмонов Ысман Джусупбекович, доктор т.н, профессор
osmonov.ysman@mail.ru
Кыргызский национальный аграрный университет имени К.И. Скрябина
Касмамбетов Хусейн Талантбекович, кандидат т.н, доцент
kusein@mail.ru
Кыргызский государственный технический университет имени Исхака Раззакова
Садыков Максат Амангельдиевич, кандидат ф.-м.н., доцент
sadmaks@mail.ru
Международный университет инновационных технологий
Бишкек, Кыргызстан
Тампагаров Куштарбек Бекмуратович, доктор ф.-м.н.
tampagarovkak@mail.ru
Международный медицинский университет
Бишкек, Кыргызстан.

Аннотация. *В данной статье проведен краткий обзор энергетического сектора Кыргызской Республики. Рассмотрены способы автономного электроснабжения. Использование возобновляемых источников энергии может оказать положительное влияние на макроэкономические показатели страны путем снижения импорта фоссильных (традиционных) источников энергии, снижения стоимости энергии за счет ее выработки альтернативными источниками энергии. Кроме того, использование возобновляемой энергетики дает возможность получения новых рабочих мест, улучшает качество жизни путем получения доступа к энергии, что имеет социальную значимость. Кроме того, сокращение выбросов парниковых газов за счет использования альтернативной энергетики имеет особое значение в связи с глобальным потеплением и изменением климата.*

Ключевые слова: *Возобновляемые источники энергии, автономное электроснабжение, гидроэнергетика, сельское хозяйство, электрификации сельского хозяйства, система бесперебойного электроснабжения, системы автономного электроснабжения.*

DEVELOPMENT OF AUTONOMOUS POWER SUPPLY TO RURAL CONSUMERS BASED ON RENEWABLE ELECTRICITY SOURCES

Abdieva Zarina Edilbekovna, senior lecturer
zarinka8080@mail.ru
International University of Innovative Technologies
Osmonov Isman Dzhusupbekovich, Doctor of Tech. Sc., Professor
osmonov.ysman@mail.ru
Kyrgyz National Agrarian University named after K.I. Scriabin
Kasmambetov Husein Talantbekovich, Candidate of Tech. Sc., Docent
kusein@mail.ru

Kyrgyz State Technical University named after Iskhak Razzakov
Sadykov Maksat Amangeldievich, Candidate of Ph. Math. Sc., Docent
sadmaks@mail.ru
International University of Innovative Technologies
Tampagarov Kushtarbek Bekmuratovich, Doctor of Ph. Math. Sc.
tampagarovkak@mail.ru
International Medical University
Bishkek, Kyrgyzstan

Annotation. *This article provides a brief overview of the energy sector of the Kyrgyz Republic. Methods of autonomous power supply are considered. The use of renewable energy sources can have a positive impact on the country's macroeconomic indicators by reducing the import of fossil (traditional) energy sources and reducing the cost of energy due to its production by alternative energy sources. In addition, the use of renewable energy provides the opportunity to obtain new jobs, improves the quality of life by gaining access to energy, which has social significance. In addition, reducing greenhouse gas emissions through the use of alternative energy is of particular importance due to global warming and climate change.*

Keywords: *Renewable energy sources, autonomous power supply, hydropower, agriculture, electrification of agriculture, uninterruptible power supply system, autonomous power supply systems.*

Возобновляемые источники энергии (ВИЭ) стали неотъемлемой частью энергетического сектора Кыргызстана в условиях ограниченных природных ресурсов и как мера по адаптации к изменению климата. Несмотря на то, что в настоящее время тенденция использования ВИЭ в стране составляет всего 1% от общего энергетического баланса, все же есть большие перспективы разгрузить гидроэлектростанции страны за счет альтернативных источников энергии при грамотной установке и эксплуатации технологий ВИЭ.

С 2008 года вопросы ВИЭ регулируются государством в рамках закона КР «О ВИЭ» и все сопутствующие подзаконные акты, в том числе и новый Налоговый кодекс КР утвержденный в 2022 году, направлены на создание благоприятных условий через специальные поощрения и выгоды для поставщиков, например, освобождение от налогов и таможенных пошлин при импорте ВИЭ технологий.

С каждым годом вопросы относительно зеленых технологий становятся актуальной темой для обсуждения среди заинтересованных сторон и создают вектор для развития ВИЭ в Кыргызстане. А благодаря содействию международных организаций и донорской помощи, проводятся регулярные обсуждения на уровне министерств и ведомств, относительно нормотворческой базы и создания благоприятных условий для развития ВИЭ в стране.

Благодаря выгодному географическому положению и климатическим условиям, территория Кыргызстана получает в среднем в год от солнца 4,64 млрд. МВтч лучистой энергии или 23,4 кВтч на 1 кв. м, и является одним из развитых и перспективных направлений на сегодняшний день.

Одним из самых перспективных направлений в сфере возобновляемых источников энергии является малая гидроэнергетика Кыргызстана. Ресурсы малых рек республики освоены всего лишь на 3% и представляют собой привлекательную нишу для реализации инвестиционных возможностей. Сегодня общий гидроэнергетический потенциал Кыргызской Республики –составляет порядка 142,5 млрд кВтч. Наша Республика занимает третье место в СНГ после России и Таджикистана. Большими запасами гидроэнергоресурсов обладают реки Нарын, Сары-Джаз, Кокомерен, Чаткал, Тар, Чу, Кара-Дарья и Чон-Нарын.

