e-ISSN 1694-8645

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

BULLETIN OSH STATE UNIVERSITY
MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES

№1(4) (2024)

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН

ЖАРЧЫСЫ

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

Илимий журнал

№1(4), 2024

ВЕСТНИК

ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

Научный журнал

BULLETIN

Osh State University

MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 917.928

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫНЫН ЧЕЧИМИН ИЗИЛДӨӨ

Абдилазизова Акбермет Абдижалиловна, улук окутуучу
abdilazizovaa@mail.ru
Ош Мамлекеттик Университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Бул жумушта сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системасынын чечими изилденген. Туруктуулук шарты алмашкан учурда сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн Кошинин баштапкы маселеси каралган. Диагоналдык матрица комплекстик түйүндөш өздүк маанилерге ээ, алар гиперболалык функциялар. Сингулярдык аймак аныкталган жана ал аймак үчүн баалоо алынган. Козголгон жана козголбогон маселелердин чечимдеринин жакындыгы далилденген.*

Түйүндүү сөздөр: *матрица, аналитикалык фунция, ийри сызыктуу төрт бурчтук, сингулярдык козголуу, теңдемелер системасы, матрицанын өздүк маанилери, асимптотика, бир калыпта жакындашуу.*

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Абдилазизова Акбермет Абдижалиловна
старший преподаватель
abdilazizovaa@mail.ru
Ошский Государственный Университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной работе исследовано решение сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений. Рассматривается начальная задача Коши для сингулярно возмущенной систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости. Диагональная матрица имеет комплексно сопряженные собственные значения, они гиперболические функции. Определена сингулярная область и на этой области получена оценка. Доказывается близости решений возмущенной и невозмущенной задачи.*

Ключовые слова: *матрица, аналитическая функция, криволинейный четырехугольник, сингулярное возмущение, система уравнении, собственные значения матрицы, асимптотика, равномерные приближения.*

TO INVESTIGATE OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abdilazizova Akbermet Abdijalilovna, Senior Lecturer
abdilazizovaa@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *In this paper uniform approximations are investigated for solving singularly-perturbed system of differential equations. Initially problem of Cauchy for singular perturbed system of ordinary differential equations in the case of change of stability is considered. The diagonal matrix has complex conjugate eigenvalues, they are hyperbolic functions. A singular domain is determined and an estimate is obtained on this area. The proximity of the solution of perturbed and undisturbed problem is proved.*

Keywords: *matrix, analytic function, curved quadrilateral, singularly perturbed, system of equations, eigenvalues of a matrix, asymptotic, uniform approximations.*

Киришүү. Сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер колдонмо математиканын бардык бөлүгүндө кездешет. Бул макалада сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасынын чечими жана А.Н. Тихоновдун пределдик өтүү жөнүндөгү теоремасынын орун алышы каралган.

Маселенин коюлушу. Төмөнкү теңдемелердин системасы берилсин:

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=D(t)\,x(t,\varepsilon)+\varepsilon f\,\big(t,x(t,\varepsilon)\big), \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon),\ \left\|x^0(\varepsilon)\right\|=O(\varepsilon), \tag{2}$$

Мында $\varepsilon>0-$ кичине параметр; $D(t)=diag\big(\lambda_1(t),\lambda_2(t)\big)$, $\lambda_1(t)=sht+icht,$ $\lambda_2(t)=sht-icht$, $f(t,x(t,\varepsilon))=colon(f_1(t,x(t,\varepsilon)),f_2(t,x(t,\varepsilon)))$, $f(t,0)\equiv 0;$

Төмөндөгү шарттар аткарылсын:

U 1. $[t_0,T_0]-$ чыныгы сан огундагы кесинди $(t_0<T_0)$; $[t_0,T_0]\subset S_r-$ $r\geq\frac{1}{2}|T_0-t_0|+d$ $(d>0)$ радиустуу, борбору $((T_0+t_0)/2,0)$ чекитинде жаткан ачык шар, $t\in S_r$. $\Phi(S_r)-$ S_r де аналитикалык функциялардын мейкиндиги.

U 2. $f_k\big(t,x(t,\varepsilon)\big)\in\Phi(S_r)$ $(k=1,2);$

$x(t,\varepsilon)=colon(x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon))$ чечимин $\Phi(S_r)$ классынан t боюнча издейбиз.

Теорема. U 1-U 2 шарттары аткарылсын, анда (1), (2) маселенин $t_0\leq t\leq -t_0-\alpha(\varepsilon)$ аралаганды жалгыз чечими жашайт жана $\left\|x(t,\varepsilon)\right\|\leq c\omega(\varepsilon),$ баалоосу орун алат, мында $\alpha(\varepsilon)$ - монотондуу кемүүчү функция жана $\alpha(0)=0,$ $0<c-const.$

$$\omega(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon, & t_0\leq t\leq -t_0-\alpha(\varepsilon);\\ \sqrt{\varepsilon}, & t=-t_0-\alpha(\varepsilon).\end{cases}$$

Далилдөө. Туруктуулук шарты алмашкан интервалдарын аныктайбыз.
Туруктуулук шартынан $\operatorname{Re}\lambda_1(t)=\operatorname{Re}\lambda_2(t)<0,\ \ sht<0$ же $-\infty<t<0,$ мындан
$t\in(-\infty,0)$ -туруктуу интервал,
$t\in(0,+\infty)$ -туруксуз интервал,
t=0 – туруктуулук алмашкан чекит,
t_0 - туруктуу интервалга тиешелүү чекит болот, б.а. $t_0\in(-\infty,0).$
$-t_0=\ln(\sqrt{2}-1),t_0=-0.88137366.$ Бул жерде кармалуу убактысы $\delta:\delta=|t_0|$. Бул максималдуу кармалуу убактысы болуп эсептелет.

Өздүк маанинин нөлдөрү мезгили 2π болгон $(0t_2)$ огуна карата мезгилдүү экендигин көрүүгө болот. Натыйжада, изилденген аймак да $(0t_2)$ огунда 2π мезгилдүү. Бирок, биз (Ot_1) огун кармаган аймагын алабыз.

Алгач (1), (2) маселени ага эквиваленттүү болгон интегралдык тендемелер системасы менен алмаштырып алабыз:

$$x(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)\,f(\tau,x(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

мында $E(t,t_0,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}D(s)ds\right)$, $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t}D(s))ds$. Бул теңдемелер системасы удаалаш жакындашуулар методунун жардамында чыгарылат:

$$x^{(n)}(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,x^{(n-1)}(\tau,\varepsilon))d\tau\ ;\ x^{(0)}(t,\varepsilon)\equiv 0$$

Жакындашуулар үчүн интегралдоо жолдору

$H_0=\left\{(t_1,t_2):u_k(t_1,t_2)=\mathrm{Re}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds\le 0, k=1,2\right\}$ аймагынан алынат.

Туруктуулук шарты алмашкан аралыкта $t\in[0,t_0]$, $(cht-ch\tau)$ – белгиси оң, терс же нөлгө барабар болушу мүмкүн. Изилдөөдө чыныгы сандар талаасы жетишсиз болот. Ошондуктан, изилдөөнү комплекстик өзгөрмөлөр талаасында улантабыз.

$t=t_1+it_2, \tau=\tau_1+i\tau_2,$ мында $t_1,t_2,\tau_1,\tau_2\in R$ болсун.

Төмөнкүгө ээ болобуз:

$$u(t_1,t_2)=\mathrm{Re}\int\limits_{t_0}^{t_1+it_2}\lambda_1(s)ds=\left[\sqrt{2}cht_1\cos\left(t_2+\frac{\pi}{4}\right)-c\right],$$

Интегралдоо жолдору, $(t_0,0)$ жана (t_1,t_2) чекиттерин бириктирген L – интегралдоо жолдору болот. L үч жолдон турат, б.а., $L=L_1\cup L_2\cup L_3$ удаалаш түрдө төмөнкү чекиттерди бириктирет:

$$(-t_0,0),\ \left(-t_0,\frac{\pi}{4}\right),\ \left(t_1,\frac{\pi}{4}\right),\ (t_1,t_2).$$

Интегралдоо жолдорунда жакындашуулар бааланып, (1), (2) маселенин чечими үчүн төмөндөгү баа орун алат:

$$|x(t,\varepsilon)|\le c\omega(t,\varepsilon).$$

Мында $c>0$ – туруктуу сан, $\omega(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon,\ t_0<t\le -t_0-\alpha(\varepsilon);\\ \sqrt{\varepsilon},\quad t=t_0.\end{cases}$

$\alpha(\varepsilon)$ - монотондуу кемүүчү функция жана $\alpha(0)=0$.

Адабияттар

1. Алыбаев, К.С. Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев // – Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек. 2001. – 204 с.
2. Анарбаева Г.М. Исследование решение сингулярно возмущенной задачи в неограниченном областе. [Текст] / Анарбаева Г.М., А. Абдилазизова // Математические методы в технике и технологиях . 2020. – Т. 12-3. – С. 7-11.
3. Абдилазизова, А.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае смены устойчивости. [Текст] / А.А. Абдилазизова // Евразийское Научное Объединение .– Москва. 2021. – № 7-1 (77). – С. 1-3.

УДК 515.123.4

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НАРОСТОВ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Абдыкаимов Илларион Захидович, аспирант
interstruirovanie@gmail.com
Институт математики НАН КР
Бишкек, Кыргызстан Бишкек

Аннотация. *Смирновым Ю.М. введены такие понятия, как: «ко-покрытие» и «окаймление». Во многих работах Смирнова Ю.М. выведены важные утверждения и теоремы, описывающие свойства наростов равномерных пространств на основе свойств самих пространств и наоборот. Также учёным выявлены важные случаи применения таких понятий как в общих, так и в некоторых частных случаях. Эти понятия играют ключевую роль в современных исследованиях свойств наростов равномерных пространств. Ниже кратко приведены самые основные утверждения работы.*

Ключевые слова: *равномерное пространство, нарост, база равномерности, фильтр Коши, равномерная топология.*

БИР-КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН ӨСҮНДҮЛӨРҮНҮН БИР КАНДАЙ ӨЗГӨЧӨЛҮКТӨРҮ

Абдыкаимов Илларион Захидович, аспирант
interstruirovanie@gmail.com
КР УИА математиканын институту
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Смирнов Ю.М. «ко-жабдуу» деген түшүнүгү сыяктуу болгон маанилүү түшүнүктөрдү бир-калыптуу структура менен каралган мейкиндиктердин теориясына киргизген. Бул окумуштуунун иштеринин көбүндө бир калыптуу мейкиндердин өзгөчөлүктөрдүн негизинде булардын өсүндүлөрүнүн мейкиндиктеринин өзгөчөлүктөрүн жана тескересинче аныктаган маанилүү теоремалар чыгарылган. Ошондой да Смирнов Ю.М. ошондой түшүнүктөрдү колдонуунун түрдүү жалпы жана өзгөчө учурлары көрсөтүлгөн. Бул түшүнүктөр заманбап бир-калыптуу мейкиндиктердин өсүндүлөрүн изилдөөлөрдө урунттуу ролун ойношот. Биз бир нече аларды колдонуунун учурларын карап келгибиз келет.*

***Ачкыч сөздөр*:** *бир-калыптуу мейкиндик, өсүндү, бир-калыптуулуктун базасы, Кошинин фильтри, бир-калыптуу топология.*

SOME PROPERTIES OF GROWTHS OF UNIFORM SPACES

Abdykaimov Illarion Zakhidovich, post-graduate student
interstruirovanie@gmail.com
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic
Bishkek, Kyrgyzstan Bishkek

Abstract. *Smirnov Yu.M. such concepts as: "co-covering" and "bordering" are introduced. In many works of Smirnov Yu.M. important statements and theorems are derived that describe the properties of growths of uniform spaces on the basis of the properties of the spaces themselves and vice versa. The scientists also identified important cases of application of such concepts both in general and in some particular cases. These concepts play a key role in modern studies of the properties of outgrowths of uniform spaces. The most basic assertions of the work are briefly summarized below.*

Keywords: *uniform space, growth, base of uniformity, Cauchy filter, uniform topology.*

Теорема 1. Пусть (X, U) – равномерное пространство, $\tilde{\mathcal{F}}$ - множество минимальных фильтров Коши на (X, U), $\bar{\mathcal{F}} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ - множество фильтров окрестностей точек из (X, U). Тогда для того, чтобы нарост для (X, U) был метризуемым равномерным пространством необходимо и достаточно, чтобы существовало такое не более, чем счётное семейство равномерных покрытий $\mathcal{B} \subset U$, что: для любого $\alpha \in U$ существует такое $\beta \in \mathcal{B}$, что для любого $A \in \alpha$ найдётся такое $B \in \beta$, что:

$$\left(F \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \bar{\mathcal{F}}: (B) \in F\right) => (A) \in F.$$

Теорема 2. Пусть (X, U) – равномерное пространство, $\tilde{\mathcal{F}}$ - множество минимальных фильтров Коши на (X, U), $\bar{\mathcal{F}} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ - множество фильтров окрестностей точек из (X, U). Тогда для того, чтобы нарост для (X, U) имел базу, мощностью не превосходящую W, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое семейство равномерных покрытий $\mathcal{B} \subset U$, что оно по мощности не превышает W, и для любого $\alpha \in U$ существует такое $\beta \in \mathcal{B}$, что для любого $A \in \alpha$ найдётся такое $B \in \beta$, что:

$$\left(F \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \bar{\mathcal{F}}: (B) \in F\right) => (A) \in F.$$

Теорема 3. Если для любого такого не более, чем счётного семейства $\mathcal{B}$ попарно не пересекающихся подмножеств множества свободных фильтров Коши в (X, U), что существует отображение $S: U \to \cup \{\alpha: \alpha \in U\}$, удовлетворяющее для любого $\alpha \in U$ следующему условию:

$$S(\alpha) \in \alpha; \exists B \in \mathcal{B}: B \subset \{F' \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \bar{\mathcal{F}}: (S(\alpha)) \in F'\},$$

выполнено то, что:

$$\cap \left\{[S(\alpha)]_{(X,U)}: \alpha \in U\right\} = \emptyset \tag{1}$$

то пространство нароста для (X, U) будет $\aleph_0$- полным.

Обратно, если пространство нароста для (X, U) является $\aleph_0$ – полным, то для любого такого не более, чем счётного семейства $\mathcal{B}$ попарно не пересекающихся подмножеств множества свободных фильтров Коши в (X, U), что для любого $\alpha \in U$:

$\exists B \in \mathcal{B}, A \in \alpha: B \subset \hat{A} = P(A) = \{F' \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \bar{\mathcal{F}}: (A) \in F'\}$,

Выполнено (1).

Теорема 4. Если для любого такого семейства $\mathcal{B}$ мощности, не большей W, попарно не пересекающихся подмножеств множества свободных фильтров Коши в (X, U), что существует отображение $S: U \to \cup \{\alpha: \alpha \in U\}$, удовлетворяющее для любого $\alpha \in U$ следующему условию:

$S(\alpha) \in \alpha; \exists B \in \mathcal{B}: B \subset \{F' \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \bar{\mathcal{F}}: (S(\alpha)) \in F'\}$,

выполнено то, что:

$$\cap \left\{[S(\alpha)]_{(X,U)}: \alpha \in U\right\} = \emptyset, \tag{2}$$

то пространство нароста для (X, U) будет W - полным.

Обратно, если пространство нароста для (X, U) является W - полным, то для любого такого семейства $\mathcal{B}$, по мощности, не превышающего W, попарно не пересекающихся подмножеств множества свободных фильтров Коши в (X, U), что для любого $\alpha \in U$:

$\exists B \in \mathcal{B}, A \in \alpha: B \subset \hat{A} = P(A) = \{F' \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \bar{\mathcal{F}}: (A) \in F'\}$,

Выполнено (2).

Заключение

Для равномерных пространств получен необходимый и достаточный критерий, устанавливающий метризуемость равномерного пространства нароста. Также для равномерных пространств получено необходимое и достаточное условие того, чтобы равномерное пространство нароста обладало свойством секвециальной полноты.

Литература

1. Borubaev A.A. Uniformed topology and its applications. – Bishkek, “Ilim”, 2021 – 334 p.
2. Kanetov, B.E. Some classes of uniform spaces and uniformly continuous mappings. – Bishkek, 2013. – 160 p.

УДК 517.97

О СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ВЕКТОРНЫХ УПРАВЛЕНИЯХ

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна, к.ф.-м.н., доцент
efa_69@mail.ru
Кыргызско-Турецкий университет Манас
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *В статье исследован вопрос сходимости приближений обобщённого решения краевой задачи при векторных управлений. Установлено, что наличие интегрального оператора Фредгольма обуславливает появления приближений по резольвенте, который используется при доказательстве сходимости конечномерных приближений к точному решению.*

Ключевые слова. *краевая задача, обобщённое решение, интегральное тождество сходимость приближений.*

ВЕКТОРДУК БАШКАРУУ АЛДЫНДАГЫ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЖАЛПЫЛАНГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛЫШЫНЫН ЖЫЙНАЛУУЧУЛУГУ

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна, ф.-м.и.к., доцент
efa_69@mail.ru
Кыргыз-Түрк Манас университети.
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада вектордук башкаруу астындагы чектик маселенин жалпыланган чыгарылышынын жакындаштырылышы изилденген. Тендемеде Фредгольмдун интегралдык операторунун болушу, чектүү өлчөмдөгү жакындаштырылыштын так чыгарылышка жыйналуучулугун далилдөө үчүн колдонула турган, резольвент боюнча жакындаштырылылган чыгарылыш түшүнүгүн пайда кылаары тастыкталды.*

Ачкыч сөздөр. *Чектик маселе, жалпыланган чыгарылыш, интегралдык тендештик, жыйналуучулук, жакындаштырылыш.*

ON CONVERGENCE OF APPROXIMATIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEM`S GENERALIZED SOLUTION WITH VECTOR CONTROLS

Abdyldaeva Elmira Faizuldaevna, Candidate of Ph. and Math. Sc., associate professor
efa_69@mail.ru
Kyrgyz-Turkish Manas University
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *In the article, the convergence of approximations of generalized solution of the boundary value problem with vector controls has been studied. It is established that presence of Fredholm integral operator in the equation causes the appearance of resolvent approximations, which it is used in proving the convergence of the finite-dimensional approximations to the exact solution.*

Keywords. *Boundary value problem, generalized solution, Integral identity, convergence approximations.*

1. Введение (Киришүү, Introduction). Задачи оптимального управления системами с распределёнными параметрами появляются при исследовании процессов, описываемых уравнениями в частных производных, интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Фредгольма или Вольтерра. При этом учёт процессов, происходящих на границе и в начале процесса, приводит к краевой задаче. В теории управления исследование краевых задач проводится при наличии параметров под действием которых можно активно влиять на изменения состояния управляемого процесса. В данной статье исследованы вопросы построения обобщённого решения краевой задачи и его приближений, а также сходимости приближений при наличии векторных управлений.

Рассмотрим управляемый колебательный процесс, описываемый функцией $V(t,x)$, которая в области Q_T удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$V_{tt} - AV = \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau + f[t,x,\bar{u}(t,x)], \quad x\in Q\subset R^n, 0<t\le T, \tag{1}$$

а на границе области Q_T начальным

$$V(0,x)=\psi_1(x), \qquad V_t(0,x)=\psi_2(x), \quad x\in \mathrm{Q}, \tag{2}$$

и граничному

$$\Gamma V(t,x) \equiv \sum_{i,j=1,n}^{n} a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\cos(\delta,x_i) + a(x)V(t,x) = p[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)], x\in\gamma, 0<t\le T. \tag{3}$$

условиям. Здесь A–эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t,x)=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i} - c(x)V(t,x), \quad a_{ij}(x)=a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \ge c_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2, c_0>0,$$

а $a(x)\ge 0, c(x)\ge 0-$ известные измеримые функции; Q-область n-мерного евклидового пространства R^n ограниченная кусочно-гладкой границей γ, а $Q_T = Q\times(0,T]$, T-фиксированный момент времени; $K(t,\tau)$–заданная функция, она определена в области $D=\{0\le t\le T, \quad 0\le\tau\le T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau dt = K_0 < \infty, \tag{4}$$

т.е. является элементом гильбертово пространства квадратично суммируемых функций в $H(\mathrm{D})$; λ-параметр; $\psi_1(x)\in H_1(Q), \psi_2(x)\in H(Q),$ – заданные функции, определяющие начального состояния колебательного процесса, где $H_1(Q)$ – Соболева пространство первого порядка; $H(Q)$-гильбертово пространство квадратично – суммируемых в области Q функций; δ-вектор нормали исходящий из точки $x\in\gamma$; $f[t,x,\bar{u}(t,x)]$, $p[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]$ – заданные монотонные функциии внешнего и граничного источников. которые нелинейно зависят соответственно от вектор - функций управления $\bar{u}(t,x)=(u_1(t,x),...,u_m(t,x))\in H^m(Q_T)$, $\bar{\vartheta}(t,x)=(\vartheta_1(t,x),...,\vartheta_m(t,x))\in H^k(\gamma_T)$ и являются элементами пространства $H^m(Q_T)=H(Q_T)\times...\times H(Q_T)$, и $H^k(Q_T)=H(\gamma_T)\times...\times H(\gamma_T)$ соответственно.

При заданных исходных данных краевая задача (1)-(3) не имеет классического решения. В этой связи в приложениях пользуются понятием обобщённого решения, которое более адекватно описывает реально происходящий процесс.

Определение. *О*бобщённым решением краевой задачи *(1)-(3)* называется функция $V(t,x)\in H(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \left(V_t(t,x)\cdot\Phi(t,x)-V(t,x)\cdot\Phi_t(t,x)\right)\Big|_{t_1}^{t_2}dx=-\int_Q\int_{t_1}^{t_2}V(t,x)\cdot\Phi_{tt}(t,x)dtdx-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_Q\left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x_i}+c(x)V(t,x)\Phi(t,x)\right)dx-\right.$$
$$\left.-\int_\gamma\left(p[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]-a(x)V(t,x)\right)\Phi(t,x)dx\right)dt+ \tag{5}$$
$$+\int_{t_1}^{t_1}\int_Q\left(\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+f[t,x,\bar{u}(t,x)\right)\Phi(t,x)dxdt,$$

при любых t_1, t_2, $\left(0<t_1\le t\le t_2\le T\right)$ и $\Phi(t,x)\in H_1(Q_T)$, а также начальным условиям в слабом смысле, т.е.

$$\lim_{t\to+0}\int_Q V(t,x)\phi_0(x)dx=\int_Q\psi_1(x)\phi_0(x)dx,\ \lim_{t\to+0}\int_Q V_t(t,x)\phi_1(x)dx=\int_Q\psi_2(x)\phi_1(x)dx, \tag{6}$$

для любых функций $\phi_0(x)\in H(Q),\ \phi_1(x)\in H(Q)$.

Решение краевой задачи (1)-(3) ищем в виде

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^\infty V_n(t)z_n(x), \tag{7}$$

где $V_n(t)=\langle V(t,x),z_n(x)\rangle=\int_Q V(t,x)z_n(x)dx$ коэффициенты Фурье,

$z_n(x)$ являются обобщенными собственными функциями краевой задачи

$$D_n(V,z_r(x))=\int_Q\left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)V_{x_j}z_{rx_i}+c(x)Vz_r(x)\right)dx+\int_\gamma a(x)V)z_r(x)dx=\lambda_n^2\int_Q V(t,x)z_r(x)dx,$$
$$\Gamma z_r(x)=0,\quad x\in\gamma,\quad 0<t<T,\quad r=1,2,..., \tag{8}$$

и образуют полную ортонормированную систему $\{z_r(x)\}$ в гильбертовом пространстве $H(Q)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяет следующим условиям $\lambda_n\le\lambda_{n+1},\quad\forall n=1,2,3,\dots,\quad\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$. Установлено, что коэффициенты Фурье определяются как решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода вида

$$V_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)V_n(s)ds+q_n(t),\quad n=1,2,3,\dots, \tag{9}$$

где

$$q_n(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-s)\left(f_n[s,\bar{u}]+p_n[s,\bar{\vartheta}]\right)ds. \tag{10}$$

$$K_n(t,s)=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau. \tag{11}$$

Решение интегрального уравнения (9) определяется по формуле

$$V_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)q_n(s)ds+q_n(t), \tag{12}$$

где
$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s), \tag{13}$$

резольвента ядра $K_n\left(t,s\right)\equiv K_{n,1}\left(t,s\right)$, а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots,$ определяются по формулам

$$K_{n,i+1}\left(t,s\right)=\int_0^T K_n\left(t,\eta\right)K_{n,i}\left(\eta,s\right)d\eta,\quad i=1,2,3,\ldots,\ K_{n,1}\left(t,s\right)=K_n\left(t,\mathrm{s}\right). \tag{14}$$

Исследуем сходимость ряда Неймана (13). Согласно оценкам ядер

$$|\mathrm{K}_{n,i}(t,s)|^2\le\frac{T^{2i-1}K_0^{i-1}}{(\lambda_n^2)^i}\int_0^T K^2(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau,\quad i=1,2,3,\ldots. , \tag{15}$$

Не трудно проверить, что ряд Неймана (13) сходится для всех значений параметра λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0}<1.$

Ряд Неймана, для значений параметра λ, удовлетворяющих условию $\left|\lambda\right|<\frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}\underset{n\to\infty}{\to}\infty$ абсолютно сходится при каждом $n=1,2,3,\ldots$ т.е. радиус сходимости ряда увеличивается с ростом n. Отметим, что ряд Неймана для любого $n=1,2,3,\ldots$ абсолютно сходится лишь при значении λ, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\lambda\right|<\frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}. \tag{16}$$

При этом резольвента $R_n\left(t,s,\lambda\right)$, как сумма абсолютно сходящегося ряда, является непрерывной функцией и удовлетворяет оценкам

$$\left|R_n(t,s,\lambda)\right|\le\left(\int_0^T K^2\left(\tau,s\right)d\tau\right)^{1/2}\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n-\left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}}; \tag{17}$$

$$\int_0^T\left|R_n(t,s,\lambda)\right|^2 ds\le\int_0^T\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau ds\frac{T}{\left(\lambda_n-\left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}\right)^2}=\frac{K_0T}{\left(\lambda_n-\left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}\right)^2}, \tag{18}$$

которое в дальнейшем используется при доказательствпе сходимости приближений обобщенного решения.

Таким образом, формальное решение краевой задачи (1)-(3) определяется по формуле

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)q_n(s)ds+q_n(t)\right)z_n(x) \tag{19}$$

Легко доказать, что эта функция и ее обобщенные производные первого порядка являются элементами пространства $H(Q_T)$.

То что найденная функция $V(t,x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (5) следует из ее построения.

2. *Приближение обобщённого решения краевой задачи и их сходимость*

Поскольку обобщённое решение определяется в виде суммы бесконечного ряда, то не всегда удаётся найти его явный вид. На практике ограничивается конечномерными приближениями обобщённого решения, которые являются классическими решениями рассматриваемой задачи. При этом следует убедиться сходимость конечномерных приближений к точному решению, ибо в противном случае математические выкладки могут быть неверными. Поэтому проверка сходимости конечномерных приближений к точному решению на практике имеет важное значение.

Наличие интегрального оператора Фредгольма в краевой задаче существенно влияет на процесс сходимости конечномерных приближений. На самом деле в этом случае при доказательстве сходимости следует различать два вида приближений: Приближение по резольвенте и конечномерное приближение.

Приближение по резольвенте появляется естественным образом, т.к. резольвента определяется как сумма бесконечного ряда. Поэтому под приближением по резольвенте понимаем функцию вида

$$V^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)q_n(s)ds + q_n(t)\right)z_n(x), \tag{20}$$

где
$$R_n^m(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s), \quad n=1,2,3,..., \tag{21}$$

m - *м* приближением резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,\ldots$.

Лемма-1. Приближения по резольвенте решение $V^m(t,x)$ краевой задачи *(1)-(3)* сходится к точному решению $V(t,x)$ по норме пространства $H(Q_T)$, т.е. имеет место соотношение

$$\| V(t,x) - V^m(t,x) \|^2_{H(Q_T)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Конечномерные приближения решения определяется по формуле

$$V_k^m(t,x) = \sum_{n=1}^{k}\left(\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)q_n(s)ds + q_n(t)\right)z_n(x), \quad k=1,2,.... \tag{22}$$

Сначала доказывается сходимость конечномерных приближений к приближению по резольвенте.

Лемма-2. Конечномерные приближения сходятся к приближениям по резольвенте по норме пространства $H(Q_T)$ при каждом фиксированном m, т.е. имеет место соотношение

$$\| V^m(t,x) - V_k^m(t,x) \|^2_{H(Q_T)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad m=1,2,....$$

Далее доказывается сходимость конечномерных приближений к точному решению краевой задачи.

Лемма-3. Конечномерные приближения сходится к точному решению краевой задачи по норме пространства $H(Q_T)$ при каждом фиксированном *m*, т.е. имеет место соотношение

$$\| V(t,x) - V_k^m(t,x) \|^2_{H(Q_T)} \underset{\substack{k\to\infty \\ m\to\infty}}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательства Леммы 1 и Леммы 2 проводиться непосредственным вычислением, а утверждение Леммы-3 следует из соотношения

$$\| V(t,x) - V_k^{\,m}(t,x) \|^2_{H(Q_T)} \le \| V(t,x) - V^m(t,x) \|^2_{H(Q_T)} + \| V^m(t,x) - V_k^{\,m}(t,x) \|^2_{H(Q_T)} \underset{\substack{k\to\infty \\ m\to\infty}}{\longrightarrow} 0.$$

В результате исследования вопросов сходимости приближений обобщённого решения краевой задачи, обнаружено, что внешние и граничные векторные управления не влияют на сходимости приближений.

Литература

1. Kerimbekov A.K. On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semi-linear parabolic equations. // Proceedings World Congress on Engineering 2011, London, UK, 6-8 July 2011, vol. 1, -P. 270–275.
2. V. Volterra, Theory of functionals and of integral and integro-differential equations, New York, USA, 2005.
3. Richtmyer R.D. Principles of Advanced Mathematical Physics, vol. 1. -New York: Springer, 1978.
4. Tricomi I.F. Integral Equations. - New York: Intersciense Publishers, 1957.
5. J.M. Appel, A.S. Kalitvin and P.P. Zabrejko. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. M. Dekkar, New York, 2000.
6. E.W. Sachs and A.K. Strauss. Efficient solution of partial integro-differential equation in finance. // Applied Numerical Math., Vol. 58(11), 2008. - P. 1687-1703.
7. J. Thorwe and S. Bhalekar. Solving partial integro-differential equations using Laplace transform method. // American J. of Computational and Applied Math., Vol. 2(3), 2012. - P. 101-104.

УДК 517.928

КИЧИНЕ КОЗГОЛУУНУН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН ТУРУКТУУЛУГУНУН УЗАРТЫЛЫШЫНА ТИЙГИЗГЕН ТААСИРИ

Акматов Абдилазиз Алиевич, улук окутуучу
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Жумушта сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдеменин чечиминин изилдөө жараяны каралган. Кичине козголуунун чечимдин узартылышына тийгизген таасири конкреттүү мисалдын жардамында ачылып көрсөтүлгөн. Эгерде кичине козголуу теңдеш нөлгө барабар болсо, анда чыныгы сандар талаасында чечимдин туруктуулугунун узартылышын жетишээрлик чоң боло тургандай кылып баштапкы чекитти тандап алууга болот. Баштапкы чекит туруктуу аралыктан тандалып алынды. Ал эми кичине козголуу нөлдөн айырмалуу болсо, анда комплекстүү аймакка өтүү зарылдыгы келип чыгат. Бул учурда комплекстүү аймактагы деңгээл сызыктардын жайгашуусу чыныгы окту кармабай калат. Тактап айтканда маселенин чечими изилденүүчү аймак жашабайт. Чечимди бул учурда баштапкы чекиттен тарта нөлгө дейре узартуу мүмкүнчүлүгү эле болот.*

Түйүндүү сөздөр: *кичине козголуу, дифференциалдык теңдеме, туруктуулук, Коши маселеси, кичине параметр, чечим, асимптотика.*

ВЛИЯНИЕ МАЛОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ЗАТЯГИВАНИЮ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Акматов Аблизазиз Алиевич, старший преподаватель
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В работе рассмотрено исследование решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. С помощью конкретного примера показано влияние малого возмущения затягиванию потери устойчивости решений. Если малое возмущение тождественно равно к нулю, тогда в пространстве действитльных чисел можно выбрать начальную точку так, что затягивание потери устойчивости было досточно велико. Начальная точка выбрано в устойчивом интервале. Если малое возмущение отлично от нуля, то появится необходимость перехода к комплексной области. В этом случае расположение линии уровня в комплексной плоскости не захватывает действительную ось. Точнее не существует область, в которой исследуется решение задачи. Тогда остается возможность затягивания потери устойчивости от начальной точки до точки ноль.*

Ключевые слова: *малое возмущение, дифференциальные уравнения, устойчивость, задача Коши, малый параметр, решение, асимптотика.*

INFLUENCE OF A SMALL PERTURBATION ON LOSS PULLING STABILITY OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBATE EQUATIONS

Akmatov Abdilaziz Alievich, senior lecturer
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The paper considers the study of the solution of singularly perturbed differential equations. With the help of a specific example, the influence of a small perturbation on the delay in the loss of stability of solutions is*

shown. If a small perturbation is identically equal to zero, then in the space of real numbers one can choose the starting point so that the delay in the loss of stability is sufficiently large. The starting point is chosen in a stable interval. If a small perturbation is different from zero, then it will be necessary to pass to the complex region. In this case, the location of the level line in the complex plane does not capture the real axis. More precisely, there is no area in which the solution of the problem is investigated. Then there remains the possibility of delaying the loss of stability from the initial point to the zero point.

Keywords: *small perturbation, differential equations, stability, Cauchy problem, small parameter, solution, asymptotic.*

Киришүү. Кичине козголуу $\varepsilon h(t)$-нын чечимдин туруктуулугунун узартылышына болгон таасири мисалдын негизинде каралат. Комплекстүү тегиздиктеги деңгээл сызыктарынын жайгашуу абалдары кээ бир учурларда чечимдин туруктуулугунун узартылышын чектеп коет [1]. Чечимдин туруктуулугун узартылышы $a(t)$ функциясынан жана баштапкы чекитти тандап алуудан да көз каранды болору [2-4] жумуштарда көрсөтүлгөн.

Маселенин коюлушу. Төмөнкү

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\left[h(t) + f(t, x(t,\varepsilon))\right], \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon),\ \left|x^0(\varepsilon)\right| = O(\varepsilon), \tag{2}$$

мында $0 < \varepsilon << 1$ - кичине параметр, $[t_0, T]$ - чыныгы октогу кесинди, $x(t,\varepsilon)$ - белгисиз функция.

Аралык $H_0 = \{(t,x) | t \in [t_0, T], |x| \le \delta\}$, мында $0 < \delta$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

U 1. $f(t,0) \equiv 0$, $\forall (t,x) \in H_0$: $f(t,x) \in \Phi(S_r)$, $\Phi(S_r)$ - аналитикалык функциялардын мейкиндиги, $f(t,0) \equiv 0$; $\left| f(t,\tilde{x}) - f(t,\tilde{\tilde{x}}) \right| \le M \left|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\right| \times \max\left\{|\tilde{x}|, |\tilde{\tilde{x}}|\right\}$, мында $0 < M$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан. Ажыралма экинчи даражадан кем эмес болуп башталат.

U 2. $a(t)$, $h(t) \in \Phi(S_r)$ жана $a(t) = 2t$. Анда

$a(t) < 0$, $t < 0$ болсо,

$a(t) > 0$, $t > 0$ болсо,

$a(t) = 0$, $t = 0$ болсо.

Маселе. U 1-U 2 шартта (1)-(2) маселенин чечимин H_0 аралыгындагы асимптотикалык жүрүмүн изилдөө.

(1)-(2) маселенин чечимин $C^1[t_0, T]$ мейкиндигинде карайбыз.

Формалдуу түрдө $\varepsilon = 0$:

$$a(t)\xi(t) = 0. \tag{3}$$

(3) теңдеме

$$\xi(t) = 0, \tag{4}$$

чечимине ээ.

(1)-(2) маселесин интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\left[h(\tau) + f(\tau, x(\tau,\varepsilon))\right]d\tau, \tag{5}$$

мында $E(t,t_0,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$, $E(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} a(s)ds\right)$.

(5) теңдемеге удаалаш жакындашуу усулун колдонобуз.

Удаалаш жакындашууларды төмөнкүчө аныктайлы:

$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0$,

$$x_m(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)\left[h(\tau)+f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))\right]d\tau\ , \qquad (6)$$

мында $m=1,2,\dots$.

Аныктама 1. $\forall t\in H_0\subset C\ \ \left(\lim_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=0\right)\ \Rightarrow\ H_0$ аралыгында $x(t,\varepsilon)$ чечимди козголбогон теңдеменин $\xi(t)\equiv 0$ чечимине карата туруктуу деп атайбыз.

Аныктама 2. $\varepsilon h(t)$ - кичине козголуу деп атайбыз.

1). $h(t)\equiv 0$ болсун.

Теорема орун алат:

Теорема 1. U 1 шарты аткарылсын жана $a(t)=2t$, $h(t)\equiv 0$ болсун. Анда $\forall t\in[t_0,T]$ аралыгында (1)-(2) маселе жалгыз чечимге ээ болуп жана

$$|x(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\ , \qquad (7)$$

баалоосу орун алат. Мында $C-const$.

Далилдөө. (6) удаалаш жакындашууларын баалайбыз:

$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0$,

$$x_1(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right),\ |x_1(t,\varepsilon)|\le|x^0(\varepsilon)|\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)=C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right),$$

$m=2$ үчүн

$$x_2(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon))d\tau\ ,$$

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+M\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\left|x_1^2(\tau,\varepsilon)\right|d\tau\ ,$$

мындан

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\left[1+M\alpha_1^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{\tau^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)d\tau\right].$$

же

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\cdot\left[1+M\alpha_1^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)^2\right]=C_1\varepsilon\alpha_2(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right),$$

бул жерде $\alpha_2(\varepsilon)=(1+M\alpha_1^2\varepsilon)(C_1\varepsilon)^2)$, $\alpha_1(\varepsilon)=1$, $(C_1\varepsilon)^2<1$, $\alpha_2(\varepsilon)>1$.

$m=3$ үчүн

$$x_3(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)f(\tau,x_2(\tau,\varepsilon))d\tau\ ,$$

$$|x_3(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+M\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\cdot\left|x_2^2(\tau,\varepsilon)\right|d\tau\ ,$$

мындан

$$|x_3(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+M\alpha_2^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)^2\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{\tau^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)d\tau\ .$$

Жыйынтыгында

$$\left|x_3(t,\varepsilon)\right| \le C_1\varepsilon\alpha_3(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right),$$

бул жерде $\alpha_3(\varepsilon) = 1 + M\alpha_2^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)^2$.

$m = k$ үчүн

$$x_m(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right) f(\tau, x_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau ,$$

$$\left|x_m(t,\varepsilon)\right| \le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right) + M\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\left|x_{m-1}^2(\tau,\varepsilon)\right|d\tau ,$$

мындан

$$\left|x_m(t,\varepsilon)\right| \le C_1\varepsilon\alpha_m(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right), \tag{8}$$

мында $\alpha_m(\varepsilon) = 1 + M\alpha_{m-1}^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)$.

Баалоону $m+1$ туура экендигин далилдейли. Анда (6) барабардыгынан

$$x_{m+1}(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right) f(\tau, x_m(\tau,\varepsilon))d\tau ,$$

$$\left|x_{m+1}(t,\varepsilon)\right| \le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right) + M\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\left|x_m^2(\tau,\varepsilon)\right|d\tau ,$$

мындан

$$\left|x_{m+1}(t,\varepsilon)\right| \le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\left[1 + M\alpha_m^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)^2\right] = C_1\varepsilon\alpha_{m+1}(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right),$$

мында

$$\alpha_{m+1}(\varepsilon) = 1 + M(C_1\varepsilon)^2\alpha_m^2(\varepsilon). \tag{9}$$

(8) баалоосу далилденди.

(9) барабардыктан $\varepsilon^2 \le \dfrac{1}{4MC_1^2}$ барбарсыздыгынан $\forall m \in N, m \ge 3, \alpha_{m+1}(\varepsilon) \le 2C_1 = C$.

Демек, (7) баалоо орун алат.

$\{x_m(t,\varepsilon)\}$ удаалаштыгынын жыйналуучулугун далилдейли:

$$x_m(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + \left(x_2(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)\right) + \left(x_3(t,\varepsilon) - x_2(t,\varepsilon)\right) + \ldots + \left(x_m(t,\varepsilon) - x_{m-1}(t,\varepsilon)\right) + \ldots .$$

Анда $(6) \Rightarrow$ $x_m(t,\varepsilon) - x_{m-1}(t,\varepsilon) = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\left[f(\tau, x_{m-1}(\tau,\varepsilon)) - f\left(\tau, x_{m-2}(\tau,\varepsilon)\right)\right]d\tau$.

$$\left|x_m(t,\varepsilon) - x_{m-1}(t,\varepsilon)\right| = \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\cdot\left|f(\tau, x_m(\tau,\varepsilon)) - f(\tau, x_{m-1}(\tau,\varepsilon))\right|\cdot\left|x_m(\tau,\varepsilon) - x_{m-1}(\tau,\varepsilon)\right|d\tau \le$$

$$\le M\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\cdot\max\left\{\left|x_{m-1}(\tau,\varepsilon)\right|,\left|x_{m-2}(\tau,\varepsilon)\right|\right\}\cdot\left|x_{m-1}(\tau,\varepsilon) - x_{m-2}(\tau,\varepsilon)\right|d\tau,$$

бул жерде (8) эске алуу менен

$$\max\left\{\left|x_{m-1}(t,\varepsilon)\right|,\left|x_{m-2}(t,\varepsilon)\right|\right\} = C_1\varepsilon\alpha_m(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right).$$

$\left|x_2(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)\right|$ баалайлы. Анда

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|=\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\cdot C_1\varepsilon\alpha_m(\varepsilon)\exp\left(\frac{\tau^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)|x_1(\tau,\varepsilon)|d\tau$$

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\beta(\varepsilon),\ \beta(\varepsilon)=M(C_1\varepsilon)^2\alpha_m(\varepsilon).$$

$|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\beta^2(\varepsilon),\ \beta^2(\varepsilon)=\left(M(C_1\varepsilon)^2\alpha_m(\varepsilon)\right)^2.$$

$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\cdot\beta^m(\varepsilon),\ \beta_m(\varepsilon)=\left(M(C_1\varepsilon)^2\alpha_m(\varepsilon)\right)^m.$$

Демек,

$$|x_1(t,\varepsilon)+\left(x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\right)+\left(x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)\right)...+\left(x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)\right)+...|\le$$

$$\le|x_1(t,\varepsilon)|+|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|+|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)|+...+|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon|+...\le$$

$$\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)1+\beta(\varepsilon)+...+\beta^m(\varepsilon)+...)\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\cdot\frac{1}{1-\beta(\varepsilon)}\qquad(10)$$

(10) оң жагы $\forall t\in[t_0;T]$ аралыгында бир калыпта жыйналат. Анда $\forall t\in[t_0;T]$ аралыгында $\{x_m(t,\varepsilon)\}$ удаалаштыгы да бир калыпта (5) маселесинин чечими болгон $x(t,\varepsilon)$ жыйналат.

$(10)\Rightarrow\ |x(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon$.

Демек, (1) маселесинин чечими $t\in[t_0,T]$ аралыгында жашап, жалгыз болуп, ал үчүн (7) баалоосу орун алат. Теорема далилденди.

(7) баалоо (3) маселенин чечими болгон (4) пределдик өтүү орун аларын көрсөтөт.

2). $h(t)\ne 0$ болсун. Биринчи удаалаш жакындашууда

$$|x_1(t,\varepsilon)|\le|x^0(\varepsilon)|\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)|h(\tau)|d\tau.$$

$t\in[t_0,T]$ аралыгында $t^2-\tau^2=0$, $t^2-\tau^2<0$, $t^2-\tau^2>0$. Мына ошол себептүү комплекстүү тегиздикке көчөбүз:

$$t=t_1+it_2,\ \tau=\tau_1+i\tau_2,\ t_1,t_2,\tau_1,\tau_2\in R,\ u(t_1,t_2,t_0)=\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}sds=\left(t_1^2-t_2^2\right)-\left(t_{01}^2-t_{02}^2\right).$$

Баштапкы чекит $t_0=t_{01}<0$, $(t_{02}=0)$. Комплекстүү тегиздиктеги аймак, чыныгы окту кармабайт. Мында $\varepsilon h(t)$ кичине козголуусунун тийгизген таасири байкалат.

Бул жерде $H_4=\{(t_1,t_2):u(t_1,t_2)\le 0\}$, $H_2=\{(t_1,t_2):u(t_1,t_2)\le 0\}$ - регулярдуу аймактар, ал эми $H_1=\{(t_1,t_2):u(t_1,t_2)>0\}$, $H_3=\{(t_1,t_2):u(t_1,t_2)>0\}$ - сингулярдуу аймактар, $t_2=\pm t_1$ чек аралык ийрилер.

Комплекстүү тегиздикте H_0 аралыгына дал келүүчү комплекстүү аймак жашабайт, ошол себептүү изилдөөнү уланта албайбыз. Ал $\varepsilon h(t)$ кичине козголуусунун таасири жана комплекстүү тегиздиктеги деңгээл сызыктарынын жайгашуу абалдарына жараша болот.

Эгерде кичине козголуу нөлдөн айырмалуу болсо, чечимди туруктуу аралыкта гана изилдөөгө болот. Б.а. $t\in[t_0,0)$ аралыгында гана орун аларын көрсөтүүгө болот.

Корутунду. Кичине козголуу деп аталуучу $\varepsilon h(t)$ мүчө нөлгө теңдеш барабар болгон учурда чечимдин туруктуулугун узартуу мүмкүнчүлүгү мисалдын негизинде каралды. Удаалаш жакындашуу усулунун жардамында чечимдин асимптотикасы изилденди. Туруктуулуктун узартылышында мүмкүн болушунча чоң кармалуу убактысы боло тургандай туруктуу аралыктан баштапкы чекит тандалып алынды. Ал эми кичине козголуу нөлдөн айырмалуу болсо, бул мисалда чечимди изилдөө үчүн комплекстүү аймакка өтүп алдык. Бирок $0t_1$ огун кармаган аймак жашабагандыгы үчүн маселени изилдөө мүмкүнчүлүгү болбоду. Комплекстүү тегиздиктеги деңгээл сызыктарынын жайгашуу абалдары кээ бир учурларда чечимдин туруктуулугунун узартылышын чектеп коет [1]. Ал бул жумушта даана көрсөтүлдү.

Адабияттар

1. Алыбаев, К.С. Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев // Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2001. – 204 с.

2. Акматов А.А. Об устойчивости решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / А. А. Акматов // Журнал бюллетень науки и практики. Москва. №3. – 2023. – С. 39-46.

3. Акматов А.А. Сингулярдык козголгон маселенин чечимин изилдөө. [Текст] / А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. №2. – 2021. – С. 26-33.

4. Каримов С. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, когда собственные значения матрицы имеют мнимые части.[Текст] / А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. – Ош. 2021. №1. – С. 61-69.