Ветроэнергетика в Кыргызстане не востребована из-за низкой средней скорости воздушных потоков и высокой стоимости проекта. Использование ветровой энергии в республике предполагается путем использования небольших ветроэнергетических установок малой мощности 1-10 кВт для выработки электроэнергии и электроснабжения индивидуальных потребителей, расположенных в децентрализованных предгорных и отдаленных горных районах, там, где есть ветровой потенциал 10-12 м/сек (горные перевалы и ущелья). Наибольшее число дней с сильными ветрами - до 120 дней наблюдается лишь в районе города Балыкчы, а по другим местам колеблется до 40 дней. Для примера, рассчитаем срок окупаемости установки с мощностью 2 кВт, с потреблением 26 кВт в сутки, что составляет 19 лет при существующих базовых тарифах за электроэнергию 2,16 сома.

С каждым годом вопросы относительно зеленых технологий становятся актуальной темой для обсуждения среди заинтересованных сторон и создают вектор для развития ВИЭ в Кыргызстане. А благодаря содействию международных организаций и донорской помощи, проводятся регулярные обсуждения на уровне министерств и ведомств, относительно нормотворческой базы и создания благоприятных условий для развития ВИЭ в стране.

На сегодняшний день альтернативные источники энергии широко применяются для энергоснабжения объектов сельскохозяйственной отрасли. Предприятия, относящиеся к данному сегменту, являются основными потребителями ископаемых видов топлива. Соответственно, стоимость выпускаемой продукции непосредственно зависит от цен на эти ресурсы (в среднем, она составляет около 30-40% от общей стоимости продукта). Кроме того, деятельность сельскохозяйственных объектов способствует выделению большей части мировых выбросов парниковых газов. Использование солнечной и ветровой энергии позволит значительно сократить расходы на энергоснабжение и уменьшить риск негативного воздействия на окружающую среду. В удаленной сельской местности, где нередко происходят отключения электроэнергии, альтернативные источники станут залогом надежности ее подачи и бесперебойности рабочих процессов.

Одним из направлений, способствующим росту эффективности сельскохозяйственного производства, является разработка и внедрение систем бесперебойного электроснабжения (СБЭ), в состав которых входят системы автономного электроснабжения (САЭ), выполненные с использованием как традиционных, так и возобновляемых источников электроэнергии (ВИЭ). Такие системы должны иметь вводы от внешних электрических сетей.

Мировой опыт свидетельствует о высоких перспективах использования в сельском хозяйстве ВИЭ. Этому факту способствуют следующие основные причины:

- неограниченность ресурсов (потенциала);
- отсутствие вредных выбросов;
- сохранение теплового баланса на Земле;
- возможность создания комбинированных электростанций, использующих энергию солнца, ветра, падающей воды и т. п., в том числе, с использованием традиционных источников энергии.

Как правило, процесс проектирования САЭ от получения технического задания на систему до разработки рабочей документации и серийного (массового) производства состоит из следующих этапов:

1) формирование технического задания на САЭ, здесь осуществляется выбор источников, преобразователей электроэнергии, коммутационных аппаратов и других устройств, разрабатываются схемы их подключения, в том числе к другим системам, при необходимости;

2) определение основных показателей САЭ по критериям эффективности;

3) разработка электрических схем устройств САЭ, необходимых для выпуска рабочих чертежей;

4) корректировка технических решений, электрических схем и рабочих чертежей.

Одной из главных задач этапа предварительного проектирования САЭ является обоснование структуры системы, в том числе, применяемых в этой структуре функциональных узлов и их параметров. Основными факторами, определяющими целесообразность выбора структурно-схемного решения САЭ, являются предполагаемые условия, в том числе, режимы функционирования и требования, предъявляемые потребителями к параметрам электроэнергии.

Выбор наилучшего (оптимального) варианта структуры АЭ из множества принципиально возможных, на практике осуществляется на основании сравнительного анализа характеристик и показателей проектируемых систем. Обычно для многих САЭ на первых этапах разработки задаются основными электрическими параметрами и основными показателями критериев эффективности (для транспортных САЭ, прежде всего массогабаритные показатели, показатели надежности и КПД), другие характеристики относятся к ограничениям или часть показателей может не приниматься во внимание вообще. Такой принцип проектирования с одной стороны упрощает процесс разработки, а с другой стороны не позволяет создавать высокоэффективные САЭ. Однако, когда стоит задача о разработке САЭ, как правило, проектировщику известны требования потребителей к параметрам электроэнергии, условия их эксплуатации, поэтому в этом случае несколько упрощается задача по созданию оптимальной системы.

Создание же универсального структурно-схемного решения САЭ, которое было бы востребовано известными потребителями электроэнергии во всем своем многообразии, практически не представляется возможным. Так как такие системы содержали бы избыточное число устройств, блоков, элементов, обеспечивающих работу системы. Здесь представляется целесообразным разбить структурные решения САЭ на несколько групп, и для этих групп создавать универсальные схемы систем электроснабжения.

Так, к примеру, для транспортных САЭ в первую группу должны входить САЭ, которые предназначены для электроснабжения потребителей в основном постоянным током (потребляемая энергия постоянного тока, которыми составляет 70 % и более от установленной мощности САЭ). Очевидно, что такие системы должны содержать автономные источники постоянного тока. Однако значительно лучшие показатели эффективности, в этом случае, будут иметь САЭ, в которых применяются высокочастотные источники.

Ко второй группе следует отнести САЭ, которые предназначены для электроснабжения потребителей в основном переменным током (потребляемая энергия переменного тока, которыми составляет 70 % и более от установленной мощности САЭ). Здесь автономные источники должны генерировать напряжение промышленной частоты, за исключением тех случаев, когда основу составляют потребители с повышенной частотой тока.