УДК 517.928.2

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН ТУРУКТУУЛУГУНУН УЗАРТЫЛЫШЫ

Акматов Абдилазиз Алиевич, улук окутуучу
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Замирбек кызы Наргиза, аспирант
nargiza.z_9292@bk.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Жумушта сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдеменин чечиминин изилдөө жараяны каралган. Чечимди изилдөөдө каралуучу аймакты мүмкүн болушунча жетишээрлик чоң кылып алуу максатка ылайыктуу болуп саналат. Баштапкы чекит туруктуу аралыктан тандалып алынган. Кичине козголууга ээ болгон мүчө теңдемеде кездешпейт. Туруктуулуктун узартылышынын чектелиши комплекстүү аймакка көчкөндөн кийинки деңгээл сызыктардын жайгашуу абалдарынан көз каранды болот. Мына ошол себептүү сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме каралып, чечим чыныгы сандар талаасында изилденген. Изилдөө конкреттүү тандалып алынган функцияга негизделип жүргүзүлүп, теорема далилденген. Чечим изилденүүчү аралык туруктуулук шарты алмашкан учурду камтыйт.*

Түйүндүү сөздөр: *козголуу, дифференциалдык теңдеме, туруктуулук, Коши маселеси, кичине параметр, чечим.*

ЗАТЯГИВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Акматов Аблизазиз Алиевич, старший преподаватель
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Замирбек кызы Наргиза, аспирант
nargiza.z_9292@bk.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В работе рассмотрено исследование решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. В ходе исследования приоритетом является выбор максимально большого интервала. Начальная точка выбрана в устойчивом интервале. В уравнении не встречается член, имеющий малое возмущение. При переходе к комплексной области появляется линия уровня. От расположения линии уровня зависит расширение учтойчивости решений. Поэтому рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение и исследование проводится в пространстве действительных чисел. Исследования основано на конкретно выбранной функции и доказана теорема. Рассматриваемый интервал захватывает точки смены устойчивости.*

Ключевые слова: *возмущение, дифференциальные уравнения, устойчивость, задача Коши, малый параметр, решение.*

DELAYING THE LOSS OF STABILITY SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Akmatov Abdilaziz Alievich, senior lecturer
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Zamirbek kyzy Nargiza, aspirant
nargiza.z_9292@bk.ru

Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The paper considers the study of the solution of singularly perturbed differential equations. In the course of the study, the priority is to choose the largest possible interval. The starting point is chosen in a stable interval. The equation does not contain a term that has a small perturbation. When moving to the complex area, a level line appears. The expansion of the responsiveness of solutions depends on the location of the level line. Therefore, a nonlinear differential equation is considered and the study is carried out in the space of real numbers. The research is based on a specifically chosen function and the theorem is proved. The considered interval captures the points of change of stability.*
Keywords: *perturbation, differential equations, stability, Cauchy problem, small parameter, solution.*

Киришүү. Комплекстүү тегиздиктеги деңгээл сызыктарынын жайгашуу абалдары кээ бир учурларда чечимдин туруктуулугунун узартылышын чектеп коет [1]. Мына ошол себептүү кичине козголуу деп аталуучу $\varepsilon h(t)$ мүчө катышпаган сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме каралат. Кичине козголуу чечимдин туруктуулугуна тийгизген таасири кичине же болбогон учурлар [2-5] каралган.

Маселенин коюлушу. Жумушта төмөнкү

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t, x(t,\varepsilon)), \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \ \left|x^0(\varepsilon)\right| = O(\varepsilon), \tag{2}$$

маселе каралат. Мында $0 < \varepsilon << 1$ - кичине параметр, $[t_0, -t_0]$ - чыныгы октогу кесинди, $x(t,\varepsilon)$ - белгисиз функция.

Аралыкты $H_0 = \{(t,x) | t \in [t_0, -t_0], t_0 < 0, |x| \le \delta\}$, мында $0 < \delta$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

U 1. $f(t,0) \equiv 0$, $\forall (t,x) \in H_0$: $f(t,x) \in \Phi(S_r)$, $\Phi(S_r)$ - аналитикалык функциялардын мейкиндиги, $f(t,0) \equiv 0$; $\left| f(t,\tilde{x}) - f(t,\tilde{\tilde{x}}) \right| \le M \left| \tilde{x} - \tilde{\tilde{x}} \right| \times \max\{|\tilde{x}|, |\tilde{\tilde{x}}|\}$, мында $0 < M$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан.

U2. $a(t) \in \Phi(S_r)$ жана $a(t) = tht + icth t$. Анда

$a(t) < 0$, $t < 0$ болсо,

$a(t) > 0$, $t > 0$ болсо,

$a(t) = 0$, $t = 0$ болсо.

Маселе. U 1-U 2 шартта (1) - (2) маселенин чечимин H_0 аралыктагы асимптотикалык жүрүмүн изилдөө.

(1)-(2) маселенин чечимин $C^1[t_0, -t_0]$ мейкиндигинде карайбыз.

Формалдуу түрдө $\varepsilon = 0$:

$$a(t)\xi(t) = 0. \tag{3}$$

(3) теңдеме

$$\xi(t) = 0, \tag{4}$$

чечимине ээ.

(1)-(2) маселесин интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) f(\tau, x(\tau,\varepsilon))d\tau, \tag{5}$$

мында $E(t,t_0,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)$, $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)$.

(5) теңдемеге удаалаш жакындашуу усулун колдонобуз.

Удаалаш жакындашууларды төмөнкүчө аныктайлы:

$$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$x_m(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau, \qquad (6)$$

мында $m=1,2,...$.

Теорема орун алат:

Теорема. U1 шарты аткарылсын жана $a(t)=tht+icth t$ болсун. Анда $\forall t\in[t_0,-t_0]$ аралыгында (1)-(2) маселе жалгыз чечимге ээ болуп жана

$$|x(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon, \qquad (7)$$

баалоосу орун алат. Мында $C-const$.

Далилдөө. (6) удаалаш жакындашууларын баалайбыз:

$$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$x_1(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(ths+icths)ds\right),\ |x_1(t,\varepsilon)|\le|x^0(\varepsilon)|\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}=C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}},$$

$m=2$ үчүн

$$x_2(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(ths+icths)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}(ths+icths)ds\right)f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon))d\tau,$$

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}+M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}|x_1(\tau,\varepsilon)|d\tau,$$

же

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}[1+M(t-t_0)].$$

$\forall m$ үчүн

$$x_m(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(ths+icths)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}(ths+icths)ds\right)f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau,$$

$$|x_m(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}+M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}|x_{m-1}(\tau,\varepsilon)|d\tau,$$

жана

$$|x_m(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left[1+M(t-t_0)+...+\frac{M^{m-1}(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}\right] \qquad (8)$$

Баалоону $m+1$ туура экендигин далилдейли. Анда (6) барабардыгынан

$$x_{m+1}(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(ths+icths)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}(ths+icths)ds\right)f(\tau,x_m(\tau,\varepsilon))d\tau,$$

$$|x_{m+1}(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}+M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}|x_m(\tau,\varepsilon)|d\tau,$$

жана

$$|x_{m+1}(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left[1+M(t-t_0)+\frac{M^2(t-t_0)^2}{2!}+...+\frac{M^m(t-t_0)^m}{m!}\right]=C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{M(t-t_0)}$$

(8) баалоосу далилденди.

$\{x_m(t,\varepsilon)\}$ удаалаштыгынын жыйналуучулугун далилдейли. Төмөнкү көрүнүштө жазып алалы:

$$x_m(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+\left(x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\right)+\left(x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)\right)+...+\left(x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)\right).$$

$$(6)\Rightarrow\ x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left[f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))-f\left(\tau,x_{m-2}(\tau,\varepsilon)\right)\right]d\tau.$$

$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot|f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon)|d\tau\le M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot$$

$$\cdot\max\{x_1(\tau,\varepsilon),x_0(\tau,\varepsilon)\}d\tau.$$

$$\max\{|x_1(t,\varepsilon)|,|x_0(t,\varepsilon)|\}=|x_1(t,\varepsilon)|\Rightarrow$$

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot|f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon)|d\tau\le M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot$$

$$\max\{|x_1(\tau,\varepsilon)|,|x_0(\tau,\varepsilon)|\}d\tau=CM\varepsilon\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}(t-t_0).$$

$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)|=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot|f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))-f(\tau,x_{m-2}(\tau,\varepsilon))|d\tau\le M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot$$

$$\cdot\max\{|x_{m-1}(\tau,\varepsilon)|,|x_{m-2}(\tau,\varepsilon)|\}d\tau\le M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot|x_{m-1}(\tau,\varepsilon)|d\tau=C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot$$

$$\cdot\left[M(t-t_0)+\frac{M^2(t-t_0)^2}{2!}+...+\frac{M^{m-1}(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}\right].$$

Демек,

$$|x_1(t,\varepsilon)+\left(x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\right)+\left(x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)\right)...+\left(x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)\right)+...|\le$$

$$\le|x_1(t,\varepsilon)|+|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|+|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)|+...+|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon|+...\le$$

$$\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(1+M(t-t_0)+M^2\frac{(t-t_0)^2}{2!}+...+M^m\frac{(t-t_0)^m}{m!}+...\right)$$

$$=C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{M(t-t_0)}. \qquad (9)$$

(9) оң жагы $\forall t\in[t_0;-t_0]$ аралыгында бир калыпта жыйналат. Анда $\forall t\in[t_0;-t_0]$ аралыгында $\{x_m(t,\varepsilon)\}$ удаалаштыгы да бир калыпта (5) маселесинин чечими болгон $x(t,\varepsilon)$ жыйналат.

$$(9)\Rightarrow\ |x(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon.$$

Чечимдин жалгыздыгы [1] аналогиялуу далилденет. Демек, (1) маселесинин чечими $t\in[t_0,-t_0]$ аралыгында жашап, жалгыз болуп, ал үчүн (7) баалоосу орун алат. Теорема далилденди.

Корутунду. Туруктуулуктун узартылышына $\varepsilon h(t)$ кичине козголуусу таасирин тийгизет. Бул учурда бул козголуу каралган эмес. Мына ошол себептүү чечимдин туруктуулугун жетишээрлик чоң аралыкка узартуу мүмкүнчүлүгү пайда болду. Баштапкы чекит туруктуу аралыктан чечимдин туруктуулугунун узартылышы жетишээрлик чоң боло тургандай болуп тандалды.

Адабияттар

1. Алыбаев, К.С. Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев // Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2001. – 204 с.
2. Акматов А.А. Об устойчивости решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.А. Акматов // Журнал бюллетень науки и практики. Москва. №3. – 2023. – С. 39-46.
3. Акматов А.А. Сингулярдык козголгон маселенин чечимин изилдөө. [Текст] / А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. №2. – 2021. – С. 26-33.
4. Каримов С. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, когда собственные значения матрицы имеют мнимые части. [Текст] / А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. – Ош. 2021. №1. – С. 61-69.
5. Турсунов, Д.А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют *n*-кратный полюс. [Текст] / Д.А. Турсунов // Дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек,2005. – 106 с.

УДК: 517.928

О МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Алымбаев Асангул Темиркулович доктор ф.-м.н., профессор
asangul1952@gmail.com
Государственный университет им. И. Арабаева
Бишкек, Кыргызстан
Бапа кызы Айнура, магистр математики, ст.преподаватель
abapakyzy@gmail.com
Иссык-Кульский государственный университет им.К.Тыныстанова
Каракол, Кыргызстан

Аннотация. *В статье рассматривается задача построения и установления существования, приближенного* 2π*- периодического решения квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с периодической правой частью. Решение ищется в виде ряда Фурье. Построена система квазилинейных алгебраических уравнений относительно ряда Фурье. Доказано однозначной разрешимости системы алгебраического уравнения, что равносильно существованию* 2π*- периодического решения квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Оценена погрешность разности между точным и приближенными решениями.*

Ключевые слова: *Метод Галеркина,* 2π*- периодическое решение, квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка, точное и приближенное решение.*

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН МЕЗГИЛДИК ЧЫГАРЫЛЫШЫН ГАЛЕРКИНДИН МЕТОДУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Алымбаев Асангул Темиркулович, ф.-м.и.доктору, профессор
asangul1952@gmail.com
И.Арабаев атындагы КМУ
Бишкек, Кыргызстан
Бапа кызы Айнура, математиканын магистри, ага окутуучу
abapakyzy@gmail.com
К.Тыныстанов атындагы ЫМУ
Каракол, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада экинчи тартиптеги квазисызыктуу интегро-дифференциалдык теңдеменин* $2\pi -$ *мезгилдүү жакындаштырылган чыгарылышын табуу жана анын жашашын далилдөө маселеси каралат. Чыгарылыш Фурьенин катары түрүндө изделет. Катардын коэффициенттерине карата квазисызыктуу алгебралык теңдеме түзүлүп, анын бир маанилүү чечилиши далилденет жана тыянак катары квазисызыктуу интегро-дифференциалдык теңдеменин Галеркиндин ыкмасы боюнча тургузулган,* $2\pi -$мезгилдик *чыгарылышынын жашашы далилденет. Так жана жакындаштырылган чыгарылыштардын ортосундагы айырманын чени аныкталат.*

Негизги сөздөр: *Галеркиндин методу,* $2\pi -$*мезгилдүү чыгарылыш, экинчи тартиптеги квазисызыктуу интегро-дифференциалдык теңдеме, так жана жакындаштырылган чыгарылыштар.*

ON GALERKIN'S METHOD FOR CONSTRUCTING PERIODIC SOLUTIONS OF A SECOND-ORDER QUASILINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Alymbaev Asangul Temirkulovich, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor
asangul1952@gmail.com
State University named after I. Arabaev
Bishkek, Kyrgyzstan
Bapa kyzy Ainura, Master of Physics and Mathematics Education, Senior Lecturer
abapakyzy@gmail.com
Issyk-Kul State University named after K. Tynystanov
Karakol, Kyrgyzstan

Annotation. *The paper considers the problem of constructing and establishing the existence of an approximate 2π-periodic solution of a second-order quasilinear integro-differential equation with a periodic right-hand side. The solution is sought in the form of a Fourier series. A system of quasilinear algebraic equations with respect to the Fourier series is constructed. The unique solvability of a system of an algebraic equation is proved, which is equivalent to the existence of a 2π-periodic solution of a second-order quasilinear integro-differential equation. The error of the difference between the exact and approximate solutions is estimated.*

Keywords: *Galerkin method, 2π-periodic solution, second-order quasilinear integro-differential equation, exact and approximate solution.*

Изучение периодических решений сильно нелинейных систем (систем, не содержащих малого параметра) классическими асимптотическими методами не всегда возможно. Для таких систем разработаны ряд аналитических и численно-аналитических методов. Среди существующих методов, имеются методы наряду с доказательством теорем существования периодических решений позволяет построить этих решений. Одним из подобных методов является метод Бубнова-Галеркина, получивший достаточно полное обоснование для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в работе М.Урабе [4] и Л.Чезари [7]. В дальнейшем идеи работы М.Урабе распространены для изучения периодических решений системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием, а также системы автономных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром [1,2,3,5,6]. Настоящая работа посвящена задаче построения и доказательству теоремы существования 2π-периодического решения квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с конечным последействием.

Рассмотрим 2π-периодическое по t и дифференцируемое по x, u функцию $f(t,x,u)$ в области $(t,x,u)\epsilon\mathcal{T}\times D_1\times D_2$, где $\mathcal{T}=(-\infty,+\infty), D_1, D_2$ – ограниченные области в $R=(-\infty,+\infty)$. Введем нормы:

$$|f(t,x,u)|_0=\max_{\mathcal{T}\times D_1\times D_2}\|f(t,x,u)\|,$$

$$\|f(t,x,u)\|_0=\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\|f\|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть – $g(t)$ непрерывная 2π –периодическая и разлагающая в ряд Фурье функция

$$g(t)=c_0+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(c_k coskt+d_k sinkt). \quad (1)$$

Введем на множестве периодических функций операторы S_m и R_m, такие, что

$$S_m g(t)=\ c_0+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}(c_k coskt+d_k sinkt), \quad (2)$$

$$R_m g(t) = \sqrt{2}\sum_{k=m+1}^{\infty}(c_k coskt + d_k sinkt). \qquad (3)$$

Заметим, что

$$R_m g(t) = g(t) - S_m g(t).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = g(t), \qquad (4)$$

где $g(t) - 2\pi$- периодическая функция, представимое в ряд Фурье вида (2).

С учетом (1) уравнение (4) записываем в виде

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = c_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(c_k coskt + d_k sinkt). \qquad (5)$$

Теорема 1. Пусть $x = x(t) - 2\pi$ периодическое решение (5). Если

$$c_0 = 0, \qquad x(0) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k^2}, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^2},$$

тогда $2\pi -$ периодическое решение $x = x(t)$ представимо в виде

$$x(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,(-c_k coskt + d_k sinkt).$$

$$R_m x(t) = x(t) - S_m x(t) = -\sqrt{2}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(c_k coskt + d_k sinkt).$$

Теорема 2. Для разности $x(t) - x_m(t)$- справедлива оценка

$$|x(t) - S_m x(t)|_0 \le |x(t) - x_m(t)|_0 \le \sigma(m)|f|_0,$$
$$\|x(t) - x_m(t)\|_0 \le \sigma_1(m)\|f\|_0$$

где

$$\sigma(m) = \left[\frac{2}{(m+1)^4} + \frac{2}{(m+2)^4} + \cdots\right]^{1/2},$$

$$\sigma_1(m) = \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^2}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^2} < \sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2},$$

Рассмотрим интегро-дифференциальную уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Ax(t) + f(t, x(t), \int_{t-\tau}^{t}\varphi(t, s, x(s)ds), \qquad (6)$$

где A-вещественное число, $f(t, x, u(t)), \varphi(t, s, x)$-периодическое по t, s с периодом 2π функции, $\tau = const > 0$.

Предполагается, непрерывно-дифференцируемость $(t, x, u(t)), \varphi(t, s, x)$- по своим переменным. Периодическое решение уравнения (6) ищем в виде

$$x_m(t) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}(a_k coskt + b_k sinkt). \qquad (7)$$

Поставляя (7) в (6) получим равенство

$$\sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}(-k^2 a_k coskt - k^2 b_k sinkt) = Aa_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}(Aa_k coskt + Ab_k sinkt) +$$

$$+A_0^{(m)}+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\left(A_k^{(m)}coskt+B_k^{(m)}sinkt\right), \qquad (8)$$

где

$$A_0^{(m)}=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t,x_m(t),u_m(t)\right)dt,$$

$$A_k^{(m)}=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t,x_m(t),u_m(t)\right)cosktdt,$$

$$B_k^{(m)}=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t,x_m(t),u_m(t)\right)sinktdt,$$

$$u_m(t)=\int_{t-\tau}^{t}\varphi\left(t,s,x_m(s)\right)ds, \qquad k=\overline{1,m}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках функции $coskt, sinkt$ получим из (8) систему алгебраических уравнений относительно неизвестных a_0, a_k, b_k разложении (7).

$$\begin{cases} Aa_0+0\cdot a_k+0\cdot b_k+A_0^{(m)}=0, \\ 0\cdot a_0+(A+k^2)a_0+0\cdot b_k+A_k^{(m)}=0, \\ 0\cdot a_0+0\cdot a_k+(A+k^2)b_k+B_k^{(m)}=0. \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & A+k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_k \\ b_k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_0^{(m)} \\ A_k^{(m)} \\ B_k^{(m)} \end{pmatrix}=0 ,$$

Отсюда получим

$$D^{(m)}\alpha+F^{(m)}(\alpha)=0 , \qquad (9)$$

где

$$D^m=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & A+k^2 \end{pmatrix}, \quad F^{(m)}(\alpha)=\begin{pmatrix} A_0^{(m)} \\ A_k^{(m)} \\ B_k^{(m)} \end{pmatrix}, \ \alpha=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_k \\ b_k \end{pmatrix}. \quad k=\overline{1,m}.$$

Обозначим через $\hat{x}=\hat{x}(t),\ 2\pi-$ периодическое решение уравнения (6) и представим его в виде ряда Фурье

$$\hat{x}(t)=\hat{a}_0+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\hat{a}_k coskt+\hat{b}_k sinkt\right). \qquad (10)$$

Поставляя (10) в уравнение (6) и с учётом свойства оператора S_m, получим следующее равенство

$$S_m\ \frac{d^2\hat{x}(t)}{dt^2}=\frac{d^2\hat{x}_m(t)}{dt^2}=A\hat{x}_m(t)+S_m f\left(t,\hat{x}_m(t),\int_{t-\tau}^{t}\varphi\left(t,s,x_m(s)\right)ds\right)+$$

$$+S_m\left(f\left(t,\hat{x}(t),\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)-S_m f\left(t,\hat{x}_m(t),\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)\right).$$

Отсюда имеем

$$D^{(m)}\hat{\alpha}+F^{(m)}(\hat{\alpha})=$$

$$=-S_m\left(f\left(t,\hat{x}(t),\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)-f\left(t,\hat{x}_m(t),\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)\right)=-\rho(m),$$

где $\quad \hat{\alpha}=\big(\hat{a}_0,\hat{a}_k,\hat{b}_k\big),\qquad k=\overline{1,m}.$

Представим разность

$$f\big(t,\hat{x}(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\big)-f\left(t,\hat{x}_m(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)$$

в виде

$$f\left(t,\hat{x}(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)-f\left(t,\hat{x}_m(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)=$$

$$=f\left(t,\hat{x}(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)-f\left(t,\hat{x}_m(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)+$$

$$+f\left(t,\hat{x}_m(t),\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)-f\left(t,\hat{x}_m(t),\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)=$$

$$=\frac{\partial f\left(t,\hat{x}_m+\theta_1(\hat{x}-\hat{x}_m),\int_{t-\tau}^{t}\varphi\left(t,s,\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)\right)}{\partial x}\big(\hat{x}(t)-\hat{x}_m(t)\big)-$$

$$-\frac{\partial f\big(t,\hat{x}_m(t),\hat{u}+\theta_2(\hat{u}-\hat{u}_m)\big)}{\partial u}\int_{t-\tau}^{t}\frac{\partial\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)+\theta_2(\hat{x}(s)-\hat{x}_m(s))\big)}{\partial x}(\hat{x}(s)-\hat{x}_m(s))ds$$

$$0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1,\qquad 0<\theta_3<1.$$

Оценим разность:

Оценим разность:

$$\left|S_m\left(f\big(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)\big)-f\big(t,\hat{x}_m(t),\hat{u}_m(t)\big)\right)\right|_0\le\left|\tfrac{\partial f\left(t,\hat{x}_m+\theta_1(\hat{x}-\hat{x}_m),\hat{u}(t)\right)}{\partial x}\right|_0|\hat{x}(t)-$$

$$\hat{x}_m(t)|_0+\left|\tfrac{\partial f\left(t,\hat{x}_m(t),\hat{u}+\theta_2(\hat{u}-\hat{u}_m)\right)}{\partial u}\right|_0\int_{t-\tau}^{t}\left|\tfrac{\partial\varphi\left(t,s,\hat{x}(s)+\theta_3(\hat{x}(s)-\hat{x}_m(s))\right)}{\partial x}\right|_0|\hat{x}(s)-\hat{x}_m(s)|_0ds.\quad (11)$$

Так как, согласно теореме 2, для разности $\hat{x}(t)-\hat{x}_m(t)$ имеют место оценки:

$$|\hat{x}(t)-\hat{x}_m(t)|_0\le\sigma(m)|f)|_0,$$

$$\|\hat{x}(t)-\hat{x}_m(t)\|\le\sigma_1(m)\|f\|_0,$$

С учетом этих оценок, из (2.4.6) получим

$$\|\rho(m)\|\le\sigma(m)[|f|_0|f|_1+|f|_1|\varphi|_1|f|_0\tau]=\sigma(m)|f|_0|f|_1(1+|\varphi|_1\tau)\qquad(12)$$

или

$$\|\rho(m)\|\le\sigma_1(m)\|f\|_0|f|_1(1+|\varphi|_1\tau).\qquad(13)$$

Представим уравнение (9) в виде

$$\alpha+\big(D^{(m)}\big)^{-1}F^{(m)}(\alpha)=0,\qquad(14)$$

и положив $\alpha=\hat{\alpha}$, отсюда имеем

$$\hat{\alpha}+\big(D^{(m)}\big)^{-1}F^{(m)}(\hat{\alpha})=-\big(D^{(m)}\big)^{-1}\rho(m),$$

из которого следует оценка

$$\left\|\hat{\alpha} + \left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\hat{\alpha})\right\| \leq K\|\rho(m)\| \leq \sigma(m)K|f|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau) \qquad (15)$$

или

$$\left\|\hat{\alpha} + \left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\hat{\alpha})\right\| \leq K\|\rho(m)\| \leq \sigma_1(m)K\|f\|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau), \qquad (16)$$

где $K = \left\|\left(D^{(m)}\right)^{-1}\right\|$.

Решаем уравнение (14) методом последовательных приближений

$$\alpha_{k+1} = -\left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\alpha_k), \quad k = 0,1,2,\ldots \quad , \qquad (17)$$

За начальное приближение берем число $\alpha_0 = \hat{\alpha}$ т.е коэффициенты частной суммы ряда

$$\hat{x}_m(t) = \hat{a}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\hat{a}_k coskt + \hat{b}_k sinkt\right).$$

Докажем равномерную сходимость итерационного процесса (17). Представим разность $\alpha_{k+1} - \alpha_k$ в виде

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = -\left(D^{(m)}\right)^{-1}\left(F^{(m)}(\alpha_k) - F^{(m)}(\alpha_{k-1})\right) =$$

$$= -\left(D^{(m)}\right)^{-1}\frac{\partial F^{(m)}\left(\alpha_{k-1} + \theta(\alpha_k - \alpha_{k-1})\right)}{\partial \alpha}(\alpha_k - \alpha_{k-1}). \qquad (18)$$

Предположим, что существует достаточно большое число m_0, такое, что при $m \geq m_0$ выполняется условие

$$\left\|\frac{\partial F^{(m)}(\alpha)}{\partial \alpha}\right\| \leq \frac{\chi}{K}, \quad \text{при } 0 < \chi < 1. \qquad (19)$$

Тогда из (18) следует оценка

$$\|\alpha_{k+1} - \alpha_k\| \leq \left\|\left(D^{(m)}\right)^{-1}\right\|\left\|\frac{\partial F^{(m)}\left(\alpha_{k-1} + \theta(\alpha_k - \alpha_{k-1})\right)}{\partial \alpha}\right\|\|\alpha_k - \alpha_{k-1}\| \leq$$

$$\leq K\frac{\chi}{K_1}|\alpha_k - \alpha_{k-1}| \leq \chi|\alpha_k - \alpha_{k-1}|.$$

Отсюда получим

$$\|\alpha_{k+1} - \alpha_k\| \leq \chi\|\alpha_k - \alpha_{k-1}\| \leq \chi^2\|\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2}\| \leq \cdots \leq \chi^k\|\alpha_1 - \alpha_0\|. \qquad (20)$$

Оценим разность $\alpha_1 - \alpha_0$, положив $\alpha_0 = \hat{\alpha}$. Из (17) при $k = 0$ имеем

$$\alpha_1 - \alpha_0 = -\left[\alpha_0 + \left(D^{(m)}\right)^{-1}F^{(m)}(\alpha_0)\right] = -\left[\hat{\alpha} + \left(D^{(m)}\right)^{-1}F^{(m)}(\hat{\alpha})\right] = -\left(D^{(m)}\right)^{-1}\rho(m).$$

Отсюда с учетом неравенства (15) или (16) получим

$$\|\alpha_1 - \alpha_0\| \leq \left\|\left(D^{(m)}\right)^{-1}\right\|\|\rho(m)\| \leq \sigma(m)K|f|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau) \qquad (21)$$

или

$$\|\alpha_1 - \alpha_0\| \leq \sigma_1(m)K|f|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau), \quad \text{при } \; m \to \infty. \qquad (22)$$

С учётом неравенств (21), (22), получим из (20) оценку

$\|\alpha_{k+1} - \alpha_k\| \leq \chi^k\sigma_1(m)K|f|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)$, для $\quad k = 0,1,2,\ldots$

Нетрудно показать справедливости выполнения неравенства

$$\left\|\alpha_{k+p} - \alpha_k\right\| \leq \frac{\chi^k}{1-\chi}\sigma_1(m)|f|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau).$$

Отсюда, при $p \to \infty$ получим

$$\|\bar{\alpha} - \alpha_k\| \leq \frac{\chi^k}{1-\chi}\sigma_1(m)K\|f\|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau), \qquad (23)$$

которая обеспечивает равномерную сходимость последовательности (17) к решению уравнения (14) т.е. $\alpha = \bar{\alpha}$. Так как $\bar{\alpha} = \left(\bar{a}_0, \bar{a}_k, \bar{b}_k\right)$, $k = \overline{1, m}$, то приближенное решение интегро-дифференциального уравнения (6) согласно по методу Галеркина записывается в виде

$$\bar{x}_m(t) = \bar{a}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\bar{a}_k coskt + \bar{b}_k sinkt\right).$$

Из (23) при $k = 0$

$$\|\hat{\alpha} - \bar{\alpha}\| \leq \frac{\sigma_1(m)K\|f\|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)}{1 - \chi}. \tag{24}$$

Оценим разность $\|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|_0$:

$$\|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|_0^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(a_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\left((\hat{a}_k - \bar{a}_k)coskt + \left(\hat{b}_k - \bar{b}_k\right)sinkt\right)\right)^2 dt =$$

$$= \frac{(\hat{a}_0 - \bar{a}_0)^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(\sqrt{2}\,(\hat{a}_k - \bar{a}_k)^2 + \sqrt{2}\left(\hat{b}_k - \bar{b}_k\right)^2) = \frac{(\hat{a}_0 - \bar{a}_0)^2}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\left\|\sqrt{2}\hat{a}_k - \sqrt{2}\bar{a}_k\right\|^2 + \left\|\sqrt{2}\hat{b}_k - \sqrt{2}\bar{b}_k\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\|\hat{\alpha}_k - \bar{\alpha}_k\|^2.$$

Следовательно

$$\|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\|\hat{\alpha} - \bar{\alpha}\|,$$

то с учетом неравенства (24) получим оценку

$$\|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|_0 \leq \frac{\sigma_1(m)K\|f\|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)}{\sqrt{2}(1 - \chi)}.$$

Так как, согласно теореме (2)

$$|\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)|_0 \leq \sigma(m)|f|_0$$

а также

$$\|\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)\|_0 \leq \sigma_1(m)|f|_0,$$

тогда для разности $|\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)|$ справедлива оценка:

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 = |\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t) + \hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq |\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)|_0 +$$

$$+\|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|_0 \leq\leq \sigma(m)|f|_0 + \frac{\sigma_1(m)K\|f\|_0|f|_1(1+|\varphi|_1\tau)}{\sqrt{2}(1-\chi)}. \tag{25}$$

Поскольку $\sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}$, $\sigma_1(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}$ и $\|f\|_0 < |f|_0$ то из (25) следует неравенства

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{m^2}|f|_0\left(1 + \frac{K|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)}{\sqrt{2}(1 - \chi)}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{m^2}|f|_0\frac{\sqrt{2}(1 - \chi) + K|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)}{\sqrt{2}(1 - \chi)} \leq \frac{|f|_0\left[\sqrt{2} + K|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)\right]}{m^2(1 - \chi)},$$

при $m \to \infty$.

Таким образом доказано утверждение.

Теорема 3. Пусть интегро-дифференциальное уравнение (6) имеет 2π −периодическое решение $\hat{x}(t)$ и удовлетворяет следующим требованиям:

а) выполняется требование теоремы 2;

б) $\left\| \hat{\alpha} + \left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\hat{\alpha}) \right\| \le \sigma_1(m) K \|f\|_0 |f|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau)$;

в) $\left\| \frac{\partial F^{(m)}(\alpha)}{\partial \alpha} \right\| \le \frac{\chi}{K}, \quad 0 < \chi < 1, \quad \sigma_1(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}$.

Тогда, алгебраическое уравнение (6) имеет единственное решение

$\bar{\alpha} = \left(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \cdots, \bar{a}_m, \bar{b}_m\right)$, такое, что между точным $\hat{x}(t)$ и приближенным решением $\bar{x}_m(t)$ найденного методом Галеркина, справедлива оценка

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \le \frac{|f|_0\left[\sqrt{2} + K|f|_1(1 + |\varphi|_1 \tau)\right]}{m^2(1 - \chi)}, \quad \text{при } m \to \infty.$$

Литература

1. Алымбаев А.Т. Метод Бубнова-Галеркина построения периодических решений автономных систем интегро-дифференциальных уравнений //А.Т.Алымбаев// Математическая физика. – Киев, 1993. – вып.22. – С.3-7.
2. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач: Монография // А.Т.Алымбаев. – Бишкек, 2015. – 205 с.
3. Алымбаев А.Т. О методе гармонического баланса построения периодического решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием // А.Т. Алымбаев, Бапа кызы Айнура // Алатоо academic studies. –Бишкек, 2022. – №2. – С.459-464.
4. Урабе М. Метод Галеркина для нелинейных периодических систем. – Москва, 1966. – 97, №3. – С.3-34.
5. Самойленко А.М. Метод Бубнова-Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // М.А.Самойленко., О.Д.Нуржанов// Дифференц.уравнения. – 1979. –15, №8. – С.1503-1517.
6. Мартынюк Д.Н. Метод Бубнова-Галеркина отыскания периодических и квазипериодических решений систем с запаздыванием. //Д.Н.Мартынюк// В кн.: Тр. Второй конф. «Дифференциальные уравнения и применения». – 1982. – ч.2. – С.445-448.
7. Cesari L. Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations// L. Cesari//In: Contributions to differential equations. – New-York, 1963,vol.1. – P.145-197.

УДК 517.956

ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Артыков Аамат Жакышович, к.ф.-м.н., доцент
aamat62@mail.ru
Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, к.ф.-м.н., доцент
zulpukarov66@mail.ru
Ошский технологический университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В работе исследован что, если функция $f(t,x,u,\varepsilon)$ аналитическая ффункция по аргументам $u,\varepsilon,$ то применяя вычетный метод показана что, при α >1 n-мерный вектор C имеет малое решение. Тогда задача (1) либо имеет единственное периодическое решение, либо множество периодических решений с периодом 2π по t разлагающихся по целым и дробным степеням параметра ε.*

Ключевые слова: *нелинейных диффереციальных уравнений в частных производных второго порядка, аналитическая функция, периодическое решение.*

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕ ТУУНДУЛУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫНЫН МЕЗГИЛДҮҮ ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

Артыков Аамат Жакышович, ф-м. и. к., доцент
Ош технологиялык университети
aamat62@mail.ru
Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, ф-м. и. к., доцент
zulpukarov66@mail.ru
Ош технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Илимий иште изилденген, эгерде $f(t,x,u,\varepsilon)$ функциясы $u,\varepsilon,$ аргументтери боюнча аналитикалык функция болсо, вычет методун колдонуп көрсөтүлдү, α >1 болгон учурда n-өлчөмдү вектор C кичинекей чыгарылышка ээ болот. Ошондуктан берилген (1) маселе t аргументи боюнча 2π мезгилге ээ болгон жана ε параметри боюнча бүтүн жана бөлчөктүү даражалуу ажыратылган жалгыз мезгилдүү чыгарылышка, же чексиз мегилдүү чыгарылыштарга ээ болот.*

Орунтуу сөздөр: *экинчи тартиптеги жеке туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер, аналитикалык функция, мезгилдүү чыгарылыш.*

BRANCHING OF PERIODIC SOLUTIONS TO SYSTEMS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Artykov Aamat Zhakyshovich, can.ph.math.sc.docent
aamat62@mail.ru
Zulpukarov Zhakshylyk Alibaevich, cand.ph.math sc., docent
zulpukarov66@mail.ru
Osh technological university
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *In this work, it was investigated that if the function* $f(t,x,u,\varepsilon)$ *is analytical in terms of the arguments* $u,\varepsilon,$**,** *then using the residue method it is shown that, for* α ***>1****, the unknown n-dimensional vector C has a small solution. Then the problem (1) either has a unique periodic solution, since the set of periodic solutions with period* 2π *in t expands in integer and fractional powers of the parameter* ε**.**
Key words: *nonlinear partial differential equations of the second order, analytic function, periodic solution*

Рассмотрим систем0у уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} &u_{tt}-u_{xx}=f(x,t,u,\varepsilon)\\ &u(0,t)=0,\quad u_x(0,t)=\mu(t), \end{aligned}\tag{1}$$

где $f(x,t,u,\varepsilon)$ - *n*-мерная вектор-функция, непрерывные совокупности аргументов, 2π - периодические по аргументу t, $\mu(t)-$ *n*-мерная вектор –функция, причем $\mu(t+2\pi)=\mu(t)$. Подстановкой $u=C+V(x,t)$ где С-произвольная постоянная,n -мерный вектор, тогда из (1) имеем

$$\begin{aligned} &v_{tt}-v_{xx}=f(x,t,C+v(x,t),\varepsilon),\\ &v(0,t)=0,\quad v_x(0,t)=\mu(t,x). \end{aligned}\tag{2}$$

Теорема. Пусть функция $f(x,t,C+V,\varepsilon)$ определена в область $D=\{0\le x\le\pi,\, t\in R, |v|\angle 1, 0\angle\varepsilon\angle\varepsilon_0\}$ непрерывна по (x,t), 2π-периодическая по переменной t и $f(x,t,C+v,\varepsilon)\in Lip_v(K_0,D)$ $(0\angle K_0=const),$ и для каждой нечетной функции $v(x,t)$ по переменной t, функция $f(x,t,C+V,\varepsilon)$ – нечетная по переменной t. Тогда для каждой непрерывной нечетной и 2π-периодической функции $\mu(t)$, ,удовлетворяющей уравнению

$$v(\pi,\pi)=\int_0^{2\pi}v(0,s)ds-\int_0^{\pi}ds\int_s^{2\pi-s}f(s,\tau,C+v(s,\tau),\varepsilon)d\tau=\phi(C,\varepsilon)=0\,,\tag{3}$$

задача (2) при достаточно малых ε имеет единственное периодическое решение $v(x,t)$ непрерывно зависящее от одного произвольного вектора С и параметра ε.

Доказательство.

Доказательство проведено для случая $v_x(0,t)=0$.

Для того, чтобы задача (1) имела периодическое решение *u*(*x*,*t*), достаточно определить вектор С.

Вернемся к (3). Пусть вектор-функция $f(x,t,u,\varepsilon)$ аналитичны по *u*, ε в окрестности точки u=0, ε=0, $f(x,t,0,0)=0$. Разлагаем функцию $\phi(C,\varepsilon)$ в ряд Тейлора по степеням С:

$$\phi(C,\varepsilon)=\phi_0(\varepsilon)+\phi_1(\varepsilon)C+\phi_2(\varepsilon)C^2+\ldots+\phi_n(\varepsilon)C^n+\ldots\quad,\tag{4}$$

где $\phi_n(\varepsilon)=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\partial^n\phi(0,\varepsilon)}{\partial C^n}$,

$$\phi_0(\varepsilon)=\int_0^{\pi}ds\int_s^{2\pi-s}f(s,\tau,v(s,\tau,0),\varepsilon)d\tau\,,$$

$$\phi_C^{!}(0,\varepsilon)=\int_0^{\pi}ds\int_s^{2\pi-s}f_u(s,\tau,v(s,\tau,0),\varepsilon)(1+v_C(s,\tau,0))d\tau\,,$$

$$\phi_C^{!!}(0,\varepsilon)=\int_0^{\pi}ds\int_s^{2\pi-s}(f_{uu}(s,\tau,v(s,\tau,0),\varepsilon)(1+v_C(s,\tau,0))^2+f_u(s,\tau,0)v_{CC}(s,\tau,0))d\tau$$

$\phi_0(\varepsilon)-N\times 1$-вектор, $\phi_1(\varepsilon)-N\times N$-матрицы, $\phi_n(\varepsilon)-n-$ линейные формы в Евклидовом пространстве E_N, причем $\phi_n(\varepsilon)$ в свою очередь аналитичны по ε, в частности,

$$\phi_1(\varepsilon)=T(0)+\varepsilon T_1(0)+\varepsilon^2T_2(0)+...+\varepsilon^nT_n(0)+...=T_0+\varepsilon T_1+\varepsilon^2\tilde{\psi} \qquad (5)$$

С учетом обозначений (4),(5) уравнение (3) перепишим в виде

$$(T_0+\varepsilon T_1)C=\phi_0(\varepsilon)+\varepsilon^2\tilde{\psi}_1(\varepsilon)C+\phi_2(\varepsilon)C^2+...+\phi_n(\varepsilon)C^n+... \qquad (6)$$

Теперь применяем вычетный метод в [2],[3] для системы (6).

В данном статьи изложение ведется для случая $\kappa_0=1$.

Воздействуя на обе части (6) оператором (матрицей) $\dfrac{H(\varepsilon)}{\varepsilon}$, получим

$$\Delta_0(\varepsilon)C=\varepsilon^{-1}H(\varepsilon)\phi_0(\varepsilon)+\varepsilon H(\varepsilon)\tilde{\psi}_1(\varepsilon)\ \ +\varepsilon^{-1}H(\varepsilon)\phi_2(\varepsilon)C^2+... \qquad (7)$$

где

$$(T_0+\varepsilon T_1)^{-1}=\frac{H(\varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}=\frac{H(\varepsilon)}{\varepsilon\Delta_0(\varepsilon)}\quad, H(0)\neq 0, \Delta(\varepsilon)=\det(T_0+\varepsilon T_1)\neq 0,\quad \kappa_0=1,$$

$$\det T_0=0,\quad \Delta(\varepsilon)=\varepsilon^{\kappa_0}\Delta_0(\varepsilon),\quad \Delta_0(0)\neq 0.$$

Дале поступим так,

$$C=C(\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}y(\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}y(0)+0(\varepsilon^{\alpha})\quad,\quad \alpha>0, \qquad (8)$$

произвольно фиксированное малое решение (6).

Подставив (8) в (7) и разделив обе части полученного тождества на ε^{α}, получим

$$\Delta_0(\varepsilon)y(\varepsilon)=\varepsilon^{-(\alpha+1)}H(\varepsilon)\phi_0(\varepsilon)+\varepsilon H(\varepsilon)\tilde{\psi}_1(\varepsilon)y(\varepsilon)+\varepsilon^{\alpha-1}H(\varepsilon)\phi_2(\varepsilon)y^2(\varepsilon)+... \qquad (9)$$

Выводы о существовании малых решений делаются на основе анализа (9), как это делается в [1].

Если $\alpha>1$, то имеем

$$\Delta_0(0)y\ (0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-(\alpha+1)}H(\varepsilon)\phi_0(\varepsilon),\quad \alpha>1,$$

Из [1] известно, что в случае $\Delta^{1}(0)\neq 0$ для существования у уравнения (6) малого решения с некоторым $\alpha>1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$b_i=\frac{1}{i}\left[H(\varepsilon)\phi_0(\varepsilon)\right]^{(i)}_{\varepsilon=0}=0,\quad i=0,1,2. \qquad (10)$$

α -определяется из условий $b_i=0,\quad i=0,\alpha,\quad b_{\alpha+1}\neq 0$.

Отсюда определяется произвольный вектор С.

Таким образом доказана следующая

Теорема. Если вектор-функция $f(x,t,u,\varepsilon)$ аналитичны по u, ε. Тогда задача (1) либо имеет единственное периодическое решение, либо множество периодических решений с периодом 2π по t разлагающихся по целым и дробным степеням параметра ε.

Литература

1. Боташев А.И. Периодические решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // Москва:Изд-во МФТИ, 1998. – 90 с.
2. Боташев А.И., Артыков А.Ж. Метод выделения особенностей в теории возмущений .// Исслед.по интегро-дифференц.уравнениям. – Бишкек: Илим,1994. – Вып.25. – С. 211-221.
3. Артыков А.Ж. Вычетный метод для линейных интегральных уравнений Фрегольма. // Вестник Кыргызск.гос.нац.ун-та, Серия естественно-тех. науки. –Бишкек,1997. – Вып.1. – С. 214-216.

УДК 517.977.58

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аширбаев Бейшембек Ыбышевич, к.ф-м.н, доцент
Кыргызско-Российский Славянский Университет им. Б. Ельцина
ashirbaev-58@mail.ru
Алтымышова Жыргал Алымбековна, ст. преподаватель
Кыргызский Государственный Технический Университет им. И. Раззакова
jaltymyshova@gmail.com

Аннотация. *В статье исследуется линейная сингулярно-возмущенная дискретная задача оптимального программного управления с малым шагом. На основе совместного использования методов разделения движений и моментов предложен алгоритм построения равномерного нулевого асимптотического решения рассмотренной задачи. Алгоритм решения задачи построена для асимптотической линейной сингулярно-возмущенной дискретной системы, которая аппроксимирует эквивалентную систему, полученной при полном разделении переменных состояния исходной системы, и она состоит из двух подсистем низкого порядка, решения которых находится независимо, причем они связаны с управляющей функцией. Поправка к следующим приближениям не представляет трудности, так как все изложенные процедуры аналогично повторяются и для всех высших приближений.*

Ключевые слова: *линейные сингулярно-возмущенные дискретные системы с малым шагом, быстрые и медленные переменные, асимптотическая система, оптимальная траектория, оптимальное управление медленной и быстрой подсистемы, уравнения Риккати и Ляпунова, моментные соотношения.*

ДИСКРЕТТИК СИНГУЛЯРДЫК-КОЗГОЛГОН ОПТИМАЛДЫК ПРОГРАММАЛЫК БАШКАРУУ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АЛГОРИТМАСЫ

Аширбаев Бейшембек Ыбышевич, ф-м.и.к., доцент
Б. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян Университети
ashirbaev-58@mail.ru
Алтымышова Жыргал Алымбековна, ага окутуучу
И. Раззаков атындагы Кыргыз Мамлекеттик Техникалык Университети
jaltymyshova@gmail.com

Аннотация. *Макалада дискреттик майда кадам менен сызыктуу сингулярдык-козголгон оптималдык программалык башкаруу маселеси изилденди. Каралган маселенин бир калыпта асимптотикалык нөлдүк чыгарылышынын алгоритмасы кыймылды бөлүштүрүү жана моменттер методдорун биргеликте колдонуу менен сунушталды. Маселенин чыгарылышынын алгоритмасы изделип жаткан системанын абалдарынын өзгөрмөлөрүн толук бөлүү менен алынган эквиваленттик системага аппроксимацияланган асимптотикалык сингулярдык-козголгон дискреттик сызыктуу система үчүн түзүлдү жана ал система тартиби төмөн болгон, чыгарылыштары өз алдынча табылган жана бири бири менен башкаруу функциясы менен байланышып турган эки системанын алдындагы системалардан куралган. Кийинки жакындаштырууларды алуу татаал деле эмес, алынган жыйынтыктар кийинки чыгарылыштар үчүн аналогиялуу алынат.*

Ачкыч сөздөр: *майда кадам менен сызыктуу сингулярдык-козголгон дискреттик система, тез жана жай өзгөрмөлөр, асимптотикалык система, оптималдык траектория, жай жана тез системанын алдындагы системалардын оптималдык траекториялары, Риккати жана Ляпунов теңдемелери, моменттик катнаштар.*

ALGORITHM FOR SOLVING A SINGULARLY PERTURBED DISCRETE PROBLEM OF OPTIMAL PROGRAM CONTROL

Ashirbaev Beishembek Ybyshevich, Candidate of Ph. and Math. Sc., associate professor
ashirbaev-58@mail.ru
Kyrgyz-Russian Slavic University named after B. Yeltsin
Altymyshova Zhyrgal Alymbekovna, senior lecturer
jaltymyshova@gmail.com
Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov
Bishkek, Kyrgyzstan

Annotation. *The article investigates a linear singularly perturbed discrete problem of optimal programmed control with a small step. Based on the joint use of methods for separating motions and moments, an algorithm for constructing a uniform zero asymptotic solution of the considered problem is proposed. An algorithm for solving the problem is constructed for an asymptotic linear singularly perturbed discrete system that approximates the equivalent system obtained by completely separating the state variables of the original system and it consists of two low-order subsystems, the solutions of which are found independently, and they are associated with the control function. The correction to the next approximations is not difficult, since all the above procedures are similarly repeated for all higher approximations.*

Key words: *singularly perturbed small step discrete systems, fast and slow variables, asymptotic system, optimal trajectory, optimal control of slow and fast subsystems, Riccati and Lyapunov equations, moment relations.*

Введение. Работа посвящена построению асимптотических решений линейной сингулярно-возмущенной дискретной задачи оптимального управления. Задачи оптимизации сингулярно-возмущенных дискретных систем в различных постановках исследовались многими авторами.