В третью группу должна входить САЭ, где потребляемая мощность на постоянном и переменном токе примерно равномерно распределяется между потребителями. В этом случае необходимо проводить более глубокую оптимизацию САЭ с учетом требований потребителей по качеству электроэнергии и бесперебойности электроснабжения, а также обеспечения высоких показателей критериев эффективности системы.

На этапе проектирования СБЭ целесообразно рассмотреть возможные варианты структурно-схемных решений таких систем для оценки их по основным критериям эффективности, которыми являются экономические показатели, показатели надежности, КПД и качества электроэнергии.

Источниками электроэнергии, рассматриваемой системы, являются:

- внешняя электрическая сеть, которая может иметь один или два ввода
- возобновляемые источники: ветроэлектрические установки (ВЭУ), мини(микро) гидроэлектростанции (МГЭС) и солнечные электростанции (СЭ);
- дизельные электростанции (ДЭС) и газотурбинные станции (ГТС);
- аккумуляторные батареи (АБ) являются аварийным источником электроэнергии и предназначены для обеспечения непрерывного электроснабжения потребителей первой категории при переходе питания от одного источника к другому.

ВИЭ могут работать параллельно с внешней сетью, их мощность рассчитывается с учетом максимальной нагрузки потребителей. При отсутствии ветрового потока, напора воды или солнечной радиации (облачность или ночное время) источником питания для потребителей является внешняя сеть.

ДЭС и ГТС применяются в аварийных ситуациях и когда территориальные и климатические условия не позволяют использовать ВИЭ.

Автономность электроснабжения на современном этапе развития техники предполагает обеспечение бесперебойного электроснабжения ответственных потребителей без использования внешней сети. Поэтому САЭ должна содержать несколько АИЭ, как правило, это традиционные источники (ДЭС или ГТС) и ВИЭ, применение которых зависит от ландшафта местности и климатических условий.

Применению в настоящее время ВИЭ способствует тот факт, что значительно усовершенствована их конструкция и улучшились эксплуатационно-технические характеристики, как электромашинных генераторов, так и статических преобразователей, которые осуществляют функции преобразования и стабилизации параметров электроэнергии.

Одна из основных причин, сдерживающих применение ВЭУ, заключается в низком качестве вырабатываемой электроэнергии, обусловленном неравномерностью ветрового потока. Это приводит к значительному изменению частоты вращения ветроколеса, и соответственно колебаниям напряжения, частоты генерируемой электроэнергии и отдаваемой мощности в целом. Для улучшения показателей качества электроэнергии усложняется механическая часть конструкции ВЭУ, реагирующая на ветровые потоки. Здесь перспективным является направление использования непосредственных преобразователей частоты (НПЧ) в качестве стабилизатора параметров электроэнергии ВЭУ, что с одной стороны позволит упростить конструкцию механической части ветроагрегата, а с другой – повысить КПД ветроустановки.

Как известно, мощность МГЭС зависит от расхода и напора воды, на реках, размещённых на равнинах, нужны большие капиталовложения для создания плотины, водозаборных сооружений, гораздо выгоднее создавать МГЭС возле предгорных и горнах рек, которыми располагают горы Кавказа, где уже естественно природными условиями созданы большие напоры воды. Капиталовложения и эксплуатационные затраты в МГЭС, кроме того, меньше чем в ВЭУ.

Применение электростанций, преобразующих энергию солнца в электрическую энергию, является перспективным направлением поскольку в настоящее время уменьшилась стоимость фотоэлементов СЭ и, в перспективе, ожидается ее значительное уменьшение. Так, с 2000 по 2010 гг. удельная стоимость 1 кВтч вырабатываемой энергии снизилась более чем в 2 раза. В настоящее время тенденция снижения стоимости сохранилась.

Как известно, основными функциональными узлами СЭ являются фотоэлектрические модули (батареи), аккумуляторные батареи, зарядные устройства, инвертор, комплект коммутационных аппаратов и устройства защиты и автоматики. Автономные инверторы (АИ) предназначены для преобразования электрической энергии постоянного тока в переменный ток.

АИ, кроме преобразования электроэнергии, осуществляют функции стабилизации параметров электроэнергии и функции согласующих устройств, обеспечивающих параллельную работу автономных источников, втом числе, при необходимости, с внешней сетью. Стоимость АИ составляет примерно10 – 20 % стоимости СЭ. В настоящее время СЭ находят применение для электроснабжения электронной и

бытовой техники, заряда АБ, обеспечения бесперебойного электроснабжения ответственных потребителей, внутреннего и уличного освещения, заправочных станций, систем водоснабжения, а также применяются для электроснабжения потребителей в электродефицитных районах. Постоянное развитие элементной базы АИ происходит в направлении достижения более высоких показателей функциональных характеристик.

Таким образом, рельеф местности и климатические условия южных регионов Кыргызстана, способствуют широкому и эффективному внедрению ВИЭ в качестве резервных источников электроэнергии, что позволит, не нарушая экологической обстановки в крае уменьшить дефицит электроэнергии. Прогнозируя темпы роста стоимости электроэнергии, получаемой от традиционных источников электроэнергии, а также уменьшение стоимости элементной базы ВИЭ, можно предположить, что в 2020 г. стоимость электроэнергии, вырабатываемой ВИЭ уменьшится примерно в 1,5–2 раза. Кроме того, окупаемость ВИЭ будет составлять: МГЭС предгорных рек 1–2 года; ВЭУ 2–3 года; СЭ 3–4 года.

Литература

1. Министерство энергетики и промышленности Кыргызской Республики. Развитие возобновляемых источников энергии. Презентация, г. Бишкек, 2013г.
2. Общественный экологический фонд “ЮНИСОН”, Возобновляемые источники энергии. Справочное техническое руководство,г. Бишкек, 2006г
3. Закон «О возобновляемых источниках энергии» от 31 декабря 2008 года № 283
4. Постановление Правительства Кыргызской Республики от 30 октября 2020 года № 525 об утверждении Положения по условиям и порядке осуществления деятельности по выработке и поставке электрической энергии с использованием возобновляемых источников энергии
5. Григораш, О.В. Статические преобразователи электроэнергии систем автономного электроснабжения сельскохозяйственных потребителей. [Текст]: дис. д-ра.техн.н. / О.В. Гргораш. – Краснодар: КубГАУ, 2003. – С. 332.
6. Григораш, О.В. Возобновляемые источники энергии: состояние и перспективы / О.В. Григораш Ю.Г. Пугачев, Д.В. Военцов // Механизация и электрификация с.х. – 2007. – № 8.

КОНФЕРЕНЦИИ

УДК 51.53.004
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_28

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБРАЗОВАНИИ» (26-27 СЕНТЯБРЯ 2024 Г.)

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич , д-р физ.-мат. наук, профессор
kudayberdi.kozhobekov@mail.ru
Келдибекова Аида Осконовна, д-р пед. наук, профессор
akeldibekova@oshsu.kg
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В статье освещается знаменательное юбилейное событие - организованная кафедрой «Прикладная информатика и информационная безопасность» Института математики, физики, техники и информационных технологий Ошского государственного университета международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании», посвященная 70-летию со дня рождения и 50-летию научно-педагогической деятельности Заслуженного работника образования Кыргызской Республики, Лауреата премии Ленинского комсомола, кандидата физико-математических наук, доцента Абдувалиева Абдыганы Осмоновича. Изучение вклада Абдувалиева А. О. в развитие университета и отечественной математической науки выполнялось на основе его профессиональной биографии, позволяя оценить как организаторские способности, так и талант исследователя. Программа конференции, в целях формирования дискуссионной площадки для обсуждения актуальных вопросов интеграции математики, физики, техники, информационных технологий, включала мероприятия: проведение пленарного и секционных заседаний, экскурсии в значимые места университета и др.*

Ключевые слова: *международная научно-практическая конференция, юбилей, Абдыганы Абдувалиев, ОшГУ, физико-математические науки.*

«МАТЕМАТИКАНЫН, ФИЗИКАНЫН ЖАНА БИЛИМ БЕРҮҮДӨГҮ МААЛЫМАТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫНЫН АКТУАЛДУУ МАСЕЛЕЛЕРИ» АТТУУ ЭЛ АРАЛЫК ИЛИМИЙ-ПРАКТИКАЛЫК КОНФЕРЕНЦИЯ (2024-Ж. 26-27-СЕНТЯБРЫ)

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, физ.-мат. илимд. д-ру, профессор
kudayberdi.kozhobekov@mail.ru
Келдибекова Аида Осконовна, пед. илимд. д-ру, профессор
akeldibekova@oshsu.kg
Ош мамлекеттик университетинин профессору
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада Ош мамлекеттик университетинин Математика, физика, техника жана информациялык технологиялар институтунун "Колдонмо информатика жана информациялык коопсуздук" кафедрасы тарабынан уюштурулган, Кыргыз Республикасынын билим берүүсүнө эмгек сиңирген кызматкер, Кыргызстан Ленин комсомолу сыйлыгынын Лауреаты, физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент Абдувалиев Абдыганы Осмоновичтин туулган күнүнүн 70 жылдыгына жана илимий-педагогикалык ишмердүүлүгүнүн 50 жылдыгына арналган “Математиканын, физиканын жана билим берүүдөгү маалымат технологияларынын актуалдуу маселелери” аттуу эл аралык илимий-практикалык* *конференциядагы маанилүү юбилейлик окуя чагылдырылган. А. О. Абдувалиевдин университетти жана атамекендик математика илимин өнүктүрүүгө кошкон салымын изилдөө анын кесиптик өмүр баянынын негизинде жүргүзүлүп, изилдөөчүнүн уюштуруучулук жөндөмүн да, талантын да баалоого мүмкүндүк берди. Математика, физика, техника, маалыматтык технологиялар илимдерин интеграциялоонун актуалдуу маселелерин талкуулоо үчүн дискуссиялык аянтчаны түзүү максатында конференциянын программасы пленардык жана секциялык жыйындарды өткөрүү, университеттин маанилүү жерлерине экскурсия өткөрүү ж.б.*

Ачкыч сөздөр: *эл аралык илимий-практикалык конференция, юбилей, Абдыганы Абдувалиев, ОшМУ, физика-математикалык илимдер.*

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE "CURRENT PROBLEMS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES IN EDUCATION" (SEPTEMBER 26-27, 2024)

Kozhobekov Kudaiberdi Gaparalievich, d-r of Ph. and Math. Sc., Professor
kudayberdi.kozhobekov@mail.ru
Keldibekova Aida Oskonovna, d-r of ped. sciences, Professor
akeldibekova@oshsu.kg
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The article covers a significant anniversary event - the international scientific and practical conference "Actual problems of mathematics, physics and information technology in education" organized by the Department of Applied Informatics and Information Security of the Institute of Mathematics, Physics, Engineering and Information Technology of Osh State University, dedicated to the 70th anniversary of the birth and 50th anniversary of scientific and pedagogical activity of the Honored Worker of Education of the Kyrgyz Republic, Laureate of the Lenin komsomol prize, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor Abduvaliev Abdygany Osmonovich. The study of the contribution of Abduvaliev A. O. to the development of the university and domestic mathematical science was carried out on the basis of his professional biography, allowing to evaluate both the organizational skills and the talent of the researcher. In order to form a discussion platform for discussing current issues of integration of the sciences of mathematics, physics, engineering, information technology, the Conference Program included the following events: holding plenary and sectional sessions, excursions to significant places of the university.*