В [1], [2] формальное асимптотическое разложение решения дискретной сингулярно-возмущенной линейно-квадратичной задачи с фиксированным левым концом и свободным правым построено с помощью асимптотического разложения решения системы, вытекающей из условий оптимальности управления. Во многих работах для построения решений задачи использовались «прямая схема» - метод построения асимптотического разложения решений задачи оптимального управления. В [3], [4], [5] прямая схема использовалась для дискретных задач оптимального управления с малым шагом. В [6] для дискретных слабоуправляемых систем и [7] дискретной периодической сингулярно-возмущенной линейно-квадратичной задачи. Дискретная задача о регуляторе состояния с малым шагом рассмотрена в [8], [9] путем построения асимптотики по малому шагу решения начальной задачи для соответствующего дискретного уравнения Риккати.

Данная работа является продолжением исследований теории сингулярно-возмущенной дискретной задачи оптимального управления. Такие исследования сохраняют свою актуальность и в настоящее время, так как многие задачи техники, экономики, биологии и других наук описываются дискретными моделями. Кроме того, дискретные задачи возникают при численной реализации непрерывных задач оптимального управления.

Постановка задачи. Пусть движения объекта управления описывается линейной сингулярно-возмущенной дискретной системы с малым шагом

$$y(t+T) = Ay(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $y(t) = \big(x(t)\; z(t)\big)'$, $x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^m$ −векторы переменных состояния, $A(\mu)$, $B(\mu)$ − постоянные матрицы:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\mu}A_3 & \frac{1}{\mu}A_4 \end{pmatrix}, B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\mu}B_2 \end{pmatrix},$$

$A_1(t) - (n \times n)$, $A_2(t) - (n \times m)$, $A_3(t) - (m \times n)$, $A_4(t) - (m \times m)$,

$B_1(t) - (n \times r), B_2(t) - (m \times r), u(t) \in R^r$ —вектор управления, t —время переходного процесса:
$t \in \Sigma_T = \{t\colon\ t = kT,\ \ k = 0,\ 1, \cdots, M-1\} \subset \{t\colon 0 \le t \le 1\}$,
T —малый шаг, $T = 1/M$, μ —малый параметр, $0 < \mu < 1$, штрих обозначает транспонирование.

Систему (1) перепишем в виде:

$$x(t+T) = A_1 x(t) + A_2 z(t) + B_1 u(t), \qquad (2)$$
$$\mu z(t+T) = A_3 x(t) + A_4 z(t) + B_2 u(t).$$

Заданы начальные и конечные состояния системы (2):

$$y(t_0) = y_0 = \big(x(t_0)\ \ z(t_0)\big)' = \big(x(0)\ \ z(0)\big)' = (x_0\ \ z_0)' \qquad (3)$$
$$y(t_1) = y_1 = \big(x(t_1)\ \ z(t_1)\big)' = \big(x(MT)\ \ z(MT)\big)' = (x_1, z_1)'. \qquad (4)$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J = \sum_{i=0}^{M-1} u'(iT)u(iT) \qquad (5)$$

при ограничениях (2) – (4).

Предположим, что

I. Собственные значения матрицы A_4 удовлетворяют неравенству
$\left|Re\lambda_j\right| \le \gamma < 1,\ \ j = \overline{1,m},$ где $\gamma -$ некоторая постоянная.

При условии I как показано в [10] систему (2) можно заменить эквивалентной системой, у которой разделены медленные $x(t)$ и быстрые $z(t)$ составляющие вектора состояния:

$$\tilde{x}(t+T) = \tilde{A}_1(\mu)\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1(\mu)u(t), \qquad (6)$$
$$\mu\tilde{z}(t+T) = \tilde{A}_4(\mu)\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2(\mu)u(t) \qquad (7)$$

где

$$\tilde{x}(t,\mu) = x(t,\mu) + \mu N(\mu)\tilde{z}(t,\mu), \qquad \tilde{z}(t,\mu) = z(t,\mu) - H(\mu)x(t,\mu), \qquad (8)$$
$$\tilde{A}_1(\mu) = A_1 + A_2 H(\mu), \quad \tilde{A}_4(\mu) = A_4 - \mu H(\mu)A_2,$$
$$\tilde{B}_1(\mu) = B_1 + N(\mu)\tilde{B}_2(\mu), \quad \tilde{B}_2(\mu) = B_2(\mu) - \mu H(\mu)B_1,$$

Матрицы $\boldsymbol{H(\mu)}$ и $\boldsymbol{N(\mu)}$ соответственно удовлетворяют следующим матричным уравнениям Риккати и Ляпунова:

$$\boldsymbol{\mu H(\mu)A_1 + \mu H(\mu)A_2 H(\mu) = A_3 + A_4 H(\mu)}, \qquad (9)$$
$$\mu\tilde{A}_1 N(\mu) - N(\mu)\tilde{A}_4 - A_2 = 0. \qquad (10)$$

Уравнения (9), (10) имеют решения, которые могут быть представлены в виде равномерно сходящихся степенных рядов [10], [11]:

$$H(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i\mu^i, \quad N(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k\mu^k. \qquad (11)$$

Матрицы H_i и N_k $(i, k = 0, 1, \cdots)$ определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ в уравнениях (9), (10):

$$H_0 = -A_4^{-1}A_3, H_1 = A_4^{-1}(H_0A_1 + H_0A_2H_0), \qquad (12)$$
$$H_i = A_4^{-1}\big(H_{i-1}A_1 + \textstyle\sum_{j=0}^{i-1} H_jA_2H_{v-1}\big),\ i = 2, \cdots, v = i, i-1, i-2, \cdots.$$
$$N_0 = -A_2A_4^{-1},\ N_1 = (A_1N_0 + A_2H_0N_0 + N_0H_0A_2)A_4^{-1},$$
$$N_k = \big[A_1N_{k-1} + A_2\big(\textstyle\sum_{j=0}^{k-1} H_jN_{s-1}\big) + \big(\sum_{j=0}^{k-1} N_jH_{s-1}\big)A_2\big]A_4^{-1},$$
$$k = 2, \cdots, s = i, i-1, i-2, \cdots.$$

Граничные условия системы (6) и (7) определяются соотношениями:

$$\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0,\ \ \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \qquad (13)$$
$$\tilde{x}(t_1) = \tilde{x}(MT) = \tilde{x}_1,\ \ \tilde{z}(t_1) = \tilde{z}(MT) = \tilde{z}_1, \qquad (14)$$

где

$$\tilde{x}_0(\mu) = x_0 + \mu N_0 \tilde{z}_0,\ \tilde{z}_0 = z_0 - H_0 x_0, \qquad (15)$$
$$\tilde{x}_1(\mu) = x_1 + \mu N_M \tilde{z}_1, \qquad \tilde{z}_1 = z_1 - H_M x_1.$$

Теперь задачу (2) – (5) сформулируем в форме: среди всех допустимых управлений требуется найти управление $u^*(t,\mu)$ доставляющие минимум функционалу (5) при ограничениях (6) - (15).

Решение задачи

Наряду с задачей (5), (6) - (15) рассмотрим предельную задачу получающиеся из (2) при $\mu \to 0$:

$$\bar{x}(t+T) = A_0\bar{x}(t) + B_0\bar{u}(\dot{t}),\ \ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0,\ \ \bar{x}(t_1) = \bar{x}_1, \qquad (16)$$
$$\bar{z}(t) = -A_4^{-1}A_3\bar{x}(t) - A_4^{-1}B_2\bar{u}(t),$$

где

$$A_0 = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3,\ B_0 = B_1 - A_2A_4^{-1}B_2. \qquad (17)$$

Задача 1. Среди всех допустимых управлений требуется найти управление $u^*(t,\mu) = \bar{u}(t)$ доставляющие минимум функционалу

$$J_0 = \sum_{i=0}^{M-1} \bar{u}'(iT)\bar{u}(iT) \qquad (18)$$

при ограничениях (16), (17).

Поведение системы (2) или (6), (7) в окрестности граничных точек существенно отличается от поведения системы (16). В связи с этим рассмотрим систему

$$\bar{x}(t+T) = A_0\bar{x}(t) + B_0\bar{u}(t), \qquad (19)$$
$$\mu\tilde{z}(t+T) = A_4\tilde{z}(t,\mu) + B_2u(t,\mu). \qquad (20)$$

Система (19), (20) аппроксимирует систему (6), (7) с точностью порядка μ т.е., является асимптотической системой с точностью $\mathrm{O}(\mu)$ и получается из (6), (7) при следующих приближениях:

$$H \approx H_0 = -A_4^{-1}A_3,\ N \approx N_0 = -A_2A_4^{-1}, \qquad (21)$$
$$\tilde{A}_1 = A_0 = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3,\ \tilde{A}_4 \approx A_4,$$
$$\tilde{B}_1 \approx B_0 = B_1 - A_2A_4^{-1}B_2, \tilde{B}_2 \approx B_2, \tilde{z}(\mathrm{t}) = \bar{z}(\mathrm{t}) + A_4^{-1}A_3\bar{x}(\mathrm{t}).$$

Граничные условия системы (19), (20) определяются соотношениями:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}(0) = \bar{x}_0,\ \ \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0,\ \tilde{z}_0 = z_0 - H_0x_0, \qquad (22)$$
$$\bar{x}(t_1) = \bar{x}(MT) = \bar{x}_1,\ \tilde{z}(t_1) = \tilde{z}(MT) = \tilde{z}_1,\ \tilde{z}_1 = z_1 - H_Mx_1. \qquad (23)$$

Системы (16) и (19), (20) отличаются только вторыми уравнениями. Начальное решение задачи (5), (6) - (15) построим для системы (19), (20).

Задача 2. Среди всех допустимых управлений требуется найти управление $u^*(t,\mu)$ доставляющие минимум функционалу (5) при ограничениях (19) - (23).

Пусть система (19), (20) вполне управляема, т.е., выполняются условия [12]:

II. $rank(B_0\ \ A_0 \cdot B_0 \cdots A_0^{n-1} \cdot B_0) = n.$

III. $rank(B_2\ \ A_4 \cdot B_2 \cdots A_4^{m-1} \cdot B_2) = m.$

Решения задачи (19), (20), (22) можно представить в виде

$$\bar{x}(kT) = A_0^k\bar{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1}B_0\bar{u}(iT), \qquad (24)$$
$$\tilde{z}(kT) = \mu^{-k}A_4^k\tilde{z}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mu^{-k+i}A_4^{k-i-1}\,B_2u(iT). \qquad (25)$$

где $A_0^k,\ A_4^k$ −переходные матрицы однородных систем:

$$\bar{x}(t+T) = A_0\bar{x}(t), \qquad (26)$$
$$\mu\tilde{z}(t+T) = A_4\tilde{z}(t,\mu).$$

При условиях II и III оптимальное управление задачи 2 будем искать в виде

$$u_0^*(t,\mu) = \begin{cases} \bar{u}(t), \ t_0 \le t \le t_1, \\ V(S), \ 0 \le S \le S_1 < +\infty, \end{cases} \quad (27)$$

где $S = \frac{t-t_0}{\mu}$, $S_1 = \frac{t_1-t_0}{\mu}$.

Согласно теории проблемы моментов в силу соотношения (23) ограничение $\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$ для медленной подсистемы (19) приводит к тому, что искомое оптимальное управление $u_0^*(t,\mu) = \bar{u}(t)$ должно удовлетворять условию [13], [14]

$$\sum_{i=0}^{M-1} A_0^{M-i-1} B_0 \bar{u}(iT) = \bar{\alpha}_1 \quad (28)$$

где $\bar{\alpha}_1 = \bar{x}_1 - A_0^M \bar{x}_0$.

Из (28) следует, что удовлетворяющее моментному соотношению (28) и доставляющее минимум функционалу (5) оптимальное управление $\bar{u}(t)$ равна [13], [14]:

$$\bar{u}(kT) = B_0' \left(A_0^{k-i-1}\right)' \bar{W}^{-1}(kT)(\bar{x}_1 - A_0^M \bar{x}_0), \quad (29)$$

где

$$\bar{W}(kT) = \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1} B_0 B_0' \left(A_0^{k-i-1}\right)'. \quad (30)$$

Тогда оптимальные траектории задачи 1, соответствующее оптимальному управлению (29) определяются соотношениями:

$$\bar{x}(kT) = A_0^k \bar{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1} B_0 \bar{u}(iT), \quad (31)$$

$$\tilde{z}^*(kT) = -A_4^{-1} B_2 \bar{u}(kT), \quad (32)$$

где $\tilde{z}^*(kT) = \bar{z}(kT) + A_4^{-1} A_3 \bar{x}(kT)$.

При $t = t_0$ и $t = t_1$ из (32) получаем:

$$\tilde{z}^*(t_0) = -A_4^{-1} B_2 \bar{u}(t_0), \qquad \tilde{z}^*(t_1) = -A_4^{-1} B_2 \bar{u}(t_1). \quad (33)$$

Из теории сингулярных возмущений [15] следует, что оптимальная траектория соответствующее оптимальному управлению (29) определяются из разности векторов $\tilde{z}(t) - \tilde{z}^*(t)$. Этот разность с учетом (32) и (33) записывается в виде:

$$\tilde{z}(\mathrm{kT}) = \mu^{-k} A_4^k \left(\tilde{z}_0 + A_4^{-1}(t_0) B_2(t_0) \bar{u}(t_0)\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \mu^{-k+i} A_4^{k-i-1} B_2 u(iT) - A_4^{-1} B_2 \bar{u}(kT). \quad (34)$$

Оптимальное управление $u_0^*(t,\mu) = \bar{u}(t)$, имеющее минимальную норму и переводящее медленную подсистему (19) из начального состояния $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ в конечное состояние $\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$ известно. Переходим к построению оптимального управления $u_0^*(t,\mu) = V(S)$ и соответствующую оптимальную траекторию $\tilde{z}_0(\mathrm{t}, \upmu)$ быстрой подсистемы (20).

Функционал (5) с учетом (27) записывается в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} V'(iT) V(iT) \to min. \quad (35)$$

Тогда при $t = t_1$ из (34) с учетом (27) и (35) имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu^{-M+i} A_4^{k-i-1} B_2 V\left(\frac{iT-t_0}{\mu}\right) = \alpha_2, \quad (36)$$

где

$$\alpha_2 = \tilde{z}_1 - \mu^{-M} A_4^k \left(\tilde{z}_0 + A_4^{-1} B_2 \bar{u}(t_0)\right) + A_4^{-1} B_2 \bar{u}(MT). \quad (37)$$

Решение задачи (35), (36) согласно проблемы моментов [13], [14] записывается в виде

$$V(kT) = B_2' \left(A_4^{M-k-1}\right)' \mathrm{Q}^{-1} \alpha_2, \quad (38)$$

где

$$\mathrm{Q}(\mathrm{M}, \upmu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{-M+i} A_4^{M-i-1} B_2 B_2' \left(A_4^{M-i-1}\right)'. \quad (39)$$

Управление $u_0^*(t,\mu) = V(kT)$ переводит быструю подсистему (20) из начального состояния $\tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0$ в конечное состояние $\tilde{z}(t_1) = \tilde{z}_1$, имеет минимальную норму и при

$\mu \to 0$ стремится к нулю. Оптимальная траектория $\tilde{z}_0(\mathrm{t}, \mu)$ соответствующая оптимальному управлению (38) определяется из (34). С учетом (37) - (39) $\tilde{z}_0(\mathrm{t}, \mu)$ равна:

$$\tilde{z}_0(\mathrm{kT}, \mu) = \mu^{-k} A_4^k \big(\tilde{z}_0 + A_4^{-1}(t_0) B_2(t_0) \bar{u}(t_0)\big) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \mu^{-k+i} A_4^{k-i-1} B_2 B_2' \big(A_4^{M-k-1}\big)' \mathrm{Q}^{-1} \alpha_2 + A_4^{-1} B_2 \bar{u}(kT). \quad (40)$$

Оптимальная траектория $\tilde{z}_0(t, \mu)$ удовлетворяет всем граничным условиям (22), (23) и для нее имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\mu \to 0} \tilde{z}_0(t, \mu) = \tilde{z}_0 + A_4^{-1} B_2 \bar{u}(t_0) - A_4^{-1} B_2 \bar{u}(t). \quad (41)$$

Следует заметить, что быстрая подсистема (20) рассматривается на большом промежутке времени, т.е. коэффициенты этой подсистемы считаются медленно меняющимся функциями [16].

Оптимальная траектория $\tilde{z}_0(t, \mu)$ выходя из начальной точки направляется к траектории $\bar{x}(t)$ (31) и в течении достаточно долгого времени находится вблизи этой линии (при достаточно малых μ), и уходит с неё через точки переключения для достижения заданного конечного состояния. Точкой переключения является точка пересечения графиков функции $\tilde{z}_0(t, \mu)$ (40) выходящей из начальной и конечной точки.

Алгоритм решений задачи. В результате имеем следующий алгоритм решений задачи 1: 1) выбор данных системы (2): $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, x_0, x_{M,}\ z_0, z_{M,}\ T, M,$ и μ;

2) проверка условий I, если условие I выполняется, то переход осуществляется к пункту 3, в противном случае заново вводится новые данные системы (2);

3) по формулам (17) формируются матрицы A_0, B_0 и проверяется условия II и III, если эти условия выполняются, то переход осуществляется к пункту 4, в противном случае заново вводится новые данные системы (2);

4) в результате вычислений по формулам (29) – (31) имеем решения предельной задачи 1: $\bar{u}(kT), \bar{W}(kT), \bar{x}(kT)$;

5) в результате вычислений по формулам (38) – (40) получаем решения задачи 2 для быстрой подсистемы (20): $V(kT)$, $\mathrm{Q}(\mathrm{M}, \mu)$, $\tilde{z}(\mathrm{kT}, \mu)$;

6) по результатам вычислений пункта 4 и 5 представляем графически функций: $\bar{x}(kT)$, $\tilde{z}(\mathrm{kT}, \mu)$ выходящей из начальной и конечной точки: $\tilde{z}_0 = z_0 - H_0 x_0$, $\tilde{z}_1 = z_1 - H_M x_1$.

Заключение. В данной работе предложен асимптотический способ решения линейной сингулярно-возмущенной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом. Для данной задачи предложен эффективный алгоритм нулевого равномерного асимптотического приближенного решения на основе совместного использования методов разделения движений и проблемы моментов. Поправка к следующему приближению не представляет трудности, так как алгоритм решений для системы (19), (20) аналогично повторяются.

Литература

1. Naidu D.S. Singular perturbation analysis of discrete control systems /D. S. Naidu, A. K. Rao. Lect. Notes Math, 1985. V. P. 1154.
2. Naidu D.S. Singular Perturbation Methodology in Control Systems /D. S. Naidu. - IEE control engineering series, 1988. P. 34.
3. Гаипов М. А. Асимптотика решения нелинейной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом без ограничений на управление (формализм) I /М. А. Гаипов. - Известия АН ТССР. Сер. ФТХ и ГН, 1990. — №1. — С. 9—16.
4. Глизер В. Я. Асимтотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом /В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев. – Дифференц. уравнения. Т. 15, №9, 1979. – С.1681 – 1691.

5. Глизер В. Я. Об одной разностной задаче оптимального управления с малым шагом /В.Я. Глизер, – Дифференц. уравнения. Т. 21, №8, 1985. – С.1440 – 1442.

6. Курина Г. А. Асимптотика решения задач оптимального управления для дискретных слабо управляемых систем /Г. А. Курина. - Прикладная математика и механика, 2002. — Т. 66, вып. 2. — С. 214—227.

7. Kurina G.A. Asymptotic Solution of Discrete Periodic Singularly Perturbed Linear-Quadratic Problem /G. A. Kurina, N. V. Nekrasova //IFAC Generalized solution in control problem. — Pereslavl-Zalessky, 2004. — Elsevier Science Ltd. Oxford, 2004. — P. 169—175.

8. Глизер В. Я. Решение некоторых задач аналитического конструирования реулятора методом пограничного слоя.

/В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев. - Дифференц. уравнения и их приложения. - Днепропетровск, 1975, 3. - С. 63-70.

9. Глизер В. Я. Асимптотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом /В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев. - Дифференц.уравнения,1979,15, №9. - С. 1681—1691.

10. Аширбаев Б.Ы., Алтымышова А.А. Декомпозиция линейной сингулярно-возмущенной дискретной управляемой системы с малым шагом

/Б.Ы. Аширбаев, А.А. Алтымышова. - Вестник КГУСТА № 2 (76), Бишкек, 2022. Том 1. – С.502-509.

11. Стрыгин В. В. Разделение движений методом интегральных многообразий /В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. - Москва: Наука, 1988. - 256 с.

12. Kokotovic P.V. Controllability and time-optimal control of systems With slow and fast models /P.V. Kokotovic, A.H. Haddad. – Institute of Electrikal and Electronie Engineers. Trans. Automat. Control, 1975. 20. – No.1. – P. 111 – 113.

13. Красовский Н. Н. Теория управления движением /Н. Н. Красовский. - Москва: Наука, 1968.- 476 с.

14. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами /Ю.Н. Андреев. – Москва: Наука ,1976. – 424 с.

15. Васильева А.Б. Асимптотические разложение решений сингулярно возмущенных уравнений /А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – Главная редакция физико-математической литературы. Москва: Наука, 1973. – 272 с.

16. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики /Н.Н. Моисеев. - Москва: Наука, 1981. – 400 с.

УДК 517.928

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, д.ф.-м.н., профессор
aijarkyn.osh@mail.ru
Бекиева Малика Раимжоновна, преподаватель
malikabekieva9@gmail.com
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Применение метода дополнительного аргумента к системе уравнений в частных производных второго порядка является актуальным.Кыргызскими учеными рассмотрены применения этого метода к системе уравнений в частных производных первого порядка. В данной работе новым способом сначала система уравнений в частных производных второго порядка с начальными условиямиприводится к виду, удобному для использования метода дополнительного аргумента. Затем методом дополнительного аргумента начальная задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка сводится к системе интегральных уравнений. Результаты работы можно использовать при решении систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.*

Ключевые слова: *Метод дополнительного аргумента, система уравнений, второй порядок, частные производные, начальная задача, интегральное уравнение, сжатое отображение.*

ЭКИНЧИ ТАРТИБИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫН КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ УСУЛУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор,
aijarkyn.osh@mail.ru
Бекиева Малика Раимжоновна, окутуучу
malikabekieva9@gmail.com
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Экинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасына кошумча аргумент кийирүү усулунколдонуу актуалдуу маселе. Кыргыз окумуштуулары бул усулду биринчи тартиптеги жекече туундулуудифференциалдык теңдемелердин системасына колдонууну карашкан. Бул эмгекте жаңы ыкма менен, биринчиден, баштапкы шарттары мененэкинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасы кошумча аргумент кийирүү усулунколдонуу үчүн ыңгайлуу формага келтирилген. Андан кийин кошумча аргумент кийирүү усулуменен экинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн баштапкы маселе интегралдык теңдемелер системасына келтирилет. Иштин натыйжаларын экинчи даражадагы сызыктуу эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системаларын чыгарууда колдонулушу мүмкүн.*

Ачкыч сөздөр: *Кошумча аргумент кийирүү усулу, теңдемелер системасы, экинчи тартиптеги, жекече туундулар, баштапкы маселе, интегралдык теңдеме, кысып чагылтуу.*

SOLUTION OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SECOND ORDER PARTIAL DERIVATIVES BY THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor
aijarkyn.osh@mail.ru
BekievaMalikaRaimjonovna, teacher
malikabekieva9@gmail.com

Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The application of the additional argument method to a system of partial differential equations of the second order is relevant. Kyrgyz scientists have considered applications of this method to a system of partial differential equations of the first order. In this paper, in a new way, first, the system of second-order partial differential equations with initial conditions is reduced to a form convenient for using the additional argument method. Then, by the method of an additional argument, the initial problem for the system of partial differential equations of the second order is reduced to a system of integral equations. The result soft he work can be used in solving systems of nonlinear partial differential equations of the second order.*

Keywords: *Additional argument method, system of equations, second order, partial derivatives, initial problem, integral equation.*

Рассматривается система линейных уравнений в частных производных второго порядка вида:

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2(t,x)u_{xx} + a_1(t,x)u + b_1(t,x)\omega \\ \omega_{tt} = k^2(t,x)\omega_{xx} + a_2(t,x)u + b_2(t,x)\omega \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^k \omega}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \omega_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \tag{3}$$

Используем пространства функций $\overline{C}^{(k)}(\Omega)$, $Q_m(T)$ из [1], где $k, m -$ натуральны е числа. .

Исследование решений различных классов систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с помощью МДА рассмотрены в работах [2-6].

Пустьзаданные функции:

$u_k(x), \omega_k(x) \in \overline{C}^{(2-k)}(R), (k = 0,1),\ a_i(t,x), b_i(t,x) \in \overline{C}^{(2)}(Q_1(T))$.

Решение следующих ИУ обозначим через $p(s,t,x), \quad q(s,t,x)$:

$$p(s,t,x) = x - \int_s^t k(\nu, p(\nu,t,x))d\nu, \tag{4}$$

$$q(s,t,x) = x + \int_s^t k(\nu, q(\nu,t,x))d\nu, \quad (s,t,x) \in Q_2(T). \tag{5}$$

Используем обозначения:

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\vartheta_1(t,x) = D[-k(t,x)]u(t,x), \tag{6}$$

$$\vartheta_2(t,x) = D[-k(t,x)]\omega(t,x), \tag{7}$$

$$g(t,x) = \frac{-1}{k(t,x)}[k_t(t,x) + k(t,x)k_x(t,x)],$$

$$\beta(t,x)=D[k(t,x)]g(t,x).$$

Лемма 1. Задача (1)-(3) эквивалентна системе ИУ

$$\vartheta_1(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)u-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_1(s,q)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t a_1(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t b_1(s,q)\omega(s,q)ds, \qquad (8)$$

$$\vartheta_2(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\omega-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_2(s,q)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\omega(s,q)ds+\int_0^t a_2(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t b_2(s,q)\omega(s,q)ds, \qquad (9)$$

где

$\left[2\vartheta_1(t,x)-g(t,x)u(t,x)\right]\big|_{t=0}=\varphi_1(x)$,

$\left[2\vartheta_2(t,x)-g(t,x)\omega(t,x)\right]\big|_{t=0}=\varphi_2(x)$.

Доказательство. Из (6), (7) методом дополнительного аргумента (МДА) соответственно получаем:

$$u(t,x)=u_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t \vartheta_1\big(s,p(s,t,x)\big)ds\,, \qquad (10)$$

$$\omega(t,x)=\omega_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t \vartheta_2\big(s,p(s,t,x)\big)ds \qquad (11)$$

Пусть $\vartheta_i(t,x),\ (t,x),\ \omega(t,x)\quad i=1,2$ - решение системыИУ (8)-(11).

Дифференцируя (8), имеем:

$$\vartheta_{1t}(t,x)+k(t,x)\vartheta_{1x}(t,x)=k(t,x)g(t,x)u_x(t,x)+a_1(t,x)u(t,x)+b_1(t,x)\omega(t,x) \qquad (12)$$

Из (12) с учетом (6) получаем первое уравнение системы (1). Следовательно, дифференцируя (9) с учетом (7) получается второе уравнение системы (1).Тем самым мы доказали что система ИУ (8)-(11) удовлетворяет систему (1) и начальному условию (2).

Докажем обратное, что, решение задачи (1), (2) является решением системы ИУ (8)-(11). Для этого запишем систему уравнений (1) в виде

$$D[k(t,x)]z_1(t,x;u)=-g(t,x)\vartheta_1(t,x)-\beta(t,x)u+2a_1(t,x)u+2b_1(t,x)\omega, \qquad (13)$$

$$D[k(t,x)]z_2(t,x;u)=-g(t,x)\vartheta_2(t,x)-\beta(t,x)\omega+2a_2(t,x)u+2b_2(t,x)\omega \qquad (14)$$

где

$$z_1(t,x;u)=2\vartheta_1(t,x)-g(t,x)u(t,x),$$
$$z_2(t,x;u)=2\vartheta_2(t,x)-g(t,x)\omega(t,x).$$

Для решения задачи (13), (14) используя МДА, получаем системуИУ (8),(9).

В систему уравнений (8), (9) подставляя (10), (11), получаем систему ИУ относительно неизвестных функций $\vartheta_1(t,x),\ \vartheta_2(t,x)$ в операторном виде:

$$A\vartheta_1=\vartheta_1(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\left(u_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t\vartheta_1\big(s,p(s,t,x)\big)ds\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_1(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\left(u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_1\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds+$$

$$+\int_0^t a_1(s,q)\left(u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_1\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds+$$

$$+\int_0^t b_1(s,q)\left(\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_2\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds, \tag{15}$$

$$A\vartheta_2=\vartheta_2(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\left(\omega_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t\vartheta_2\big(s,p(s,t,x)\big)ds\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_2(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\left(\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_2\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds+$$

$$+\int_0^t a_2(s,q)\left(u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_1\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds+$$

$$+\int_0^t b_2(s,q)\left(\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)+\int_0^s\vartheta_2\big(\tau,p(\tau,s,q)\big)d\tau\right)ds. \tag{16}$$

Лемма 2. Существует такое $T^*>0$, что система ИУ (15), (16) имеет единственное решение в $\overline{C}(Q_1(T^*))$.

Доказательство.

Покажем, что система ИУ (15), (16) имеет в области $Q_1(T)$ при $T<T_*$ единственное, непрерывное решение $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2)$, , удовлетворяющее неравенству

$$\|\vartheta-\phi\|\le M=const,\quad i=1,2,\quad \phi=(\phi_1,\phi_2),$$

$$\phi_1=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)u_0\big(p(0,t,x)\big)-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds+$$

$$+\int_0^t a_1(s,q)u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds+\int_0^t b_1(s,q)\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds,$$

$$\phi_2=\frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\omega_0\big(p(0,t,x)\big)-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds+$$

$$+\int_0^t a_2(s,q)u_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds+\int_0^t b_2(s,q)\omega_0\big(p(0,s,q(s,t,x))\big)ds.$$

Покажем, что при $T<T_*$ операторы*A_1, A_2* являются операторами сжатия

$$\|A_i\vartheta-\phi_i\|\le\|g\|KT+(\|a_i\|+\|b_i\|+\frac{1}{2}\|\beta\|)K\frac{T^2}{2}=\Omega_i(T),\quad i=1,2,$$

где

$$\|\vartheta\|\le\|\phi\|+M=K.$$

Справедливы оценки:

$$\left\| A_i \vartheta^1 - A_i \vartheta^2 \right\| \le \theta_i (T) \left\| \vartheta^1 - \vartheta^2 \right\|, \quad i = 1,2,$$

где

$\theta_i (T) = \|g\| T + (\|a_i\| + \|b_i\| + \frac{1}{2}\|\beta\|) \frac{T^2}{2}, \quad i = 1,2.$ Обозначим через $T_i, i = 1,2,3,4$ – положительные корни уравнений $\Omega_i (T) = M$, $\theta_i (T) = 1, \quad i = 1,2.$

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ осуществляет сжатое отображение. Тогдасистема уравнений (15), (16) определяет единственное решение и это решение может быть получено методом последовательных приближений.

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого поря-дка методом дополнительного аргумента / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
2. Иманалиев М.И. К теории систем нелинейных интегро-дифференци-альных уравнений в частных производных типа Уизема / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С.1111–1115.
3. Аширбаева А.Ж.Решение системы интегро-дифференциальныхуравне-ний методом дополнительного аргумента / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. Специальный выпуск – Ош, 2013. – № 1. –С. 91–94.
4. Аширбаева А.Ж. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Биш-кек, 2017. –№5. – С. 87–90.
5. Садыкова Г. К. Исследование решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / Г.К. Садыкова // Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – №11. – С.15-19.
6. Аширбаева А.Ж.Решение системы операторных уравнений в частных производных первого порядка / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Евразийское научное объединение. – Москва, 2021.– № 11–1 (81). –С.1–5.

УДК 517. 928

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, д.ф.-м.н., профессор
aijarkyn.osh@mail.ru
Жолдошова Чебире Буркановна, преподаватель
chebire86@mail.ru
Ошский технологический университет имени М. Адышева
Ош, Кыргызстан

***Аннотация**: В последнее время расширяется область применения метода дополнительного аргумента, разработанного кыргызскими учеными. Метод дополнительного аргумента дает принципиальные возможности приводить различные виды уравнений в частных производных к интегральным уравнениям. В данной работе рассматривается применение указанного метода для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка. С помощью метода дополнительного аргумента начальная задача для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка сводится к интегральному уравнению. Получены с помощью принципа сжимающих отображений достаточные условия существования и единственности решения интегрального уравнения, эквивалентного начальной задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка.*

***Ключевые слова:** Интегро-дифференциальное, частные производные, метод дополнительного аргумента, начальная задача, интегральное уравнение, принцип сжатых отображений.*

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫН ИЗИЛДӨӨ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор
aijarkyn.osh@mail.ru
Жолдошова Чебире Буркановна, окутуучу
chebire86@mail.ru
М. Адышев атындагыОш технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

***Аннотация:** Акыркы мезгилде кыргыз окумуштуулары тарабынан иштелип чыккан кошумча аргумент кийирүү усулунун колдонуу областары кеңейүүдө. Кошумча аргумент кийирүү усулу жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин ар кандай түрлөрүн интегралдык теңдемелерге келтирүүгө негизги мүмкүнчүлүктөрдү берет. Бул макалада биз төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн бул усулду колдонууну карайбыз. Кошумча аргумент кийирүү усулунун жардамында төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселе интегралдык теңдемеге келтирилет. Төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселеге эквиваленттүү болгон интегралдык теңдеменин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары кысып чагылтуу принцибинин жардамы менен алынган.*

***Ачкыч сөздөр:** Интегро-дифференциалдык, жекече туундулар, кошумча аргумент кийирүү усулу, баштапкы маселе, интегралдык теңдеме, кысып чагылтуу принциби.*

INVESTIGATION OF SOLUTIONS TO THE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION IN FOURTH-ORDER PARTIAL DERIVATIVES

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna, d.ph-m.s., professor

aijarkyn.osh@mail.ru
Zholdoshova Chebire Burkanovna, teacher
chebire86@mail.ru
Osh Technological University named after M. Adyshev
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *Recently, the scope of the additional argument method developed by Kyrgyz scientists has been expanding. The method of an additional argument gives fundamental possibilities to reduce various types of partial differential equations to integral equations. In this paper, we consider the application of this method for a fourth-order integro-differential equation in partial derivatives. Using the method of an additional argument, the initial problem for a fourth-order integro-differential equation in partial derivatives is reduced to an integral equation. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to an integral equation equivalent to the initial problem for a fourth-order partial differential integro-differential equation are obtained using the contraction mapping principle.*

Keywords: *Integro-differential, partial derivatives, additional argument method, initial problem, integral equation, contraction mapping principle.*

В [2,3] рассмотрено применение метода дополнительного аргумента (МДА) для начальной задачи для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка**.**

В [4] рассмотрен новый способ построения решений уравнений в частных производных четвертого порядка гиперболического типа.

В данной работе используя классы и пространства функций из [1], рассмотрим следующую задачу:

$$D^2[-a(t,x)]D^2[a(t,x)]u(t,x) = f(t,x,u,\int_{-\infty}^{\infty} K(t,x,\xi)u(t,\xi)d\xi), \tag{1}$$

$(t,x)\in G_2(T)=[0,T]\times R,$

где

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega\frac{\partial}{\partial x} - \text{дифференциальный оператор},$$

Рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями

$$u(0,x) = \psi_0(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^k u(0,x)}{\partial t^k} = \lambda_k(x), \quad k = 1,2,3, \tag{3}$$

где

$$\psi_0(x), \quad \lambda_k(x) \in \overline{C}^{(4)}(R), \quad (k = 1,2,3).$$

Пусть $a(t,x) \in \overline{C}^{(4)}(G_2(T)),$

$$f(t,x,u,I) \in \overline{C}^{(4)}(G_2(T)) \times R^2) \cap Lip(L\big|_u, N\big|_I, \quad K(t,x,s) \in \overline{C}^{(4)}(G_2(T)\times R),$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|K(t,x,s\right|ds < \gamma = const.$$

Используя начальные данные, введем обозначения:

$$D[-a(t,x)]D^2[a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$D^2[a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_0(x),$$
$$D\ [a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=\psi_1(x).$$

Обозначим через $p(s,t,x),\quad q(s,t,x)-$соответствующие решения интегральных уравнений (ИУ):

$$p(s,t,x)=x+\int\limits_s^t a(\nu,p(\nu,t,x))d\nu, \tag{4}$$

$$q(s,t,x)=x-\int\limits_s^t a(\nu,q(\nu,t,x))d\nu, \tag{5}$$

$$(s,t,x)\in Q_2(T)=\{(s,t,x)\big|\ 0\le s\le t\le T,\ x\in R\}.$$

Следует отметить, ИУ (5), (6) с $a(t,x)\in\overline{C}^{(1)}(G_2(T))$ имеют единственные решения с условием соответственно $p(s,s,x)=x,\quad q(s,s,x)=x.$

Из (4) и (5) вытекают соответственно соотношения

$$D\ [-a(t,x)]p(s,t,x)=0, \tag{6}$$

$$D\ [a(t,x)]q(s,t,x)=0, \tag{7}$$

Лемма 1. Задача (1), (2), (3) эквивалентна ИУ:

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{1}\psi_k(q(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+\int\limits_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\ \varphi_k(p(0,s.q(s,t,x))\frac{s^k}{k!}ds+$$

$$\int\limits_0^t(t-s)\times\int\limits_0^s(s-\tau)\,f\big(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x)),u(\tau,p(\tau,s,q)), \tag{8}$$

$$\left.\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\tau,p(\tau,s,q),\xi)u(\tau,\xi)d\xi\right)d\tau ds.$$

Доказательство.

Обозначая через $z(t,x;u)=D^2[a(t,x)]u(t,x),\quad b(t,x)=-a(t,x),$запишем уравнение (1) в виде:

$$D^2[b(t,x)]z(t,x;u)=f(t,x,u,I)). \tag{9}$$

Введем функцию

$$z_1(t,x;u)=D[b(t,x)]z(t,x;u). \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) принимает вид:

$$D[b(t,x)]z_1(t,x;u)=f(t,x,u,I)). \tag{11}$$

Уравнение (11) с условиями (2), (3) с помощью МДА сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}&z_1(t,x;u)=\varphi_1(p(0,t,x))+\\&+\int\limits_0^t f(s,p(s,t,x),u(s,p(s,t,x)),\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,p(s,t,x),\xi)u(s,\xi))d\xi)ds.\end{aligned} \tag{12}$$

В самом деле, дифференцируя (12), получаем (11).

$$D[b(t,x)]z_1(t,x;u)=\varphi_1'(p(0,t,x))D[b(t,x)]p(0,t,x)+$$

$$+\int\limits_0^t\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial x}\right]D[b(t,x)]p(s,t,x))ds+f(t,x,u,I).$$

Из последнего равенства в силу (5) получаем (11). Полагая $t=0$ в (12), получаем $z_1(0,x;u)=\varphi_1(x)$.

Если функция $z\ (t,x;u)$ –решение уравнения

$$z(t,x;u)=\varphi_0(p(0,t,x))+\varphi_1(p(0,t,x))t+$$
$$+\int_0^t (t-s)f(s,p(s,t,x),u(s,p(s,t,x)),\int_{-\infty}^{\infty}K(s,p(s,t,x),\xi)u(s,\xi))d\xi)ds, \tag{13}$$

то она является решением задачи (12), (2), (3).

В самом деле, из (13)следует

$$D[b(t,x)]z(t,x;u)=[\varphi_0'(p(0,t,x))+\varphi_1'(p(0,t,x))t]D[b(t,x)]p(0,t,x)+$$
$$+\int_0^t (t-s)\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial x}\right]D\,[b(t,x)\,p(s,t,x))ds+z_1(t,x;u).$$

Следовательно, в силу (5) получаем справедливость (12).

Таким образом, введя функцию $z_1(t,x;u)$, из (9) вывели (13).

Обратно применяя 2 раза оператор $D[b(t,x)]$ для уравнения (13), получаем справедливость (9), (2), (3). Далее, введем еще следующее обозначение

$$\theta(t,x;u)=D[a(t,x)]u(t,x).$$

Тогда уравнение (13) принимает вид:

$$D[a(t,x)]\theta(t,x;u)=\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+\int_0^t(t-\tau)\times$$
$$\times f(\tau,p(\tau,t,x),u(\tau,p(\tau,t,x)),\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau,p(\tau,t,x),\xi)u(\tau,\xi))d\xi)d\tau\,. \tag{14}$$

Задача (14), (2), (3) с помощью МДА сводится к решению ИУ

$$\theta(t,x;u)=\psi_1(q(0,t,x))+\int_0^t\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,s,q(s,t,x))\frac{s^k}{k!}ds+$$
$$\int_0^t\int_0^s(s-\tau)f(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x)),u(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x))), \tag{15}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau,p(\tau,s,q),\xi)u(\tau,\xi))d\xi)d\tau ds.$$

В самом деле, дифференцируя (15), получаем

$$D[a(t,x)]\theta(t,x;u)=\psi_1'(q)D[a(t.x)]q(0,t,x)+\int_0^t\sum_{k=0}^{1}\varphi_k'(p(0,s,q))\frac{\partial p}{\partial x}\times$$
$$\times D[a(t,x)]q(s,t,x)ds+\int_0^t\int_0^s(s-\tau)\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial x}\right]\frac{\partial p}{\partial x}\times$$

$$\times D[a(t,x)]q(s,t,x)d\tau ds+\sum_{k=0}^{1}\phi_k(p(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+$$

$$+\int_0^t (t-\tau)f(\tau,p(\tau,t,x),u(\tau,p),\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau,p(\tau,t,x),\xi)u(\tau,\xi))d\xi)d\tau.$$

В силу (6) доказано выполнение (13). Полагая *t=0* в (15), получаем $\theta(0,x;u)=\psi_1(x).$

Если функция $u(t,x)$ – решение ИУ

$$u(t,x)=\psi_0(q(0,t,x))+t\psi_1(q(0,t,x))+\int_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\ \varphi_k(p(0,s.q(s,t,x)))\frac{s^k}{k!}ds+$$
$$+\int_0^t(t-s)\int_0^s(s-\tau)f(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x)),u(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x))),I)d\tau ds, \tag{16}$$

то она является решением задачи (15), (2), (3).

Дифференцируя (16) по t и по x, получаем (15).

$$D[a(t,x)]u(t,x)=[\psi_0'(q)+\psi_1'(q)t]D[a(t.x)]q(0,t,x)+$$
$$+\int_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\varphi_k'(p(s,t,q))\frac{\partial p}{\partial x}D[a(t,x)]q(s,t,x)+$$
$$+\int_0^t(t-s)\int_0^s(s-\tau)\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial x}\right]\frac{\partial p}{\partial x}D[a(t,x)]q(s,t,x)d\tau ds+\theta(t,x;u).$$

В силу (6) доказана справедливость (15).

В (16) при $t=0,\quad u(0,x)=\psi_0(x).$

Таким образом, введя функцию $\theta(t,x;u),$, из (13) вывели (16).

Обратно, последовательно применяя для уравнения (16) сначала 2 раза оператор $D[a]$, затем 2 раза оператор $D[-a]$, получаем справедливость (1), (2), (3).

Таким образом, по схеме применения МДА, приведенной в [1], задача (1), (2), (3) сводится к эквивалентному ИУ (16). Из (16) следует (8).

Лемма 2. ИУ (8) имеет единственное решение.

Доказательство. Введем обозначение

$$g(t,x)=\sum_{k=0}^{1}\psi_k(q(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+\int_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,s,q(s,t,x))\frac{s^k}{k!}ds, \tag{17}$$

запишем уравнение (8) в виде оператора

$$u(t,x)=J(t,x;u)\equiv g(t,x)+\int_0^t(t-s)\int_0^s(s-\tau)\times$$
$$\times f\left(\tau,p(\tau,s,q),u(\tau,p(\tau,s,q)),\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau,p(\tau,s,q),\xi)u(\tau,\xi)d\xi\right)d\tau ds. \tag{18}$$

Для уравнения (18) применяем принцип сжимающих отображений в пространстве $\overline{C}(G_2(T^*))$.

Имеем:

$$|J(t,x;u_1)-J(t,x;u_2)|\le(L+N\gamma)\int_0^t(t-\nu)\int_0^\nu(\nu-\rho)d\rho d\nu\|u_1-u_2\|,$$

следовательно

$$\left\| J(u_1) - J(u_2) \right\| \le (L + N\gamma)\frac{t^4}{4!}\left\| u_1 - u_2 \right\|.$$

Отсюда следует, что при T^* таком, что $(L + N\gamma)\dfrac{T^{*4}}{4!} < 1$, уравнение (19) имеет решение в $\overline{C}(G_2(T^*))$.

Пример. Пусть в уравнении (1) $a(t,x) = c - const$, $f(t,x,u,I) = f(t,x)$, т.е.

$$u_{tttt}(t,x) - 2c^2u_{ttxx}(t,x) + c^4u_{xxxx}(t,x) = f(t,x). \qquad (19)$$

Рассмотрим уравнение (19) с начальными условиями

$$u(0,x) = x^2,$$

$$u_t(0,x) = 0,$$

$$u_{tt}(0,x) = x,$$

$$u_{ttt}(0,x) = 0.$$

Запишем уравнение (19) в операторном виде:

$$D^2[-c]D^2[c]u(t,x) = f(t,x,u),$$

$$D[-c]D^2[c]u(t,x)\big|_{t=0} = [u_{ttt} + cu_{ttx} - c^2u_{txx} - c^3u_{xxx}]\big|_{t=0} = c = \varphi_1(x),$$

$$D^2[c]u(t,x)\big|_{t=0} = [u_{tt} + 2cu_{tx} + c^2u_{xx}]\big|_{t=0} = x + 2c^2 = \varphi_0(x),$$

$$D[c]u(t,x)\big|_{t=0} = [u_t + cu_x]\big|_{t=0} = 2xc = \psi_1(x),$$

$$u(0,x) = x^2 = \psi_0(x).$$

Следовательно, из (8) получаем решение поставленной задачи в виде:

$$u(t,x) = \psi_0(q(0,t,x)) + t\psi_1(q(0,t,x)) + \int_0^t (t-s)\sum_{k=0}^{1} \varphi_k(p(0,s.q(s,t,x)))\frac{s^k}{k!}ds +$$

$$+\int_0^t (t-s)\int_0^s (s-\tau)f(\tau, p(\tau,s,q(s,t,x)))d\tau ds,$$

где $p(s,t,x) = x + c(t-s), \quad q(s,t,x) = x - c(t-s), \quad (s,t,x) \in Q_2(T).$

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
2. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа /Аширбаева А.Ж., Жолдошева Ч.Б. // Вестник ОшГУ, Серия естественных и медицинских наук. – 2012. – № 2. – Вып. 1. – С. 144–149.
3. Аширбаева А.Ж. Исследование решений интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка /Аширбаева А.Ж., Жолдошева Ч.Б. // Вестник ОшГУ, Серия естественных и медицинских наук. – 2012. – № 2. – Вып. 1. – С. 150–153.
4. Аширбаева А.Ж. Новый способ построения решений уравнений в частных производных четвертого порядка гиперболического типа / Аширбаева А.Ж., Мамазиаева Э.А. // Евразийское научное объединение. – 2019.– №2-1(48). – С.6-9.