Keywords*: international scientific and practical conference, anniversary, Abdygany Abduvaliev, Osh State University, physical and mathematical sciences.*

Введение

В 2024 г. прошли юбилейные мероприятия, подводившие итоги 85-летней деятельности Ошского государственного университета (ОшГУ). Так, 31 мая 2024 г. состоялся международный бизнес-форум «Взаимодействие бизнеса, образования, науки и государственных органов: новые возможности и пути устойчивого развития» с участием Председателя Кабинета Министров, Министра внутренних дел, депутатов Жогорку Кенеша Кыргызской Республики.

География участников форума была широка и масштабна, в мероприятии приняли участие иностранные делегации, состоявшие из руководителей дипломатических посольств, 25 ректоров зарубежных вузов, более 200 партнеров из бизнес-сектора стран ближнего и дальнего зарубежья, в числе участников - ректоры и более 400 представителей 29 вузов Кыргызской Республики. В рамках форума подписаны соглашения ОшГУ с 6 вузами, 5 партнерскими учреждениями и предприятиями. Председатель Кабинета Министров Кыргызской Республики А. У. Жапаров, в приветственной речи к участникам конференции, подчеркнул значение форума как платформы для обмена передовыми знаниями, опытом, инновациями и технологиями, отметив вклад ОшГУ в развитие системы образования республики через объединение возможностей образования, науки, бизнеса и власти по выработке стратегий, направленных на устойчивое развитие республики.

ОшГУ, поставив целью вхождение в тройку лучших университетов Центральной Азии, делает последовательные шаги для преобразования классического образовательного учреждения в инновационно-исследовательский университет международного уровня (Абытов, 2024). Ведущей независимой международной организацией по составлению рейтингов Quacquarelli Symonds в июне этого года ОшГУ присвоено 4 звезды в категориях международного рейтинга вузов QS Stars: преподавание, академическое развитие и трудоустройство (Камчыбекова, 2024). Если в 2021 г. ОшГУ вошел в десятку, то в 2023 г. занял третье место, в 2024 г. - второе место в международном рейтинге «IAAR Eurasian University Ranking», оказавшись в тройке лучших вузов Евразии (Абдраева, 2024).

Институт математики, физики, техники и информационных технологий (ИМФТИТ), один из лучших структурных подразделений ОшГУ, поддерживая инновационную политику университета, ведет интенсивную исследовательскую деятельность, выступая организатором международных научных конференций (Келдибекова, 2023а), (Келдибекова, 2023б). В рамках юбилейных мероприятий, приуроченных к 85-летию ОшГУ, 26–27 сентября 2024 г. в ИМФТИТ (директор института - к.ф.-м.н., доцент Б. А. Азимов) состоялась международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании», посвященная 70-летию со дня рождения и 50-летию научно-педагогической деятельности Заслуженного работника образования Кыргызской Республики, лауреата Премии Ленинского комсомола, кандидата физико-математических наук, доцента Абдувалиева Абдыганы Осмоновича. Инициатором проведения конференции, с целью обеспечения дискуссионной площадки для обсуждения вопросов интеграции математики, физики, техники, информационных технологий в образовании, выступил коллектив кафедры «Прикладная информатика и информационная безопасность» (заведующий кафедрой - к.ф.-м.н., доцент У. З. Эркебаев), на которой трудится юбиляр.

Основное содержание

По существующей традиции остановимся на ключевых событиях научно-педагогической и управленческой деятельности виновника торжества.

Биография юбиляра

Абдувалиев Абдыганы Осмонович родился в августе 1954 года в Сузакском районе Джалал-Абадской области.

В 1970-1974 гг. – студент физико-математического факультета по специальности «математика» Ошского государственного педагогического института (ныне ОшГУ). С отличием окончив в 1974 г. учебу, приглашен на кафедру алгебры и геометрии в должности преподавателя. И с того времени его жизнь станет неразрывной с родным вузом.

В 1975-1976 гг. прошел службу в рядах Советской армии, исполняя гражданский долг, после продолжил преподавательскую деятельность на родном факультете до 1978г

В 1979-1982 гг. проходил обучение в аспирантуре Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, в 1984 г. успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотическое решение некоторых сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений» по специальности 01.01.02

«Дифференциальные уравнения и математическая физика» с присвоением ученой степени кандидата физико-математических наук.

В период 1983-1992 гг. трудился преподавателем, старшим преподавателем, доцентом кафедры математического анализа ОГПИ (ныне ОшГУ). В 1989 г. ему присвоено ученое звание доцента специальности «математический анализ» (г. Москва).

В университетской среде Абдыганы Осмонович известен как талантливый руководитель, обладающий лидерскими и организаторскими качествами, в разные годы занимавший ключевые позиции в ОшГУ. Его карьерному росту способствовало преобразование Ошского государственного педагогического института в Ошский государственный университет (ОшГУ) в 1992 г.

В 1992-1993 гг. А. О. Абдувалиев заведовал отделением математики, в 1997-1999 гг. заведовал кафедрой высшей математики и математической экономики

В 1999-2011 гг. А. О. Абдувалиев трудился деканом факультета математики и информационных технологий.

В 2011-2016 гг. занимал пост первого проректора по учебной работе и информатизации ОшГУ.