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Бабаев Сайфулло, к.ф.-м.н., доцент
bsayfullo@internet.ru
Филиал Таджикского технологического университета
Исфара, Таджикстан
Бекмаматов Замирбек Молдошович, к.ф.-м.н., старший преподаватель
zbekmamatov@mail.ru
Баткенский государственный университет
Баткен, Кыргызстан

***Аннотация**: В статье проводятся комплексное исследование задача сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка. При решении задачи сопряжения воспользуются методы теории уравнений смешанного типа и теории интегральных уравнений Вольтера и Фредгольма второго родов. Основная задача расщепляется на три самостоятельные задачи, каждая из которых рассматривается по отдельности. В ходе решения задач исследуются задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и задачи типа Гурса. Следует отметить, что эти обыкновенные дифференциальные уравнения возникают на линии изменения типа и найдены для них краевые условия. Получены формулы решения основной задачи в соответствующих подобластях основной области. Доказано однозначной разрешимости задачи сопряжения.*

***Ключевые слова:** Задача сопряжения, краевые условия, составного типа, задача Гурса, функция Грина и Римана, задача Дирихле.*

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ КУРАМА ЖАНА ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН БИР ЖАЛГАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИ ЖӨНҮНДӨ

Бабаев Сайфулло, ф.-м.и.к, доцент
bsayfullo@internet.ru
Тажик технологиялык университетинин филиалы
Исфара, Таджикстан
Бекмаматов Замирбек Молдошович, ф.-м.и.к, ага окутуучу
zbekmamatov@mail.ru
Баткен мамлекеттик университети
Баткен, Кыргызстан

***Аннотация:** Макалада төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык типтеги теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселесин комплекстүү изилдөө жүргүзүлөт. Жалгаштыруу маселесин чечүүдө аралаш типтеги теңдемелер теориясынын жана Вольтердин жана Фредгольмдун экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин теориясынын усулдары колдонулат. Негизги маселе ар бири өзүнчө каралуучу өз алдынча үч маселелерге ажырайт. Маселелерди чыгаруунун жүрүшүндө экинчи даражадагы кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн маселелер жана Гурса тибиндеги маселелер изилденет. Бул кадимки дифференциалдык теңдемелер тип өзгөрүү сызыгында пайда болуп, алар үчүн чектик шарттар табылганын белгилей кетүү керек. Негизги аймактын тиешелүү камтылуучу аймактарында негизги маселени чечүүнүн формулалары алынган. Жалгаштыруу маселесинин бир маанилүү чечилиши далилденген.*

***Ачкыч сөздөр:** Жалгаштыруу маселеси, чектик шарттар, курама тип, Гурса маселеси, Грин жана Риман функциясы, Дирихле маселеси.*

ON ONE CONJUGATION PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER COMPOSITE AND HYPERBOLIC TYPE EQUATION

Babaev Sayfullo, Candidate of Ph. and Math. Sc., Associate Professor
bsayfullo@internet.ru
Branch of the Tajik Technological University
Isfara, Tajikistan
Bekmamatov Zamirbek Moldoshovich, Candidate of Ph. and Math. Sc., Senior Lecturer
zbekmamatov@mail.ru
Batken State University
Batken, Kyrgyzstan

***Abstract**: In the article a comprehensive study of the conjugation problem for the equation of the composite and hyperbolic types of the fourth order is carried out. When solving the conjugation problem, the methods of the theory of mixed type equations and the theory of Voltaire and Fredholm integral equations of the second kind will be used. The main problem is split into three independent problems, each of which is considered separately. In the course of solving problems, problems for second-order ordinary differential equations and problems of the Goursat type are studied. It should be noted that these ordinary differential equations arise on the line of type change and boundary conditions are found for them. The formulas for the solution of the main problem in the corresponding subdomains of the main domain are obtained. The one-valued solvability of the conjugation problem is proved.*

***Keywords:** Conjugation problem, boundary conditions, composite type, Goursat problem, Green and Riemann function, Dirichlet problem.*

I. Постановка задачи. В области D состоящий из прямоугольников $D_1=\{0\le x\le l_1, 0\le y\le h_1\}$, $D_2=\{0\le x\le l_1, -h_2\le y\le 0\}$, $D_3=\{-l_2\le x\le 0, -h_2\le y\le 0\}$ рассматриваются уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0, \qquad (x,y)\in D_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+du=0, \qquad (x,y)\in D_2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0, \qquad (x,y)\in D_3, \tag{3}$$

где d - постоянное число, $l_1, l_2, h_1, h_2>0.$

Нетрудно убедиться, что уравнения (1), (3) принедлажать к составному, а (2) к гиперболическому типов.

Рассмотрим следующую задачу:

Задача А. Ищется функция $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^3(D)\cap[C^{4+0}(D_1)\cup C^{2+2}(D_1)\cup$ $\cup C^{2+2}(D_2)\cup C^{2+2}(D_3)\cup C^{4+0}(D_3)]$ удовлетворяющий уравнения (1) - (3) соответственно в $D_j\,(j=\overline{1,3})$ при краевых условиях

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \quad u(l_1,y)=\varphi_2(y), \tag{4}$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y), \quad u_{xx}(l_1,y)=\varphi_4(y), \quad 0\le y\le h_1, \tag{5}$$

$$u(x,h_1)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l_1, \tag{6}$$

$$u(l_1,y)=\psi_1(y), \quad -h_2\le y\le 0, \tag{7}$$

$$u(x,-h_2)=\psi(x), \quad 0\le x\le l_1, \tag{8}$$

$$u(x,0)=\chi_1(x), \tag{9}$$

$$u(x,-h_2)=\chi_2(x), \tag{10}$$

$$u_{yy}(x,0)=\chi_3(x), \tag{11}$$

$$u_{yy}(x,-h_2)=\chi_4(x), \quad -l_2 \le x \le 0, \tag{12}$$

$$u(-l_2,y)=\chi(y), \quad -h_2 \le y \le 0\,, \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered}\varphi_j \in C^3\left[0,h_1\right] \ \ (j=1,2), \varphi_j \in C^2\left[0,h_1\right] \ \ (j=3,4), \varphi,\psi \in C^3\left[0,l_1\right], \psi_1(y)\in C^2\left[-h_2,0\right],\\ \chi_1(x),\chi_2(x)\in C^2\left[-l_2,0\right], \chi_3(x),\chi_4(x)\in C^2\left[-l_2,0\right], \chi(y)\in C^3\left[-h_2,0\right].\end{gathered} \tag{14}$$

Из постановки задачи А вытекают следующие условия согласования и сопряжения

$$\begin{gathered}\varphi(0)=\varphi_1(h_1), \varphi(l_1)=\varphi_2(h_1), \varphi_2(0)=\psi_1(0), \psi_1(-h_2)=\psi(l_1), \psi(0)=\chi_2(0), \varphi_1(0)=\chi_1(0),\\ \chi_1(-l_2)=\chi(0), \chi(-h_2)=\chi_2(-l_2)\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}u(x,+0)=u(x,-0)=\tau_1(x),\ u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\nu_1(x),\\ u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=\mu_1(x), \quad 0\le x\le l_1,\\ u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_2(y),\ u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_2(y),\\ u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_2(y), \quad -h_2\le y\le 0,\end{gathered} \tag{16}$$

где τ_j , ν_j , μ_j $(j=1,2)$ – пока неизвестные функции, причем

$$\begin{gathered}\tau_1(0)=\varphi_1(0),\ \tau_1(l_1)=\varphi_2(0),\ \mu_1(0)=\varphi_3(0), \mu_1(l_1)=\varphi_4(0), \tau_2(0)=\varphi_1(0),\ \tau_2(-h_2)=\chi_2(0),\\ \tau_2(-h_2)=\psi(0), \mu_2(0)=\varphi_3(0).\end{gathered} \tag{17}$$

В работе получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи А и даны формулы представления решения задачи в явном виде в соответствующих подобластях области D. Отметим, что основная задача расщепляется на самостоятельные задачи. Изучению задачи сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка посвящены работы [1] - [3].

Следуя методы теории уравнений смешанно-составного типов [4], после определения функции τ_j,ν_j,μ_j задача А распадется на следующие самостоятельные задачи:

Задача 1. Ищется в области D_1 решение уравнения (1) $u(x,y)\in C^2(\overline{D}_1)\cap$ $\cap[C^{4+0}(D_1)\cup C^{2+2}(D_1)]$ при краевых условиях (4) - (6) и условии

$$u(x,+0)=\tau_1(x), \quad 0\le x\le l_1. \tag{18}$$

Задача 2. Ищется в области D_2 решение уравнения (2) $u(x,y)\in C^1(\overline{D}_2)\cap\ \cap C^{2+2}(D_2)$ при краевых условиях (7), (8) и условии

$$u(x,-0)=\tau_1(x), \quad u(+0,y)=\tau_2(y), \quad 0\le x\le l_1, \ \ -h_2\le y\le 0, \tag{19}$$

Задача 3. Ищется в области D_3 решение уравнения (3) $u(x,y)\in C^2(\overline{D}_3)\cap$ $\cap[C^{2+2}(D_3)\cup C^{0+4}(D_3)]$ при краевых условиях (9) - (13) и условии

$$u(-0,y)=\tau_2(y), \quad -h_2\le y\le 0. \tag{20}$$

1. **Соотношение полученное из области D_1.** Перепишем уравнение (1) в виде

$$z_{xx}=0 \tag{21}$$

где $z(x,y)$ – новая неизвестная функция и

$$u_{xx}+u_{yy}=z(x,y). \tag{22}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$z(x,y)=x\omega_1(y)+\omega_2(y), \tag{23}$$

где $\omega_1(y),\ \omega_2(y)$ – произвольные гладкие функции.

Для определения $\omega_1(y)$ и $\omega_2(y)$ воспользуемся краевыми условиями (4), (5). Тогда представляя эти значения в (23) найдем $z(x,y)$. Таким образом в (22) определено правая часть $z(x,y)=z_0(x,y)$. В (22) переходя к пределу при $y\to 0$ имеем соотношение, полученное из области D_1:

$$\tau_1''(x)+\mu_1(x)=z_0(x,0),\ 0\le x\le l_1, \tag{24}$$

Для уравнения (24) решаем задачу $\tau_1(0)=\varphi_1(0),\ \ \tau(l_1)=\psi_1(0)$, и получим

$$\tau_1(x)=p_1(x)+\int_0^{l_1}G_1(x,t)\mu(t)dt, \tag{25}$$

где $G_1(x,t)$ – функция Грина, а $p_1(x)$ - вполне определенная функция.

2. Соотношения, полученные из области D_3**.** По аналогии как в пункте 1 перепишем уравнение (3) в виде $\zeta_{yy}(x,y)=0,$

общее решение, которого имеет вид

$$\zeta(x,y)=yw_1(x)+w_2(x), \tag{26}$$

где $\zeta(x,y)=u_{xx}+u_{yy}$, $w_1(x)$ и $w_2(x)$ – произвольные гладкие функции.

Используя условия (9) - (13) из (26) находим неизвестные функции

$$\begin{gathered} w_2(x)=\chi_1''(x)+\chi_3(x), \\ w_1(x)=\frac{1}{h_2}\left(\chi_1''(x)+\chi_3(x)-\chi_2''(x)-\chi_4(x)\right),\quad -l_2\le x\le 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Исходя из этого уравнение (3) представим в виде

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\zeta_0(x,y),\qquad (x,y)\in D_3, \tag{28}$$

где $\zeta_0(x,y)$ – известная функция.

В (28) переходя к пределу при $x\to 0$ будем иметь соотношение, полученное из области D_3

$$\tau_2''(y)+\mu_2(y)=\zeta_0(0,y). \tag{29}$$

Решение задачи $\tau_2(0)=\varphi_1(0),\ \ \tau_2(-h_2)=\chi_2(0)$ для уравнение (29) дается формулой

$$\tau_2(y)=p_2(y)+\int_{-h_2}^{0}G_2(y,t)\mu_2(t)dt, \tag{30}$$

где $G_2(y,t)$ – функция Грина, а $p_2(y)$ - вполне определенная функция.

3. Решение задачи Гурса для уравнения (2). Для доказательства существование решение задачи 2, рассмотрим задачу Гурса: ищется решение уравнение (2), удовлетворяющее условиям (19) и

$$u_y(x,-0)=\nu_1(x), \quad -l_2 \le x \le 0,$$
$$u_x(-0,y)=\nu_2(y), \quad -h_2 \le y \le 0, \tag{31}$$

где $\tau_j, \nu_{j,} \ \ (j=1,2)$ - пока неизвестные функции.

При $\tau_1, \nu_1 \in C^2\left[-l_2, 0\right], \ \tau_2, \nu_2 \in C^2\left[-h_2, 0\right]$ решение задачи Гурса существует, единственно и имеет вид [5]:

$$u(x,y)=\vartheta_{\eta\xi}(x,y;0,y)\tau_2(y)-\vartheta_\eta(x,y;0,y)\nu_2(y)-\int\limits_0^y\left[\vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)-\vartheta_{\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta)\tau_2(\eta)\right]d\eta-$$
$$-\int\limits_0^y\left[\vartheta(x,y;\xi,0)\nu_1''(\xi)-\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)\tau_1''(\xi)\right]d\xi, \tag{32}$$

где

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n d^n}{((2n+1)!)^2}(\xi-x)^{2n+1}(\eta-y)^{2n+1}$$ – функция Римана. (33)

Используя краевые условия (7) и (8) для определения неизвестные функции $\nu_1(x)$ и $\nu_2(y)$ в (32) будет получено система интегральных уравнений типа Вольтерра-Фредгольма. После некоторых преобразований в этом уравнении, будет обращено Вольтеровская часть и сводиться к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\nu_1''(x)+\int\limits_0^{l_1}K(x,\xi)\nu_1''(\xi)d\xi=\Psi_0(x), \tag{34}$$

с достаточным условием разрешимости, которого является условие

$$M(l_1)\cdot l_1<1, \tag{35}$$

где

$M(l_1)=\max\limits_{0\le\frac{x}{\xi}\le l_1}\left|K(x,\xi)\right|,$ $K(x,\xi)$ - вполне определенная функция,

$\Psi_0(x)=F_2(x)+\int\limits_0^x R_1(x,\xi)F_2(\xi)d\xi,$ $R_1(x,\xi)$ - резольвента ядра $-\frac{1}{h_2}\vartheta_{xx}(x,-h_2;\xi,0),$

$F_2(x)=F_1(x)+\int\limits_{-h_2}^0\vartheta_{\eta\eta x}(x,-h_2;0,\eta)F_1(\eta)d\eta,$

$F_1(x)=-\frac{1}{h_2}F(y)-\frac{1}{h_2}\int\limits_y^0 R(y,\eta)F(\eta)d\eta,$ $R(y,\eta)$ - резольвента ядра $-\frac{1}{l_1}\vartheta_{\eta\eta}(l_1,y;0,\eta),$

$F(y)=\vartheta_{\eta\xi}(l_1,y;0,y)\tau_2(y)-\psi_1(y)+\int\limits_y^0\vartheta_{\xi\eta\eta}(l_1,y;0,\eta)\tau_2(\eta)d\eta-\int\limits_0^{l_1}\vartheta(l_1,y;\xi,0)\tau_1''(\xi)d\xi.$

Неизвестная функция $\nu_2(y)$ будет определено по формуле

$$\nu_2(y)=\Phi_0(y)+\int\limits_0^{l_1}K_1(y,\xi)\nu_1''(\xi)d\xi, \tag{36}$$

где

$\Phi_0(y)$ и $K_1(y,\xi)$- вполне определенные функции. Следует отметить, что $\nu_1(x)$ является решением задачи

$$\nu_1''(x)=\rho(x), \qquad \nu_1(0)=\varphi_1'(0) \qquad \nu_1(l_1)=\varphi_2'(0), \tag{37}$$

и, оно дается формулой

$$\nu_1(x)=\varphi_1'(0)+\frac{x}{l_1}(\varphi_2'(0)-\varphi_1'(0))+\int_0^{l_1}G_3(x,\xi)\rho(\xi)d\xi, \tag{38}$$

где

$$G_3(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\xi(x-l_1)}{l_1}, & 0\le\xi<x,\\ \dfrac{x(\xi-l_1)}{l_1}, & x\le\xi\le l_1\end{cases}$$ - функция Грина.

$\rho(x)$ - вполне определенная функция.

4. Соотношения полученные из области D_2 к областям D_1 и D_3.

С учетом постановки задачи А, и устремляя $y\to-0$ и $x\to-0$ из уравнения (2) получаем следующие задачи:

$$\mu_1''(x)=-d\tau_1(x), \qquad \mu_1(0)=\chi_3(0), \qquad \mu_1'(0)=\chi_3'(0), \tag{39}$$

$$\mu_2''(y)=-d\tau_2(y), \qquad \mu_2(0)=\varphi_3(0), \qquad \mu_2'(0)=\varphi_3'(0), \tag{40}$$

соответственно. Решения задачи (39) и (40) представляются соответственно

$$\mu_1(x)=\chi_3(0)+\chi_3'(0)x-d\int_0^x(x-\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \tag{41}$$

$$\mu_2(y)=\varphi_3(0)+\varphi_3'(0)y-d\int_0^y(y-\eta)\tau_2(\eta)d\eta. \tag{42}$$

Далее, подставляя выражения (25) и (30) для $\tau_1(x)$ и $\tau_2(y)$ в (41) и (42) имеем

$$\mu_1(x)=\chi_3(0)+x\chi_3'(0)+\int_0^{l_1}Q_1(x,t)\mu_1(t)dt-d\int_0^{l_1}P_1(t)dt, \tag{43}$$

$$\mu_2(y)=\varphi_3(0)+y\varphi_3'(0)+\int_{-h_2}^{0}Q_2(y,t)\mu_2(t)dt-d\int_{-h_2}^{0}P_2(t)dt, \tag{44}$$

где

$$Q_1(x,t)=\int_0^x(x-\xi)G_1(\xi,t)d\xi, \qquad Q_2(y,t)=\int_0^y(y-\eta)G_2(\eta,t)d\eta. \tag{45}$$

Уравнения (44) и (45) представляют собой интегральные уравнения Фредгольма второго рода, достаточные условия разрешимости, которых являются соответственно

$$\begin{gathered} l_1\cdot M_1(l_1)<1, \qquad M_1(l_1)=\max_{0\le\frac{x}{t}\le l_1}|Q_1(x,t)|,\\ h_2\cdot M_2(h_2)<1, \qquad M_2(h_2)=\max_{0\le\frac{y}{t}\le h_2}|Q_2(y,t)|. \end{gathered} \tag{46}$$

Таким образом, подставляя найденные значения функции $\tau_1(x)$, $\tau_2(y)$, $\nu_1(x)$, $\nu_2(y)$ в правую часть формулы (32), находим решение задачи 2.

5. Решение задачи 1 и 3 в областях D_1 и D_3. После определения функций $\tau_1(x)$, $\tau_2(y)$, не трудно видеть, что решения задачи 1 и 3 эквивалентно редуцируются к решению задачи Дирихле для уравнения (22) и (28) с краевыми условиями (4), (6), $u(x,0)=\tau_1(x)$ $(0\le x\le l_1)$ и (9), (10), (13), $u(0,y)=\tau_2(y)$ соответственно.

Решение задачи Дирихле представимо в виде [6]:

а) для уравнения (22)

$$u(x,y)=\int_0^{l_1}G_{01\eta}(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi-\int_0^{l_1}G_{01\eta}(x,y;\xi,h_1)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^{h_1}G_{01\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^{h_1}G_{01\xi}(x,y;l_1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta-\int_0^{l_1}d\xi\int_0^{h_1}G_{01}(x,y;\xi,\eta)z(\xi,\eta)d\eta, \tag{47}$$

б) для уравнения (28)

$$u(x,y)=\int_{-l_2}^{0}G_{02\eta}(x,y;\xi,-h_2)\chi_2(\xi)d\xi-\int_{-l_2}^{0}G_{02\eta}(x,y;\xi,0)\chi_1(\xi)d\xi+\int_{-h_2}^{0}G_{02\xi}(x,y;0,\eta)\tau_2(\eta)d\eta-$$

$$-\int_{-h_2}^{0}G_{02}(x,y;-l_2,\eta)\chi(\eta)d\eta-\int_{-l_2}^{0}d\xi\int_{-h_2}^{0}G_{02}(x,y;\xi,\eta)\zeta_0(\xi,\eta)d\eta, \tag{48}$$

где

$$G_{01}(x,y;\xi,\eta)=\frac{4l_1h_1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{h_1^2n^2+l_1^2m^2}\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{h_1}y\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}\xi\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{h_1}\eta\right),$$

$$G_{02}(x,y;\xi,\eta)=\frac{4l_2h_2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{h_2^2n^2+l_2^2m^2}\sin\left(\frac{\pi n}{l_2}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{h_2}y\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l_2}\xi\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{h_2}\eta\right)-$$

функции Грина.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть выполнены условия (14), (15), (35), (46). Тогда задача А имеет решение, оно единственно и определяется в областях D_1-D_3 по формулам (47), (32) и (48) соответственно.

Литература

1. Бекмаматов З.М. Задачи сопряжения для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка/ Дис.канд.физ.-мат. наук, Ош, 2022. – 105 с.
2. A. Sopuev, S. Babaev, Z.M. Bekmamatov Revisiting the Mixed Problem for Equations of Compound and Hyperbolic Types of Order Four [Text] / Revisiting the mixed problem for equations of compound end hyperbolic types of order four // Growth poles of the global economy: emergence, changes and future perspectives. Lecture notes in networks and system. – 2020. – 73, V.1. – P. 725-736.
3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно–составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
4. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. –М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
5. Сопуев А. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка и уравнения смешанного типа / Дис.докт.физ.-мат. наук, Бишкек, 1996. – 235 с.
6. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОЛУНЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ УСЛОВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Джамалов Сироджиддин Зухриддинович, д.ф.-м.н., профессор,
siroj63@mail.ru
Сипатдинова Бийбиназ Кенесбайевна, PhD докторант,
sbiybinaz@mail.ru
Халхаджаев Бахтиёр Батырович, PhD докторант,
xalxadjaev@yandex.ru
Институт математики имени В.И.Романовского при академии наук РУ
Ташкент, Узбекистан.

Аннотация: *Для уравнений смешанного типа второго рода в неограниченных областях нелокальные краевые задачи в многомерном случае практически не исследованы.*

С этой целью в данной работе в неограниченном параллелепипеде формулируется и изучается полу нелокальная краевая задача периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка. Для доказательства единственности обобщённого решения используется метод интегралов энергии. Для доказательства существования обобщённого решения сначала используется преобразование Фурье и в результате получается новая задача на плоскости, а для разрешимости этой задачи используется методы "ε -регуляризации" и априорных оценок. Используя эти методы, и равенство Парсеваля, доказывается единственность, существование и гладкость обобщённого решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа второго рода второго порядка, полу нелокальная краевая задача, преобразование Фурье, методы " ε -регуляризации" и априорных оценок.

ON A LINEAR INVERSE PROBLRM FOR A THREE-DIMENTIONAL MIXED TYPE SECOND ORDER EQUATION WITH A SEMI-NONLOCAL BOUNDARY CONDITION OF A PERIODIC TYPE IN AN UNBOUNDED PARALLELEPIPED

Dzamalov Sirojiddin Zuhriddinovich, d.ph-m.s., professor
siroj63@mail.ru
Sipatdinova Biybinaz Kenesbayevna, PhD. Stud,
sbiybinaz@mail.ru
Khalkhodjayev Bakhtiyor Batirovich, PhD. Stud,
xalxadjaev@yandex.ru

Abstract: *For equations of mixed type of the second kind in unbounded domains, nonlocal boundary value problems in the multidimensional case are practically not studied.*

To prove the uniqueness of the generalized solution, the method of energy is used. To prove the existence of a generalized solution, the Fourier transform is first used, and as a result, a new problem in the plane is obtained, and for the solvability of this problem, the methods of "ε -regularization" and a priori estimates are used. Using these methods and Parseval's equality, we prove the uniqueness, existence and smoothness of a generalized solution of a non-local boundary value problem of periodic type for a three-dimentional mixed-type equation of the second kind of the second order.

Keywords: generalized solutions, second-order mixed-type equation, semi-nonlocal boundary value problem, Fourier transform, the methods of "ε -regularization" and a priori estimates.

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений математической физики [3]. Обратные задачи для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода в ограниченных областях изучены в [2]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа первого рода второго порядка в неограниченных областях [4, С. 3606-3615], [5, С. 1-12], а для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченных областях обратные задачи практически не исследованы.

Для решения данной проблемы в настоящей работе, по исследованию однозначной разрешимости обратных задач для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде предлагается метод, который основан на приведении обратных задач к прямым с полунелокальным краевым условием периодического типа для семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в ограниченной прямоугольной области. Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения тех или иных функционалов от решения уравнения [6, С.86-94].

В области

$$G=(0,1)\times(0,T)\times R=Q\times R=\{(x,t,z);\quad x\in(0,1),0<t<T<+\infty,z\in R.\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа второго рода:

$$Lu=k(t)u_{tt}-\Delta u+a(x,t)u_t+c(x,t)u=\psi(x,t,z), \tag{1}$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{zz}$- оператор Лапласа и пусть $k(0)\le 0\le k(T)$. Здесь $\psi(x,t,y)=g(x,t,y)+h(x,t)\cdot f(x,t,y)$, $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $k(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [1, С.100].

Линейная обратная задача. Найти функции $(u(x,t,z),h(x,t))$ удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие что, функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующим полу нелокальным краевым условием периодического типа

$$\gamma u\big|_{t=0}=u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$D_x^p u\big|_{x=0}=D_x^p u\big|_{x=1}, p=0,1, \tag{3}$$

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z)\to 0$ при $|z|\to\infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\overline{Q}$. (4)

Кроме того, решение задачи (1)-(4) удовлетворяет дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0)=\varphi_0(x,t),\quad \text{где}\quad \ell_0\in R \tag{5}$$

а функции $u(x,t,z)$ и $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U=\left\{(u,h)\big|\, u\in W_2^{2,3}(G);h\in W_2^2(Q).\right\}$$

Здесь $W_2^{2,3}(G)$ Банахово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)-$ пространство Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|_2^2 = \|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q)} = \sum_{|\alpha|\le 2} \int_Q \left|D^\alpha \vartheta\right|^2 dxdt.$$

Здесь $\alpha -$ мульти индекс, D^α – обобщённая производная по переменным x и t,

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z) e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной $z,$ функции $u(x,t,z).$

Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x,t,z) \in U,$ удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду с условиями (2)-(5).

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области $G,$ и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части и заданной функции $\varphi_0(x,t)$;

Условие 1:

периодичность: $a(x,0) = a(x,T);\, c(x,0) = c(x,T).$

нелокальное условие: $\gamma \cdot g(x,0,z) = g(x,T,z),\ \gamma \cdot f(x,0,z) = f(x,T,z),$

гладкость: $f(x,t,l_0) = f_0(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(Q), \left|f_0(x,t)\right| \ge \eta > 0;\ f \in W_2^{3,3}(Q), g \in W_2^{1,3}(Q).$

Условие 2:

$$\varphi_0(x,t) \in W_2^3(Q); \gamma D_t^q \varphi_0\big|_{t=0} = D_t^q \varphi_0\big|_{t=T}, q = 0,1,2; \varphi_0\big|_{x=0} = \varphi_0\big|_{x=1} = 0.$$

Теорема 1. Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнение (1), кроме того, пусть $2a - |k_t| + \mu k \ge B_1 > 0$, $\mu c(x,t) - c_t(x,t) \ge b_2 > 0,$ для всех $(x,t) \in \overline{Q},$ где $\mu = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ и $|\gamma| > 1,$ и пусть существует положительные числа $\sigma, c(\sigma^{-1})-$(коэффициенты неравенство Коши) такие, что для $b_0 = \min\{B_1, \mu, b_2\}$ имеют оценки $b_0 - c(\sigma^{-1}) = \delta > 0,$ $c(\sigma^{-1}) = 11\mu^2\sigma^{-1} > 0,$ $q = M\|f\|^2_{W_2^{3,3}(G)} < \frac{1}{2},$ где

$M = const(\sigma\mu^2 m\delta^{-1}\eta^{-2}\|f_0\|_{C^{0,1}_{x,t}(Q)}),$ $m = 10c_1c_2c_3,$ $c_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(1+|\lambda|^2)^3} < +\infty,$ $c_i(i=2,3)$

коэффиценты теорема вложения Соболева.

Тогда функции

$$u(x,t,z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,t,\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda,$$

$$h(x,t)=\frac{1}{f_0(x,t)}[\Phi_0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 e^{i\lambda\ell_0}\hat{u}(x,t,\lambda)d\lambda],$$

здесь $\Phi_0=L_0\varphi_0-g_0$; $L_0\varphi_0=k(t)\varphi_{0tt}-\varphi_{0xx}+a(x,t)\varphi_{0t}+c(x,t)\varphi_0$, являются единственным решением линейной обратной задачи (1)-(5) из указанного класса U, где функция $\hat{u}(x,t,\lambda)$ подлежит к определению.

Однозначное разрешимость задачи (1)-(5) докажем с помощью преобразованием Фурье, т.е. для нахождение решение задачи (1)-(5), применяем преобразование Фурье по переменной z, для задачи (1)-(5) и в прямоугольнике $Q=(0,1)\times(0,T)$ получим для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми вспомогательную задачу:

$$L\hat{u}=k(t)\hat{u}_{tt}-\hat{u}_{xx}+a(x,t)\hat{u}_t+(c(x,t)+\lambda^2)\hat{u}=\hat{g}(x,t,\lambda)+ \\ +\frac{\hat{f}(x,t,\lambda)}{f_0(x,t)}[\Phi_0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{i\xi\ell_0}\hat{u}(x,t,\xi)d\xi]\equiv\hat{F}(\hat{u}), \tag{6}$$

с полунелокальными краевыми условиями:

$$\gamma\hat{u}\big|_{t=0}=\hat{u}\big|_{t=T}; \tag{7}$$

$$\hat{u}\big|_{x=0}=\hat{u}\big|_{x=1}=0, \tag{8}$$

где, $\lambda\in R=(-\infty,\infty)$,

$$\hat{f}(x,t,\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz$$

-преобразование Фурье по переменной z, функции $f(x,t,z)$.

Сначала методами "ε-регуляризации", априорных оценок и сжимающихся отображение доказывается единственность и существование обобщённого решения вспомогательной задачи (6)-(8). Используя эти методы, и равенство Парсеваля, доказывается однозначное разрешимость обобщённого решения обратной задачи с полу нелокальными краевыми условиями периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде.

Литература

1. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. - Новосибирск: НГУ, 1983. 216 с.
2. Джамалов, С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа: монография / С.З. Джамалов. - Ташкент. 2021. 176 с.
3. Лаврентьев, М.М. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, В.Г. Васильев. - Новосибирск. Наука, 1969. 67 с.
4. S.Z. Dzhamalov. The Linear Inverse Problem for the Three- Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain / S.Z. Dzhamalov, R.R. Ashurov, Kh.Sh. Turakulov // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. T.42. №15. P. 3606-3615.
5. S.Z. Dzhamalov, M.G. Aliev, Kh.Sh. Turakulov. On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain / S.Z. Dzhamalov, M.G. Aliev, Kh.Sh. Turakulov // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2022. T.42. №1. P.1-12.
6. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения / А. М. Нахушев // Дифференц, уравнения. 1983. Т.19. №1. С.86-94.

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Джамалов Сироджиддин Зухриддинович, д.ф.-м.н., профессор
siroj63@mail.ru
Туракулов Хамидулло Шамсиддинович, PhD докторант
hamidtsh87@gmail.com
Институт математики имени В.И. Романовского при академии наук РУ
Мамбетсапаев Курбанияз Айниязович
mr.kurbaniyaz@gmail.com
Филиал Российского Государственного Университета нефти и газа имени И.М. Губкина в Ташкенте
Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном паралилепипеде.*

Для доказательства единственности обобщённого решения используется метод интегралов энергии. Для доказательства существования обобщённого решения сначала используется преобразование Фурье и в результате получается новая задача на плоскости, а для разрешимости этой задачи используется методы "ε -регуляризации" и априорных оценок. Используя эти методы, и равенство Парсеваля, докажем единственность, существование и гладкость обобщённого решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка.

Ключевые слова: *обобщенная решение, модельное уравнения Трикоми, полупериодическая краевая задача, преобразование Фурье, методы “ $\varepsilon -$ регуляризации”и априорных оценок.*

ON A LINEAR INVERSE PROBLEM WITH SEMI-PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS FOR THE THREE-DIMENTIONAL TRICOMI EQUATION IN THE UNBOUNDED PARALLELEPIPED

Dzamalov Sirojiddin Zuhriddinovich, d.ph-m.s., professor
siroj63@mail.ru
Turakulov Hamidullo Shamsiddinovich, PhD. Stud.
hamidtsh87@gmail.com.
Institute of mathematics named after V.I.Romanovsky Academia of Science of the Republic of Uzbekistan
Mambetsapaev Kurbaniyaz Ayniyazovich
mr.kurbaniyaz@gmail.com
The Branch of the Russian State University of Oil and Gas named after I.M. Gubkin in Tashkent
Tashkent, Uzbekistan.

Abstract: *This article discusses the correctness of a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation in an unbounded parallelepiped.*

To prove the uniqueness of the generalized solution, the method of energy is used. To prove the existence of a generalized solution, the Fourier transform is first used, and as a result, a new problem in the plane is obtained, and for the solvability of this problem, the methods of “ε -regularization” and a priori estimates are used. Using these methods and Parseval’s equality, we prove the uniqueness, existence and smoothness of a generalized solution

of a non-local boundary value problem of periodic type for a three-dimentional mixed-type equation of the first kind of the second order.

Key words: *generalized solution, Tricomi model equation, semi-periodic boundary value problem, Fourier transform, methods of "ε -regularization" and a priori estimates.*

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений таких как, параболических, эллиптических и гиперболических типов. [1,2]. Для уравнений смешанного типа, как первого, так и второго рода в ограниченных областях изучено в работах. [4].

В неограниченых областях прямые задачи с нелокалными краевыми условиями изучены в работах [1-3], а обратные задачи с нелокальными краевыми условиями изучены в работах [3,4]. Используя результаты этих работ, в данной работе, для исследования однозначное разрешимости обратных задач для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном паралилепипеде предлагается метод, который основан на сведение обратной задачи к прямым полупериодическим краевым задачам для семейство нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми в ограниченной прямоугольной области.

В области

$G=(-1,1)\times(0,T)\times R=Q\times R=\{(x,t,z);x\in(-1,1),0<t<T<+\infty,z\in R.\}$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu=xu_{tt}-\Delta u+a(x,t)u_t+b(x,t)u=\psi(x,t,z), \tag{1}$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{zz}$- оператор Лапласа. Здесь $\psi(x,t,z)=g(x,t,z)+h(x,t)\cdot f(x,t,z)$, $g(x,t,z)$ и $f(x,t,z)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Линейная обратная задача. Найти функции ($u(x,t,z),h(x,t)$) удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие что, функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующим полупериодическими краевым условиям

$$D_t^p u\big|_{t=0}=D_t^p u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=-1}=u\big|_{x=1}=0 \tag{3}$$

при $p=0,1$, где $D_t^p u=\dfrac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u=u.$

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z)\to 0$ при $|z|\to\infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\overline{Q}$ (4)

с дополнительным условием

$$u(x,t,\ell_0)=\varphi_0(x,t),\quad \text{где } \ell_0\in R \tag{5}$$

и с функций $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U=\left\{(u,h)\big|\, u\in W_2^{2,3}(G);h\in W_2^2(Q)\right\}$$

Здесь $W_2^{2,3}(G)$ Банахово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)-$ пространство Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|_2^2 = \|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q)} = \sum_{|\alpha|\le 2} \int\limits_Q \left|D^\alpha \vartheta\right|^2 dxdt.$$

Здесь $\alpha -$мультииндекс, D^α $-$обобщённая производная по переменным x и t,

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной $z,$ функции $u(x,t,z).$

Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x,t,z) \in U,$ удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду с условиями (2)-(5).

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области $G,$ и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части и заданной функции $\varphi_0(x,t)$;

Условие 1:

периодичность: $a(x,0) = a(x,T);\, c(x,0) = c(x,T).$

периодически условие: $g(x,0,z) = g(x,T,z), \quad f(x,0,z) = f(x,T,z),$

гладкость: $f(x,t,l_0) = f_0(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(Q),\ \left|f_0(x,t)\right| \ge \eta > 0;\ f \in W_2^{3,3}(G),\, g \in W_2^{1,3}(G).$

Условие 2: $\varphi_0(x,t) \in W_2^3(Q);\, D_t^q\, \varphi_0\big|_{t=0} = D_t^q\, \varphi_0\big|_{t=T}, q = 0,1,2;\ \varphi_0\big|_{x=-1} = \varphi_0\big|_{x=1} = 0$

Однозначное разрешимость задачи (1)-(5) докажем с помощью преобразованием Фурье, т.е для нахождение решение задачи (1)-(5), применяем преобразование Фурье по переменной $z,$ для задачи (1)-(5).

Для того чтобы сформулировать основной результат, необходимо выполнить некоторые формальности построения.

Рассмотрим следы уравнения (1) при $z = \ell_0$:

$$Lu(x,t,\ell_0) = xu_{tt}(x,t,\ell_0) - u_{xx}(x,t,\ell_0) - u_{zz}(x,t,\ell_0) +$$
$$+ a(x,t)u_t(x,t,\ell_0) + c(x,t)u(x,t,\ell_0) = \psi(x,t,\ell_0).$$

Теперь, учитывая условие (5) и то, что $f_0 \neq 0$, определим формально неизвестную функцию $h(x,t)$ в виде интеграла

$$h(x,t) = \frac{1}{f_0(x,t)}[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{i\lambda\ell_0} \hat{u}(x,t,\lambda) d\lambda]$$

где $\Phi_0 = L_0\varphi_0 - g_0;$ $L_0\varphi_0 = x\varphi_{0tt} - \varphi_{0xx} + a(x,t)\varphi_{0t} + b(x,t)\varphi_0,$ а для определения функций $\hat{u}(x,t,\lambda),$ в области $Q = (-1,1)\times(0,T)$ получим нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми:

$$L\hat{u} = x\hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} + a(x,t)\hat{u}_t + (b(x,t) + \lambda^2)\hat{u} = \hat{g}(x,t,\lambda) +$$
$$+\frac{\hat{f}(x,t,\lambda)}{f_0(x,t)}[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{i\xi\ell_0}\hat{u}(x,t,\xi)d\xi] \equiv \hat{F}(\hat{u}), \tag{6}$$

с полупериодическими краевыми условиями:

$$D_t^p \hat{u}\big|_{t=0} = D_t^p \hat{u}\big|_{t=T}; p = 0,1 \tag{7}$$

$$\hat{u}\big|_{x=-1} = \hat{u}\big|_{x=1} = 0 \tag{8}$$

где, $\lambda \in R = (-\infty, \infty)$,

$$\hat{f}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz$$

- преобразование Фурье по переменной z, функции $f(x,t,z)$.

Основными результатом является

Теорема 1 (Основной результат). Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнение (1), кроме того пусть существует положительное число μ, т.ч, $2a(x,t) - \mu x \geq B_1 > 0$, $b_t(x,t) + \mu b(x,t) \geq b_2 > 0$, $a_t \leq 0$, для всех $(x,t) \in \overline{Q}$, и пусть существует положительные числа $\sigma, c(\sigma^{-1})$ – (коэффициенты неравенство Коши) такие, что для $b_0 = \min\{B_1, \mu, b_2\}$ где $c(\sigma^{-1}) = 14\mu^2\sigma^{-1} > 0$, имеют оценки $b_0 - c(\sigma^{-1}) = \delta > 0$;
$M\|f\|^2_{W_2^{3,3}(G)} \leq \frac{1}{2}$, $M = const(\sigma m \delta^{-1}\eta^{-2}\|f_0\|_{C^{0,1}_{x,t}(Q)})$ $m = 10c_1c_2c_3$, $c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^4 d\lambda}{(1+|\lambda|^2)^3} < +\infty$,

$c_i (i = 2,3) -$ коэффициенты теоремы вложения Соболева.

Тогда функции

$$u(x,t,z) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(x,t,\lambda)e^{i\lambda z}d\lambda, \tag{9}$$

$$h(x,t) = \frac{1}{f_0(x,t)}[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 e^{i\lambda\ell_0}\hat{u}(x,t,\lambda)d\lambda] \tag{10}$$

являются единственным решением линейной обратной задачи (1)-(5) из указанного класса U.

Литература

1. Аниканов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука,1978. – 120 с.
2. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа // Монография. –Ташкент, 2021. – 176 с.
3. S.Z.Dzhamalov, R.R.Ashurov, Kh.Sh. Turakulov. The Linear Inverse Problem for the Three- Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, 42(15). – P. 3606–3615.
4. S.Z.Dzhamalov, M.G.Aliev, Kh.Sh. Turakulov. On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain. // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2022, (42)(1). – P.1-12.

УДК 517.5

О НЕКОТОРОЙ ТЕОРЕМЕ ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЁФА

Жураева Умидахон Юнусалиевна, докторант,
umida_9202@mail.ru
Самаркандский государственный университет,
Самарканд, Узбекистан.

Аннотация: *Работа посвящена теореме типа Фрагмена–Линделефа для бигармонических функций, которая получена с помощью формул Карлемановского типа. Доказывается интегральное представление для бигармонических функций. При помощи этого интегрального представления получается некоторые свойства (оценка роста, формула Карлемана) бигармонических функций определенного класса в* R^3 .

Ключевые слова: *теорема типа Фрагмена–Линделёфа, бигармоническая функция, функция Карлемана, интегральное представление.*

ABOUT SOME THEOREM OF THE PHRAGMEN-LINDELOF TYPE

Jurayeva Umidahon.Yunusalievna. PhD student,
e-mail: umida_9202@mail.ru
Samarkand State University named after Sharof Rashidov,
Samarkand, Uzbekistan.

Abstract: *Theorems of the Phragmen–Lindelof type for biharmonic functions, which is obtained using Carleman type formulas, is considered. The integral representation for biharmonic functions is proved. With the help of this integral representation, some properties (growth estimation, Carleman formula) of biharmonic functions of a certain class in* R^3 *are obtained.*

Keywords: *Phragmen–Lindelof type theorem, biharmonic function, Carleman's function, integral representation*

Теоремы типа Фрагмена-Линделёфа появились в литературе со времен знаменитой статьи Эдварда Фрагмена и Эрнста Линделофа 1908 года [1]. Теорема Фрагмена-Линделофа “на бесконечности” устанавливает существование асимптотических пределов функции на бесконечности и дает представление о природе этих пределов, когда функция лежит в соответствующем классе решений.

Теоремы типа Фрагмена-Линделёфа часто изучался в течение последнего столетия. Например Альфорс [2] расширил результаты из [1] к верхнему полупространству R^n, Гильбарг [3] и Серрин [4] рассмотрели более общие эллиптические уравнения второго порядка, а Витоло рассмотрел задачу в угловых секторах. Курта [5] и Джин-Ланкастер [6,7,8] рассматривали квазилинейные эллиптические уравнения и негиперболические уравнения, в то время как Капуццо-Витоло [9] и Армстронг-Сираков-Смарт [10] рассматривал полностью нелинейные уравнения. Адамович [11] изучал различные неограниченные области для подрешений уравнения p-Лапласа с переменным показателем, в то время как Бхаттачарья [12] и Гранлунд-Марола [13] рассматривали бесконечно-гармонические функции в неограниченных областях. Аналогичные теоремы рассматривались в работах [14,15]. Эта задача встречается для гармонических функциях в работах Евграфова и И.А. Чегиса [16], А.Ф. Леонтьева [17]. И.С. Аршоном[18], Ш. Ярмухамедова [19] и З.Р.Ашуровой [20] - [23]. В статьях [24]-[25] получены подобные результаты для бигармоничеких функций.

В этой работе мы изучаем некоторые новые результаты: теорему типа Фрагмена-Линделофа для бигармонических функций заданных в R^3. Основной результат, приведенный в этой заметке, изложен в теореме 2.

Пусть R^3 - трехмерное вещественное евклидово пространство $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), x' = (x_1, x_2, 0), y' = (y_1, y_2, 0), r = |x - y|,$ $\alpha = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \alpha^2 = s, D = \left\{y: y = (y_1, y_2, y_3), 0 < y_3 < \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0\right\}.$

Пусть бесконечная область D двухмерного пространство и бигармоническая в D функция $u(P)$, непрерывная вплоть до границы со своими частными производными до третьего порядка включительно. Требуется показать, что если функция $u(P)$, ее нормальная производная, лапласиан функции и нормальная производная этого лапласиана ограничены на границе D и $u(P)$ неограниченна внутри, то при $P \to \infty$ она должна расти внутри D со скоростью, не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста.

Определяя функции $\varphi_\sigma(y, x)$ и $\Phi_\sigma(y, x)$, $\alpha > 0$ следующими равенствами

$$\varphi_\sigma(y, x) = \frac{3\exp(achi\rho_1(x_3 - h/2)}{2\rho\exp(\sigma x_3)} \int_0^\infty \mathrm{Im} \frac{\exp(\sigma\omega - achi\rho_1(\omega - h/2)}{(\omega - x_3 + 3h)(\omega - x_3)} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}}, \quad (1)$$

$$\Phi_\sigma(y, x) = c_0 r^2 \varphi_\sigma(y, x) \quad (2)$$

где $\omega = y_3 + i\eta$, $\eta^2 = t^2 + \alpha^2$, ρ, ρ_1 −положительные числа, (в дальнейшем обозначим с помощью c_0 все постоянные числа, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем).

Теорема 1. Для функция $\Phi_\sigma(y, x)$ определенная формулой (2), справедлива равенство $\Phi_\sigma(y,x) = C_1(r + r^2 G_\sigma(y,x))$, $(C_1 \in R)$, где $G_\sigma(y, x)$ гармоническая функция по переменной включая $y = x$ и при $y \neq x$, $\Phi_\sigma(y, x)$ является функцией Карлемана для области D.

Теорема 2. Пусть $u(y)$ - бигармоническая функция определенная в D, имеющая непрерывные частные производные до третьего порядка вплоть до конечных точек границы ∂D и

$$\sum_{k=0}^{1} \left(\left|\Delta^k u(y)\right| + \left|\frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n}\right| \right) \le c_0 exp\ exp\ \rho_2 |y|, \qquad \forall y \in D,\ \rho_2 < \rho_1 < \rho,$$

$$\forall y \in \partial D,\ \ u(y) = 0,\ \ \int_{\partial D} \left(\sum_{k=0}^{1} \left(\left|\Delta^k u(y)\right| + \left|\mathrm{grad}\Delta^{1-k} u(y)\right| \right) \right) |ds| \le c_0.$$

Тогда в любой точке $y \in D$ выполняется $u(y) = 0$.

Теорема точно, так как можно построить пример бигармонической функции, которой устанавливает его точность.