В период с 2016-2019 гг. являлся проректором по развитию и международным связям, с ноября 2019 г. по февраль 2024 г. возглавлял департамент международных связей университета.

За полувековую деятельность в сфере образования и науки А. О. Абдувалиев внес значительный вклад в инновационное развитие учебного процесса: инициировал создание девяти новых специальностей, основал компьютерный центр факультета с 18 компьютерными классами.

Под его руководством университет активно развивал международное сотрудничество, заключив соглашения с более 300 вузами-партнерами, заключены договора по 32 совместным образовательным программам, из которых реализуются 22 программы. Он координировал реализацию программ двойного диплома с российскими (Белгородский государственный университет, Томский государственный университет) и казахстанскими университетами (Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева) (Абдувалиев & Амиралиев, 2021). При его содействии ежегодно обучались за рубежом от 500 до 900 студентов по программам академической мобильности.

Многие из его последователей, впитав организационный опыт и командные методы работы своего наставника, успешно трудятся на руководящих должностях: директорами, заведующими кафедрами и отделами вуза. В настоящее время Абдыганы Осмонович плодотворно трудится доцентом кафедры прикладной информатики и информационной безопасности ОшГУ.

А. О. Абдувалиев ведет насыщенную научную деятельность, основными направлениями его исследований являются дифференциальные уравнения и их приложения, математическое моделирование в экономике, статистика, эконометрика. Является автором пяти учебно-методических пособий и более 50 научных статей, опубликованных в авторитетных изданиях: Дифференциальные уравнения (Абдувалиев, 1983a), Вестник МГУ им. М. Ломоносова (Абдувалиев, 1983b), Известия АН Киргизской ССР (Абдувалиев, 1988), Доклады Академии наук СССР (Абдувалиев, Розов & Сушко, 1989), Фундаментальная и прикладная математика (Абдувалиев, 1995), Вестник ОшГУ (Абдувалиев & Абдималик кызы, 2024) и др. Выступает с докладами по актуальным проблемам математики на международных конференциях (Abduvaliev, 2015a), (Абдувалиев, 2015b), участвует в международных форумах и семинарах России (Москва, 2007, 2009, 2013), (Новосибирск, 2013), Турции (Элазыг, 2009). В составе кыргызской делегации принял участие в работе Московского международного салона образования (ММСО, 2016), участвовал в международных проектах «EDUCA» (Магдебург, Германия 2014), «Эразмус+» (Испания, 2018), Великобритании, Франции, др. Является академическим советником Инженерной Академии Кыргызской Республики.

Неустанный труд юбиляра достойно оценен руководством университета и страны: за особый вклад в образование и науку Абдыганы Осмонович награжден Почетными грамотами губернатора и Ошской областной государственной администрации (2008 г.). Удостоен почетных званий «Лауреат премии Ленинского Комсомола Киргизии в области науки и техники» (1987 г.), «Отличник образования Кыргызской Республики» (2001), «Заслуженный работник образования ОшГУ» (2002), «Заслуженный работник образования Кыргызской Республики» (2023) за вклад в развитие социально-экономического, интеллектуального и культурного потенциала страны и достижения в профессиональной деятельности.

Научные мероприятия, проведенные в рамках конференции

В международном программном и организационном комитетах международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании» приняли участие авторитетные зарубежные ученые России: заведующий кафедрой Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, доктор физико-математических наук, профессор А. А. Давыдов (г. Москва), заведующий кафедрой Уфимского университета науки и технологий, доктор физико-математических наук, профессор З. Ю. Фазуллин (г. Уфа); профессора Республики Казахстан: доктор физико-математических наук, профессор Казахского Национального университета имени Аль-Фараби Б. Е. Кангужин (г. Алматы), доктор физико-математических наук, профессор Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева Н. А. Бокаев (г. Астана), доктор физико-математических наук, профессор Казахстанского филиала Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова Е. Д. Нурсултанов (г. Астана); профессора Республики Узбекистан: доктор физико-математических наук, профессор Наманганского инженерно-строительного института Ю. П. Апаков (г. Наманган), доктор физико-математических наук, профессор Ташкентского государственного экономического университета Т. К. Юлдашев (г. Ташкент), а также PhD-доктора из дальнего зарубежья: профессор университета Пуатье Philippe Rogeon (Франция), профессор Марбургского университета Volkmar Welker (Германия).

Активное участие в научном мероприятии приняли отечественные деятели наук: заведующие лабораториями Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики, доктора физико-математических наук, профессоры А. Асанов, А. Б. Байзаков, С. Искандаров (г. Бишкек); проректор по учебной и научной работе Международного медицинского университета, доктор физико-математических наук, профессор К. Б. Тампагаров (г. Бишкек); доктор педагогических наук, профессор Международного Кувейтского университета Д. Бабаев (г. Бишкек); доктор педагогических наук, профессор Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева Ш. А. Алиев (г. Бишкек), директор института фундаментальных, прикладных исследований и инновационных технологий, доктор физико-математических наук, профессор Джалал-Абадского государственного университета имени Б. Осмонова К. С. Алыбаев, заведующий кафедрой ДжаГУ, доктор физико-математических наук, профессор А. М. Джураев, директор научно-исследовательского института Природопользования и новых технологий Баткенского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор М. М. Таиров; заведующие кафедрами Ошского технологического университета им. академика М. Адышева, доктора физико-математических наук, профессоры А. Дж. Сатыбаев, А. Ж. Аширбаева.

Непосредственное участие в организации конференции приняли коллеги по цеху, связанные многолетней совместной деятельностью: доктора физико-математических наук, профессора ОшГУ: член-корреспондент Национальной академии наук КР Г. Матиева, почетный академик Инженерной академии КР А. Сопуев, заведующий кафедрой естественных наук и математики А. Ы. Курбаналиев, профессор кафедры прикладной информатики и информационной безопасности А. М. Сайипбекова, профессор кафедры экспериментальной и теоретической физики Ы. Ташполотов, доктор технических наук, профессор И. Г. Кенжаев, кандидат физико-математических наук, доцент Ж. Э. Эгембердиев, кандидат педагогических наук, доцент М. Алтыбаева, директор Высшей школы международных образовательных программ ОшГУ, доктор физико-математических наук, профессор Д. А. Турсунов, заведующая кафедрой технологии обучения математике, информатике и образовательный менеджмент, доктор педагогических наук, профессор А. О. Келдибекова (Программа конференции).

Пленарное заседание конференции началось со вступительного слова ректора ОшГУ, доктора физико-математических наук, профессора К. Г. Кожобекова. С приветственной речью к участникам научного мероприятия обратились почетные гости конференции, представители разных ветвей власти: депутат Жогорку Кенеша А. Т. Маткеримов, заместитель полномочного представителя Президента в Ошской области И. А. Ташбаев, вице-мэр г. Ош С. К. Джунусбаев, заместитель главы Сузакской районной государственной администрации А. К. Маматжанов, директор департамента дорожного хозяйства при Министерстве транспорта и коммуникаций К. К. Абдыкалыков.

Представители дипломатических посольств соседних республик в г. Ош: генеральный консул Республики Узбекистан З. Ш. Ахмедов, генеральный консул Республики Казахстан М. А. Карибай, заместитель руководителя представительства Россотрудничества Д. Н. Аврам отметили заслуги юбиляра в укреплении академического сотрудничества между странами.

В своих приветственных выступлениях отметили вклад А. О. Абдувалиева в развитие образования академик НАН КР, доктор химических наук, профессор Б. М. Мурзубраимов, ректор Ошского государственного педагогического университета им. А. Ж. Мырсабекова, доктор педагогических наук, профессор Б. Б. Зулуев, ректор Кыргызско-Узбекского международного университета имени Б. Сыдыкова, доктор экономических наук, профессор А. А. Мамасыдыков.

Научная программа международной конференции включала пленарные, секционные и стендовые доклады по 5 направлениям, тезисы которых были опубликованы к началу конференции (Тезисы докладов, 2024):

1. Дифференциальные и операторные уравнения, оптимальное управление.
2. Геометрия и топология.
3. Методика преподавания математики, информатики, информатизации образования.
4. Информационные технологии, цифровые решения.

5. Физико-технические проблемы материаловедения и энергетики.

С пленарными докладами выступили профессор Казахского Национального университета имени Аль-Фараби Б. Е. Кангужин по теме: «Дельта-образные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере», профессор МГУ им. М. Ломоносова А. А. Давыдов: «Стационарные состояния нелокальной кпп-модели и их оптимизация», профессор Марбургского университета Volkmar Welker: «Some results and conjectures on posets of partial decompositions».

Пленарное заседание конференции завершилось присуждением заведующему лабораторией Института математики НАН КР, доктору физико-математических наук, профессору Самандару Искандарову звания «Почетный профессор ОшГУ».

Для обеспечения участия широкого круга заинтересованных лиц, в очном и дистанционном форматах, организованы слушания 8 секционных заседаний по различным актуальным проблемам направлений: дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, геометрии, топологии, физики и техники, математического и компьютерного моделирования, методики преподавания математики и информатики, на которых заслушано около 150 докладов. В общей сложности в работе конференции приняли участие более 200 специалистов в области физико-математических и методических наук - ученые, аспиранты и преподаватели высших учебных заведений Кыргызстана, России, Казахстана, Узбекистана, Франции, Германии.

Конференция завершилась обсуждением итогов секционных слушаний, принятием резолюции, посещением гостями значимых мест университета и города.

Резолюция конференции

Участники конференции, обсудив итоги пленарных, секционных заседаний и дискуссий, постановили:

- акцентировать внимание молодых ученых на решениях приоритетных прикладных проблем математики, физики, техники, экономики, экологии, энергетики и IT-технологий в интегрированной исследовательской деятельности научных организаций, школ, вузов разных стран;
- усилить научную направленность исследований, касающихся IT-технологий;
- уделить внимание подготовке высококвалифицированных научно-педагогических кадров, отвечающих требованиям современности;
- продолжать развитие критического и системного мышления студентов и магистрантов в процессе преподавания STEM-дисциплин; широко использовать информационные и коммуникационные технологии, способствующие взаимодействию участников образовательного процесса и обеспечению доступа к информационным источникам, осуществлять эффективный мониторинг результатов этого процесса;
- создать при ИМФТИТ постоянно действующую школу олимпийского резерва по подготовке школьников г. Ош и южных областей республики к олимпиадам по математике, информатике и физике с привлечением тренеров сборной КР, имеющих положительный опыт участия в международных олимпиадах.

Выводы

Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании», проведенная в рамках юбилейных мероприятий к 85-летию ОшГУ, посвящена 70-летию со дня рождения и 50-летию научно-педагогической деятельности Заслуженного работника образования

Кыргызской Республики, лауреата премии Ленинского комсомола Кыргызстана, кандидата физико-математических наук, доцента Абдувалиева Абдыганы Осмоновича. Выступления участников конференции, теплые дружеские воспоминания его сокурсников, соратников, коллег и друзей освещают вклад юбиляра в подготовку молодых педагогических и управленческих кадров, в развитие родного университета и отечественной математической науки.