Рассмотрим функцию $u(y)$, в области $D \subset R^3$, где D-неограниченная область,

$D = \{y = (y_1, y_2, y_3):\ y_1, y_2, y_3 \in R,\ 0 < y_3 < \frac{\pi}{\rho},\ \rho > 0\}$ с границей ∂D

$$u(y_1, y_2, y_3) = \mathrm{Re}\exp\left(e^{\frac{2\pi\left(y_2 + i\left(y_3 + \frac{b}{2}\right)\right)}{b}} - \frac{\pi\left(y_2 + i\left(y_3 + \frac{b}{2}\right)\right)}{b} \right),\ b = \frac{\pi}{\rho}.$$

Введем следующее обозначения:

$$v(y_1, y_2, y_3) = e^{e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\left(\cos\frac{2\pi\left(y_3 + \frac{b}{2}\right)}{b} + i\sin\frac{2\pi\left(y_3 + \frac{b}{2}\right)}{b}\right) - \frac{\pi y_2}{b} - i\frac{\pi y_3}{b}},$$

$$A=e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b},\quad B=e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi y_2}{b}.$$

Далее функцию $v(y_1,y_2,y_3)$ перепишем в виде

$$v(y_1,y_2,y_3)=e^{e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi y_2}{b}}\cos\left(e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}\right)+$$

$$ie^{e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\cos\frac{\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi y_2}{b}}\sin\left(e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}\right)=e^B\cos A+i\,e^B\sin A.$$

Тогда $u(y_1,y_2,y_3)=e^{B}\cos A$. Имея в виду равенства

$$\cos\left(e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\frac{b}{2}}{b}-\frac{\pi\frac{b}{2}}{b}\right)=\cos\left(e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$\cos\left(e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{-2\pi\frac{b}{2}}{b}+\frac{\pi\frac{b}{2}}{b}\right)=\cos\left(-e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

получим $u(y_1,y_2,0)=0$, $u\left(y_1,y_2,\frac{\pi}{\rho}\right)=0$. Вычислим частные производные первого и второго порядка функций A и B:

$$A'_{y_2}=\frac{2\pi}{b}e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b},\quad A''_{y_2y_2}=\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b},$$

$$A'_{y_3}=\frac{2\pi}{b}e^{\frac{2\pi t}{b}}\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi}{b},\quad A''_{y_3y_3}=-\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b},$$

$$B'_{y_2}=\frac{2\pi}{b}\cos\frac{2\pi y_3}{b}e^{\frac{2\pi y_2}{b}}-\frac{\pi}{b},\quad B''_{y_2y_2}=\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b};$$

$$B'_{y_3}=-\frac{2\pi}{b}e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b},\quad B''_{y_3y_3}=-\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}.$$

Складывая полученные равенства, выводим

$$A''_{y_1y_1}+A''_{y_2y_2}+A''_{y_3y_3}=0, \qquad (3)$$

$$B''_{y_1y_1}+B''_{y_2y_2}+B''_{y_3y_3}=0, \qquad (4)$$

и кроме того

$$\left(B'_{y_2}\right)^2+\left(B'_{y_3}\right)^2-\left(A'_{y_2}\right)^2-\left(A'_{y_3}\right)^2=0, \qquad (5)$$

$$2A'_{y_2}B'_{y_2}+2A'_{y_3}B'_{y_3}=0. \qquad (6)$$

Далее вычислим частные производные функции $u(y)$:

$u'_{y_1}=0$, $u'_{y_2}=B'_{y_2}e^B\sin A+A'_{y_2}e^B\cos A$, $u'_{y_3}=B'_{y_3}e^B\sin A+A'_{y_3}e^B\cos A$.

А также находим частные производные второго порядка:

$u''_{y_2y_2}=e^B\left(B''_{y_2y_2}\sin A+A'_{y_2}B'_{y_2}\cos A\right)+B'_{y_2}B'_{y_2}e^B\sin A+e^B\left(A''_{y_2y_2}\cos A-A'_{y_2}A'_{y_2}\sin A\right)+B'_{y_2}A'_{y_2}e^B\cos A,$

$u''_{y_3y_3}=e^B\left(B''_{y_3y_3}\sin A+A'_yB'_y\cos A\right)+B'_{y_3}B'_{y_3}e^B\sin A+e^B\left(A''_{y_3y_3}\cos A-A'_{y_3}A'_{y_3}\sin A\right)+B'_{y_3}A'_{y_3}e^B\cos A.$

Складывая полученные равенства, выводим

$\Delta u=u''_{y_1}+u''_{y_2y_2}+u''_{y_3y_3}=e^B\sin A\left(B''_{y_2y_2}+B''_{y_3y_3}\right)+e^B\cos A\,(A'_{y_2}B'_{y_2}+A'_{y_3}B'_{y_3})+e^B\sin A\,(B'_{y_2}B'_{y_2}+B'_{y_3}B'_{y_3}-A'_{y_2}A'_{y_2}-A'_{y_3}A'_{y_3})+e^B\cos A\left(A''_{y_2y_2}+A''_{y_3y_3}\right).$

На основании равенств (3)-(6) окончательно имеем: $\Delta u = 0$, поэтому $\Delta^2 u = 0$, т.е $u(y)$ бигармоническая функция.

Пример бигармонической функции $u = sin\rho y_2 sh\rho y_1$ показывает, что ограничение на рост нормальной производной, выражаемой интегральным неравенством, ослабить нельзя.

Литература

1. Phragmen E. Lindelof E. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propri'et'es des functions monogenes dans le voisinage d'un point singulier, Acta Math. 31. no 1. 1908.pp. 381-406.
2. Ahlfors L., On Phragmen-Lindelof's principle. Trans. Amer. Math. Soc. 41, 1937, pp. 1-8.
3. Gilbarg D. The Phragmen-Lindelof theorem for elliptic partial differential equations. J. Rational Mech. Anal. 1. 1952. pp. 411-417.
4. Serrin J. On the Phragmen-Lindelof principle for elliptic differential equations. J. Rational Mech. Anal. 3. 1954. pp. 395-413.
5. Kurta V. V. Phragmen-Lindelof theorems for second-order quasilinear elliptic equations. Ukrain. Mat. Zh. 44. 10. 1992. pp 1376-1381.
6. Jin Z., Lancaster K. Theorems of Phragmen-Lindelof type for quasilinear elliptic equations. J. Reine Angew. Math. 514.1999. pp. 165-197.
7. Jin Z., Lancaster K. Phragmen-Lindelof theorems and the asymptotic behavior of solutions of quasilinear elliptic equations in slabs. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics 130. 2. 2000. pp. 335-373.
8. Jin Z., Lancaster K. A Phragmen-Lindelof theorem and the behavior at infinity of solutions of non-hyperbolic equations. Pacific journal of mathematics 211. no 1. 2003. pp. 101-121.
9. Capuzzo D., Vitolo A. A qualitative Phragmen-Lindelof theorem for fully nonlinear elliptic equations. Differential Equations 243. no 2. 2007. pp. 578-592.
10. Armstrong S. N., Sirakov B., Smart C. K. Singular solutions of fully nonlinear elliptic equations and applications. Arch. Ration. Mech. Anal. 205. no 2. 2012. pp. 345-394.
11. Adamowicz T. Phragmen-Lindelof theorems for equations with nonstandard growth. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 97. 2014. pp. 169- 184.
12. Bhattacharya T. On the behaviour of infinity-harmonic functions on some special unbounded domains. Pacific Journal of Mathematics 219. no 2. 2005. pp. 237-253.
13. Granlund S., Marola N. Phragmen-Lindelof theorem for infinity harmonic functions. Commun. Pure Appl. Anal. 14 (2015), pp. 127-132
14. Almefleh H., Lancaster K. Pragmen-Lindelof theorems in cylinders. Royal Society of Edinburgh. Proceedings A. 135. 2005 .3. pp. 439 - 459.
15. Almefleh H., AlAhmad R. Pragmen-Lindelof type theorem at infinity. International Journal of Mathematics and Computer Science. 17. 2022.1. pp. 331-343.
16. Evgraphov M.A., Chegis I.A. Generalization of the Phragmen-Lindelof type theorem for analytic functions to harmonic functions in space. Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1960, Vol.134, pp. 252-262.
17. Leontiev A.F. On Phragmen-Lindelof type theorems for harmonic functions in a cylinder. Proceedings of the Academy of Sciences of of the USSR. 1960. Vol. 27. pp. 661-676.
18. Arshon I.S., Evgraphov M.A. An example of a harmonic function in the whole space, bounded outside a circular cylinder. Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1962 Vol. 143. pp. 231-234.
19. Yarmukhamedov Sh.Ya. The Cauchy problem for the polyharmonic equation.Reports of the Russian Academy of Sciences.2003. Vol.388. pp-162-165.
20. Ashurova Z.R., Juraeva N.Yu., Juraeva U.Yu. About some properties of the Yarmukhamedov kernel. International Journal of Innovative Research. 2021, Impact Factor 7.512. Vol. 10. pp. 84-90
21. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem. Journal of Critical Reviews. India 2020. DOI 10.31938.jcr.07.06.62. Vol. 7. pp. 371-378.
22. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Task Cauchy and Carleman function. Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal. Affiliated to Kurukshetra University, Kurukshetra. 2020. URL http://saarj.com Vol.10. pp. 371-378.
23. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. The Carleman function and the Cauchy problem for polyharmonic functions. Lap LAMBERT Academic publishing Saabrucen.2013. 96 p.
24. Jurayeva U.Yu . The Phragmen-Lindelof type theorems. Uzbek Mathematical Journal 2022, Volume 66, Issue 3, pp.54-61. DOI: 10.29229/uzmj.2022-3-7.
25. Жураева У. Ю., Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для бигармонических функций, Изв. вузов. Матем., 2022, номер 10, 42–65. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-10-42-65

УДК 517.929

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Жээнтаева Жумагул Кенешовна, к.ф.-м.н., доцент
jjk_kuu@mail.ru
КУМУ имени Б. Сыдыкова,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В статье предложены следующие отношения эквивалентности в пространстве решений начальных задач для динамических систем. Отношение асимптотической эквивалентности: расстояние между двумя решениями стремится к нулю при увеличении времени, соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим фактор-пространством; отношение асимптотической экспоненциальной эквивалентности: расстояние между двумя решениями убывает экспоненциально при увеличении времени, соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим экспоненциальным фактор-пространством. Отношение хаусдорфовой асимптотической эквивалентности: неограниченное сближение решений с обратимым преобразованием аргумента с увеличением времени, соответствующее фактор-пространство названо хаусдорфовым асимптотическим фактор-пространством. Показано, что понятие хаусдорфова асимптотического фактор-пространства создает новые математические объекты.*

Ключевые слова: *отношение эквивалентности, фактор-пространство, асимптотическая эквивалентность, дифференциальное уравнение, начальная задача.*

ДИНАМИКАЛЫК СИСТЕМАЛАРДЫН ТЕОРИЯСЫНДА ЧЫГАРЫЛЫШТАРДЫН АСИМПТОТИКАЛЫК ЭКВИВАЛЕНТТИГИ

Жээнтаева Жумагул Кенешовна, ф.-м.и.к., доцент
jjk_kuu@mail.ru
Б. Сыдыков атындагы КӨЭАУ,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада динамикалык системалар үчүн баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын мейкиндигинде эквиваленттүүлүктүн төмөнкүдөй катыштары сунушталды. Асимптотикалык эквиваленттик катышы: убакыт өскөндө эки чыгарылыштын арасындагы аралык нөлгө умтулат, дал келген фактор-мейкиндик асимптотикалык фактор-мейкиндик деп аталды. Асимптотикалык экспоненциалдык эквиваленттик катышы: убакыт өскөндө эки чыгарылыштын арасындагы аралык нөлгө экспоненциалдуу түрдө умтулат, дал келген фактор-мейкиндик асимптотикалык экспоненциалдык фактор-мейкиндик деп аталды. Хаусдорфтук асимптотикалык эквиваленттүүлүк катышы: убакыттын өсүшү менен чечимдердин чексиз жакындашуусунда аргументтин кайра өз калыбына өзгөрүүсүнө дал келген фактор-мейкиндик хаусдорфтук асимптотикалык фактор-мейкиндик деп аталды. Хаусдорфтук асимптотикалык фактор-мейкиндик түшүнүгү жаңы математикалык объекттерди жаратаары көрсөтүлдү.*

Ачкыч сөздөр: *эквиваленттүүлүктун катышы, фактор-мейкиндик, асимптотикалык эквиваленттүүлүк, дифференциалдык теңдеме, баштапкы маселе.*

ASYMPTOTICAL EQUIVALENCE OF SOLUTIONS IN THE THEORY OF DYMAMICAL SYSTEMS

Zheentaeva Zhumagul Keneshovna, Cand. Sci.,
jjk_kuu@mail.ru
KUIU named after B. Sydykov,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *In the paper, the following equivalence relations in spaces of solutions of initial value problems for dynamical systems are proposed. The asymptotical equivalence relation: distance between two solutions tends to zero while time increases, the corresponding quotient space was called "asymptotical quotient space". The asymptotical exponential equivalence relation: distance between two solutions decreases exponentially while time increases, the corresponding quotient space was called "asymptotical exponential quotient space". The Hausdorff asymptotical equivalence relation: distance between two solutions with invertible transformation of argument tends to zero while time increases; the corresponding quotient space is called "Hausdorff asymptotical quotient space". It is demonstrated that the notion of the Hausdorff asymptotical quotient spaces generate new mathematical objects.*
Keywords: *equivalence relation, quotient space, asymptotical equivalence, differential equation, initial value problem.*

1. Введение

Цель данной статьи -показать, что понятия эквивалентности и фактор-пространства могут быть использованы для получения новых результатов и представления в более общей форме известных результатов в различных разделах теории динамических систем.

Во втором разделе рассматриваются следующие отношения эквивалентности в пространстве решений начальных задач для динамических систем: отношение асимптотической эквивалентности: расстояние между двумя решениями стремится к нулю при увеличении времени; отношение асимптотической экспоненциальной эквивалентности: расстояние между двумя решениями убывает экспоненциально при увеличении времени; отношение хаусдорфовой асимптотической эквивалентности: неограниченное сближение решений с обратимым преобразованием аргумента с увеличением времени.

В третьем разделе – обзор по дифференциальным уравнениям с запаздыванием.

В четвертом разделе – построение новых математических объектов.

2. Определения и обозначения

Обозначим $\boldsymbol{N}_0 = \{0,1,2,3,...\}$, $\boldsymbol{N} = \{1,2,3,...\}$, $\boldsymbol{R} =(-\infty,\infty)$, $\boldsymbol{R}_+ =[0,\infty)$, $\boldsymbol{R}_{++} =(0,\infty)$, E_n -$n\times n$-единичная матрица, $n \in \boldsymbol{N}$; $C^{m(k)}D$ -пространство функций $u\colon D\to \boldsymbol{R}^m$, непрерывных вместе с производными до k порядка, D -область в $\boldsymbol{R}$, $0\in D$, $m \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{N}_0$; $C^{*m(k)}D$ -подпространство функций, удовлетворяющих условию $u(0)=0\in \boldsymbol{R}^m$. Значения $m=1$ и $k=0$ будем опускать.

Пусть аргумент искомых функций t принадлежит вполне упорядоченному множеству Λ, имеющему наименьший элемент 0, но не имеющему наибольшего элемента. Обычно используется $\Lambda=\boldsymbol{R}_+$ или $\Lambda=\boldsymbol{N}_0$.

В данной статье мы рассматриваем только начальные задачи. Если предположить, что начальная задача всегда имеет решение, оно является единственным и глобальным, то есть продолжается на все множество Λ, то пространство решений некоторой динамической системы с начальным условием φ можно представить в виде оператора $W(t,\varphi)\colon\Lambda\times\Phi\to Z$, Φ -топологическое пространство начальных условий, Z -топологическое пространство значений решений. В случае $\Lambda=\boldsymbol{R}_+$ будем предполагать, что $W(t,\varphi)$ непрерывен по t.

Будем рассматривать следующие виды пространств Φ и Z: линейные одномерные ($\boldsymbol{R}$); -линейные многомерные ($\boldsymbol{R}^d$); линейные нормированные; равномерные.

О п р е д е л е н и е 1. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ названо отношением асимптотической эквивалентности: если Z -линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\lim\{ \|W(t,\varphi_1)- W(t,\varphi_2)\|_Z\colon t\to\infty\}= 0). \tag{1}$$

Если Z -метрическое пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\lim\{ \rho_Z(W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2))\colon t\to\infty\}= 0). \tag{2}$$

Если Z -равномерное пространство с множеством Γ_Z окружений диагонали, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\forall V \in \Gamma_Z)(\exists t_1 \in \Lambda)(\forall t > t_1)((W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)) \in V). \qquad (3)$$

Соответствующее фактор-пространство называется асимптотическим фактор-пространством. Явление «размерность асимптотического фактор-пространства меньше, чем размерность исходного пространства» называется «асимптотическое уменьшение размерности пространства решений».

О п р е д е л е н и е 3. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением λ-экспоненциальной асимптотической эквивалентности $(\lambda \in \boldsymbol{R}_{++})$:

Если Z -линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1 \sim_\lambda \varphi_2) \Leftrightarrow (sup\{ ||W(t,\varphi_1) - W(t,\varphi_2)||_Z \exp(\lambda t): t \in \Lambda\} < \infty). \qquad (4)$$

Если Z -метрическое пространство, то

$$(\varphi_1 \sim_\lambda \varphi_2) \Leftrightarrow (sup\{ \rho_Z(W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)) \exp(\lambda t): t \in \Lambda\} < \infty). \qquad (5)$$

Соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим λ-экспоненциальным фактор-пространством.

О п р е д е л е н и е 4. При $\Lambda = \boldsymbol{R}_+$ следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением хаусдорфовой асимптотической эквивалентности:

Если Z -метрическое пространство, то $(\varphi_1 \cong \varphi_2)$ определяется следующим образом: для любого $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_{++}$ можно найти такое $s \in \boldsymbol{R}_+$ и такую строго возрастающую до бесконечности непрерывную функцию $\vartheta:[s,\infty) \to \boldsymbol{R}_+$, что $(\forall t \in [s,\infty))(\rho_Z(W(t,\varphi_1), W(\vartheta(t),\varphi_2)) < \varepsilon)$.

Если Z -равномерное пространство с множеством Γ_Z окружений диагонали, то $(\varphi_1 \cong \varphi_2)$ определяется следующим образом: для любого $\varepsilon \in \Gamma_Z$ можно найти такое $s \in \boldsymbol{R}_+$ и такую строго возрастающую до бесконечности непрерывную функцию $\vartheta(t):[s,\infty) \to \boldsymbol{R}_+$, что

$$(\forall t \in [s,\infty))((W(t,\varphi_1), W(\vartheta(t),\varphi_2)) \in \varepsilon). \qquad (6)$$

Хаусдорфово асимптотическое фактор-пространство будем обозначать $\Phi^{*=}$.

3. Обзор результатов по асимптотике решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Для случая, когда $\Lambda = \boldsymbol{R}_+$, $W(t,\varphi(\cdot))$ – решение начальной задачи с начальным условием $\varphi \in \Phi := C[-h,0]$ для линейного дифференциального уравнения с ограниченным запаздыванием аргумента, в ряде работ (см. обзор в [1], [2]) были найдены условия, когда существует такое конечномерное подпространство $\Phi_0 \subset \Phi$, что

$$(\forall \varphi \in \Phi)(\exists \varphi_0 \in \Phi_0)(\lim \{ || W(t,\varphi) - W(t,\varphi_0)|| \, t \to \infty\}) = 0, \qquad (8)$$

то есть пространство решений «асимптотически конечномерно». Решения $W(t,\varphi_0)$ $(\varphi_0 \in \Phi_0)$ были названы специальными.

В связи с этими результатами мы выдвинули гипотезу [3] о том, что аналогичные результаты должны иметь место для более фундаментального типа динамических систем – разностных уравнений, и что такие результаты могут улучшить известные результаты для уравнений с запаздыванием.

Пусть Ω -некоторое нормированное пространство. Рассмотрены четыре последовательности операторов (первая – числа, вторая – «функционалы»): a_n: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$; $b_n:\Omega \to \boldsymbol{R}$; c_n: $R \to \Omega$; $d_n:\Omega \to \Omega$, $n=0,1,2,\ldots$ с ограничениями $a_n \in A=[a_-,a_+]$; $||b_n|| \le b>0$, $||c_n|| \le c>0$, $||d_n|| \le d>0$, и система разностных уравнений в $R \times \boldsymbol{\Omega}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_n x_n + b_n y_n, \\ y_{n+1} &= c_n x_n + d_n y_n, n=0,1,2,\ldots \end{aligned} \qquad (8)$$

Были доказаны

Т е о р е м а 1. Если существует такое $\nu>0$, что

1) $q_{-} := a_{-} - \nu b>0$; 2) $c+\nu d \le \nu q_{-}$, то существует такое решение $\{X, Y\}$, что

$$(\forall n \in N)(\ X_n \ge q_{-}^{\ n};\ ||Y_n|| \le \nu X_n). \tag{9}$$

Такие решения также названы специальными.

Т е о р е м а 2. Если 1) $d<a_{-}$; 2) $(a_{-} - d)^2 > 4bc$, то выполняются условия 1), 2) Теоремы 1.

Т е о р е м а 3. Если $\omega := (a_{+}\ d\ +\ bc)\ q_{-}^{-2} < 1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и специального «аппроксимирующиего» решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1, существует предел $\gamma\{x, y\} := \lim \{\ x_n/X_n : n \to \infty\}$.

Такие специальные решения названы.

Т е о р е м а 4. Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и $\omega(a_{+}+b\nu)<1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и специального «асимптотически аппроксимирующего» решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1,

$$\lim\{\ |x_n - \gamma\{x, y\}X_n| : n \to \infty\} = 0.$$

Данные результаты были применены к дифференциальным уравнениям с запаздыванием:

$$z'(t)=P(t)z(t-h),\ t \in R_{+},\ h=const>0,\ P(t) \in [p_{-}, p_{+}]. \tag{10}$$

Результаты, обзор которых произведен в [1]-[2], применительно к (14) дают оценку для наличия асимптотически аппроксимирующих специальных решений: $\sup\{|P(t)h| : t \in R_{+}\} < 1/e = 0.367\ldots$

Представлением пространства $C[-h,0]$ в виде декартова произведения пространства функций-констант и пространства Ω функций, таких, что $Z(0)=0$,

и расчетами на компьютере получены следующие условия наличия асимптотически аппроксимирующего свойства для уравнения (14):

$-0.12 \le P(t)h \le 0.39;\ -0.10 \le P(t)h \le 0.40;\ -0.08 \le P(t)h \le 0.41;$

$-0.06 \le P(t)h \le 0.42;\ -0.04 \le P(t)h \le 0.43;\ -0.02 \le P(t)h \le 0.44.$

Эти полученные результаты дополняют результаты, упомянутые в [1], [2]. Уже после наших публикаций были опубликованы статьи [4], [5], [6], где получены аналогичные результаты для более узких классов дифференциальных уравнений с запаздыванием.

4. Построение объектов при помощи хаусдорфовой асимптотической эквивалентности

Хаусдорфово асимптотическое фактор-пространство $\Phi^{*=}$ может содержать и ранее неизвестные математические объекты.

В одномерном случае, $\Lambda = \mathbf{R}_{+}$; $\Phi = Z = \mathbf{R}$. Фактор-пространство $\Phi^{*=}$ включает в себя: классы функций, имеющих конечный предел при $t \to \infty$ (эквивалентные константам); класс функций, возрастающих при $t>t_0$ для некоторого t_0 и неограниченных сверху; класс функций, убывающих при $t>t_0$ для некоторого t_0 и неограниченных снизу; классы функций, эквивалентных периодическим и изменяющимся в диапазонах вида $[a,b] \subset \mathbf{R}$ при $t>t_0$ для некоторого t_0 функциям; различные классы функций, для которых различаются (конечные или бесконечные) значения $\lim\sup\{u(t) : t \to \infty\}$ и $\lim\inf\{u(t) : t \to \infty\}$ и т.д.

Пусть $\Phi = Z = \mathbf{R}^3$. Странный аттрактор, притягивающее множество которого состоит из двух касающихся циклов.

Здесь $\Phi^{*=}$ состоит из трех элементов: класс эквивалентности, представляемый чередованием обхода циклов; класс эквивалентности, представляемый приближением к первому циклу; класс эквивалентности, представляемый приближением ко второму циклу.

5. Заключение

В настоящей статье показано, что новые понятия могут возникать в различных разделах теории динамических систем.

Литература

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – Москва: Наука, 1972. – 351 с.
2. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – том 13, № 4. – С. 455-462.
3. Жээнтаева Ж.К. Асимптотика решений систем линейных операторно-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. Серия естественные и технические науки. – 2016, № 5. – С. 34-37.
4. Mallet-Paret J., Nussbaum R. D. Asymptotic homogenization for delay-differential equations and a question of analyticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2020, vol. 40, issue 6. – P. 3789-3812.
5. Feher A., Marton L., Pituk M. Approximation of a Linear Autonomous Differential Equation with Small Delay // Symmetry-Basel, 2019, vol. 11, issue 10. – 10 p.
6. Ye Yu., Liang H. Asymptotic dichotomy in a class of higher order nonlinear delay differential equations // Journal of Inequalities and Applications. – 2019, vol. 2. – 17 p.

УДК 517.968

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, к.ф.-м. н., доцент
zulpukarov66@mail. ru
Жороев Туйгунбек Жунусович ст. преподаватель,
E-mail. tuigun2003@mail.ru
Ошский технологический университет им. М. М. Адышева
Алиева Жаркынай Анарбаевна ст. преподаватель,
Zharkynay_71@mail.ru
Ошский государственный педагогический университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной статье рассмотрен метод выбора параметра регуляризации решения системы линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными в пространстве $C_n(G)$.*

Различные вопросы решения интегральных уравнений Вольтеррапервого рода широко исследованы в работах таких российских ученых, как А.Н. Тихонов М. М. Лаврентьев, В.К. Иванов, А.Л. Бухгейм, В.Г. Романов, а также рассмотрены кыргызскими учеными М.И. Иманалиевым, А.Асановым и другими. Построение регуляризации решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с одним неизвестным было рассмотрено и исследовано в предыдущих работах.

Ключевые слова: *вектор-функция, ядро, пространство, уравнения, параметр, сингулярно-возмущенные, системы уравнений, теорема.*

ҮЧ КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ӨЗГӨРМӨЛҮҮ БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ВОЛЬТЕРРАНЫН ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛЫК ПАРАМЕТРИН ТАНДОО

Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, ф.-м.и.к., доцент
zulpukarov66@mail. ru
Жороев Туйгунбек Жунусович улук окутуучу
tuigun2003@mail.ru
Адышева М. М. атындагы Ош технологиялык университети
Алиева Жаркынай Анарбаевна улук окутуучу
Zharkynay_71@mail.ru
Ош мамлекеттик педагогикалык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада $C_n(G)$ мейкиндигинде үч көз карандысыз өзгөрмөлүү биринчи түрдөгү сызыктуу Вольтерранын интегралдык теңдемелеринин системасынын чечиминин регуляризациялык параметрин тандоо ыкмасы каралат.*

Биринчи түрдөгү Вольтерранын сызыктуу интегралдык теңдемелерин чечимдеринин бар болушу үчүн ар кандай маселелери орус окумуштууларынын А.Н. Тихонов, М.М.Лаврентьев, В.К. Иванов, А.Л. Буххайм, В.Г. Романов, ошондой эле кыргыз окумуштуулары М.И. Иманалиев, А.Асанов жана башкалар. Биринчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесин бир белгисиз менен чечүүнүн регуляризациясын куруу мурунку эмгектерде каралып, изилденген.

Ачкыч сөздөр: *вектордук функция, ядро, мейкиндик, теңдемелер, параметр, теңдемелердин сингулярдуу козголгон системасы, теорема.*

CHOICE OF THE REGULARIZATION PARAMETER OF THE SYSTEM OF A LINEAR INTEGRAL VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND WITH THREE VARIABLES

Zulpukarov Zhakshylyk Alibaevich, Candidate of Ph. and Math. Sc., Associate Professor
zulpukarov66@mail. ru
Zhoroev Tuygunbek Zhunusovich, Senior Lecturer
tuigun2003@mail.ru
Osh Technological University named after M. M. Adysheva
Alieva Zharkynai Anarbaevna, Senior Lecturer
Zharkynay_71@mail.ru
Osh State Pedagogical University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract:: *This article considers a method for choosing the regularization parameter of a solution to a system of linear Volterra integral equations of the first kind with three independent variables in the space $C_n(G)$.*

Various issues of solving Volterra integral equations of the first kind are widely studied in the works of such Russian scientists as A.N. Tikhonov M.M. Lavrentiev, V.K. Ivanov, A.L. Buchheim, V.G. Romanov, and also reviewed by Kyrgyz scientists M.I. Imanaliev, A. Asanov and others. The construction of a regularization of the solution of the Volterra integral equation of the first kind with one unknown was considered and studied in previous works.

Keywords: *vector function, kernel, space, equations, parameter, singularly perturbed systems of equations, theorem.*

Рассматривается система

$$\int_0^t K(t,x,y,s)u(s,x,y)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u(s,z,y)dzds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u(s,z,w)dwdzds=f(t,x,y),\ (t,x,y)\in G, \tag{1}$$

где $K(t,x,y,s)$, $N(t,x,y,s,z)$ и $M(t,x,y,s,z,w)$ – (nxn) – известные матрицы функции, а $u(t,x,y)$ и $f(t,x,y)$ – соответственно искомая и заданная n – мерные вектор-функции на $G=\{(t,x,y):\ 0\le t\le T,\quad 0\le x\le X,\quad 0\le y\le Y\}$.

Потребуем выполнение следующих условий:

а) $\|K(t,x,y,s)\|\in C(G_1)$, $\|N(t,x,y,s,z)\|\in C(G_2)$, $\|M(t,x,y,s,z,w)\|\in C(G_3)$, $\|K(t,x,y,t)\|\le N_0\lambda_0(t)$ и $\lambda(t,x,y)\ge\lambda_0(t)\ge 0$ при $(t,x,y)\in G$, $0<N_0$ –const, $\lambda(t,x,y)$ – определенна с помощью формулы (3.1.2), из [5] $\lambda_0(t)\in L_1(0,T)$,

$$G_1=\{(t,x,y,s):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le x\le X,\ 0\le y\le Y\},$$
$$G_2=\{(t,x,y,s,z):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le y\le Y\},$$
$$G_3=\{(t,x,y,s,z,w):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le w\le y\le Y\};$$

б) при $t>\tau$ для любых $(t,x,y,s),(\tau,x,y,s)\in G_1$ справедливо

$$\|K(t,x,y,s)-K(\tau,x,y,s)\|\le C\int_\tau^t\lambda_0(s)ds,$$

где $0<C$ – некоторый положительный скаляр;

в) при $t>\tau$ для любых $(t,x,y,s,z),(\tau,x,y,s,z)\in G_2$ справедливо

$$\|N(t,x,y,s,z)-N(\tau,x,y,s,z)\| \le C_1\int_\tau^t \lambda_0(s)ds,$$

где $0<C_1$ – некоторая постоянная и $N(t,x,y,t,z)\equiv 0$ при

$(t,x,y,z)\in G_4=\{(t,x,y,z):\ 0\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le y\le Y\}$;

г) при $t>\tau$ для любых $(t,x,y,s,z,w),(\tau,x,y,s,z,w)\in G_3$ справедливо

$$\|M(t,x,y,s,z,w)-M(\tau,x,y,s,z,w)\| \le C_2\int_\tau^t \lambda_0(s)ds,$$

где $0<C_2$ – некоторая постоянная и $M(t,x,y,t,z,w)\equiv 0$ при

$(t,x,y,z,w)\in G_5=\{(t,x,y,z,w):\ 0\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le w\le y\le Y\}$;

д) вместо точной правой части $f(t,x,y)$ задано ее приближенное значение $f_\delta(t,x,y)$ из $C(G)$ такое, что

$$\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C \le \delta,\ \delta>0,\ (t,x,y)\in G.$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующие сингулярно-возмущенные системы уравнений:

$$\varepsilon u_\varepsilon(t,x,y)+\int_0^t K(t,x,y,s)u_\varepsilon(s,x,y)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u_\varepsilon(s,z,y)dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u_\varepsilon(s,z,w)dwdzds=f(t,x,y)+\varepsilon u(0,x,y),\ (t,x,y)\in G, \quad (2)$$

и приближенно сингулярно-возмущенные системы уравнений

$$\varepsilon u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)+\int_0^t K(t,x,y,s)u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)dwdzds=f_\delta(t,x,y)+\varepsilon u_\delta(0,x,y),\ (t,x,y)\in G, \quad (3)$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $u(t,x,y)$ – решение системы (1) и начальные условия решений системы уравнений (1) и (3) связаны между собой следующим образом:

$$\|u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)\| \le C^1\sqrt{\delta},\ x\in[0,X], y\in[0,Y], \quad (4)$$

где $0<C^1$ – некоторая постоянная.

Из (2) отнимаем (3), имеем

$$\varepsilon[u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)]+\int_0^t K(t,x,y,s)[u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)[u_\varepsilon(s,z,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)]dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)[u_\varepsilon(s,z,w)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)]dwdzds=$$

$$=f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)+\varepsilon[u(0,x,y)-u_\delta 0,x,y)]. \quad (5)$$

Уравнение (5) преобразуем к следующему виду:

$$u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,y,s)[u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds=$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)][u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)[u_\varepsilon(s,z,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)]dzds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)[u_\varepsilon(s,z,w)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)]dwdzds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}[f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)]+u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y).$$

Отсюда, применив резольвенту матричного ядра $\left[-\frac{1}{\varepsilon}K(s,x,y,s)\right]$, аналогично имеем как в § 3.1 из [5].

$$u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)=\int_0^t H(t,x,y,s,\varepsilon)[u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)[u_\varepsilon(s,z,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)]dzds+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M_1(t,x,y,s,z,w)\times$$

$$\times[u_\varepsilon(s,z,w)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)]dwdzds+F(t,x,y,\varepsilon)+U(t,x,y,\varepsilon),\ (t,x,y)\in G, \tag{6}$$

где $H(t,x,y,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,y,s,\varepsilon)[K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)]-$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,y,\tau,\varepsilon)K(\tau,x,y,\tau)[K(t,x,y,s)-K(\tau,x,y,s)]d\tau,\ (t,x,y)\in G \tag{7}$$

$$N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,y,s,\varepsilon)N(t,x,y,s,z)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,y,\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times K(\tau,x,y,\tau)[N(t,x,y,s,z)-N(\tau,x,y,s,z)]d\tau,\ (t,x,y)\in G, \tag{8}$$

$$M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,y,s,\varepsilon)M(t,x,y,s,z,w)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,y,\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times K(\tau,x,y,\tau)[M(t,x,y,s,z,w)-N(\tau,x,y,s,z,w)]d\tau,\ (t,x,y)\in G, \tag{9}$$

$$F(t,x,y,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}[f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)]-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t X(t,x,y,s,\varepsilon)K(s,x,y,s)\times$$

$$\times[f(s,x,y)-f_\delta(s,x,y)]ds,\ (t,x,y)\in G, \tag{10}$$

$$U(t,x,y,\varepsilon)=u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t X(t,x,y,s,\varepsilon)K(s,x,y,s)\times$$

$$\times[u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)]ds,\ (t,x,y)\in G. \tag{11}$$

В дальнейшем используем следующие оценки.

Как показано в леммах 3.1.1 из [5], в силу условий *а*)-*д*) для функций $H(t,x,y,\varepsilon)$, $N_1(t,x,y,s,\varepsilon)$ и $M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)$ соответственно справедливы

$$\|H(t,x,y,s,\varepsilon)\|\le C_3,\ (t,x,y,s)\in G_1,\ \varepsilon>0, \tag{12}$$

$$\|N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)\|\le C_4,\ (t,x,y,s,z)\in G_2,\ \varepsilon>0, \tag{13}$$

$$\|M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)\| \le C_5,\ (t,x,y,s,z,w)\in G_3,\ \varepsilon>0, \tag{14}$$

где $C_3 = C\sqrt{n}(e^{-1}+N_0)$, $C_4 = C_1\sqrt{n}(e^{-1}+N_0)$, $C_5 = C_2\sqrt{n}(e^{-1}+N_0)$, $N_0>0$

$G_1=\{(t,x,y,s)$: $0\le s\le t\le T,\ 0\le x\le X,\ 0\le y\le Y\}$, $G_2=\{(t,x,y,s,z)$: $0\le s\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le y\le Y\}$,
$G_3=\{(t,x,y,s,z,w)$: $0\le s\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le w\le y\le Y\}$.

Перейдем к оценке $F(t,x,y,\varepsilon)$ и $U(t,x,y,\varepsilon)$.

Лемма 1. Пусть функция $F(t,x,y,\varepsilon)$ определена формулой (10) и выполняется условие *д*). Кроме того, $\lambda_0(t)>0$ при почти всех $t\in[0,T]$. Тогда для $F(t,x,y,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|F(t,x,y,\varepsilon\| \le \frac{\delta}{\varepsilon}(1+N_0\sqrt{n}),\ \varepsilon>0,\ (t,x,y)\in G. \tag{15}$$

Доказательство. Действительно, из (10) имеем

$$\|F(t,x,y,\varepsilon)\| \le \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\int_0^t X(t,x,y,s,\varepsilon)K(s,x,y,s)\times\right.$$

$$\left.\times[f(s,x,y)-f_\delta(s,x,y)]\right\|ds \le \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon} + \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{N_0\sqrt{n}}{\varepsilon}\int_0^t \|X(t,x,y,s,\varepsilon)\|\|K(s,x,y,s)\|ds \le \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon}\times$$

$$\times[1+\frac{N_0\sqrt{n}}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_0(\tau)d\tau}\lambda_0(s)ds] = \frac{\delta}{\varepsilon}(1+\sqrt{n}N_0)$$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть функция $U(t,x,y,\varepsilon)$ определена формулой (11), при этом вектор-функции $u(0,x,y)$ и $u_\delta(0,x,y)$ связаны между собой следующим образом $\|u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)\| \le C^1\sqrt{\delta}$, $x\in[0,X], y\in[0,Y]$. Кроме того, $\lambda_0(t)>0$ при всех $t\in[0,T]$. Тогда для $U(t,x,y,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|U(t,x,y,\varepsilon)\| \le C^1\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n}),\ \varepsilon>0,\ (t,x,y)\in G, \tag{16}$$

где $0<C^1$– некоторая постоянная, не зависящая от ε и δ.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей леммы 3.3.1. из [5], В силу оценок (12), (13), (14), (15) и (16), из (6) имеем

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\| \le a(t,x,y,\varepsilon,\delta) + \int_0^t C_3\|V(s,x,y,\varepsilon,\delta)\|ds, \tag{17}$$

где $V(t,x,y,\varepsilon,\delta) = u_\varepsilon(t,x,y) - u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)$,

$$a(t,x,y,\varepsilon,\delta) = \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1) + \int_0^t\int_0^x C_4\|V(s,z,y,\varepsilon,\delta)\|dzds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_5\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\|dwdzds. \tag{18}$$

На основании леммы 2.1.5 [5] из (17) получим

$$\left\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\right\| \le a(t,x,y,\varepsilon,\delta)+\int_0^t C_3 e^{C_3(t-s)} a(s,x,y,\varepsilon,\delta)ds\,.$$

Вместо $a(t,x,y,\varepsilon,\delta)$ положим выражение (18) и из последнего неравенства имеем

$$\left\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\right\| \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)+\int_0^t\int_0^x C_4\left\|V(s,z,y,\varepsilon,\delta)\right\|dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_5\left\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\right\|dwdzds+\int_0^t C_3e^{C_3(t-s)}\{\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)+$$

$$+\int_0^s\int_0^x C_4\left\|V(s_1,z,y,\varepsilon,\delta)\right\|dzds_1+\int_0^s\int_0^x\int_0^y C_5\left\|V(s_1,z,w,\varepsilon,\delta)\right\|dwdzds_1\}ds\,.$$

Последнее неравенство интегрируем и применим формулу Дирихле, затем заменив t на T пишем в виде

$$\left\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\right\| \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)e^{C_3T}+\int_0^t\int_0^x C_4e^{C_3T}\left\|V(s,z,y,\varepsilon,\delta)\right\|dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_5e^{C_3(t-s)}\left\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\right\|dwdzds\,. \tag{19}$$

К неравенству (19) применим лемму 2.1.6 [5], и затем применяя формулу Дирихле, имеем

$$\left\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\right\| \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)e^{C_3T}[1+\int_0^t\int_0^x R(t,x,s,z)dzds]+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y [C_5e^{C_3T}+\int_0^s\int_0^z C_5e^{C_3T}R(t,x,s_1,z_1)dz_1ds_1]\left\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\right\|dwdzds\,, \tag{20}$$

где $R(t,x,s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_4e^{C_3T}\right)^{n+1}\dfrac{(t-s)^n(x-z)^n}{(n!)^2}$.

Из (20) получим следующее неравенство:

$$\left\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\right\| \le C_6(\varepsilon,\delta)+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_7\left\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\right\|dwdzds\,, \tag{21}$$

где $C_6(\varepsilon,\delta)=\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\dfrac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX]$,

$C_7=C_5e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX]$.

К (21) применив лемму 2.1.7 [5], получим

$$\left\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\right\| \le C_6(\varepsilon,\delta)+\int_0^t\int_0^x\int_0^y R_1(t,x,y,s,z,w)C_6(\varepsilon,\delta)dwdzds\,, \tag{22}$$

где $R_1(t,x,y,s,z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}C_7^{n+1}\dfrac{(t-s)^n(x-z)^n(y-w)^n}{(n!)^3}$.

Таким образом, (22) получим следующую оценку:

$$\left\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\right\|_C \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)C_8\,, \tag{23}$$

где $C_8=e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX][1+R_1(T,X,Y,0,0,0)TXY]$.

Теперь рассмотрим уравнение (2). Его решение будем искать в виде

$$u_\varepsilon(t,x,y) = u(t,x,y) + \xi_\varepsilon(t,x,y),\ (t,x,y)\in G, \tag{24}$$

где $u(t,x,y)$ – решение системы уравнения (1).

Подставляя (24) в (2), после элементарных преобразований имеем

$$\xi_\varepsilon(t,x,y) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,y,s)\xi_\varepsilon(s,x,y)ds = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [K(t,x,y,s) - K(s,x,y,s)]\times$$

$$\times\,\xi_\varepsilon(s,x,y)ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)\xi_\varepsilon(s,z,y)dzds -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)\xi_\varepsilon(s,z,w)dwdzds - u(t,x,y) + u(0,x,y). \tag{25}$$

Далее, в силу условия *а*), *б*), *в*), *г*), *д*) и теоремы 3.1.1из [5] и (25) имеем

$$\left\|\xi_\varepsilon(t,x,y)\right\| \le C_8 C_0(\varepsilon),\ (t,x,y)\in G, \tag{26}$$

где $C_0(\varepsilon) = 2(2N_0+1)\sqrt{n}\left\|u(t,x,y)\right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + (N_0+1)\sqrt{n}\omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta),\ 0<\beta<1,$

$C_8 = e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX][1+R_1(T,X,Y,0,0,0)TXY]$,

$\omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{\substack{|\upsilon-\upsilon_0|<\delta \\ (x,y)\in[0,X]\times[0,Y]}} \left\|u(\varphi^{-1}(\upsilon),x,y) - u(\varphi^{-1}(\upsilon_0),x,y)\right\|$, $\varphi^{-1}(\upsilon)$ – обратная функция к функции $\upsilon = \phi(t) = \int_0^t \lambda_0(s)ds > 0$.

Если ε выбираем в виде $\varepsilon = \sqrt{\delta}$, то в силу (26) и (23) имеет место

$$\left\|u(t,x,y) - u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)\right\|_C \le \left\|u(t,x,y) - u_\varepsilon(t,x,y)\right\|_C + \left\|u_\varepsilon(t,x,y) - u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)\right\|_C \le$$

$$\le 2(2N_0+1)\sqrt{n}C_8\left\|u(t,x,y)\right\|_C e^{-\frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}(1-\beta)}}} + C_8(N_0+1)\sqrt{n}\omega_{\bar{u}}(\delta^{\frac{1}{2}\beta}) +$$

$$+\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(1+C^1)C_8\ . \tag{27}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть выполняются условия *а*)-*д*), система (1) имеет непрерывное решение $u(t,x,y)$ на $C_n(G)$. Тогда решение $u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)$ уравнения (3) для $\varepsilon = \sqrt{\delta}$ сходится к непрерывному решению уравнения (1) в области *G* при $\delta\to 0$ и справедлива оценка (27).

Литература

1. Арсенин, В.Я. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа свертки / В. Я. Арсенин, Т.Н.Савелова // Журнал вычслит. матем. и матем. физики. –1969. – Т.9, №6. – С.204-210.

2. Асанов, А. Об одном классе систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода на полуоси / А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1985. –Вып.18. –С.17-20.

3. Асанов, А. Единственность решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными / А. Асанов, Т. О. Бекешов // Мат-лы. междунар. конф. «Актуальные проблемы матем. и матем. моделирования экологических систем», Алматы, окт. –Алматы, 1996. – С 47.

4. Иманалиев, М. И. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода / М.И. Иманалиев, А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып.21. – С.3-38.

5. Зулпукаров Ж. А. Регуляризация и единственность решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными: диссертация кандидата физико-математических наук / Жакшылык Алибаевич Зулпукаров –Ош 2015. – 106 с.

УДК 517.98-519.21

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ МЕР ГИББСА МОДЕЛИ ИЗИНГА-ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Исаков Бегзод Мухторжонович, докторант
Isakovbegzod19810420@gmail.com
Андижанский государственный университет
Ахмедов Олимхон Улугбек угли, докторант
Ферганский государственный университет
Olimxonaxmedov5@gmail.com

Аннотация: *Известно, что при низких температурах каждому основному состоянию соответствует предельная мера Гиббса. Следовательно, задача изучения множества основных состояний для данной физической системы является актуальным. Рассматривается модель Изинга-Поттса на дереве Кэли. В рассматриваемой работе изучается основное состояние для модели Изинга-Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли. Известно, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k, где G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка. Определяются периодические и слабо периодические основные состояния, соответствующие нормальным делителям группы G_k.*

Ключевые слова: *дерево Кэли, модель Изинга-Поттса, периодические и слабо периодические основные состояния.*

FUNKSIONAL EQUATIONS FOR THE LIMITING GIBBS MEASURES OF ISING-POTTS MODEL ON A CAYLEY TREE

Isakov Begzod Mukhtorjonovich, PhD student
Isakovbegzod19810420@gmail.com
Andijan state university
Axmedov Olimxon Ulugbek ugli, PhD student
Fergana State University
Olimxonaxmedov5@gmail.com

Abstract. *It is known that at low temperatures, each ground state corresponds to a Gibbs limit measure. Therefore, the task of studying the set of basic states for a given physical system is relevant. The Ising-Potts model on the Cayley tree is considered. In this paper, we study the ground state for the Ising-Potts model with three states on the Cayley tree. It is known that there exists a one-to-one correspondence between the set of the vertices V of the Cayley tree of order k and a group G_k being a free product of $k+1$ cyclic groups of second order. We define periodic and weakly periodic ground states corresponding to normal divisors of the group G_k. Periodic and weakly periodic ground states corresponding to the normal divisor of group G_k are determined.*

Keywords: *Cayley tree, Ising-Potts model, periodic and weakly periodic ground states.*

Введение. Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Если существует более чем одна мера Гиббса, то говорят, что существуют фазовые переходы. Основная проблема для данного гамильтониана – это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Известно, что фазовая диаграмма Гиббсовых мер для данного гамильтониана близко к фазовой диаграмме основных изолированных (устойчивых) состояний этого гамильтониана. При низких температурах основному состоянию соответствует предельная мера Гиббса (см.[1], [2]). Поэтому, естественно возникает задача описания основных состояний. В работе [5] изучена трансляционно-инвариантные и периодические основные состояния для модели Изинга на дереве Кэли. В работе [6] вводится понятие слабо периодических основных состояний. Слабо периодические основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями описаны в работах [6], [7]. Периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k=2$ изучены в работе [8], [9]. В работе [10] для модели Поттса изучены слабо периодические основные состояния для нормального делителя индекса 2. В работе [11] для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k\geq 2$ описано множество периодических и слабо периодических основных состояний, соответствующих нормальным делителям индекса 4 группового представления дерева Кэли.

В работе [12] изучены периодические и слабо периодические основные состоянии для $\lambda-$ модели на дерево Кэли. А в работе [13] для модели Изинга изучена периодические основные состояние относительно подгруппы индекса три. В данной работе рассматривается одна модель смешанного типа (далее назовем моделью Изинга-Поттса) на дереве Кэли порядка $k\geq 2$. Цель этой работы определение достаточных условий существования Гиббсовых мер для этой модели.

Пусть $\tau^k=(V,L),\, k\geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно $k+1$ ребер, где V –множество вершин, L – множество ребер τ^k.

Пусть G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп $\{e,a_i\}$ второго порядка с образующими $a_1,a_2,...a_{k+1}$, соответственно т.е. $a_i^2=e \quad i=\overline{1,\,k+1}$ (см.[3]).

Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерево Кэли порядка k и группой G_k (см. [3], [4]).

Две вершины $x,y\in V$ называются соседними, если они представляют собой концевые точки некоторого ребра $l\in L,$ и в этом случае мы будем писать $l=\langle x,y\rangle.$

Для произвольной точки $x^0\in V$ положим $W_n=\{x\in V\,|\,d(x^0,x)=n\}$, $V_n=\bigcup_{m=0}^{n}W_m$, $L_n=\{<x,y>\in L\,|\,x,y\in V_n\}$, где $d(x,y)$ – расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющее x и y.

Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков" точки $x\in G_k$, т.е. если $x\in W_n$, то $S(x)=\{y\in W_{n+1}: d(x,y)=1\}$. Через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседей точки $x\in G_k$, т.е. $S_1(x)=\{y\in G_k:\langle x,y\rangle\}$ и через $x_\downarrow$ обозначим единственный элемент множества $S_1(x)\setminus S(x)$.

Пусть $G_k/G_k^*=\{H_1,...,H_r\}$–фактор группа, где G_k^*-нормальный делитель индекса $r\geq 1$.

Определения 1. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^* - периодической, если $\sigma(x)=\sigma_i$ при $x_i \in H_j, \forall x \in G_k$. G_k-периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делителя называется периодом конфигурации.

Определение 2. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^*-слабо периодической, если $\sigma(x)=\sigma_{ij}$ при $x_{\downarrow} \in H_i,\ x \in H_j,\ \forall x \in G_k$.

Модель Изинга. Рассмотрим функцию σ которая сопоставлять вершины со значениями спина. Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi=\{-1,1\}$, и расположены на вершинах дерева. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega=\Phi^V$.

Гамильтониан модели Изинга определяется как $H(\sigma)=-J\sum\limits_{\langle x,y\rangle\in L}\sigma(x)\sigma(y),$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x,y\rangle -$ ближайшие соседи.

Модель Поттса. Модель Поттса рассматривается как обобщением модели Изинга. Рассмотрена функция σ которая сопоставлять вершины со значениями спина $\Phi=\{1,2,\ldots,q\},\ q\geq 2$ и расположенные на вершинах дерева. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega=\Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется как $H(\sigma)=-J\sum\limits_{\langle x,y\rangle\in L}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x,y\rangle -$ ближайшие соседи и $\delta_{ij} -$ символ Кронекера: $\delta_{ij}=\begin{cases}0 \text{ если } i\neq j,\\ 1 \text{ если } i=j.\end{cases}$

Модель Изинга-Поттса с параметром α

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi=\{-1,0,1\}$. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi;$ множество всех конфигураций совпадает с $\Omega=\Phi^V$.

Гамильтониан модели Изинга-Поттса с параметром α имеет вид

$$H(\sigma)=-\alpha J_1\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\sigma(x)\sigma(y)-(1-\alpha)J_2\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$$

где $J=(J_1,J_2)\in R^2, \alpha\in(0,1),\ \delta_{ij} -$ символ Кронкера.

Система функциональных уравнений

Мы приведем систему функциональных уравнений решения которых дают предельную меру Гиббса модели Изинг-Поттса с параметром $\alpha\in(0,1)$.

Пусть $\mathbf{h}: x\mapsto(h_{-1,x},h_{0,x},h_{+1,x})\in R^3$ векторная функция от $x\in V\setminus\{x^0\}$.

Рассмотрим распределение вероятностей $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma_n)=Z_{n,\mathbf{h}}^{-1}\exp\left\{-\beta H(\sigma^{(n)})+\sum_{x\in W_{n-1}}h_{b(x),(\sigma_n)_{b(x)}}\right\},$$

где $\sigma_n\in\Omega_{V_n},(\sigma_n)_{b(x)}=\sigma_n|_{b(x)}$ и $Z_{n,h}=\sum_{\omega_n\in\Omega_{V_n}}\exp\left\{-\beta H(\omega^{(n)})+\sum_{x\in W_{n-1}}h_{b(x),(\omega_n)_{b(x)}}\right\},$

для $h_{b(x),\sigma_{b(x)}}\in R.$

Рассмотрим условие согласованности для $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$: $\sum_{\substack{\omega_n\in\Omega_{V_n}\\ \omega_n|_{V_{n-1}}\equiv\sigma_{n-1}}}\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\omega_n)=\mu_{\mathbf{h}}^{(n-1)}(\sigma_{n-1}),$

для всех $n\geq 1$ и $\sigma_{n-1}\in\Omega_{V_{n-1}}$.

Учитывая теорему Колмогорова, существует единственная предельная мера Гиббса μ_h на Ω такой, что для каждого $n=1,2,...$ и $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$, имеет место равенство:

$$\mu_h(\{\sigma|_{V_n}=\sigma_n\})=\mu_h^{(n)}(\sigma_n).$$

Доказано следующая

Теорема 1. Вероятностное распределение $\mu_h^{(n)}(\sigma)$ согласованно при $k\geq 2$ тогда и только тогда для любого $x\in V\setminus\{x^0\}$ имеют место следующие:

$$\begin{cases} z_{-1,x}=\left(\dfrac{\eta^{\alpha}\nu^{1-\alpha}z_{-1,x}+\dfrac{1}{\eta^{\alpha}}z_{+1,x}+1}{z_{-1,x}+z_{+1,x}+\nu^{1-\alpha}}\right)^k, \\ z_{+1,x}=\left(\dfrac{\dfrac{1}{\eta^{\alpha}}z_{-1,x}+\eta^{\alpha}\nu^{1-\alpha}z_{+1,x}+1}{z_{-1,x}+z_{+1,x}+\nu^{1-\alpha}}\right)^k, \end{cases}$$

где $\eta=exp(J_1\beta),\nu=exp(J_2\beta),\beta=1/T,\quad z_{i,x}=exp(h_{i,x}-h_{0,x}),i=\pm1$ для всех $x\in V.$

Литература

1. Синай Я.Г, Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.:Наука.1980.

2. Minlos R.A., Introduction to mathematical statistical physics. University lecture series, V.,19. 2000.

3. Rozikov U. A Gibbs Measures on Cayley Trees. Hackensack, NJ World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013.

4. Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли. Теоретическая и математическая физика, том 111, номер 1, 1997, стр.109-117.

5. U.A.Rozikov, A Constructive Description of Ground States and Gibbs Measures for Ising Model With Two-Step Interactions on Cayley Tree, Jour. Statist. Phys. 122: 217-235 (2006).

6. Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. ТМФ. 2009, Т.,160, №3, С., 507-516.

7. Rahmatullaev M.M. Description of weak periodic ground states of Ising model with competing interactions on Cayley tree Appl. Math. and Inf.Science. 2010. V.,4, №2, P. 237-241.

8. Ботиров Г.И., Розиков У.А., Модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли: контурный метод. ТМФ, 2007, Т .153, №1, с. 86-97.

9. F.Mukhamedov, U.Rozikov, F.F.Mendes. On contour arguments for the three state Potts model with competing interactions on a semi-infinite Cayley tree. Journal of Mathematical Physics 48, 013301 (2007); https://doi.org/10.1063/1.2408398

10. Рахматуллаев М.М. Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.] ТМФ, 2013, Т.176, №3, с. 477-493.

11. M.M.Rahmatullaev, M.A.Rasulova, Periodic and weakly periodic ground states for the Potts model with competing interactions on the Cayley tree. Sib. Adv. Math. 26(3), 215-229 (2016)

12. F.M.Mukhamedov, M.M.Rahmatullaev, M.A.Rasulova, Weakly periodic ground states for the $\lambda -$model. Ukr. Mat. Zh. 2020. V. 72, № 5. pp. 667678

13. M.M.Rahmatullaev, D.O.Egamov, F.H.Haydarov, Periodic And Weakly Periodic Ground States Corresponding To Subgroups Of Index Three For The Ising Model On Cayley Tree. Reports on Mathematical Physics, 2021, V. 88, № 2. pp. 247-257

УДК 515.122

ОБ ОДНОМ ТИПЕ КОМПАКТНОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Канетов Бекболот Эменович, д.ф.-м.н., профессор
bekbolot_kanetov@mail.ru
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына
Бишкек, Кыргызстан
Сактанов Улукбек Абдисаматович, к.ф.-м.н, доцент
uca73@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В последнее время интенсивно развивается теория компактных типов равномерных пространств. К типам компактности равномерных пространств относятся предкомпактные, σ-предкомпактные, τ-ограниченные, равномерно Менгера, равномерно Гуревича, компактные пространства. В настоящей статье исследуются некоторые свойства равномерно Гуревича пространства (или равномерно H - пространства).*

Ключевые слова: *равномерно H - пространства, предкомпактные пространства, σ - предкомпактные пространства, τ - ограниченные пространства, предкомпактные отображения, равномерно совершенные отображения.*

БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН БИР КОМПАКТУУЛУК ТИБИ ЖӨНҮНДӨ

Канетов Бекболот Эменович, ф.-м.и.д., профессор
bekbolot_kanetov@mail.ru
Ж. Баласагын атандагы Кыргыз улуттук университети,
Бишкек, Кыргызстан
Сактанов Улукбек Абдисаматович, ф.-м.и.к, доцент
uca73@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация*: Акыркы убакта бир калыптуу мейкиндиктердин компакттуу тибинин теориясы интенсивдүү түрдө өнүгүп жатат. Бир калыптуу мейкиндиктердин компакттуулугунун тибтерине предкомпактуу, σ - предкомпактуу, τ - чектүү, бир калыптуу Менгер, бир калыптуу Гуревич, компактуу мейкиндиктери кирет. Бул макалада бир калыптуу Гуревич мейкиндигинин (же бир калыптуу H - мейкиндиктин) кээ бир касиеттери изилденген.*

Ачкыч сөздөр: *бир калыптуу H - мейкиндиктер, предкомпактуу мейкиндиктер, σ - предкомпактуу мейкиндиктер, τ - чектелген мейкиндиктер, предкомпактуу чагылтуулар, бир калыптуу жеткилең чагылдыруулар.*

ABOUT ONE TYPE OF COMPACTNESS

Kanetov Bekbolot Emenovich, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
bekbolot_kanetov@mail.ru
Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn
Bishkek, Kyrgyzstan
Saktanov Ulukbek Abdisamatovich, Candidate of Ph. & Math. Sc., docent
uca73@mail.ru
Osh State University

Osh, Kyrgyzstan

***Abstract**: now edeys, the theory of compact types of uniform spaces has been intensively developed. The types of compactness of uniform spaces include precompact, σ -precompact, τ -bounded, uniformly Menger, uniformly Hurevich, compact spaces. In the present article, some properties of a uniformly Hurevich space (or a uniformly H -space) are investigated.*

***Keywords:** uniformly H -spaces, precompact spaces, σ -precompact spaces, τ -bounded spaces, precompact mappings, uniformly perfect mappings.*

В последнее время интенсивно развивается теория компактных типов равномерных пространств. К типам компактности равномерных пространств относятся предкомпактные, σ-предкомпактные, τ-ограниченные, равномерно Менгера, равномерно Гуревича, компактные пространства. Теория этих инвариантов весьма обширна.

Класс равномерно Гуревича пространств, впервые введен и исследован Л. Кочинацом [10], [11].

В настоящей статье исследуются некоторые свойства равномерно Гуревича пространства (или равномерно H -пространства).

Напомним [10], что равномерное пространство (X,U) называется равномерно Гуревича пространством (или равномерно H-пространством), если для любой последовательности $\{\alpha_n\} \subset U$ существует такая последовательность $\{\beta_n\}$, что $\beta_n \subset \alpha_n$ конечное подсемейство и для каждой точки $x \in X$, $x \in \cup\beta_n$ почти для всех $n \in N$.

В работе все равномерные пространства предполагаются отделимыми, топологические пространства – тихоновскими, а отображения – равномерно непрерывными. Основные терминологии взяты из работы [1] – [9].

Теорема 1. Всякое предкомпактное равномерное пространство (X,U) является равномерно H -пространством.

Доказательство. Пусть (X,U) - предкомпактное пространство и $\{\alpha_n\} \subset U$ - произвольная последовательность равномерных покрытий. В силу предкомпактности (X,U) для любого номера $n \in N$ покрытие α_n содержит конечное подпокрытие $\alpha_n^0 \subset \alpha_n$. Положим $\{\beta_n\}$, $\beta_n = \alpha_n^0$. Легко видеть, что для каждого $x \in X$, $x \in \cup\beta_n$ почти для всех $n \in N$. Следовательно, (X,U) является равномерно H -пространством.

Следствие 1. Любое компактное равномерное пространство (X,U) является равномерно H -пространством.

Теорема 2. Всякое σ-предкомпактное равномерное пространство (X,U) является равномерно H -пространством.

Доказательство. Пусть равномерное пространство (X,U) является σ-предкомпактным и $\{\alpha_n\} \subset U$ - последовательность равномерных покрытий. Так как (X,U) есть σ-предкомпактное пространство, то оно представляется в виде объединения счетного числа своих предкомпактных подпространств, т.е. $X = \underset{n}{\cup} X_n$. Положим $X_n \wedge \alpha_n = \alpha_{X_n}$. Поскольку, пространства X_n предкомпактное, то равномерное покрытие α_n содержит конечное равномерное покрытие α_m^0. Пусть $x \in X$ - произвольная точка. Тогда легко видеть, что $x \in \cup \alpha_n^0$ почти для всех n. Следовательно, (X, U) является равномерно H -пространством.

Теорема 3. Всякое равномерно H -пространство (X, U) является $\aleph_0$ -ограниченным.

Доказательство. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие и $\alpha_n = \alpha$ для любого $n \in N$. Тогда для последовательности $\{\alpha_n\} \subset U$, где $\alpha_n = \alpha$, $n \in N$, существует такая последовательность $\{\beta_n\}$ конечных подсемейств, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup \beta_n$ почти для всех $n \in N$. Для каждого $n \in N$ и для каждого элемента $B_{\beta_n(i)} \in \beta_n, i = 1,2, \dots, k$ такого что, $B_{\beta_n(i)} \ni x$ выбирая по одному элементу $A_{B_{\beta_n(i)}}$ из $\alpha = \alpha_n$ мы получим конечное подсемейство $\alpha_n^0 \subset \alpha$. Тогда семейство $\bigcup\limits_{n \in N} \alpha_n^0$ является счетным подпокрытием покрытия α. Следовательно, пространство (X, U) является $\aleph_0$ -ограниченным.

Из теоремы 1. и 3. следует, что H -пространство промежуточно между предкомпактными и $\aleph_0$ -ограниченными пространствами.

Теорема 4. Тихоновское пространство X является H -пространством тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X, U_X) с универсальной равномерностью U_X является равномерно H -пространством.

Доказательство. Достаточность. Пусть тихоновское пространство X является H -пространством и $\{\alpha_n\} \subset U_X$ - произвольная последовательность равномерных покрытий. Внутренность $\langle \alpha_n \rangle$ каждого покрытия $\alpha_n \in U$ является открытым покрытием, то $\{\langle \alpha_n \rangle\}$ является последовательностью открытых покрытий пространства X, $\langle \alpha_n \rangle = \{\langle A \rangle : A \in \alpha_n\}$, где $\langle A \rangle$ внутренность множества A. Тогда существует такая последовательность $\{\beta_n\}$ конечных открытых подсемейств, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup \beta_n$ почти для всех $n \in N$, следовательно, пространство (X, U_X) является H -пространством.

Достаточность. Пусть $\{\alpha_n\}$ - произвольная последовательность открытых покрытий пространства X. Тогда $\{\alpha_n\} \subset U_X$. Поэтому $x \in \cup \lambda_n$ существует такая последовательность $\{\beta_n\}$ конечных семейств, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup \beta_n$ почти для всех $n \in N$. Положим $\lambda_n = \langle \beta_n \rangle$, $\langle \beta_n \rangle = \{\langle B \rangle : B \in \beta_n\}$. Заметим, что $\{\lambda_n\}$ последовательность конечных подсемейств и для каждой точки $x \in X$ почти для всех $n \in N$. Следовательно, X является H -пространством.

Теорема 5. Предкомпактный прообраз равномерно H -пространства является равномерно H -пространством. $\gamma_n \in U$

Доказательство. Пусть $f : (X, U) \to (Y, V)$ - предкомпактное отображение равномерного пространства (X, U) в равномерно H -пространство (Y, V) и $\{\alpha_n\} \subset U$ - произвольная последовательность равномерных покрытий. Тогда для любого $n \in N$ существует такие конечное покрытие и $\beta_n \in V$, что $f^{-1}\beta_n \wedge \gamma_n \succ \alpha_n$. Поскольку (Y, V)

равномерно H-пространство, то для последовательности $\{\beta_n\} \subset V$ существует такая последовательность $\{\beta_n^0\}$ конечных подсемейств, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup\beta_n^0$ почти для всех $n \in N$. Для любого $n \in N$ семейство $f^{-1}\beta_n^0 \wedge \gamma_n$ является конечным, и кроме того $\cup\{f^{-1}\beta_n^0 \wedge \gamma_n\} = \cup f^{-1}\beta_n^0$. Далее, для любого $f^{-1}B_{n,i}^0 \cap \Gamma_{n,i} \in f^{-1}\beta_n \wedge \gamma_n$ выберем такое $A_{n,i}^0 \in \alpha_n$, что $f^{-1}B_{n,i}^0 \cap \Gamma_{n,i} \subset A_{n,i}^0$. Легко видеть, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup\alpha_n^0$ почти для всех $n \in N$, следовательно, (X, U) является равномерно H-пространством.

Из теоремы Л. Кочинаца (см [10], стр. 131) и теоремы 5 следует следующая теорема.

Теорема 6. При предкомпактных отображениях равномерно H-пространство сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

Следствие 2. При равномерно совершенных отображениях равномерно H-пространство сохраняется в обе стороны.

Предложение 1. Пространство действительных чисел R с естественной равномерностью является равномерно H-пространством.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\} \subset U_R$ - произвольная последовательность равномерных покрытий и $\beta = \{(n-1, n+1) : n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ - открытое покрытие пространства (R, U_R). Рассмотрим следующее построение: при $n = 0$ в силу компактности $[-1,1]$ из покрытия α_1 выделим конечное подсемейство $\alpha_1^0 \subset \alpha_1$ такое, что $(-1,1) \subset [-1,1] \subset \cup\alpha_1^0$, при $n = 1$ из покрытия α_2 выделим конечное подсемейство $\alpha_2^0 \subset \alpha_2$ такое, что $(-2,0) \subset [-2,0] \subset \alpha_2^0$, а при $n = -1$ из покрытия α_3 выделим конечное подсемейство $\alpha_3^0 \subset \alpha_3$, такое, что $(-2,0) \subset [-2,0] \subset \alpha_3^0$ и т.д. Далее продолжая этот процесс, мы получим последовательность $\{\alpha_n^0\}$ конечных подсемейств. Поскольку β является покрытием пространства (R, U_R) и каждый элемент $(n-1, n+1) \in \beta$ покрывается некоторым конечным подсемейством α_n^0, то для каждой точки $x \in R$ $x \in \cup\alpha_n^0$ почти для всех $n \in N$. Следовательно, пространство (R, U_R) является равномерно H-пространством.

Следствие 3. Пространство рациональных чисел Q индуцированной из равномерностью U_R является равномерно H-пространством. Единичный интервал $(0,1)$ индуцированной из равномерностью U_R также является равномерно H-пространством.

Доказательство следует из предложения и из теоремы Л. Кочинаца (см [10], стр. 131) о том, что всякое подпространство равномерно H-пространства является равномерно H-пространством.

Предложение 2. Пополнение равномерно H-пространства является равномерно H-пространством.

Доказательство. Пусть $(\tilde{X}, \tilde{U})$ - пополнение равномерно H-пространства (X, U) и $\{\tilde{\alpha}_n\} \subset \tilde{U}$ - произвольная последовательность равномерных покрытий. Положим $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n \wedge \{X\}$. Тогда из определения пополнения равномерных пространств $\{\alpha_n\} \subset U$. Так как (X, U) равномерно H-пространство, то существует последовательность $\{\beta_n\}$ конечных подсемейств такая, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup\beta_n$. Положим

$\tilde{\beta}_n = \{\tilde{\mathrm{B}}_n : \mathrm{B}_n \in \beta_n\}, \tilde{\mathrm{B}}_n = \tilde{X} \setminus [X \setminus \mathrm{B}_n]_{\tilde{X}}, \mathrm{B}_n \in \beta_n$. При любом $n \in N$ семейство $\tilde{\beta}_n$ является конечным, так как семейство β_n является конечным, при любом $n \in N$. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$ - произвольная точка. Поскольку отображение $i : (X, U) \to (\tilde{X}, \tilde{U})$ изоморфизм равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство $(\tilde{X}, \tilde{U})$, то $i^{-1}(\tilde{x}) = x$. Поэтому $\tilde{x} \in \cup \tilde{\beta}_n$ почти для всех $n \in N$. Следовательно, пополнение $(\tilde{X}, \tilde{U})$ является равномерно H -пространством.

Известно, что произведение $(X \times Y, U \times V)$ равномерно H -пространства (X, U) на равномерно H -пространство (Y, V) является равномерно H -пространством.

Теорема 7. Конечная дискретная сумма $(X, U) = \coprod \{(X_i, U_i) i = 1,2, \ldots, m\}$ равномерно H -пространств $(X_i, U_i), i = 1,2,..., m$ - равномерно H -пространства.

Доказательство. Пусть $(X_i, U_i), i = 1,2,..., m$ - равномерно H -пространства. Пусть $\{\alpha_n\} \subset U$ - некоторая последовательность равномерных покрытий. Тогда $\{\alpha_{n,i}\} \subset U_i$ $i = 1,2, \ldots, m$. Поэтому при каждом $i \in \{1,2, \ldots, m\}$ существует такая последовательность $\{\beta_{n,i}\}$, что при любом $n \in N$ семейство $\beta_{n,i}$ является конечным и для каждой точки $x \in X_i$ $x \in \cup \beta_{n,i}$ почти для всех $n \in N$. Положим $\beta_n = \bigcup_{i=1}^{n} \beta_{n,i}$. Поскольку пространство $(X_i, U_i), i = 1,2,..., m$ - попарно дизъюнктны в пространстве (X, U), то система β_n является конечным подсемейством для α_n. По определению дискретной суммы равномерных пространств, имеем, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup \beta_n$ почти для всех $n \in N$. Следовательно, равномерное пространство (X, U) равномерно H -пространство.

Литература

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
2. Борубаев А.А., Чекеев А.А. Равномерные структуры на топологических пространствах и группах. – Бишкек: Изд. центр при КГПУ им. И. Арабаева, 1997.
3. Борубаев А.А. Равномерные пространства. – Бишкек: Учкун, 2003.
4. Борубаев А.А. Равномерные пространства. - Бишкек: КГУ, 1987.
5. Борубаев А.А. О некоторых классах равномерных пространств. - Изв. НАН КР. – 2012. – № 3. – С. 102-105.
6. Борубаев А.А. Равномерная топология. – Бишкек: Илим, 2013.
7. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. – Бишкек, 2013.
8. Borubaev A.A. Uniform topology and its applications. – Bishkek: Ilim, 2021.
9. Isbell J. Uniform space. – Providence, 1964.
10. Kocinac L.D.R. Selection principles uniform spaces // Note Mat. – T. 22. – Vol. 2. – 2003. – P. 127-139.
11. Kocinac L.D.R. Some covering properties in topological and uniform spaces // Proceedings of the Steklov Institute of Math. – T. 252. – 2006. – P. 122-137.

УДК 515.12

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ВСЕХ СЧЕТНО ПАРАКОМПАКТНЫХ РАСШИРЕНИЙ

Канетова Динара Эменовна, к.ф.-м.н.,
Dinara_kg@mail.ru
Научно-исследовательский медико-социальный институт
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *Одной из центральных тем в общей топологии является тема, связанная с разного типа расширениями топологических пространств. М. Стоун отмечал, что одной из интересных и трудных проблем общей топологии является изучение всех расширений данного топологического пространства. Исходя из общей проблемы М. Стоуна, Б. Банашевский систематизировал общие задачи теории расширений. П.С. Александровым была поставлена проблема классификации компактных расширений и сформированы различные общие задачи о расширениях топологических пространств. А.А. Борубаевым при помощи равномерности построены множества всех паракомпактных, сильно паракомпактных, линделёфовых и полные по Дьедонне расширений тихоновских пространств.*

В настоящей статье при помощи равномерных структур строится множества всех счетно паракомпактных расширений.

Ключевые слова: *счетно паракомпактные расширение, секвенциальная полнота, секвенциальная полнота по Дьедонне, счетная предпаракомпактность, предуниверсальность.*

БАРДЫК САНАКТУУ ПАРАКОМПАКТУУ КЕҢЕЙҮҮЛӨРДҮН КӨПТҮГҮН ТУРГУЗУУ

Канетова Динара Эменовна, ф.-м.и.к.,
Dinara_kg@mail.ru
Илимий-изилдөө медициналык социалдык-институту
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *Жалпы топологиянын борбордук темаларынын бири болуп топологиялык мейкиндиктердин трдүү типтеги кеңейүүлөрү менен байланышкан тема саналат. М. Стоун жалпы топологиядагы эң кызыктуу жана оор көйгөйлөрдөн болуп берилген топологиялык мейкиндиктеги бардык кеңейүүлөрдү изилдөө деп белгилеген. М. Стоундун койгон жалпы көйгөйлөрүнүн негизинде Б. Банашевский кеңейүүлөр теориясынын жалпы маселелерин системалаштырган. П.С. Александров тарабынан компактуу кеңейүүлөрдүн классификациялоо көйгөйү жана топологиялык мейкиндиктердин кеңейүүлөрү жөнүндөгү түрдүү жалпы маселелери коюлган. А.А. Бөрүбаев тарабынан тихоновдук мейкиндиктердин бир калыптуу структуралардын жардамы менен бардык паракомпактуу, күчтүү паракомпактуу, линделёфтук жана Дьедонне боюнча толук кеңейүүлөрүнүн көптүгү тургузулган.*

Бул илимий макалада бардык санактуу паракомпактуу кеңейүүлөрдүн көптүгү тургузулган.

Ачкыч сөздөр: *санактуу паракомпактуу кеңейүү, секвенциалдуу толуктуулук, Дьедонне боюнча секвенциалдуу толуктуулук, санактуу предпаракомпактуулук, предуниверсалдуулук.*

CONSTRUCTION OF THE SET OF ALL COUNTABLY PARACOMPACT EXTENSIONS

Kanetova Dinara Emenovna, Cand. Phys.-math. Sc.,
Dinara_kg@mail.ru
Scientific-Research Medical-Social Institute
Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Abstract: *One of the central theme in general topology is the theme related to various types of extensions of topological spaces. M. Stone noted that one of the interesting and difficult problems of general topology is the study of all extensions of a given topological spaces. Based on the general problem of M. Stone, B. Banashevsky systematized the general problems of the theory of extensions. P.S. Aleksandfoff posed the problem of classifying compact extensions and formulated various general problems on extensions of topological spaces. A.A. Borubaev, using uniformity, constructed the sets of all paracompact, strongly paracompact, Lindelof and Dieudonne complete extensions of Tychonoff spaces. In this paper, using uniform structures, we construct the sets of all countably paracompact extensions.*
Keywords: *countably paracompact extensions, sequentially completeness, Dieudonne sequentially completeness, countably preparacompactness, preuniversality*

А.А. Борубаевым [1], [3] при помощи равномерности построены множества всех паракомпактных и близкие к нему расширения тихоновских пространств. В работе [2] построены множества всех μ -полные по Дъедонне расширения. Индекс компактности и суперпаракомпактные расширения изучены в работе [4].

Известно, что на каждом счетно паракомпактном пространстве его универсальная равномерность является секвенциально полной, а система всех счетно открытых покрытий пространства образует базу универсальной равномерностью. Пусть M -всюду плотное подпространство пространства X, V -равномерность на M, порожденная равномерностью U. Тогда равномерное пространство (X,U) является секвенциальным пополнением равномерного пространства (M,V). Следует отметить, что равномерность V, вообще говоря, не является универсальной равномерностью, но обладает специальным свойством – счетно предпаракомпактностью. По счетной предпаракомпактностью пространства M можно построить все его счетно паракомпактные расширения, т.е. получить эти расширения как секвенциальные пополнения пространства M по счетно предпаракомпактности.

Напомним [2], что равномерное пространство (X,U) называется секвенциально полным, если всякий фильтр Коши F, имеющий счетную базу B сходится в нем.

Равномерное пространство $(\tilde{X}_s,\tilde{U}_s)$ называется секвенциальным пополнением равномерного пространства (X,U), если: 1) $X \subset \tilde{X}_s$; 2) (X,τ_U) всюду плотно в $(\tilde{X}_s,\tau_{\tilde{U}_s})$; 3) $(\tilde{X}_s,\tilde{U}_s)$ -секвенциально полное равномерное пространство.

Пусть (X,U) -равномерное пространство и $\varphi_s(U)$ -множество всех минимальных фильтров Коши равномерного пространства (X,U), каждое из которых имеет счетную базу [1], [2].

Пусть $U(X)$ -множество всех равномерностей на множестве X. Две равномерности U и V будем считать эквивалентными $U \sim V$, если $\varphi_s(U)=\varphi_s(V)$. Положим $E_s(U)=\{V \in U(X): U \sim V\}$. Ясно, что $E_s(U)$ является частично упорядоченным отношением.

Нормальную последовательность $\{\alpha_n\}$ покрытий множества X будем называть $\varphi_s(U)$-нормальной, если $\alpha_n \cap F \neq \varnothing$ для любых $F \in \varphi_s(U)$ и $n \in N$.

Для любой равномерности U на множестве X множество $E_s(U)$ имеет наибольший элемент. Действительно, пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ -$\varphi_s(U)$-нормальные последовательности покрытий X. Тогда система $\{\alpha_n \wedge \beta_n\}$ является $\varphi_s(U)$-нормальной последовательностью покрытий множества X. Система U_{φ_s} всех $\varphi_s(U)$-нормальных последовательностей покрытий множества X является равномерностью на множестве X. Заметим, что $\varphi_s(U) = \varphi_s(U_{\varphi_s})$. Докажем, что U_{φ_s} -наибольший элемент $E_s(U)$. Пусть $V \in E_s(U)$ и $\lambda \in V$. Тогда существует нормальная последовательность покрытий $\{\lambda_n\}$ из V такая, что $\lambda = \lambda_1$. $\{\lambda_n\}$ - $\varphi_s(U)$-нормальная последовательность покрытий, поскольку $\varphi_s(U) = \varphi_s(V)$. Следовательно, $\{\gamma_n\} \subset U_{\varphi_s}$, $V \subset U_{\varphi_s}$.

Наибольший элемент U_{φ_s} частично упорядоченного множества $E_s(U)$ будем называть φ_s-лидером равномерности U. Равномерное пространство (X, U) называется предуниверсальным, если $U = U_{\varphi_s}$.

Равномерное пространство (X, U) является предуниверсальным тогда и только тогда, когда секвенциальное пополнение $(\tilde{X}_s, \tilde{U}_s)$ равномерного пространства (X, U) является универсальным пространством, в самом деле, пусть V -такая равномерность на X, что $\varphi_s(\tilde{U}_s) = \varphi_s(\tilde{V}_s)$. Поскольку $(\tilde{X}_s, \tilde{U}_s)$ секвенциально полное пространство, то $\varphi_s(\tilde{U}_s)$ есть множество всех фильтров окрестностей точек пространства $(\tilde{X}_s, \tilde{U}_s)$, имеющих счетную базу. Ясно, что $\varphi_s(U) = \varphi_s(\tilde{U}_s) \cap X$, поэтому $\varphi_s(U) = \varphi_s(V)$, где V -равномерность на X, порожденная равномерностью $\tilde{V}_s$. Ясно, что $\tilde{V}_s \subset \tilde{U}_s$. Следовательно, $(\tilde{X}_s, \tilde{U}_s)$ универсальное пространство. Обратно, пусть $(\tilde{X}_s, \tilde{U}_s)$ -универсальное пространство и $\alpha \in U_{\varphi_s}$. Тогда $\tilde{\alpha}_s = \{\tilde{A}_s : A \in \alpha\}$, где $\tilde{A}_s = \tilde{X}_s \setminus [X \setminus A]_{\tilde{X}_s}$ есть покрытие $(\tilde{X}_s, \tilde{U}_s)$. Система $\{\tilde{\alpha}_s : \alpha \in U_{\varphi_s}\}$ является базой для некоторой равномерности $\tilde{U}_{\varphi_s}$ на $\tilde{X}_s$. $\tilde{U}_{\varphi_s} = \tilde{U}_s$, поскольку $\tilde{U}_s$ -универсальная. Итак, $U = U_{\varphi_s}$.

Определение 1 [2]. Топологическое пространство X называется μ-полным по Дьедонне, если на нем существует μ-полная равномерность.

$\aleph_0$-полное по Дьедонне пространство называется секвенциально полным по Дьедонне пространством [2].

Топологическое пространство X секвенциально полно по Дьедонне тогда и только тогда, когда универсальная равномерность пространства X секвенциальна полна [2].

В самом деле, пусть топологическое пространство X секвенциально полно по Дьедонне. Тогда найдется равномерность U на X, такая что (X, U) секвенциально полно. Пусть U_X -универсальная равномерность на X и F -произвольный фильтр Коши равномерного пространства (X, U_X), имеющий счетную базу. Тогда фильтр Коши F имеющий счетную базу сходится в (X, U) т.е. в (X, U_X). Значит, (X, U_X) секвенциально полно.

Пусть $D_s(X)$ -множество всех секвенциально полных по Дьедонне расширений, а $U_{D_s}(X)$ -множество всех предуниверсальных равномерностей тихоновского пространства X. Множество $D_s(X)$ частично упорядочено относительно порядка "$\leq$", а $U_{D_s}(X)$ частично упорядочено по включению "$\subset$".

Теорема 1. Для любого тихоновского пространства X частично упорядоченные множества $D_s(X)$ и $U_{D_s}(X)$ изоморфны.

Доказательство. Пусть задано отображение $F_s : U_{D_s}(X) \to D_s(X)$, $F_s(U) = s_U X$, $U \in U_{D_s}(X)$, и расширение $s_U X$ пространства X. Ясно, что $F_s(U) \in D_s(X)$. Пусть $U,V \in U_{D_s}(X)$ и $F_s(V) = s_U(X)$. Положим $F_s(U) = F_s(V)$. Найдется $f_s : s_U X \to s_V X$ такое, что $f_s \circ s_U = s_V$. Пусть $\tilde{U}_s$ и $\tilde{V}_s$ -универсальные равномерности пространств $s_U X$ и $s_V X$ соответственно. Заметим, что $U = \{s_U^{-1}\tilde{\alpha}_s : \tilde{\alpha}_s \in \tilde{U}_s\}$ и $V = \{s_U^{-1}\tilde{\beta}_s : \tilde{\beta}_s \in \tilde{V}_s\}$. $f_s : (s_U X, \tilde{U}_s) \to (s_V X, \tilde{V}_s)$ -равномерный изоморфизм, так как $f_s : s_U X \to s_V X$ - гомеоморфизм, а $\tilde{U}_s$ и $\tilde{V}_s$ -универсальные равномерности. Отсюда следует, что $U = V$. Пришли к противоречию. Итак, $F_s(U) \neq F_s(V)$. Докажем сюръективность отображения F_s. Пусть $sX \in D_s(X)$ и $\tilde{U}_s$ -универсальная равномерность на нем. Положим $U = \{s^{-1}\tilde{\alpha}_s : \tilde{\alpha}_s \in \tilde{U}_s\}$. Заметим, что U -предуниверсальная равномерность на X. Легко видеть, что $(sX, \tilde{U}_s)$ является секвенциальным пополнением равномерного пространства (X,U). Следовательно, $F_s(U) = s_U X$. Теперь остается показать, что отображение $F_s : (U_{D_s}(X), \subset) \to (D_s(X), \leq)$ -изоморфизм. Пусть $U,V \in U_{D_s}(X)$ такие, что $V \subset U$. Пусть $F_s(U) = s_U X$, $F_s(V) = s_V X$. Пусть $(s_U X, \tilde{U}_s)$ -секвенциальное пополнение пространства (X,U), $(s_V X, \tilde{V}_s)$ -секвенциальное пополнение пространства (X,V). Очевидно, что тождественное отображение $i_X : (X,U) \to (X,V)$ равномерно непрерывно. Тогда существует такое равномерно непрерывное отображение $f_s : (s_U X, \tilde{U}_s) \to (s_V X, \tilde{V}_s)$, что $f_s \circ s_U = s_V$. Отсюда следует, что $s_V X \leq s_U X$. Обратно, пусть $s_V X \leq s_U X$. Тогда существует такое непрерывное отображение $f_s : s_U X \to s_V X$, что $f_s \circ s_U = s_V$. Если $\tilde{U}_s$ и $\tilde{V}_s$ - универсальные равномерности пространств $s_U X$, $s_V X$ соответственно, то отображение $f_s : (s_U X, \tilde{U}_s) \to (s_V X, \tilde{V}_s)$ равномерно непрерывно. Так как $f_s \circ s_U = s_V$ и $U = \{s_U^{-1}\tilde{\alpha}_s : \tilde{\alpha}_s \in \tilde{U}_s\}$ и $V = \{s_U^{-1}\tilde{\beta}_s : \tilde{\beta}_s \in \tilde{V}_s\}$, то $V \subset U$. Следовательно, отображение $F_s : (U_{D_s}(X), \subset) \to (D_s(X), \leq)$ является изоморфизмом.

Пусть X-тихоновское пространство. Через $T(X)$ обозначим множество всех тихоновских расширений, $CP(X)$ -множество всех счетно паракомпактных расширений X. $CP(X) \subset T(X)$ и по отношению "$\leq$" оно частично упорядочено.

Определение 2. Пусть (X,U)-равномерное пространство. Равномерность U называется счетно предпаракомпактным, если всякое счетное покрытие α множества X, такое что $\alpha \cap F \neq \varnothing$ для любого $F \in \varphi_s(X)$ содержится в равномерности U.

Пусть $U_{CP}(X)$ -множество всех счетно предпаракомпактных равномерностей тихоновского пространства X.

Теорема 2. Для пространства X, частично упорядоченные множества $(CP(X),\leq)$ и $(U_{CP}(X),\subset)$ попарно равномерно изоморфны.

Доказательство. Пусть задано отображение $P: U_{CP}(X) \to CP(X)$, $P(U) = s_U X$, где $s_U X$ -расширение X. Расширение $s_U X$ строится как секвенциальное пополнение X по равномерной структуре U. Покажем справедливости равенства $P(U_{CP}(X)) = CP(X)$. Пусть $U \in U_{CP}(X)$ и $P(U) = s_U X$. Пусть $\hat{\alpha}$ -счетное открытое покрытие пространства $s_U X$, элементы которого состоят из канонически открытых множеств $s_U X$. Пусть U' - универсальная равномерность $s_U X$. Через α обозначим след покрытия $\hat{\alpha}$. Тогда для каждого минимального фильтра Коши $F \in \varphi_s(X)$ существует фильтр окрестностей $B(x)$ некоторой точки $x \in s_U X$ такой, что $F = \{O_x \cap X : O_x \in B\}$. Следовательно, $\alpha \cap F \neq \varnothing$ для любого $F \in \varphi_s$. Так как, равномерность U счетно предпаракомпактна, то α является элементом равномерности U. Ясно, что $[\alpha]$ принадлежит в $\widetilde{U}$, а $\langle[\alpha]\rangle$ принадлежит в U, где $[\alpha] = \{[A]_{s_U X} : A \in \alpha\}$, $\langle[\alpha]\rangle = \{\langle[A]_{s_U X}\rangle_{s_U X} : A \in \alpha\}$. Отсюда следует, что $\hat{\alpha} = \langle[\alpha]\rangle$, т.е. $\hat{\alpha} \in U'$. Тогда существует локально конечное открытое покрытие β такое, что $\beta \succ \alpha$. Пусть $\hat{\beta} \in U'$ такое покрытие, что $\hat{\beta} \cap X = \beta$. Легко видеть, что покрытие $\hat{\beta}$ также является локально конечным покрытием, вписанное в счетное открытое покрытие $\hat{\alpha}$. Следовательно, $P(U_{CP}(X)) \subset CP(X)$.

Теперь докажем справедливость обратного включения. Пусть sX -некоторый элемент из $CP(X)$, а U' -универсальная равномерность sX, которая имеет базу, состоящую из локально конечных покрытий $B' \subset U'$. Заметим, что равномерная структура U, порожденная равномерной структурой U', тоже обладает базой, состоящую из локально конечных покрытий. Покажем, что $U \in U_{CP}(X)$. Выберем такое счетное открытое покрытие α множества X, что α и F имеют общий элемент для всякого F из $F \in \varphi_s(U)$. Для каждого $x \in s_U X$ найдется такое открытое множество $\hat{A}_x$ в $s_U X$, что след множества $\hat{A}_x$ на X содержится в α. Положим $\hat{\alpha} = \{\langle \hat{A}_x \rangle : x \in s_U X\}$. Так как U'-универсальная равномерная структура, то счетное покрытие $\hat{\alpha}$ является равномерным покрытием относительно U'. Пусть $\gamma = \hat{\alpha} \wedge \{X\}$. Ясно, что $\gamma \succ \alpha$. Тогда согласно определению равномерности имеем, что $\alpha \in U$, т.е. U является счетно предпаракомпактной. Таким образом $P(U) = sX$. Значит, множество $CP(X)$ содержится в множестве $P(U_{CP}(X))$.

Литература

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Фрунзе: Илим, 1990.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2013.
3. Borubaev A.A. Uniform topology and its applications. Bishkek, Ilim, 2021.
4. Kanetov B., Kanetova D. Characterization of some types of compactness and a construction of index compactness $\leq \tau$ extensions by means of uniform structures. AIP Cof. Proc., Melville. – New York. – 2018. – Vol. 1997. – P. 1-5.

УДК: 532. 546 +517.519.9

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ В ТРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Каюмов Шукур, к.ф.-м.н., доцент
Арзикулов Голибжон Пардаевич, PhD, доцент
Бекчанов Шерзад Эшжанович, ст.преподователь,
sherzodbekjonov@gmail.com
Хусанов Элбек Абдурасул угли, ассистент
elbekhusanov02@gmail.com
Ташкентский государственный технический университет,
Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *Работа посвящена к построение математической модели процесса нелинейной фильтрации структурированных флюидов в слоистых средах. Изучена количество перетоков между слоями в зависимости от характеристики пласта и флюида. Разработан численные алгоритмы для проведения вычислительного эксперимента.*

Ключевые слова: *пористая среда, фильтрация, многослойность, структурированность, математическая модель, алгоритмы, численные решения.*

MATHEMATICAL MODELS OF FLUID FILTRATION IN A THREE-LAYER MEDIUM

Kayumov Shukur, Ph.D., Associate Professor
Arzikulov Golibjon Pardaevich, PhD, Associate Professor
Bekchanov Sherzad Eshzhanovich, senior lecturer,
sherzodbekjonov@gmail.com
Khusanov Elbek Abdurasul ugli, assistant
Tashkent State Technical University,
Tashkent, Uzbekistan

Annotation: *The work is devoted to the construction of a mathematical model of the process of nonlinear filtration of structured fluids in layered media. The number of flows between the layers depending on the characteristics of the formation and fluid has been studied. Numerical algorithms for carrying out a computational experiment have been developed.*

Keywords: *porous medium, filtration, multilayeredness, structuredness, mathematical model, algorithms, numerical solutions.*

Изучение задачи процесса фильтрации в многослойных средах имеет определенные истории [1-3], и в основном посвящены к процессам движение ньютоновских флюидов однофазных и многофазных случаях. Пористые среды содержащую в себе флюидов обладающими с различными линейными и нелинейными характеристиками изучаются математическими моделированием, описывающие процесс изменение состояние движущихся флюидов и влияние их, на структуры сплошной среды.

Реальные пористые среды рассматривается как многослойные, состоящие из изолированных (гидродинамически несвязанных), и неизолированных (связанных) сред.

Гидродинамически связанные среды моделируется как многослойные, где происходить перетоки между пластами. В процессе разработки этих месторождений величины перетоков влияют на объемы добычи извлекаемых флюидов. Несвязанных пластах не происходить перетоки между пластами, а связь между ними происходить по стволу вертикальной скважины. Если в этих пластах начально пластовые давление резко отличается то в стволе скважины могут происходить перераспределение величины дебитов идущих от этих слоев. Поэтому математические модели процесса фильтрации в многослойных пластах будет различными и каждый из построенных моделей имеет своего назначения. Существует различные способы моделирование этих пластов и они описаны в работах [2-4]. Эти модели отличаются друг от друга тем, что, фильтрации вследствие характеристики пористей среды и движущего в нем флюида, сильно отличаются в каждом слое по отношению к соседнем пластам. Процесс фильтрации нефти и газа в многопластовых системах изучена и работах [5-7]. Существует ещё многочисленные работы, обзор которых можно найти в работах [7-10].

Метод. Рассмотрим слоистый (трехслойный) пласт состоящей из хорошо проницаемого (область Ω_2), с соседствующие (снизу и сверху) плохо проницаемыми пластами (области Ω_1 и Ω_2). Предпологаем что в области Ω_2 характеристики горизонтальной проницаемости, преобладает на несколько порядок чем вертикальные, а в соседних верхних и нижних пластах имеет обратные характеристики, что позволяет считать что в области Ω_2 движение флюида происходит по горизонтали а в областях Ω_1 и Ω_3 по вертикали. Пусть в области Ω_2 имеется структурированный флюид [11] а в Ω_1 и Ω_3 ньютоновский неструктурированный флюид.

Задачу можно математически моделировать так: необходимо найти непрерывные функции $U_i(x,z,t)$ $(i=1,3)$ и $U_2(x,t)$ а также неизвестные границы подвижных зон $R_1(x,t)$ и $R_2(x,t)$ из следующей системы дифференциальных уравнений.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\aleph_e\left(|\nabla U_2|,\beta_e\right)\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)+\varphi_1\frac{\partial U_1}{\partial z}|_{z=h_1}-\varphi_2\frac{\partial U_3}{\partial z}|_{z=h_2}= \\ =M_e\frac{\partial U_2}{\partial z},\quad x\in\Omega_2,\quad z\in(\Omega_1;\Omega_3),\quad t>0,\ \ e=\overline{1,3} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_{2\gamma-1}(z)\frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial z}\right)=M_{2\gamma-1}\frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial t},\quad z\in(\Omega_1,\Omega_3);\quad \gamma=\overline{1,2};\quad t>0, \tag{2}$$

с начальными

$$U_2(x,0)=U_0(x),\quad U_{2\gamma-1}(x,z,0)=U_0(x,z),\qquad \left(\gamma=\overline{1,2}\right), \tag{3}$$

и граничными

$$a_1\aleph_1\left(|\nabla U_2|,\beta_1\right)\frac{\partial U_2}{\partial x}|_{x=x_0}+b_1U_2(x,t)|_{x=x_0}=\psi_0(t), \tag{4}$$

$$a_2\aleph_1\left(|\nabla U_2|,\beta_3\right)\frac{\partial U_2}{\partial x}|_{x=L}+b_2U_2(x,t)|_{x=L}=\psi_1(t), \tag{5}$$

$$a_0\varphi_1(z)\frac{\partial U_1}{\partial z}|_{\substack{z=0\\ x\in[x_0,L]}}=0,\qquad a_3\varphi_3(z)\frac{\partial U}{\partial z}|_{\substack{z=H_3\\ x\in[x_0,L]}}=0\ , \tag{6}$$

а также условиями на границах зон:

$$\aleph_1\left(|\nabla U_2|,\beta_1\right)\frac{\partial U_2}{\partial x}|_{x=R_1-0}=\aleph_2\left(|\nabla U_2|,\beta_2\right)\frac{\partial U_2}{\partial x}|_{x=R_1+0}\,, \tag{7}$$

$$\aleph_2\left(\left|\nabla U_2\right|,\beta_2\right)\frac{\partial U_2}{\partial x}|_{x=R_2-0}=\aleph_3\left(\left|\nabla U_2\right|,\beta_3\right)\frac{\partial U_2}{\partial x}|_{x=R_2+0}, \tag{8}$$

$$U_2\left(x,z,t\right)|_{x=R_e-0}=U_2\left(x,z,t\right)|_{x=R_e+0},\quad e=\overline{1,2}; \tag{9}$$

где

$$\aleph_e\left(\left|\nabla U_2\right|,\beta_e\right)=\left\{k_2/\mu_2\left(1-\beta_2\gamma_0/\left|\nabla U_2\right|\right),\ x\in\left(x_0;R_1-0\right);\right.$$

$$\left.\left(k_2\cdot\left|\nabla U_2\right|\right)/\left(\mu_2\left(\beta_2+\left|\nabla U_2\right|\right)\right),x\in\left(R_1+0;R_2-0\right);\quad k_2/\mu_3,\ x\in\left(R_2+0;L\right)\right\}.$$

$$a_1=\{1;0\},\ b_1=\{0;1\}\ \ a_2=\{1;0\},\ b_2=\{0;1\},\ |a_1|+|b_1|\neq 0,\ |a_2|+|b_2|\neq 0,$$

$$\varphi_{2\gamma-1}(z)=\overline{\varphi_0}\left(\beta_{2\gamma-1}+\left|\nabla U_{2\gamma-1}\right|\right)/\left(\nabla U_{2\gamma-1}\right),$$

$\overline{\varphi_0}$ - функция содержит в себе коэффициенты проницаемости, мощности и вязкости флюида для плохо проницаемых пластах [8-11].