География участников конференции - видных ученых-математиков из России, Казахстана, Узбекистана, Франции, Германии подтверждает актуальность её темы. Участники отметили высокий уровень организации и проведения мероприятия, способствующего объединению научного потенциала образовательных и исследовательских организаций различных стран. Были выделены современные проблемы и направления математической науки и образования.

В резолюции конференции акцентируется, что с повышением роли математики и математического образования, перспективные научные разработки и проекты должны стать основным элементом технического перевооружения и инновационного развития, создать базис модернизации и повышения эффективности развития государства, отмечена необходимость развития фундаментальных и прикладных исследований.

Организация конференций с участием не только отечественных и зарубежных деятелей науки, образования, но и общественности подтверждает направленность Ошского государственного университета на интеграцию науки и образования. А мы еще раз поздравляем уважаемого Абдыганы Осмоновича с прекрасной датой, в которой отражена мудрость, знания, жизненный опыт. Желаем юбиляру крепкого здоровья, долгих лет плодотворной деятельности на благо родного университета и Кыргызстана.

Благодарности

От лица оргкомитета конференции выражаем глубокую благодарность членам международного программного и организационного комитетов, нашим коллегам из зарубежных и республиканских вузов, всем гостям, принявшим участие в конференции.

Литература

1. Абдраева С. (2024) ОшГУ вошел в тройку передовых вузов Евразии. Кабар, 14.10.24. [Электронный ресурс]. URL: https://kabar.kg/news/oshgu-voshel-v-troiku-peredovykh-vuzov-evrazii/
2. Абдувалиев А.О. (1983а) Асимптотическое решение краевых задач для сингулярно возмущенных линейных и квазилинейных уравнений второго порядка. Дифференциальные уравнения, 6(19), 1096-1097.
3. Абдувалиев А.О. (1983b) Об одной задаче О. А. Олейник. Вестник Московского университета, серия I: Математика и механика, 2, 42-45.
4. Абдувалиев А.О. (1988) Асимптотические приближения решений краевых задач для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при одной из производных. Известия АН Киргизской ССР: Физико-технические и математические науки, 2, 12-15.
5. Абдувалиев А.О., Розов Н.Х., Сушко В.Г. (1989) Асимптотические представления решений некоторых сингулярно возмущенных краевых задач. Доклады Академии наук СССР, Москва: ФГБУ "Наука", 4(304), 777-780.
6. Абдувалиев А.О. (1995) Асимптотические разложения решения задачи Дарбу для сингулярно возмущенных гиперболических уравнений. Фундаментальная и прикладная математика, Т.1. №4, 863-869.
7. Abduvaliev A.O. (2015a) A priori estimates of solutions boundary value problems for linear singularly perturbed second order differential equations. Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bozteri, Kyrgyzstan, June 24-27, 1.
8. Абдувалиев А.О. (2015b) Асимптотическое приближение решения задачи Трикоми для сингулярно возмущенного уравнения смешанного типа. Труды XI международной азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем», Чолпон-Ата, 27 июль-7 августа, 9-16.

9. Абдувалиев А.О., Абдималик кызы А. (2024) Асимптотические приближения решений краевых задач для сингулярно возмущенных квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Вестник Ошского государственного университета, 2, 345-353.
10. Абдувалиев А.О., Амиралиев С.М. (2021) Академическая мобильность: проблемы и пути их решения (на опыте Ошского государственного университета) // В сборнике: Функциональная грамматика: теория и практика. сб. научных статей по итогам Всероссийской с международным участием научно-практической конференции, посвященной 70-летию со дня рождения доктора филологических наук, профессора Л. Н. Оркиной. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 432-437.
11. Абытов Б. К. (2024) ОшГУ на пути трансформации: от юбилея к юбилею. Вестник Ошского государственного университета, (2), 236-253.
12. Камчыбекова И. (2024). Два университета Кыргызстана получили в мировом рейтинге 4 звезды. Кабар, 7.06.2024. [Электронный ресурс]. URL: https://kabar.kg/news/dva-universiteta-kyrgyzstana-poluchili-v-mirovom-reitinge-4-zvezdy/
13. Келдибекова А.О. (2023a) Международная научная конференция "Актуальные проблемы математики и образования" (12-13 мая 2023 г.). Вестник Ошского государственного университета. Педагогика. Психология. № 1 (2). С. 88-90.
14. Келдибекова А.О. (2023b) Международная научно-методическая конференция XI Назаровские педагогические чтения: "Интеграция целей устойчивого развития в математическое образование" (13-14 октября 2023 г.). Вестник Ошского государственного университета. Педагогика. Психология. № 2 (3). С. 6-14.
15. Программа конференции [Электронный ресурс]. URL: https://abduvaliev-70.oshsu.kg/index-ru.php
16. Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании» 26-27 сентября 2024 года. ОшГУ: "Билим", 2024. 168 с.

«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ»

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА.

ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ

Техникалык редактор: ***Омаралиева Г.А., ф.-м.и.к.***

ОшМУнун “Билим” редакциялык басма бөлүмүндө даярдалып, басмадан чыгарылды.

Биздин дарегибиз: 723500, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331.

Байланыш телефондору: (+996 3222) 7-22-73

Факс: (+996 3222) 7-09-15

Электрондук дарегибиз: journal-@oshsu.kg

Сайт: www.oshsu.kg

Негиздөөчүсү – КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

Басууга берилди: 30.10.2024

Көлөмү: 26,7 б.т. Буюртма: ____

Форматы: 176x250 1/8 Нуска: 200 д.

«Билим» редакциялык – басма бөлүмү