Краевая задача (1)-(9) является квазинелинейными и аналитическое решение построит почти невозможно. Для построения численного решения сначала нелинейные члены линеаризуется путем построения итерационного процесса, далее применяется метод прямых по переменному t и численный метод-потоковой вариант разностной прогонки [12-14]. В следствие ограничения на объём статью вычислительные алгоритмов и последовательности их вычислений здесь не приводим.

Разработанные вычислительные алгоритмы апробирован на следующих гипотетических данных: $a_1=1,\ b_1=0,\ \psi_0(t)=\{50T/c;100T/c\},\ \psi_1=0,\ k_1=k_3=0,005,$ $k_2=0,15;$ $\mu=\{0,01;\ 0,1\};$ $\nu=\{0,018;\ \ 0,016\};$ $m_1=0,017,\ m_2=0,27,\ m_3=0,017,\ u_0=1.$ Отдельные результаты расчета приведены на рис. 1, 2 и 3, где дано кривые изменения давления и функции перетока в верхнем плохо проницаемом пласте, а также в таблице 1 и 2. В таблице 1 дано изменение давления в области Ω_2 а в таблице 2 приведена значение перетока из Ω_3 в области Ω_2.

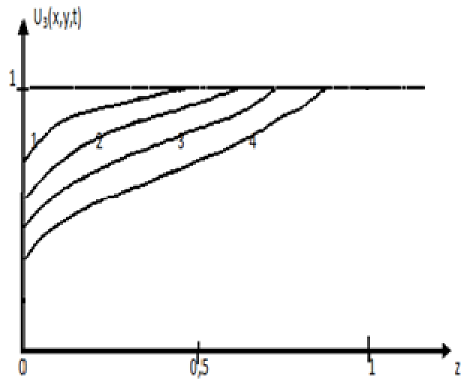


Рис. 1
Динамика изменения давление в перемычке (область Ω_3)
$t=\{0,1;\ 0,2;0,3;0,4;\}$

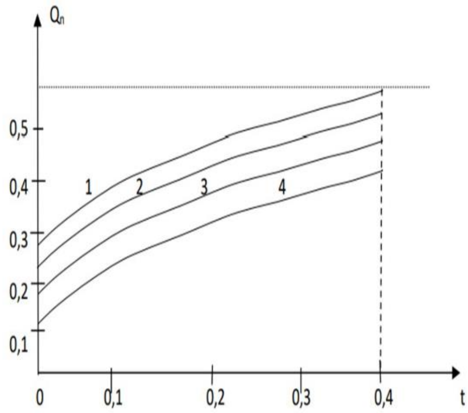


Рис. 2
Динамика изменение функции перетока из области Ω_3 в области Ω_2 при
$t=\{0,1;\ 0,2;0,3;0,4;\}$

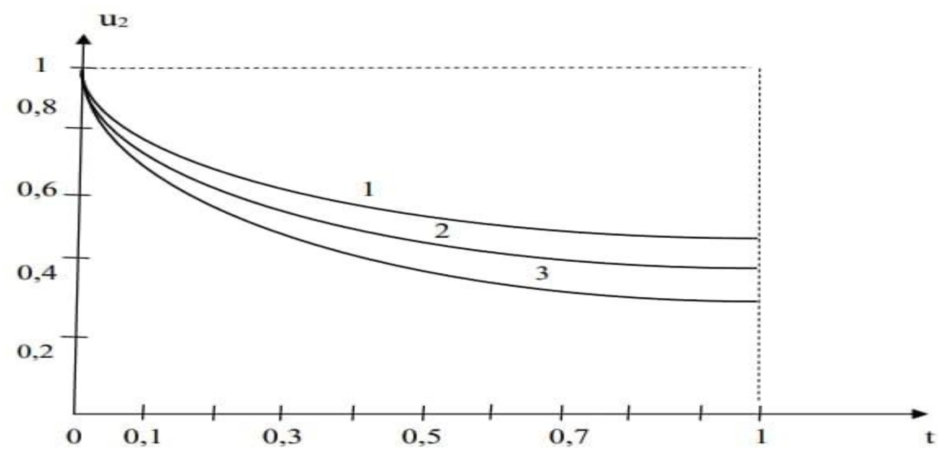


Рис 3. Кривые выражающие темпа уменьшение давление в области Ω_2

Таблица 1.

x / t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,1	0,8453	0,8543	0,8715	0,8905	0,9101	0,9302
0,2	0,7914	0,8118	0,8314	0,8705	0,8840	0,8911
0,3	0,7421	0,7716	0,8021	0,8212	0,8416	0,8677
0,4	0,7115	0,7344	0,7711	0,7910	0,8121	0,8332

Таблица 2.

β / t	$\beta=0$	$\beta=10^{-4}$	$\beta=10^{-2}$	$\beta=10^{-1}$
0,01	0,13143	0,10145	0,08327	0,06511
0,05	0,19314	0,15321	0,12425	0,10241
0,01	0,22314	0,17221	0,15372	0,13712
0,15	0,26231	0,18762	0,17221	0,15014

Необходимо отметить, что при структурированном законе фильтрации в области Ω_2 в зоне с большом градиентом давлений происходить быстрое увеличение перетоков флюида из области Ω_1 и Ω_3. Регулируя величинами перетока между пластами можно достичь наибольшую отбор из области Ω_2.

Анализ результатов проведенных численных расчетов показывает, что построенные математические модели и вычислительные алгоритмы можно использовать для определении промысловых данных, на этапе и проектирование при эксплуатации реальных месторождений имеющие такие же характеристики как в исходной задаче.

Литература

1. аренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарный фильтрации жидкости и газа. М. : Недра. 1972. 288 с.
2. Шелкачев В.Н., Гусейнзаде М.А. Влияние проницаемости кровли и подошвы пласта на движение в нем жидкости. «Нефтяное хозяйство», 1953, №12. С.15-19.
3. Гусейнзаде М.А. Колосовская А.К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах. М.: «Недра». 1972. 312с.
4. Хантуш М.С. Новое в теории перетекания. Сб. Вопросы гидрогеологических расчетов. М. «Мир». 1964. С. 25-32.
5. Мухидинов Н. Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Ташкент. ФАН. 1978, 117 с.

УДК 517.5:517.91

ФУНКЦИОНАЛДЫК ӨЗ АРА БАЙЛАНЫШТАР, ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА БАШКАРЫЛУУЧУ ОБЪЕКТТЕР ҮЧҮН АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШУ

Кененбаев Эламан
Elaman0527@gmail.com
Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институту
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада кандайдыр бир көптүктөгү объекттин чекиттеринин ортосундагы өз ара байланыш, анын ичинде функциянын маанилеринин, дифференциалдык теңдеменин чечимдеринин ортосундагы өз ара байланыш каралат. Алардын классификациясы сунушталат: чексиз жана чектүү сандагы чоңдуктар ортосундагы өз ара байланыштар; толук аныкталган жана жарым-жартылай аныкталган маанилердин ортосундагы өз ара байланыштар. Функционалдык өз ара байланыштардын үстүнөн болгон амалдар каралат. Геометриялык объектилердин, кыймылдуу геометриялык объекттердин, кадимки дифференциалдык теңдемелердин жана жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин функционалдык өз ара байланыштарынын мисалдары келтирилген. Мындай байланыштардын кээ бир дифференциалдык теңдемелерди изилдөө үчүн, компьютерде колдонуучунун жардамы менен башкарылуучу объекттердеги тилдик түшүнүктөрдүн сүрөттөлүштөрү үчүн колдонулушу көрсөтүлгөн.*

Негизги сөздөр: *функционалдык өз ара байланыш, дифференциалдык теңдеме, башкарылуучу объект, классификация, компьютерде көрсөтүү.*

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Kenenbaev Elaman
Elaman0527@gmail.com
Институт математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *В статье рассматриваются соотношения между точками объекта из какого-либо множества, в том числе между значениями функции, решениями дифференциального уравнения. Предлагается их классификация: соотношения между бесконечным и между конечным количеством значений; полностью определенные и частично определенные. Рассматриваются действия над функциональными соотношениями. Приведены примеры функциональных соотношений для геометрических объектов, подвижных геометрических объектов, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Показано использование таких соотношений для исследования некоторых дифференциальных уравнений, для изображения языковых понятий на компьютере с помощью управляемых пользователем объектов.*

Ключевые слова: *функциональное соотношение, дифференциальное уравнение, управляемый объект, классификация, компьютерное представление.*

FUNCTIONAL RELATIONS, THEIR APPLICATION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS AND CONTROLLED OBJECTS

Kenenbaev Elaman
Elaman0527@gmail.com
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *The article deals with the relationship between the points of an object of any set, including ones between the values of a function, solutions of a differential equation. Their classification is proposed: relations between an infinite and between a finite number of values; fully defined and partially defined. Actions on functional relations are considered: intersection, union. Examples of functional relations for geometric objects, moving geometric objects, ordinary differential equations and partial differential equations are given. Application of such relations for the study of some differential equations, for the representation of language notions on a computer with assistance of user-controlled objects is shown.*

Keywords: *functional relation, differential equation, controlled object, classification, computer presentation.*

1. Киришүү. Макалада кандайдыр бир көптүктүн объектинин чекиттеринин ортосундагы байланыштар, анын ичинде функциянын маанилери, "функционалдык өз ара байланыштар" деп аталган дифференциалдык теңдеменин чечимдери.

Функционалдык ара байланыштар мамилелер математиканын ар кандай тармактарындагы объекттерде жана алардын колдонулуштарында бар. Анын ичинде, дифференциалдык теңдемелердин теориясы боюнча эмгектердин көпчүлүгүндө же чечимдер, же жакын чекиттердеги чечимдердин маанилери (жакындаштыруу ыкмалары) каралат. Ошол эле учурда, алыскы чекиттердеги функциялардын маанилери колдонулган кээ бир жыйынтыктар каралат [1].

Экинчи бөлүмдө геометриялык объектилердин, кыймылдуу геометриялык объекттердин, кадимки дифференциалдык теңдемелердин жана жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин функционалдык өз ара байланыштарынын мисалдары келтирилген. Алардын классификациясы сунушталат: чексиз жана чектүү сандагы чоңдуктар ортосундагы өз ара байланыштар; толук аныкталган жана жарым-жартылай аныкталган маанилердин ортосундагы өз ара байланыштар. Функционалдык өз ара байланыштардын үстүнөн болгон амалдар каралат.

Үчүнчү бөлүмдө мындай өз ара байланыштар кээ бир дифференциалдык теңдемелерди изилдөө үчүн, компьютерде колдонуучунун жардамы менен башкарылуучу объекттердеги тилдик түшүнүктөрдүн сүрөттөлүштөрү үчүн колдонулушу көрсөтүлгөн.

2. Функционалдык өз ара байланыштардын мисалдары жана классификациясы

Белгилөөнү колдонобуз: F – бири-бири менен туташтырылган чекиттердин минималдуу саны, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$.

Чекиттердин номурлары чарчы кашаа менен белгиленет.

2.1. Тегерек. $F=4$. Эгерде $T[2]$ жана $T[3]$ чекиттери $T[1]$ жана $T[4]$ чекиттеринин ортосунда болсо, анда $(T[1]\ T[2]\ T[4])$ бурчу $(T[1]\ T[3]\ T[4])$ бурчуна барабар болот.

2.2. Кыймылдуу эки звенолуу сынык сызык. $F=3$. $(T[1]\ T[2])$ сегменттин узундугу туруктуу, $(T[2]\ T[3])$ сегменттин узундугу туруктууга барабар.

2.3. Белгилүү болгондой, эки өзгөрмөлүү гармоникалык функциялар өз ара байланышты канааттандырат: функциянын каалаган тегеректеги орточо мааниси (чексиз сандагы чекиттер) тегеректин борборундагы функциянын маанисине барабар.

Ошол эле учурда чекиттердин ар кандай чектүү көптүгүндө гармоникалык функция каалаган чоңдуктарды ала алат. $m=2$ болсун, $x[1], x[2],\ldots,x[k]$ чекиттери жана $u[1], u[2],\ldots,u[k]$ сандары бар.

Бул маанилердин негизинде биз комплекстүү өзгөрмөнүн функциясы катары $L(x)$ Лагранж көп мүчөсүн түзөбүз: $L(x[j])=u[j, j=1,...,k$ жана армоникалык функция $U(x)=Re\ L(x)$ ти аныктайбыз. Анда

$$U(x[j])= Re\ L(x[j])= Re\ u[j]= u[j], j=1,\ldots,k.$$

Демек, чектүү чекиттердеги гармоникалык функциянын ар кандай маанилери бири-бири менен байланышпайт. Бул жерде $F=\infty$.

2.4. Бир скалярдуу өзгөрмөлүү $f(x)=kx$ түрүндөгү сызыктуу функциясынын нөлдөн башка эки чекитиндеги маанилери туура келиши керек:

$$f(x[1])x[2]= f(x[2])x[1]; F=2.$$

2.5. Үч чекиттеги бир скалярдуу өзгөрмөлүү $f(x)=kx+b$ сызыктуу функциясынын маанилери туура келиши керек:

$$(f(x[1])- f(x[3]))(x[1]-x[3])= (f(x[2])- f(x[3]))(x[2]]-x[3]); F=3.$$

2.6. Бир скалярдуу өзгөрмөлүү k даражадагы көп мүчө-функциянын $F=k+2$ чекиттериндеги маанилери туура келиши керек.

$m=1$ болсун, $x[1], x[2],\ldots,x[k+2]$ сандары жана $f[1], f[2], \ldots, f[k+2]$ сандары берилсин. $x[1], x[2],\ldots,x[k+1]$ жана $f[1], f[2],\ldots,f[k+1]$ маанилерин колдонуп, k-тартиптеги L(x) Lagrange көп мүчөсүн түзөбүз. $L(x[k+2])=f[k+2]$ болушу керек.

Эгерде чекиттер арифметикалык прогрессияны түзсө, анда мындай туура келүүчүлүк төмөкүдөй жазылат:

$$\sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^{j}\,(-1)^j f(x[j+1]) = 0$$

2.7. Эки скалярдуу өзгөрмөлүү функция – ар бири бир өзгөрмөлүү функциялардын суммасы – Асгейрссондун тендештигин төрт чекит үчүн канааттандырат, $F=4$:

Эгерде $m=2$ болгондо $f(x) \equiv f1(x1)+f2(x2), u[1], u[2], v[1], v[2]$ кандайдыр бир сандар болсо, анда

$$f(u[1], v[1])+ f(u[2], v[2])\equiv f(u[1], v[2])+ f(u[2], v[1]).$$

Функционалдык өз ара байланышка амалдар:

Эгерде $u[3]$ кандайдыр бир сан болсо, анда биз жаза алабыз:

$f(u[2], v[1])+ f(u[3], v[2])\equiv f(u[2], v[2])+ f(u[3], v[1]).$

Мурунку барабардык менен кошсок, алабыз

$f(u[1], v[1])+ f(u[3], v[2])\equiv f(u[1], v[2])+ f(u[3], v[1]).$

2.8. m скалярдуу өзгөрмөлөлүү функциясы - ар бири бир өзгөрмөлүү функциялардын суммасы - тик бурчтукту түзгөн төрт чекити үчүн ошондой эле Асгейрссон тендештигин канааттандырат, анын каалаган эки карама-каршы жагы ордината окторунун бирине параллель.

2.9. m скалярдуу згөрмөлөлүү функциясы - ар бири аз өзгөрмөлүү функциялардын суммасы катарында –

$f(x)= g_1(x_2,\ldots, x_m)+ \ldots + g_q(x_1,\ldots, x_{q-1}, x_{q+1},\ldots, x_m) + \ldots + g_m(x_1,\ldots,x_{m-1}),$

$F=2m$ чекиттери үчүн жалпыланган Асгейрссон тендештигин канааттандырат.

3. Дифференциалдык теңдемелердин классификациясы жана функционалдык өз ара байланыштардын колдонулушу

Адабияттарда, кадимки дифференциалдык жана экиден көп эмес өзгөрмөлүү жана экинчи тартиптен жогору эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн, терминологиядагы бирдейлик бар экенин көрсөтүп турат.

[2], [3], [4] жана башкаларда жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерди алардын жазылышына жараша классификациялоо жана жазылышын жөнөкөйлөштүрсө да өзгөрбөй тургандай өзгөртүп түзүүлөрдү сунушталат. Мурда бир типке таандык болгон теңдемелердин чечимдеринин ар кандай функционалдык өз ара байланыштары бар экендиги [5], [6] көрсөтүлгөн. [7] макаласында, жазуу формасына карабастан, теңдемелерди чечимдерине жараша классификациялоо сунушталган.

Функционалдык өз ара байланыштарды колдонуунун мисалдарын карап көрөлү.

3.1. Кадимки дифференциалдык теңдемелер.

$y^{(k)}(x)=0$ теңдемесин карап көрөлү. Анын чечими $(k\text{-}1)$- тартиптеги көп мүчө. 2.6-бөлүктөн анын маанилери каалаган $h>0$ үчүн удаалаш түрдө формула боюнча табылышы мүмкүн экени келип чыгат:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{k} C_k^j\,(-1)^{j+k}y(x-jh)$$

Ар түрдүү чекиттердеги теңдеменин чечиминин маанилеринин ортосундагы байланышты C. J. de la Vallee Poussin алган (мисалы, [8]): теңдеме

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)\,y^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)\,y(x)=0,\;\; a\le x\le b, \qquad p_k(x)\in C[a,b],$$

$y(x[i]) = c_i,\; i=1,\ldots,n$ шарты менен

$$\|p_1\|_{[a,b]}(b-a)+\|p_2\|_{[a,b]}(b-a)^2/2!+\ldots+\|p_n\|_{[a,b]}(b-a)^n/n! < 1.$$

чектөөсүндө жалгыз чыгарылышка ээ.

3.2. Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер.

$u_{xx}(x,y)\text{-}u_{yy}(x,y)=0$ толкун теңдемесин карап көрөлү. Бул теңдеменин жалпы чечими д'Аламбердин формуласы менен табылат жана 2.7-бөлүмдөн (t, x) тегиздикте жактары координата октору менен 45^0 түзгөн тик бурчтуктун диагоналдарынын биринин учунда $u(t, x)$ функциясынын маанилеринин суммасы, башка диагоналдын учтарындагы $u(t,x)$ функциясынын маанилеринин суммасына барабар, $F=4$ экендиги келип чыгат. Бул функ-ционалдык байланышты колдонуу менен, ар кандай чекиттердеги чечимдин маанилерин удаалаш табууга болот.

3.3. өзгөрүүчү этиштердин өз алдынча компьютерде көрсөтүлүшү [9]. Математикалык көз караштан жана компьютердик ишке ашыруу боюнча, этиштер: эң жөнөкөй (которуу) – *ал, кой, жылдыр, бер* (бир чекиттин кыймылын программалоо жетиштүү), жылдыруу – буруу – *бур, тургуз* (бир чекиттин жана буруу бурчунун өзгөрүшүнүн кыймылы программаланган) жана татаал – дисплейде өзгөртүүчү объект болуп бөлүнөт. Мындай этиштер үчүн көп учурларда функционалдык өз ара байланышкан чектүү сандагы чекиттердин кыймылын программалоо жетиштүү. Мисалы, *түздө, бүктө* (2.1-пунктту кара).

4. Корутунду

Бул макалада келтирилген мисалдар функционалдык өз ара байланыштарды колдонуу математиканын жана анын колдонмолорунун ар кандай тармактарында объекттерди көрсөтүүгө жана кээ бир маселелерди чечүү мүмкүнчүлүктөрүн берээрин көрсөтүп турат.

Адабияттар

1. Панков П.С. Аксиоматическая теория характеристик и ее применение к аналитическим функциям / П.С.Панков, Г.М.Матиева, Х.С. Сабирова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 37-42.
2. Джураев Т.Д. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка / Т.Д.Джураев, Я.Попелек // Дифференциальные уравнения. - 1991. - Т. 27. - № 10. - С. 1734-1745.
3. Джураев Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка / Т.Д.Джураев, А.Сопуев. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
4. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа / Т.Д.Джураев, А.Сопуев. М.Мамажанов. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
5. Сабирова Х.С. Влияние младших членов дифференциальных уравнений с частными производными на их характеристичность / Х.С. Сабирова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 38. – Бишкек: Илим, 2008. – С. 107-111.
6. Сабирова Х.С. Различие в характеристических свойствах волновых уравнений с различным количеством переменных / Х.С. Сабирова // Вестник Международного университета Кыргызстана, № 1(20), 2011. – С. 58-61.
7. Кененбаева Г.М. Элементы категории уравнений / Г.М.Кененбаева, Л.Аскар кызы, Ж.К. Бейшебаева, Э. Маматжан уулу // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 88-95.
8. Бессмертных Г. А. О существовании и единственности решений многоточечной задачи Валле–Пуссена для нелинейных дифференциальных уравнений / Г. А. Бессмертных // Дифференциальные уравнения, 1970, том 6, № 2, с. 298–310.
9. Kenenbaev E. Functional relations and mathematical models of transforming verbs / P.Pankov, E. Kenenbaev, S. Chodobaev // Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR, 2022, No. 1. - Pp. 131-136.

УДК 512.581.2

ТEҢДЕМЕЛЕР КАТЕГОРИЯСЫ ЖАНА АНЫН КАТЕГОРИЯЧАЛАРЫ

Кененбаева Гулай Мекишовна, ф.-м.и.д., профессор
gkenenbaeva@mail.ru
Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук университети
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Мурда, өзгөртүүлөрдө чыгарылыштын сакталуу принцибинин негизинде “предикат” түшүнүгүнүн жардамы менен теңдеменин жаңы жалпы түшүнүгүн киргизгенбиз жана белгилүү категориялардын негизинде теңдемелер категориясынын элементтери тургузулган. «Теңдеме» түшүнүгүнө баштапкы жана чектик шарттар да кирет. Биз ошондой эле белгилүү болгон “Адамар боюнча корректтүүлүктү” кошуу менен корректүү теңдемелердин категорияларынын түшүнүгүн киргиздик жана корректүүлүктү сактоо менен өзгөртүүлөрдүн мисалдарын, функциялар үчүн теңдемелер категориясын келтирдик ж.б. Бул макаланын максаты –мурда адабиятта кыйыр түрдө колдонулган функциялардын категориясын, теңдеме категориясын жана анын аныкталган субкатегорияларын сүрөттөп берүү болуп саналат.*

Ачкыч сөздөр: *категория, морфизм, теңдеме, предикат, чыгарылыш, корректтүүлүк.*

КАТЕГОРИЯ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПОДКАТЕГОРИИ

Кененбаева Гулай Мекишовна, д.ф.-м.н., профессор
gkenenbaeva@mail.ru
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Ранее нами было введено новое общее понятие уравнения с помощью понятия “предикат” на основе принципа сохранения решения при преобразованиях и построены элементы категории уравнений на основе известных категорий. Начальные и краевые условия также включаются в понятие «уравнение». Мы также ввели понятие категории корректных уравнений с включением известной «корректности по Адамару» и привели примеры преобразований с сохранением корректности, понятие категории уравнений для функций и другие. Цель настоящей статьи – описание категории функций, которая неявно использовалась ранее в литературе, категории уравнений и выявленных ее подкатегорий.*

Ключевые слова: *категория, морфизм, уравнение, предикат, решение, корректность.*

CATERGORY OF EQUATIONS AND ITS SUBCATEGORIES

Kenenbaeva Gulai Mekishovna, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
gkenenbaeva@mail.ru
Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *A new general notion of equation was introduced by us with assistance of the notion “predicate” on the base of the principle of preservation of solution while transformations and elements of the category of equations were constructed on the base of well-known categories. Initial values and boundary values are also included in the notion of equations. Further, we introduced the notion of the category of correct equations including the known “correctness by Hadamard” and presented examples of transformations. The aim of this paper is to describe the category of functions which was used in literature implicitly, the category of equations and their distinguished subcategories.*

Keywords: *category, morphism, equation, predicate, solution, correctness*.

1. Киришүү. Азыркы учурда математиканын көптөгөн тармактары категориялар теориясынын алкагында ийгиликтүү изилденүүдө, анткени ал математикалык объекттердин ортосундагы байланыштардын объекттердин ички түзүлүшүнөн көз каранды болбогон касиеттерин карайт.

Кыргызстанда категориялык алгебра боюнча биринчи жыйынтыктарды М.Я.Медведев[1], категориялык топология боюнча бир катар жыйынтыктарды академик А.А. Борубаев, А.А.Чекеев жана алардын окуучулары [2] алышкан.

Математиканын түрдүү тармактарында «теңдеме» түшүнүгү пайда болот. Бирок буга чейин теңдемелердин айрым түрлөрүнүн категориялары гана курулган, мисалы, [3]. Ошол эле учурда математикада белгилүү жана ар кандай типтеги теңдемелердин жана теңдемелер системаларынын эквиваленттүү экендигин далилдөө үчүн колдонулат.

Мындан тышкары, автономдуу кадимки дифференциалдык теңдемелердин тартибин төмөндөтүүнүн белгилүү ыкмасы, аргументти алмаштыруунун жана өзгөртүүнүн ар кандай ыкмалары, Кыргызстанда иштелип чыккан чечимдерди өзгөртүү ыкмасы, Кыргызстанда түзүлгөн кошумча аргумент ыкмасы ж.б., ар кандай чечимдери бар теңдемелердин эквиваленттүү болушу, ал тургай ар кандай мейкиндиктерде да эквиваленттүү болушу мүмкүн экендигин көрсөтөт. Ошондуктан, бул иштин максаты аталган ыкмалардын так жана бирдей сүрөттөлүшү жана теңдеме категориясынын жана анын категориячаларынын негизги түшүнүктөрүн, объектилерин жана морфизмдерин формулировкалоо, анын башка категориялар менен байланышын орнотуу үчүн «теңдеме» түшүнүгүн «теңдемелер системасы», «кошумча шарттары бар теңдеме» түшүнүктөрүн камтуу менен кеңейтүү болуп саналат.

Категориялар теориясынан белгилүү маалыматтарды келтирели

Аныктама 1. К категориясы :

1) *Ob(K)* $(A, B, C, \ldots)$ объекттердин жыйындысы;

2) *Mor(K)* $(f, g, h, ..)$ морфизмдеринин жыйындысы;

3) Ар бир f морфизмге кээ бир $dom(f)$ жана $cod(f)$ объекттерин ыйгаруучу dom жана cod операциялары (алар fтин башы жана аягы деп аталат). $dom(f) = A$ жана $cod(f) = B$ экендиги $f\colon A \to B$ катары көрсөтүлгөн. Бул учурда f Aдан Bге чейинки морфизм деп айтабыз.

4) $cod(f) = dom(g)$ болгондой ар бир жуп f жана g морфизмдери боюнча кандайдыр бир $g \circ f\colon A \to C$ морфизмди пайда кылган композиция операциясы (ал g жана f композициясы деп аталат).

5) Ар бир A объекти боюнча кандайдыр бир $I_A\colon A{\to}A$ морфизмин пайда кылган I операциясы (ал A объектисинин бирдик же теңдеш морфизми деп аталат).

К категориясындагы Aдан Bге чейинки бардык морфизмдердин жыйындысы К(A, B) менен белгиленет.

Бул учурда, төмөнкү шарттар аткарылышы керек:

1. Композициянын ассоциативдүүлүгү. Каалаган үчтүк $f, g, h, f\colon A \to B$; $g\colon B \to C$; $h\colon C \to D$ морфизмдери үчүн $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ барабардыгы аткарылат.

2. Теңдештиктин касиеттери. Ар кандай $f\colon A \to B$ морфизми үчүн $f \circ IA = f$, $IB \circ f = f$ барабардыктары аткарылат.

Негизги категориялар, алардан бардык калгандары курулган, болуп төмөнкүлөр саналат:

Set көптүктөр категориясы. *Ob(Set)* – бош эмес көптүктөр, *Mor(Set)* – бир көптүктү экинчисине чагылдыруучу функциялар.

Функциялардын категориясы (операторлор, өзгөртүп түзүүлөр, чагылдыруулар). Ал адабиятта айтылган, бирок ага эч кандай белги киргизилген эмес, анын формалдуу сүрөттөлүшүн да таба алган жокпуз. Биз сунуштайбыз: *Func, Ob(Func)=Mor(Set), Mor(Func)* – функцияларды өзгөртүп түзүүлөр. Өз кезегинде бул категориянын субкатегориялары математиканын ар кандай тармактарында колдонулат.

Top топологиялык мейкиндиктердин категориясы. *Ob(Top)* – топологиялык мейкиндиктер, *Mor(Top)* – үзгүлтүксүз чагылдыруу.

Бул категориядагы түшүнүктөр башка нерселер менен катар маселелердин корректүүлүгүн аныктоо үчүн, анын ичинде теңдемелер категориясында колдонулат.

2. Теңдемелердин категориясын жана анын категориячаларын аныктоо

Динамикалык системалар теориясынын ар кандай бөлүмдөрүндө дифференциалдык, интегралдык, айырмалык, ошондой эле интегродифференциалдык жана башка типтеги теңдемелердин баштапкы, чектик, локалдык эмес шарттары жана башка кошумча маалыматтары менен ар кандай функционалдык мейкиндиктерде каралат. Мындай маселелерди бир түрдө көрсөтүү үчүн, ошондой эле белгилүү методдорду системалуу түрдө колдонуу жана жалпылоо үчүн категория теориясынын ыкмасын колдонуу сунушталат

Теңдемелер категориясы *Equa* [4] деп белгиленет.

Аныктама 1. *Ob(Equa)* - {бош эмес X, Y көптүктөрү, X көптүгүндө $P(x)$ предикаты, $B{:}X\to Y$ өзгөртүп түзүүсү} топтому.

$\{X, Y, P, B\}$ теңдемесинин чечими $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(y=B(x))$ болгондой $y\in Y$ болот.

Ошондой эле, эгерде B теңдеш өзгөртүп түзүү болсо, анда биз *“P(x)”*. теңдемесинин чечүү маселесин гана алабыз.

Mor(Equa) – $\{X, Y, P, B\}$ көптүктөрүнүн чечимдери (же алардын жоктугу) сакталгандай өзгөртүүлөр.

Морфизмдердин мисалдары:

1- М и с а л. Баштапкы көптүктүн өзгөртүлүшү. X көптүгү $\{x\in X{:}\ P(x)\}= \{x\in X_1{:}\ P(x)\}$ боло тургандай X_1 көптүгү менен алмаштырылат.

2- М и с а л. Чечимдерди өзгөртүү. $\varphi{:}X\to X$ биективдүү функциясы киргизилди. $\{X, Y, P, B\}$ маселеси *“*$P(\varphi(z)), z\in X$*”* теңдемесин чыгарууга жана $y=B(\varphi(z))$ эсептөөгө өзгөртүлөт.

3- М и с а л. Теңдеменин өзгөртүлүшү. P_1 предикаты же $\{x\in X{:}\ P(x)\}= \{x\in X{:}\ P_1(x)\}$, же (жалпы, бирок татаалыраак ыкма) $\{x\in X{:}\ P(x)\} \subset \{x\in X{:}\ P_1(x)\}$. катары киргизилет. Экинчи учурда, B өзгөртүп түзүүлөрү чечимдерин $\{x\in X{:}\ P_1(x)\}\backslash \{x\in X{:}\ P(x)\}$ топтомунан алып салуу үчүн өзгөртүлүшү керек.

Equa категориясынын категориячалары.

Equa-Func функциялары үчүн теңдемелер категориясы.

Аныктама 2. *Ob(Equa-Func)* - {$X \in Ob(Func)$, $Y \in Ob(Func)$ X боюнча $P(x)$ предикаты, $B{:}X\to Y$ өзгөртүп түзүүлөрү} топтому.

Mor(Equa-Func) - өзгөртүүлөр, анын ичинде, 1-, 2-, 3- жалпы мисалдардан тышкары, төмөнкүлөр:

4- М и с а л. Аргументтин өзгөртүлүшү. $x(t)$ функциясы үчүн жаңы Z функцияларынын мейкиндигинен 1-1 $t=\psi(s)$ алмаштыруусу киргизилди, анда $z(s)=x(\psi(s))$ менен белгиленет жана, $\{x\in X{:}\ P(x)\}= \{z\in Z{:}\ P_1(z)\}$ болгондой P_1 предикаты киргизилет.

Үзгүлтүксүз жалпыланган предикаттары менен теңдемелер категориясы.

Аныктама 3. *Ob(Equa-Top)* - {топологиялык *X, Y* мейкиндиктери, функция - бири белгиленген "чындык" болгон чектүү маанилер жыйындысын алуучу *X* мейкиндигиндеги жалпыланган предикат *P(x), X*те үзгүлтүксүз өтүүдө *P(x)* функциясы маанилерди коңшуларга гана өзгөртөт (мындай функцияны жалпыланган-үзгүлтүксүз деп атоо сунуш кылынат) деген шартта $B{:}X\to Y$ өзгөртүп түзүүсү} топтому. Бул [5]те колдонулган.

Параметрлери бар теңдемелер үчүн сунушталат

Аныктама 4. *Ob(Equa-Par)* - {бош эмес *X, F, Y* көптүктөрү, $X\times F$ көптүгүндө $P(x, f)$ предикаты, $B{:}X\to Y$ өзгөртүп түзүүсү} топтому.

{*X, F, Y, P, B*} теңдемесинин чечими деп, каалаган $f\in F$ үчүн $(\exists x\in X)(P(x, f)\wedge(y=B(x))$ болгондой $y(f)\in Y$ ди атайбыз.

Ошондой эле, эгерде В теңдеш өзгөртүп түзүү болсо, анда *“P(x,y)”* теңдемесинин чечүү маселесин гана алабыз.

*Mor(Equa-Par) – {X, Y, P, B} (F*тен тышкары*)* көптүктөрүнүн чечимдери (же алардын жоктугу) сакталгандай өзгөртүүлөр.

Параметрлери бар корректтүү теңдемелер үчүн сунушталат

Аныктама 5. *Ob(Equa-Par-Top)* - {*X, F, Y* топологиялык мейкиндиктер, $X\times F$ те $P(x,f)$ предикаты, $B{:}X\to Y$ үзгүлтүксүз өзгөртүп түзүүсү} топтому. Бул учурда 1) $(\forall f\in F)(\exists! y\in Y)(\exists x\in X)\ (P(x,f)\wedge(y=B(x))$;

2) y f тен үзгүлтүксүз көз каранды.

Mor(Equa-Par-Top) – 1)- жана 2- касиеттерин сактаган өзгөртүп түзүүлөр.

Ошондой эле, эгерде предикат $P(x,f)$ =*”A(x)=f”* түрүндө жазылса, мында *A* кандайдыр бир оператор болсо, анда биз “Адамар боюнча корректтүүлүктү” алабыз.

3. Корутунду

Бул макалада келтирилген аныктамалардан математикада кездешүүчү ар кандай типтеги теңдемелерди жалпы теңдемелер категориясына киргизүүгө боло тургандыгы көрүнүп турат.

Адабияттар

1. Медведев М.Я. Полусопряженные функторы и категории алгебр над n-тройками: Автореферат дисс. … к. ф.-м.н. (01.01.04) / М.Я. Медведев. - Новосибирск, 1973. - 17 с.
2. Борубаев А.А. О категорных характеристиках компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп / А.А. Борубаев // Известия Академии наук, вып. 4, 2007. - С. 1-6.
3. Rosický J. Equational categories / J.Rosický // Cachiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, vol. 22, no. 1, 1981. - P.85-95.
4. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж.К., Маматжан уулу Э. Элементы категории уравнений / Г.М. Кененбаева, Л.Аскар кызы, Ж.К. Бейшебаева, Э. Маматжан уулу // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. – С. 88-95.
5. Кененбаева Г.М. Применение доказательных вычислений к поиску областей, удовлетворяющих заданным свойствам / Г.М. Кененбаева. – Автореферат дисс. … к.ф.-м.н., 05.13.16. – Новосибирск, 1991. – 16 с.

УДК 517.968

КОРРЕКТТҮҮ БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КЛАССТАРЫ

Кененбаева Гулай Мекишовна, ф.-м.и.д., профессор
Аскар кызы Лира, ф.-м.и.к.
Бейшебаева Жыпаркүл Качкыновна, ага окутуучу
Саркелова Жылдыз Жанышевна, ага окутуучу
lira130780@mail.ru
Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук университети
Бишкек, Кыргызстан

***Аннотация**.Энтропия түшүнүгүн колдонуунун негизинде биринчи түрдөгү интегралдык теңдеменин корректтүүлүгүнүн мүмкүнчүлүгү чексиз гана аймактарда көрсөтүлдү.Аналитикалуулук эффектисин пайдалануунун негизинде бир, эки жана көп өзгөрмөлүү функциялар үчүн биринчи түрдөгү,туура келүүчү функциялар мейкиндиктеринде корректтүү,сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин кең классы тургузулган. Алардын туруктуу чыгарылышы үчүн жакындаштырылган ыкмалар тургузулган. Теңдемелерди өзгөртүп түзүү ыкмасы,чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү ыкмасы, аргументти өзгөртүп түзүү ыкмасы, аналитикалык функциялардын ыкмасы, интегралдык теңдемелер теориясы, сызыктуу операторлор теориясы,чексиз катарлар, категориялар теориясы, анын объектилери жана морфизмдери колдонулат.*

***Ачкыч сөздөр:**биринчи түрдөгү интегралдык теңдеме, аналитикалык функция, корректтүүлүк, теңдемени өзгөртүү.*

КЛАССЫ КОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Кененбаева Гулай Мекишовна, д.ф.-м.н., профессор
Аскар кызы Лира, ф.-м.и.к.
Бейшебаева Жыпаркүл Качкыновна, старший преподаватель
Саркелова Жылдыз Жанышевна, старший преподаватель
lira130780@mail.ru
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына
Бишкек, Кыргызстан

***Аннотация**. На основе использования понятия энтропии показана возможность корректности интегральных уравнений первого рода только в неограниченных областях. На основе использования эффекта аналитичности построены широкие классы корректных линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода с одной, двумя и многими переменными в соответствующих пространствах функций. Построены приближенные методы для их устойчивого решения. Применяются метод преобразования уравнений, метод преобразования решений, метод преобразования аргумента, методы аналитических функций, теории интегральных уравнений, теория линейных операторов, бесконечные ряды, теория категорий, ее объекты и морфизмы.*

***Ключевые слова:** интегральное уравнение первого рода, аналитическая функция, корректность, преобразование уравнения.*

CLASSES OF INTEGRAL EQUATIONSOF THE FIRST KIND

Kenenbaeva Gulay Mekishovna, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
Askar kyzy Lira, Candidate of Ph. & Math. Sc
Beishebaeva Zhyparkul, senior lecturer
Sarkelova Zhyldyz, senior lecturer

lira130780@mail.ru
Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *On the base of notion of entropy, there is demonstrated possibility of correctness of integral equations of the first kind only on unbounded domains. On the base of applying the effect of analyticity new classes of correct linear and non-linear integral equations of the first kind with one, two and many variables in corresponding spaces are constructed. Approximate methods for their stable solving are developed. Methods of transformation of equations, of transformation of solutions, of transformation of argument, of analytical functions, of the theory of integral equations, the theory of linear operators, infinite series, the theory of categories, its objects and morphisms are applied.*
Keywords*: integral equation of the first kind, analytical function, correctness, transformation of equation.*

1. Киришүү

1920-жылдары Ж. Адамар кеңири жайылган типтеги математикалык маселелердин корректтүүлүгүнө жалпы аныктама берген (биз метрикалык мейкиндикти топологиялык мейкиндикке алмаштыруу менен беребиз): төмөнкү түрдөгү оператордук теңдемеден белгисиз z элементин табуу керек

$$Az=f, \tag{1}$$

Мында A – Z топологиялык мейкиндигинен U топологиялык мейкиндигине аракеттенүүчү үзгүлтүксүз оператор, $f\in U$ – берилген элемент: 1) A оператору биективдүү; 2) A^{-1} тескери оператору үзгүлтүксүз.

Андан ары A үзгүлтүксүз ядросу бар интегралдык оператор болгондо көп учурларда маселе Адамар боюнча корректтүү эмес экендиги белгилүү болду. Мындай теңдемелердин маанилүүлүгүнөн улам корректтүүлүктүн жетишээрлик шарттары жөнүндө көйгөйлөр келип чыккан.

Эскертүү. Чыгарылыштын (1) бар экендиги алдын ала болжолдонгон «Тихонов боюнча корректтүүлүктү» биз карабайбыз.

Көптөгөн эмгектерде төмөнкү теореманы далилдөө усулу өнүктүрүлүп жана жалпыланып жатат.

Теорема 1. Эгерде *M(x,s)* жана *f(x)* жылмакай функциялар болсо, (кошумча шарттар аткарылса) $f(0)=0$ жана $M(x,x)\neq 0$, анда биринчи түрдөгү Вольтер тибиндеги теңдеме

$$\int_0^x M(x,s)\,u(s)ds = f(x) \tag{2}$$

үзгүлтүксүз чыгарылышка ээ.

Мындай теоремалар дифференцирлөө жолу менен далилденет, бул аларды экинчи түрдөгү Вольтер тибиндеги эквиваленттүү теңдемелерге келтирет, мисалы.

$$M(x,x)u(x)+\int_0^x \partial M(x,s).\partial x\, u(s)ds = f'(x). \tag{3}$$

Конволюция түрүндөгү теңдемелер үчүн белгилүү

Теорема 2 [1]. Эгерде берилген $f(x)\in L_2(R)$, $K(x)\in L_1$ (R функциялары үчүн Фурье өзгөртүүлөрү бар болсо жана алар $\Phi f(\cdot)(\xi)\in L_2(R)$, $\Phi K(\cdot)(\xi)\in L_2(R)$ шарттарын канааттандырса $(\Phi K(\cdot)(\xi))^{-1}\Phi f(\cdot)(\xi)\in L_2(R))$ анда (1) теңдеме $A(x, u(\cdot))=\int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)\,u(s)ds$ менен төмөнкү түрдө жазылган чыгарылышка ээ

$$u(x)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Phi K(\cdot)(\xi)\right)^{-1}\Phi f(\cdot)(\xi)e^{i\xi x}d\xi\in L_2(R).$$

Бул учурда интегралдоонун аймагы чектелбегендиктен, жеке учурлар үчүн бар болуу теоремасынын аналитикалык эффектисинин негизинде [2], [3], [4] алдык. Бул макалада бул маселе кененирээк талкууланат.

Биринчи түрдөгү интегралдык теңдеменин корректтүүлүгүн кандай учурларда алууга болорун карап көрөлү. Эгерде динамикалык система – "z" баштапкы шарты менен баштапкы маселенин чыгарылышыдифференциалдык теңдеме үчүн жылмакайлоочу болсо, анда муну энтропиянын өсүшү катары кароого болот. Демек, эгерде анын чыгарылышы$z=A(\varphi)$, түрүндө жазылса, мында A толук үзгүлтүксүз интегралдык оператор болсо, анда (1) түрүндөгү тескери маселени алабыз.

Толук үзгүлтүксүз операторго тескери оператор сызыктуу абалда чектелбей турганы белгилүү, бул үзгүлтүксүздүккө эквиваленттүү. Бул жерден биз гипотеза алабыз: эгерде чексиз көптүктөгү объектти издөө маселеси энтропияга туура келген чоңдуктун көбөйүшү жана бош энергиянын чектелген саны менен процесстин математикалык модели болсо, анда тескери маселе корректтүү эмес болот.

Ошондуктан, чектелбеген аймактарда корректтүү биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерди издөө зарыл.

2-бөлүмдө биздин катышуубуз менен иштелип чыккан теңдемелердин категориясын түзүүберилген.

3-бөлүм корректтүү биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерди камтыйт.

4-бөлүмдө –корректтүү биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер берилген.

2. Equa теңдемелеринин категориясы

Ob(Equa) - топтомдор$\{X, Y \in Ob(Set), X$те предикат $P(x), B: X \to Y$өзгөртүүлөр$\{X, Y, P, B\}$ теңдемесинин чыгарылышы$y \in Y$, $(\exists x \in X)(P(x) \wedge (y=B(x)))$. *Mor(Equa)* - бул$\{X, Y, P, B\}$топтомдорунун өзгөртүүлөрү, бул жерде чыгарылыш сакталат.

*Equa*категориясынын камтылган категориясы*:*

- *Equa-Func*функциялары үчүн теңдемелердин категориясы*:Ob(Equa-Func)* - $\{X \in Ob(Func), Y \in Ob(Func), X$те предикат $P(x), B: X \to Y$өзгөртүүлөр$\}$ топтомдору. *Mor(Equa-Func)* –чыгарылыштарды сактоочу өзгөртүүлөр, анын ичинде аргументти өзгөртүүлөр;

- үзгүлтүксүз жалпыланган предикаттары бар Equa-Fun функциялары үчүн теңдемелердин категориясы Ob(Equa-Top) - {X, Y $\in$ Ob(Top), Xте P(x) функциясы маанилердин чектүү жыйындысын алат, алардын бири "чындык", B:X$\to$Y өзгөртүүсү} топтомдору, Xге үзгүлтүксүз өтүү учурунда P(x) функциясы маанилерин чектеш маанилерге гана өзгөртөт деген шартта.

3. Биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер

$$\partial u(t,x)/\partial t = a\Delta u(t,x), (t,x) \in \boldsymbol{R}_{++} \times \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}},\ a > 0 \tag{4}$$

түрүндөгү

$$u(0,x) = \varphi(x), x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{5}$$

баштапкы шарты менен $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ көптүгүндөгү жылуулук өткөрүмдүүлүктүн теңдемесин чыгаруу үчүн бул жерде $\varphi(z)$ – аналитикалык функцияжана аргументтин чыныгы маанилеринде чыныгы маанилерди алат,

T>0 үчүн формула белгилүү

$$u(T,x) = exp(aT\Delta)\varphi(x) = \left(2\sqrt{Ta\pi}\right)^{-n} \int_{\boldsymbol{R}^n} exp(-|x-\xi|^2/(4aT))\varphi(\xi)d\xi \tag{6}$$

Теорема2. Эгер функция $f(x): \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$–чыныгы коэффициенттери менен өзгөрмөлөрү боюнча экспоненциалдык типтегибүтүн аналитикалыкфункция болсо, анда

$$J_n(x; w(s): s) := \int_{\boldsymbol{R}^n} exp(-b|x-\xi|^2)w(\xi)d\xi = f(x). \tag{7}$$

биринчи түрдөгү интегралдык теңдемесинин ушундай эле бүтүн аналитикалык чыгарылышы $w(x) = J_n{}^{-1}(x; f(s): s) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left(-\frac{1}{4b}\Delta\right) f(x)$жашайт.

Ал $f(x)$ боюнча туруктуу; эгер$f(x)>0$ жана $(\forall k \in \mathbf{N})(|f^{(2k)}(x)| \leq 2bk\, |f^{(2k-2)}(x)|)$ болсо,анда бул чыгарылыш оң болот.

4. Биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер

2-теореманын баардык шарттары канааттандырылыса, анда

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} exp(-b|x-\xi|^2)v^{2k}(\xi)d\xi = f(x). \tag{8}$$

теңдеме чыгарылышка ээ.

Чыгарылышты өзгөртүү:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\xi,w(\xi))d\xi = f(x) \tag{9}$$

теңдемесинде *w(x)= W(x, u(x)) ордуна коюсу аткарылат*, жана $K_1(x,\xi,u) = K\big(x,\xi,W(\xi,u)\big)$ белгилөөсү киргизилет, анда эгер (9) – корректтүү болсо корректтүү болгон

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x,\xi,u(\xi))d\xi = f(x), \tag{10}$$

интегралдык теңдемеси алынат.

Аргументтерди өзгөртүү. (9) теңдемесинде $\xi = H(\eta)$ ордуна коюусун колдонобуз, бул жерде $H(\eta)$ аналитикалык функция, $x \in R$ болгондо чыныгы маанилерди алат жана өсүүчү болот, $H(R)=R$. Жаңы белгисиз $u(\eta) = w(H(\eta))$ функциясын жана $K_3(x,\eta,u) = K(x,H(\eta),u)H'(\eta)$ киргизебиз.

Анда эгер (9) – корректтүү болсо корректтүү болгон

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_3(x,\eta,u(\eta))d\eta = f(x), \tag{11}$$

теңдемесин алабыз. Ошондой эле жаңы теңдемелер $x=\varphi(z)$түрүндөгү алмашырууларда да алынат.

Интегралдык өзөктөрдүн композициясы. Эгер

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\xi,w(\xi))d\xi = f(x), \int_{-\infty}^{\infty} M(x,\xi,w(\xi))d\xi = f(x)$$

интегралдык теңдемелери кайсы бир аналитикалык функциялардын классында корректтүү болсо, анда

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\left(x,\xi,\int_{-\infty}^{\infty} M(\xi,\eta,w(\eta))d\eta\right)d\xi = f(x)$$

теңдемеси дагы аналитикалык функциялардын ушул классында корректтүү болот.

Сумма түрүндө бериле турган интегралдуу өзөгү бар теңдемелердин корректтүүлүгү. Эгер $|\lambda|$ жетишээрлик кичине болсо, анда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\big(exp(-b_1(x-\xi)^2) + \lambda exp(-b_2(x-\xi)^2)\big)w(\xi)d\xi = f(x) \tag{12}$$

теңдемеси болот.

5. Корутунду

Бул макаланын натыйжалары корректтүү биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелердин кеңири класстары бар экенин көрсөтүп турат.

Адабияттар

1. [Электрондук ресурс] / http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/ie/ie0322.pdf
2. Аскар кызы Л. Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой части / Г.М. Кененбаева, Л. Аскар кызы // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, ИВМ и МФ СО РАН. – Новосибирск: Абвей, 2015. – С. 321-325.
3. Аскар кызы Л. Условия существования положительных решений линейных интегральных уравнений первого рода / Л. Аскар кызы // Вестник ЖАГУ, 2016. – № 1(32). – С. 24-29.
4. Аскар кызы Л. Корректность решения двумерного интегрального уравнения первого рода с аналитическими функциями [Текст] / Л. Аскар кызы // Проблемы современной науки и образования. – № 21(63). – Иваново: Олимп, 2016. – С. 6-9.

УДК 517.928.2

ТРЕХЗОННАЯ БИСИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА КОШИ

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, д.ф.-м.н., профессор
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д.ф.-м.н., профессор
dtursunov@oshsu.kg
Омаралиева Гулбайра Абдималиковна, ст. преп.
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *в статье исследуется задача Коши для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Рассматриваемая задача Коши имеет три особенности: сингулярное присутствие малого параметра; решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка, а задача Коши имеет двойной пограничный слой. Сингулярное присутствие малого параметра порождает классический пограничный слой, а особая точка соответствующего невозмущенного уравнения порождает второй пограничный слой. В результате у нас получится двойной пограничный слой. Приведено необходимое и достаточное условие появления промежуточного пограничного слоя для рассматриваемого класса задач Коши. Для простоты и понимания оригинального метода исследования и понятие двойного пограничного слоя приведем подробное исследование простейшего примера*.

Ключевые слова*: бипограничный слои, задача Коши, особая точка, бисингулярное возмущение, обыкновенное дифференциальное уравнение.*

ҮЧ ЗОНАЛУУ БИСИНГУЛЯРДЫК КОШИНИН МАСЕЛЕСИ

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, ф.-м.и.д., профессор
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, ф.-м.и.д., профессор
dtursunov@oshsu.kg
Омаралиева Гулбайра Абдималиковна, ага окутуучу
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *макалада бисингулярдык козголгон биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Кошинин маселеси изилденет. Каралып жаткан Кошинин маселеси үч өзгөчөлүккө ээ, алар: кичине параметрдин сингулярдуу катышуусу; тиешелүү козголбогон теңдеменин чыгарылышы биринчи тартиптеги уюлга ээ болуусу жана Кошинин маселесинин кош чектик катмарга ээ болуусу. Кичине параметрдин сингулярдуу катышуусу классикалык чектик катмарды пайда кылат, ал эми тиешелүү козголбогон теңдеменин өзгөчө чекити экинчи чектик катмарды пайда кылат. Натыйжада биз кош чектик катмарга ээ болобуз. Макалада каралган класстагы Кошинин маселеси үчүн аралык чектик катмардын пайда болушунун зарыл жана жетиштүү шарты келтирилген. Оригиналдуу изилдөө ыкмасы жана кош чектик катмар түшүнүгү түшүнүктүү болушу үчүн эң жөнөкөй мисалды кеңири толук изилдөөнү келтирдик.*

Ачкыч сөздөр: *кош чектик катмар, Кошинин маселеси, өзгөчө чекит, бисингулярдык козголуу, кадимки дифференциалдык теңдеме.*

THREE-ZONE BISINGULARLY CAUCHY PROBLEM

Kozhobekov Kudaiberdi Gaparalievich, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
dtursunov@oshsu.kg

Omaralieva Gulbayra Abdimalikovna, teacher
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The paper investigates the Cauchy problem for a bisingularly perturbed linear inhomogeneous ordinary differential equation of the first order. The Cauchy problem under consideration has three features: the singular presence of a small parameter; the solution of the corresponding unperturbed equation has a first-order pole, and the Cauchy problem has a double boundary layer. The singular presence of a small parameter generates the classical boundary layer, and the singular point of the corresponding unperturbed equation generates the second boundary layer. As a result, we get a double boundary layer. A necessary and sufficient condition for the appearance of an intermediate boundary layer for the considered class of Cauchy problems is given. For simplicity and understanding of the original research method and the concept of a double boundary layer, we present a detailed study of the simplest example.*

Keywords: biboundary layers, Cauchy problem, singular point, bisingular perturbation, ordinary differential equation.

Постановка задачи. Исследуем задачу Коши

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(x^\gamma q(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ \ x\in[0,T], \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0)=a, \tag{2}$$

где $n, m, \ \gamma\in\mathbf{N}$, a – *const*, $f(0)\neq 0$, $f,q,p\in C^\infty[0,T],\ 0<\alpha_0<q(x),\ \ 0<\alpha_0<p(x):x\in[0,T]$, γ – кратность особой точки x=0.

Решение начальной задачи существует, единственно. Требуется определить при каких значениях параметров n, γ и m появляется промежуточный пограничный слой в начальной задачи (1)-(2) на отрезке $[0,T]$ [1]-[12].

Докажем следующую теорему.

Теорема. Для появления промежуточного (дополнительного) пограничного слоя в начальной задаче (1)-(2) необходимо и достаточно выполнения условия $n>m+\dfrac{m}{\gamma}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы, что в пограничном слое имеется два характерных предела, кроме внешнего, которые будут включать в себя два внутренних разложения.

Пусть $x=\varepsilon^\alpha t$, α>0, тогда $dx=\varepsilon^\alpha dt$ и уравнение (1) перепишется в виде:

$$\varepsilon^{n-\alpha}\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+(\varepsilon^{\alpha\gamma}t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)+\varepsilon^m p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t) \tag{3}$$

Уравнивая порядков поведения слагаемых по малому параметру двух любых членов имеем соответствующие характерные пределы, возможны следующие три случаи:

1) $n-\alpha=\alpha\gamma\Rightarrow\alpha=\dfrac{n}{\gamma+1}$; 2) $n-\alpha=m\ \Rightarrow\alpha=n-m$; 3) $\alpha j=m\Rightarrow\alpha=\dfrac{m}{\gamma}$.

Достаточность. В первом случае

$$\varepsilon^{n\frac{\gamma}{\gamma+1}}\left(\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^m p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t), \tag{4}$$

пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-m}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (4) примет вид:

$$\varepsilon^{n\frac{\gamma}{\gamma+1}-m}\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию теоремы $n\dfrac{\gamma}{\gamma+1}>m$, поэтому этот случай исключается.

Во втором случае

$$\varepsilon^m\left(\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^{\gamma(n-m)}t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t), \qquad (5)$$

пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-m}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (5) примет вид:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^{\gamma n-m(\gamma+1)}p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию теоремы $n\gamma-m(\gamma+1)>0$, поэтому этот случай требует исследования.

В третьем случае

$$\varepsilon^{n-\frac{m}{\gamma}}\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+\varepsilon^m(t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)+p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t), \qquad (6)$$

пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-m}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (6) примет вид:

$$\varepsilon^{n-\frac{\gamma+1}{\gamma}m}\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+(t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию теоремы $n-\frac{\gamma+1}{\gamma}m>0$, поэтому этот случай требует исследования.

Мы доказали, что в пограничном слое имеется два характерных предела, кроме внешнего, которые будут включать в себя два внутренних разложения:

$$1)\ x=\varepsilon^{n-m}\tau;\qquad 2)\ x=\varepsilon^{\frac{m}{\gamma}}t.$$

Так как $n>m+\frac{m}{\gamma}$, поэтому $n-m>\frac{m}{\gamma}$.

Изменение масштаба $\tau=\frac{x}{\varepsilon^{n-m}}$, соответствующее $\alpha=n-m$, описывает подслой (пограничный слой) вблизи начальной точки *x*=0, которую будем называть левой зоной. А изменение масштаба $t=\frac{x}{\varepsilon^{m/\gamma}}$, соответствующее $\alpha=\frac{m}{\gamma}$, определяет другую область, лежащую между левой зоной и областью внешнего разложения, т.е. правой зоной называют средней зоной.

В задачах вязко-невязких взаимодействий эти зоны обычно называются нижним, средним и верхним подслоем соответственно [37].

Необходимость. Покажем, что в случае $n\le m+\frac{m}{\gamma}$ в окрестности особой точки имеется только один характерный предел.

а) При $n=m+\frac{m}{\gamma}$ во всех трех случаях ($\alpha=n/(\gamma+1)$; $\alpha=n-m$; $\alpha=m/\gamma$) получаем только один характерный предел:

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t),\ \text{где}\ \psi_\varepsilon(t)=\varepsilon^m y_\varepsilon(t).$$

б) При $n<m+\frac{m}{\gamma}$:

в первом случае пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-n\frac{\gamma}{\gamma+1}}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (4) примет вид:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^{m-n\frac{\gamma}{\gamma+1}}p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию $n<m+\dfrac{m}{\gamma}$, поэтому – это один из характерных пределов.

Во втором случае, пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-\gamma(n-m)}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (5) примет вид:

$$\varepsilon^{m(\gamma+1)-\gamma n}\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию $n<m+\dfrac{m}{\gamma}$, поэтому этот случай не рассматривается.

В третьем случае, пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{\frac{m}{\gamma}-n}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (6) примет вид:

$$\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+\varepsilon^{\frac{\gamma+1}{\gamma}m-n}(t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)+p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию $n<m+\dfrac{m}{\gamma}$, поэтому этот случай тоже не рассматривается.

В итоге получается только один характерный предел:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^{m-n\frac{\gamma}{\gamma+1}}p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$. *Теорема доказана.*

Литература

1. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач [Текст] / А.М. Ильин. – М.: Наука, 1989. – 334 с.

2. Алымкулов К., Турсунов Д. А. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач. *Изв. вузов. Математика*, 12, 2016, 3–11.

3. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота. Тр. ИММ УрО РАН, 22, № 1, 2016, 271–281.

4. Tursunov D. A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 38:3, ISSN 19950802. Maik Nauka-Interperiodica Publishing (2017), 542–546.

5. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. *Изв. вузов. Математика*, 3, 2018, 70–78.

6. Кожобеков К. Г., Турсунов Д. А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 29:3 (2019), 332–340.

7. Tursunov D. A., Kozhobekov K. G., Bekmurza uulu Ybadylla Asymptotics of solutions of boundary value problems for the equation εy′′+xp(x)y′−q(x)y=f. *Eurasian Math. J.*, 13:3 (2022), 82–91.

8. Омаралиева Г. А., Турсунов Д. А. Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка. Тр. ИММ УрО РАН, 28, № 2, 2022, – С. 193–200.

9. Омаралиева Г. А., Турсунов Д. А. Асимптотика решения двух зонной двухточечной краевой задачи. Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ., 13:2 (2021), 46–52.

10. Омаралиева Г. А., Турсунов Д. А. Сингулярно возмущенная задача с двойным пограничным слоем. Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. № 1. С. 102-109.

11. Kozhobekov K.G., Tursunov D.A., Omaralieva G.A. Asymptotics of the Solution of Bisingular Boundary Value Problems with a Biboundary Layer // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 11, P. 166–172.

12. Омаралиева Г. А. Достаточное условие существования дополнительной зоны в сингулярно возмущенных краевых задачах второго порядка // Бюллетень науки и практики. – 2023. – Т. 9. – № 2. – С. 10-16.

УДК 517.97

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОНТАКТНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

[1,2]Кулжанов Уткир Нематович, PhD, доцент,
uquljonov@bk.ru
[3]Исмоилов Голибжон Исмоилович, докторанты
golibjon.ismoilov.tdtu@gmail.com
[1,3]Самаркандский государственный университет имена Шарофа Рашидова,
[2]Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического университета
Самарканд, Узбекистан

Аннотация: *В работе рассмотрен оператор Шредингера, соответствующей системе одной частицы во внешнем силовом поле (с контактным потенциалом) на одномерной решетке. Найдено собственное значение и соответствующий собственный вектор этого оператора.*

Ключевые слова: *гамильтониан, собственное значение, собственная функция, унитарные эквивалентные операторы.*

SPECTRAL PROPERTIES OF A ONE-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATOR WITH CONTACT POTENTIAL

[1,2]Kuljanov Utkir Nematovich, PhD, docent,
uquljonov@bk.ru
[3]Ismoilov Golibjon Ismoilovich, Doctorant
golibjon.ismoilov.tdtu@gmail.com
[1,3]Samarkand State University named after Sharof Rashidov,
[2]Samarkand Branch of Tashkent State University of Economics,
Samarkand, Uzbekistan

Abstract: The Schrödinger operator associated to a system of one particle in an external force field (with a contact potential) on a one-dimensional lattice is considered. The eigenvalue and the associated eigenfunction of this operator are found.

Keywords: hamiltonian, eigenvalues, eigenfuncion, unitary equivalence operators.

1 Введение. Важнейшей физической величиной в любой квантово-механической системе является энергия. Оператор, соответствующий этой наблюдаемой, обозначается через H. Оператор энергии H (оператор энергии H часто называется гамильтонианом, в нерелятивистской квантовой механике он будет также называться оператором Шредингера) определяет закон эволюции системы. Уравнение Шредингера - это основное уравнение квантовой теории. Поэтому исследование оператора Шредингера играет важную роль в современной математике.

В течение последних восмидесяти лет наиболее популярным и традиционным обьектом для математической физики служит нерелятивистская квантовая механика, точнее - оператор Шредингера. Более того, сам облик современной математической физики в значительной мере сформировался при изучении этого оператора. По сути дела вся атомная и молекулярная, и значительная часть ядерной физики, физики плазмы и твердого тела состоит в изучении оператора Шредингера [1,2].

В моделях физики твердого тела [3,4], а также в решетчатой квантовой теории поля [3] рассматриваются дискретные операторы, являющиеся решетчатыми аналогами оператора Шредингера на евклидовом пространстве. Кинематика квантовых частиц на решетке довольно экзотическая [5].

Дискретные операторы Шредингера, соответствующие гамильтонианам систем одной и двух квантовых частиц на целочисленной решетке изучены в работах [6-9]. Изучению оператора Шредингера посвящено огромное число работ, наиболее полный обзор которых содержится в «энциклопедии» методов современной математической физики [10].

В настоящей работе рассмотрен оператор Шредингера $\widehat{\mathrm{H}}_{\mu}$, соответствующей системе одной частицы во внешнем силовом поле $\widehat{\mathrm{V}}_{\mu}$ (с контактным потенциалом) на одномерной решетке. Найдено собственное значение и соответствующий собственный вектор этого оператора.

2. Постановка задачи. Через $\mathbb{Z}$ обозначается одномерная решетка, $\ell_2(\mathbb{Z})$ - гильбертово пространство квадратично - суммируемых функций, определённых на $\mathbb{Z}$.

Оператор энергии $\widehat{\mathrm{H}}_0$ одной частицы на решетке ассоциируется со следующим оператором в гильбертовом пространстве $\ell_2(\mathbb{Z})$:

$$\left(\widehat{\mathrm{H}}_0\hat{\mathrm{f}}\right)(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{s}\in\mathbb{Z}} \hat{\varepsilon}(\mathrm{s}-\mathrm{x})\,\hat{\mathrm{f}}(\mathrm{s}), \qquad \hat{\mathrm{f}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

где

$$\hat{\varepsilon}(\mathrm{s}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \mathrm{s}=0 \\ \dfrac{1}{4}, & \mathrm{s}=\pm 2 \\ 0, & \mathrm{s}\in\mathbb{Z}\backslash\{0,\pm 2\} \end{cases}.$$

Легко показать, что $\widehat{\mathrm{H}}_0$ – самосопряженный оператор и его спектр чисто абсолютно непрерывный, и $\sigma\left(\widehat{\mathrm{H}}_0\right) = [0;1]$. Доказательство последнего факта вытекает из унитарной эквивалентности $\widehat{\mathrm{H}}_0$ к H_0 - оператору умножения на функцию

$$\varepsilon(\mathrm{p}) = \cos^2 \mathrm{p}$$

в гильбертовом пространстве $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})$.

Здесь $\mathbb{T} = (-\pi;\pi]$ означает одномерной тор, в котором всюду операции сложения и умножения на действительное число элементов множества $(-\pi;\pi] \subset \mathbb{R}$ понимается как операции на $\mathbb{R}$ по модулю $2\pi\mathbb{Z}$ и $\mathrm{L}_2(\mathbb{T}) -$ гильбертово пространство квадратично - интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}$.

Эта унитарная эквивалентность осуществляется с помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}\colon \mathrm{L}_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$:

$$(\mathcal{F}\mathrm{f})(\mathrm{x}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{x}\mathrm{q}} \mathrm{f}(\mathrm{q})\mathrm{dq}\,, \qquad \mathrm{x}\in\mathbb{Z}, \qquad \mathrm{f}\in \mathrm{L}_2(\mathbb{T}).$$

Заметим, что спектр оператора H_0 совпадает с отрезком $[0;1]$, т.е. $\sigma(\mathrm{H}_0) = [0;1]$.

Полный гамильтониан $\widehat{\mathrm{H}}_{\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ описывающий движение одной квантовой частицы на одномерной решетке во внешнем поле $\widehat{\mathrm{V}}_{\mu}$, определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\widehat{\mathrm{H}}_0$:

$$\widehat{\mathrm{H}}_{\mu}, = \widehat{\mathrm{H}}_0 - \widehat{\mathrm{V}}_{\mu}.$$

Здесь $\widehat{\mathrm{V}}_{\mu} -$ оператор умножения на вещественную функцию $\hat{\mathrm{v}}_{\mu}(\mathrm{s})$:

$$\hat{\mathrm{v}}_{\mu}(\mathrm{s}) = \begin{cases} \mu, & \mathrm{s}=0 \\ 0, & \mathrm{s}\neq 0 \end{cases}, \qquad \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Теперь переходим к импульсному представлению оператора $\hat{V}_\mu$.

Импульсное представление оператора $\hat{V}_\mu$ имеет вид:

$$(V_\mu f)(p) = \frac{\mu}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(q)\,dq, \qquad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Отметим, что V_μ оператор ранга один, следовательно оператор V_μ есть компактный. Кроме того, V_μ положительный оператор, если $\mu > 0$, и отрицательный, если $\mu < 0$.

Через H_μ обозначим импульсное представление оператора $\hat{H}_\mu$:

$$H_\mu = H_0 - V_\mu. \tag{1}$$

Поэтому согласно теореме Вейля (о существенном спектре) непрерывный спектр оператора H_μ совпадает со спектром $\sigma(H_0) = [0;1]$ оператора H_0, т.е.

$$\sigma_{cont}(H_\mu) = \sigma(H_0) = [0;1].$$

3 Основной результат. Собственное значение и собственная функция оператора H_μ.

Из выражения (1) и положительности оператор H_μ при $\mu > 0$, и отрицательности при $\mu < 0$, следует существует собственного значение оператора H_μ, если $\mu > 0$, то это собственное значение может принадлежат интервалу $(-\infty; 0)$, а если $\mu < 0$, то оно может принадлежат интервалу $(1;\ \infty)$.

Теперь сформулируем основной результат этой работы.

Теорема. a) если $\mu > 0$, то число $z_\mu^- = \frac{1-\sqrt{1+4\mu^2}}{2} < 0$ есть простое собственное значение оператора H_μ и соответствующая собственная функция с точностью до постоянного множителя имеет следующий вид:

$$f(p) = \frac{\mu}{\cos^2 p - z_\mu^-}.$$

b) если $\mu < 0$, то число $z_\mu^+ = \frac{1+\sqrt{1+4\mu^2}}{2} > 1$ есть простое собственное значение оператора H_μ и соответствующая собственная функция с точностью до постоянного множителя имеет следующий вид:

$$f(p) = \frac{\mu}{\cos^2 p - z_\mu^+}.$$

Литература

1. Mogilner A.I. Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schrodinger operators: problems and results // Advances in Sov. Math. 1991. V. 5. P. 139–194.
2. A.I. Mogilner. The problem of few quasi-particles in solid state physics // In "Applications self-adjoint extensions in quantum physics"(eds. P. Exner, P. Seba), Lecture Notes in Phys. Vol.324. Springer-Vilag, Berlin. 1988. 52-83.
3. Mattis D.C. The few-body problem on a lattice // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58, No. 2. P. 361–379.
4. Malishev V.A., Minlos R.A. Linear infinite-particle operators / trl. by A. Mason. Providence,RI: American Mathematical Society, 1995. VIII, 298 p. (Translations of Mathematical Monographs; v.143). Математика/Mathematics 36.
5. Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems concerning spectra of lattice models // Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard: Proc. Conf. in Dubna, USSR, 6–10 September 1989/P. Exner, P. Seba (eds.). Singapore: World Scientific, 1989. P. 243–257.
6. S.Albeverio, S.N.Lakaev and Z.I.Muminov, On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schroedinger operators on lattices, Math. Nachr.No 7, 1-18 pp. 2007.
8. Р.Беллман, Введение в теорию матриц, Изд. "Наука". Москва, 376 ст. 1976.
9. Faria da Veiga P.A., Ioriatti L. and O‘.Carroll, Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schroedinger Hamiltonians. Phys. Rev. E, 3 - 9 pp. 2002.
10. Reed M. and Simon B.: Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York. 458 pp.1979.

УДК 519.82

ИШКАНАНЫН АЙДОО АЯНТЫНА АЙЫЛ ЧАРБА ЭГИНДЕРИН ӨСТҮРҮҮНҮ МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДЕШТИРҮҮ

Маатов Кеңешбек Максатович, улук окутуучу
Maatov.k.m@mail.ru
Ош Технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Айыл чарба өсүмдүктөрүн өстүрүү ишмердүүлүгүндө экономикалык-математикалык ыкмаларды, моделдерди жана заманбап компьютердик технологияларды колдонуу эң мыкты пландык чечимди табууга мүмкүндүк берет. Бул иште Айыл чарба министрлигинин алдындагы айыл чарба өсүмдүктөрүн экспертизациялоо департаменттине караштуу Кара-Суу мамлекеттик комплекстүү сортторду сыноо ишканасынын каржылык мүмкүнчүлүгүн эске алуу менен айыл чарба эгиндеринин ар бир түрүнө айдоо аянтынын оптималдуу өлчөмүн жана колдонулган минералдык жер семирткичтердин көлөмдөрүн аныктоо маселесинин экономикалык-математикалык модели иштелип чыкты.*

Урунттуу сөздөр: *ишкананын ишмердүүлүгү, айыл чарба продукциясы, минералдык жер семирткичтер, оптимизациялык моделдештирүү.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫРАЩИВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР НА ПЛОЩАДИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Маатов Кеңешбек Максатович, старший преподаватель
Maatov.k.m@mail.ru
Ошский Технологический университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Использование экономико-математических методов, моделей и современных компьютерных технологий в деятельности по выращиванию сельскохозяйственных культур позволяет найти оптимальное планировочное решение. В данной работе разработана экономико-математическая модель задачи определения оптимального размера обрабатываемой площади и количества вносимых минеральных удобрений под каждый вид сельскохозяйственных культур с учетом финансовых возможностей Кара-Суйского государственного комплекса. сортоиспытательное предприятие Департамента экспертизы сельскохозяйственных культур Министерства сельского хозяйства.*

Ключевые слова: *деятельность агрофирмы, сельскохозяйственная продукция, минеральные удобрения, оптимизационное моделирование.*

MATHEMATICAL MODELING OF GROWING AGRICULTURAL CROPS ON THE AREA OF THE ENTERPRISE

Maatov Kengeshbek Maksatovich, senior lecturer
Maatov.k.m@mail.ru
Osh Technological University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The use of economic-mathematical methods, models and modern computer technologies in the activity of growing agricultural crops allows to find the best planning solution. In this work, an economic-mathematical model of the problem of determining the optimal size of the cultivated area and the amount of mineral fertilizers used for each type of agricultural crops was developed, taking into account the financial capabilities of the Kara-Suu state complex variety testing enterprise under the Department of Agricultural Crops Expertise under the Ministry of Agriculture.*

Keywords: *activity of an agricultural firm, agricultural products, mineral fertilizers, optimization modeling.*

Киришүү. Азыркы мезгилде Кыргызстандын агрардык сектору республиканын экономикасынын негизги кайталап өндүрүү тармактарынын бири болуп саналат. Анда Ички дүң продуктунун болжол менен 12% өндүрүлөт. Рыноктук шарттарда өндүрүү, бөлүштүрүү жана керектөө баш-аламан мүнөздө болгон менен, калктын негизги муктаждыктарын анын төлөм жөндөмдүүлүгүнө ылайык канааттандыруу ар дайым мамлекеттин башкы маселелеринин бири катары каралып келген.

Изилденип жаткан ишкананын ишмердүүлүгү атаандаштыкка жөндөмдүү айыл чарба продукциясын жана азык-түлүктү өндүрүүнүн көлөмдөрүн оптималдаштырууга багытталганын белгилей кетели. Ишкана, жер тилкелерине ээ, бирок ар тилкедеги топурактын сапаты ар түрдүү болгондуктан, жакшы түшүм алуу үчүн минералдык жер семирткичтерди жана өзүнүн каржы каражаттарын пайдаланат [1].

Ишкананын өндүрүштүк ишмердүүлүгүндө экономикалык-математикалык ыкмаларды, моделдерди жана заманбап компьютердик технологияларды колдонуу эң мыкты пландык чечимди табууга мүмкүндүк берет [2].

Төмөндө ишкананын каржылык мүмкүнчүлүгүн эске алуу менен айыл чарба эгиндеринин ар бир түрүнө айдоо аянтынын оптималдуу өлчөмүн жана колдонулган минералдык жер семирткичтердин көлөмдөрүн аныктоо маселесинин экономикалык-математикалык модели келтирилди. Анын чечимдерин табуу үчүн азыркы заман талабына ылайыктуу компьютердик программалардан MS Excel оффистик программасынан чечимдерди табуу тиркемеси колдонулду.

Маселенин коюлушу. Ишкана D көлөмүндөгү акча каражаттарына ээ болсун дейли. Ошондой эле p тилкелеринен турган S_k , $k\in K=\{1,2,\dots,p\}$ өлчөмүндөгү айдоо аянттарына ээ. Бул айдоо аянттарында ишкана айыл чарба продукциясынын $j\in J=\{1,2,\dots,n\}$ түрүн өстүрүүнү пландаштырган.

Эгиндин ар бир түрүнүн түшүмдүүлүгү, эгиндин ар бир түрүнүн айдоо аянтынын бир бирдигине минералдык жер семирткичтерди чыгымдоо нормасы жана аларды сатып алуунун дүң баасы белгилүү болсун.

Акча каражаттарын ишкананын алган таза кирешеси максималдуу болгондой жумшоо менен эгиндин ар бир түрүнүн айдоо аянтынын ар бир тилкесинин оптималдуу өлчөмүн аныктоо талап кылынат.

Экономикалык-математикалык моделди түзүү үчүн төмөнкүдөй шарттуу белгилерди колдонобуз:

j – айыл чарба продукциясынын түрүнүн индекси, $j\in J=\{1,2,\dots,n\}$;

J - айыл чарба продукциясынын түрүнүн индекстеринин көптүгү;

r – ишкана айыл чарба продукциясын өстүрүү үчүн пайдаланган минералдык жер семирткичтин түрүнүн индекси, $r\in R=\{1,2,\dots,R^{-}\}$;

R - ишкана пайдаланган минералдык жер семирткичтин түрлөрүнүн көптүгү;

k - ишкананын айдоо аянтынын тилкелеринин индекси, $k\in K=\{1,2,\dots,p\}$;

K - ишкананын айдоо аянтынын тилкелеринин индекстеринин көптүгү.

Белгилүү параметрлер:

d_j - айыл чарба продукциясынын j-түрүнүн салмагынын бирдигинин сатуу баасы, $j\in J$;

c^r – r-түрдөгү минералдык жер семирткичтин көлөмүнүн бирдигинин дүң баасы, $r\in R$;

s_k – ишкананын k-тилкесинин айдоо аянтынын өлчөмү, $k\in K$;

a_{jk}^r – продукциянын j-түрү эгилген k-тилкенин айдоо аянтынын бирдигине минералдык жер семирткичтин r-түрүнүн чыгымдоо нормасы, $r\in R$, $j\in J$, $k\in K$;

b_{jk} – ишкананын k-тилкесинин айдоо аянтынын бирдигиндеги айыл чарба продукциясынын j-түрүнүн түшүмдүүлүгү, j∈J, $k∈K$;

c_{jk} – ишкананын k-тилкесинин айдоо аянтынын бирдигиндеги айыл чарба продукциясынын j-түрүн өстүрүүгө чыгымдар, j∈J, $k∈K$;

Изделип жаткан өзгөрмөлүүлөр:

x_{jk} - k-тилкеде эгиндин j-түрү өстүрүлө турган айдоо аянтынын өлчөмү, $j∈J$, $k∈K$;

z_r - ишкана айыл чарба продукциясын өстүрүүдө пайдаланган минералдык (органикалык) жер семирткичтин көлөмү;

z – ишкана пайдаланган размер каржылык ресурстардын өлчөмү.

Кабыл алынган белгилөөлөргө ылайык коюлган маселенин математикалык моделин төмөнкү түрдө жазып алабыз:

$$\sum_{j=J} x_{jk} = S_k \quad k \in K \tag{1}$$

$$\sum_{j=J}\sum_{k=K} a^r_{jk} x_{jk} - z_k, \quad r \in R \tag{2}$$

$$\sum_{k=K} c^r z_r + \sum_{j=J}\sum_{k=K} c_{jk} x_{jk} - Z \le D \tag{3}$$

$$x_{jk} \le 0, \quad k \in K, \quad j \in J \tag{4}$$

$z_r \le 0, \quad k \in K,$ шарттарында

$$L(x,z) = \sum_{j=J}\sum_{k=K} d_j b_{jk} x_{jk} - Z \tag{5}$$

максимумун табуу керек.

Мында x={x_{jk}: $j∈J$, $k∈K$}, z={z_r: $k∈K$}.

(5) максаттык функция ишкананын максималдуу таза кирешесин аныктайт;

(1) чектөө ишкананын ар бир эгиндин түрүнө айдоо аянтынын суммардык өлчөмү бар болгон айдоо аянтынан ашпашы керек экендигин көрсөтөт;

(2) барабардыгы ишканада пайдаланылган минералдык жер семирткичтин ар бир түрүнүн көлөмү чарбанын айдоо аянттарында пайдаланылган минералдык жер семирткичтин r-түрүнө муктаждыкка барабар болушу керек экендигин көрсөтөт;

(3) чектөө ишкана пайдаланган акча каражаттарынын суммардык өлчөмү ишкананын максималдык мүмкүнчүлүгүнөн ашпашы керектигин талап кылат;

(4) чектөө өзгөрмөлүүлөрдүн терс эместигин талап кылат. (1)-(6) маселени чыгаруу үчүн төмөнкү өзгөртүп түзүүлөрдү аткарабыз.

(3) чектөөдө z_r өзгөрмөлүүлөрдү (2) туюнтмага алмаштырабыз, анда (1)-(6) математикалык модели төмөнкү түргө өтөт:

$$\sum_{j=J} b_{jk} x_{jk} - s_k, \quad k \in K \tag{6}$$

$$\sum_{j=J}\sum_{k=K}\sum_{r=R} c^r a^r_{jk} x_{jk} + \sum_{j=J}\sum_{k=K} c_{jk} x_{jk} - Z \le D \tag{7}$$

$$x_{jk} \le 0, \quad k \in K, \quad j \in J \tag{8}$$

шарттарында

$$L(x,z) = \sum_{j=J}\sum_{k=K} d_j b_{jk} x_{jk} - Z \tag{9}$$

максимумун табуу керек.

(9) максаттык функцияда $d_j b_{kj}$ туюнтмасын n_{jk} менен белгилеп алабыз, (7) чектөөдө $c^r a^r + c$ туюнтмасын δ_{jk} менен белгилеп алабыз, б.а.

$$n_{jk} = d_j b_{kj} \quad k \in K, \quad j \in J ; \qquad (*)$$

$$\sum_{r=R} c^r a^r_{jk} + c_{jk} = \delta_{jk}$$

$$k \in K, \quad j \in J \qquad (**)$$

Анда (6)-(9) маселенин шартын 1-таблица түрүндө чагылдырууга болот.

1-таблица

x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	…	x_{p1}	x_{p2}	…	x_{pn}	z		
1		…		1					1					$\leq$	S_1
	1				1	…				1				$\leq$	S_1
		…				…		…			…			…	…
			1				1				…	1		$\leq$	S_p
δ_{11}	δ_{12}	…	δ_{1n}	δ_{21}	δ_{22}	…	δ_{2n}	…	δ_{p1}	δ_{p2}	…	δ_{pn}	-1	=	*0*
		…											1	$\leq$	D
n_{11}	n_{12}	…	n_{1n}	n_{21}	n_{22}	…	n_{2n}	…	n_{p1}	n_{p2}	…	n_{p1}	-1	$\rightarrow$	max

Маселени чыгаруу алгоритми. Эсептөөлөрдү n_{jk}, δ_{jk}, $k \in K$, $j \in J$ параметрлеринин маанисин аныктоодон баштайбыз.

Белгилүү болгон D, S_k, $k \in K$, a^r, b_{jk}, c_{jk} $k \in K$, $j \in J$ маалыматтарды пайдаланып, (1)-(6) ылайык маселенин сандык моделин түзөбүз. Андан ары ЭММ [3] лабораториясында иштелип чыккан ыкманы пайдаланып, маселени чыгарабыз. Эсептөө алгоритми аягына чыгат.

Мисал. Ишкананын 25 000 000 сом өлчөмүндө акча каражаты жана 1-категориядагы 35 га айдоо аянты, 2-категориядагы 24 га айдоо аянты, 3-категориядагы 14 га айдоо аянты бар, анда 4 түрдөгү айыл чарба продукциясын өстүрүүнү пландаган деп алалы.

Белгилүү: өстүрүлгөн айыл чарба продукциясынын 1 кг баасы:

$$d_j = \{\{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{70, 31, 28, 100\};$$

- минералдык жер семирткичтердин көлөмүнүн бир бирдигинин рыноктук баасы: карбамид – 40 сом/кг, селитра – 35 сом/кг, сугат суусу - 0,50 сом/кг;

- 1-түрдөгү айыл чарба продукциясы кг 70 сом, 2-түрдөгү кг 31 сом, 3-түрдөгү айыл чарба продукциясы кг 28 сом жана айыл чарба продукциясынын 4-түрү кг 100 сомдон сатылат.

Айыл чарба продукциясын өстүрүү үчүн минералдык жер семирткичтер пайдаланылат.

- айыл чарба продукциясынын ар бир түрү үчүн 1,2чи жана 3чү тилкедеги айдоо аянтынын бир бирдигине минералдык жер семирткичтерди чыгымдоо нормалары:

$$\left|a_{j1}^{r}\right|_{4,3}=\begin{pmatrix}34.0 & 52.0 & 1500.0\\ 34.0 & 52.0 & 1500.0\\ 34.0 & 52.0 & 1500.0\\ 34.0 & 52.0 & 1500.0\end{pmatrix};\ \left|a_{j2}^{r}\right|_{4,3}=\begin{pmatrix}- & 40.0 & 1500.0\\ - & 40.0 & 1500.0\\ 34.0 & 40.0 & 1500.0\\ 34.0 & 40.0 & 1500.0\end{pmatrix},\ \left|a_{j3}^{r}\right|_{4,3}=\begin{pmatrix}- & 52.0 & 1500.0\\ - & 52.0 & 1500.0\\ 34.0 & 52.0 & 1500.0\\ 34.0 & 52.0 & 1500.0\end{pmatrix}$$

- 1 жана 2-тилкедеги айдоо аянтынын бир бирдигине айыл чарба продукциясын өстүрүү үчүн чыгымдар:

$$\left|c_{jk}\right|_{4,2}=\begin{pmatrix}36900.0 & 30000.0 & 33000.0\\ 90900.0 & 90400.0 & 89000.0\\ 78400.0 & 66000.0 & 72000.0\\ 64000.0 & 50000.0 & 58000.0\end{pmatrix}\quad \left|b_{jk}\right|_{4,2}=\begin{pmatrix}18200.0 & 0.0 & 0.0\\ 10000.0 & 3000.0 & 3000.0\\ 20000.0 & 6000.0 & 4500.0\\ 9000.0 & 5000.0 & 5800.0\end{pmatrix}$$

(*) жана (**) формулалардын жардамында n_{jk} жана δ_{jk}, j=1,2,3,4, k=1,2,3 аныктайбыз:

$$\left|n_{jk}\right|_{4,2}=\begin{pmatrix}1274000.0 & 0.0 & 0.0\\ 310000.0 & 93000.0 & 93000.0\\ 560000.0 & 168000.0 & 126000.0\\ 900000.0 & 500000.0 & 580000.0\end{pmatrix};\ \left|\delta_{jk}\right|_{4,2}=\begin{pmatrix}40830.0 & 32150.0 & 35570.0\\ 94830.0 & 92550.0 & 91570.0\\ 82330.0 & 69510.0 & 75930.0\\ 67930.0 & 53510.0 & 61930.0\end{pmatrix}$$

Ар бир тилкенин айдоо аянтынын оптималдуу өлчөмүн, эгиндин ар бир түрүнө ишкана ала турган киреше максималдуу боло тургандай акча каражаттарынын өлчөмүн аныктоо талап кылынат.

(6)-(9) моделдин негизинде жана баштапкы маалыматтарга ылайык маселенин математикалык модели төмөнкү түрдө түзүлөт.

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}=35,\ X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}=24,\ X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}=14, \qquad (10)$$

$$40830X_{11}+32150X_{12}+35570X_{13}+94830X_{21}+92550X_{22}+91570X_{23}+82330X_{31}++69510X_{32}+75930X_{33}+67930X_{41}+53510X_{42}+61930X_{43}=Z\le 25000000, \qquad (11)$$

$$X_{jk}\ge 0,\ j=1,2,3,4,\ k=1,2,3 \qquad (12)$$

шарттарында

$$L(x)=1274000X_{11}+0X_{12}+0X_{13}+310000X_{21}+93000X_{22}+93000X_{23}+$$
$$+560000X_{31}+168000X_{32}+126000X_{33}+900000X_{41}+$$
$$+500000X_{42}+580000X_{43}-Z \qquad (13)$$

максимумун табуу.

(10)-(13) сандык моделинин чыгарылышынан ишкананын максималдуу таза кирешесин *L(x)=39710000* сом камсыздагандай айыл чарба продукциясынын биринчи түрүнө бөлүнгөн 1-тилкенин айдоо аянтынын оптималдуу планын $X_{11}=35$ га жана айыл чарба продукциясынын төртүнчү түрүнө бөлүнгөн 2- жана 3-тилкенин айдоо аянтынын оптималдуу планын $X_{42}=24$ га жана $X_{43}=14$ га аныктайбыз.

Биринчи түрдөгү продукцияны өстүрүүнүн көлөмү 500 т, төртүнчү түрдөгү продукцияны өстүрүүнүн көлөмү 500 жана 1200 т, ал эми колдонулган минералдык жер семирткичтердин саны (2) шарттан аныкталат. Биринчи түрдөгү продукцияны өстүрүүгө 5 т селитра, 600 миң $м^3$ сугат суусу, төртүнчү түрдөгү продукцияны өстүрүү үчүн 2 т селитра керектелет.

Тыянак. Бул моделдин натыйжалуулугу жана керектүүлүгү аны иш жүзүндө колдоно билүү көндүмүнө ээ болууда турат.

Адабияттар

1. Борубаев А.А., Жусупбаев А., Джумабаев К.Дж., Асанкулова М.// Математическая модель определения эффективного варианта развития агрофирмы региона // Вестник ИМНАНКР. - Бишкек, 2019.- 88 б.
2. Жусупбаева Н.А., Турганбаева Ж., Маатов К. Определение технологического способа производства айыл чарба продукциясы агрофирмы по критерию максимума дохода // Вестник ИМНАНКР. - Бишкек, 2018.– Б. 171-176.
3. Маатов К.М., Асанкулова М. Оптимизация размера посевной площади под каждый вид сельхоз культуры с учетом финансовой возможности агромирмы // Международной Азиатской школы-семинари – Алматы, - 2022. – Б. 288-293.

УДК 517.928

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕННО́Й ПЕРЕМЕННОЙ

Мамазиаева Эльмира Амановна, к.ф.-м.н., доцент
mamaziaeva67 @mail.ru
Ошский государственный университет,
Мамбетов Жоомарт Иманалиевич, к.ф.-м.н., доцент
zhoomart_mambetov@mail.ru
Ошский технологический университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной работе рассматривается сведение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа с производной по временной переменной к системе интегральных уравнений, без приведения рассмотренного уравнения к каноническому виду. Сначала уравнение приводится к виду, удобному для использования метода дополнительного аргумента. Затем используется развитый учеными Кыргызской республики метод дополнительного аргумента. При доказательстве теоремы существования и единственности решения начальной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа с производной по временной переменной используется следствие из принципа сжимающих отображений Банаха.*

Ключевые слова*: дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение, уравнение гиперболического типа, метод дополнительного аргумента, задача Коши, принцип сжимающих отображений.*

ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕНИ УБАКЫТ ӨЗГӨРМӨСҮ ТУУНДУСУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Мамазиаева Эльмира Амановна, к.ф.-м.н., доцент
mamaziaeva67 @mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Мамбетов Жоомарт Иманалиевич, к.ф.-м.н., доцент
zhoomart_mambetov@mail.ru
Ош технологиялык университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул эмгекте каралып жаткан тендемени кананикалык түргө келтирбестен, экинчи тартиптеги гиперболалык типтеги сызыктуу эмес жекече туундулу дифференциалдык тендемени убакыттын өзгөрмөсүнө карата туундусу менен интегралдык тендемелер системасына келтирүүнү карайбыз.*

Ал үчүн тендеме кошумча аргумент кийирүү методун колдонуу менен ыңгайлуу формага келтирилет. Андан кийин Кыргыз республикасынын окумуштуулары тарабынан изилденип чыккан кошумча аргументти кийирүү методу колдонулат. Убакыт өзгөрмөсүнө карата туундусу бар гиперболалык типтеги сызыктуу эмес экинчи тартиптеги жекече туундулу дифференциалдык тендемени чечүүдө баштапкы шарттын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теореманы далилдөөдө Банахтын кысып чагылдыруу принциби колдонулат.

Ачкыч сөздөр: *Жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, сызыктуу эмес тендеме, гиперболалык типтеги тендеме, кошумча аргумент кийирүү методу, Коши маселеси, кысып чагылдыруу принциби.*

SOLUTION OF A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION IN SECOND-ORDER HYPERBOLIC PARTIAL DERIVATIVES WITH A TIME VARIABLE DERIVATIVE

Mamaziaeva Elmira Amanovna, Ph.D., *associate professor*
mamaziaeva67 @mail.ru
Osh state university,
Mambetov Zhoomart Imanalievich, Ph.D., associate professor
zhoomart_mambetov@mail.ru
Osh Technological University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *In this paper, we consider the reduction of a non-linear second- order partial differential equation of hyperbolic type with a derivative with respect to the time variable to a system of is integral equations, without reducing the considered equation to a canonical form. First, the equation is reduced to a form convenient for using the additional argument method. Then the method of an additional argument developed scientists of the Kyrgyz Republic is used. When proving the theorem of existence and uniqueness of the solution of the initial problem for a non-linear second-order partial differential equation of hyperbolic type with a derivative with respect to the time variable, a corollary from the principle of Banach contraction mappings is used.*

Key words: *partial differential equation, non-linear equation, equation of hyperbolic type, method of additional argument, Cauchy problem, contracting mappings principle.*

Введение. В последнее время ведутся работы по распространению метода дополнительного аргумента (МДА) на дифференциальные уравнения в частных производных нового класса. В работах [1-4] предлагается новый способ сведения рассмотренного уравнения к системе интегральных уравнений (СИУ) с использованием МДА.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим применение МДА для уравнения гиперболического типа вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x,u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + F(t,x,u), \tag{1}$$

$(t,x) \in G_2(T) = [0,T] \times \boldsymbol{R}$ с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x) \equiv \varphi_0(x), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{3}$$

Используем классы функций из [1]:

$C_b^{(k)}$ – класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до κ-го порядка.

Теорема. Пусть 1) $\varphi_k(x) \in C_b^{(2-k)}(R)$, $k=0,1$, $a(t,x) \in C_b^{(2)}(G_2(T))$, $a(t,x)>0$;

2) $b(t,x,w)$, $F(t,x,w) \in C_b^{(2)}(G_2(T) \times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица по переменной w.

Тогда существует такое $T^* \in \boldsymbol{R}_{++} = (0,\infty)$, что задача (1)-(2)-(3) имеет единственное решение в $C_b^{(2)}(G_2(T^*))$.

Доказательство.

При доказательстве теоремы воспользуемся следующими обозначениями:

$$D[(-1)^i a(t,x)]u = \vartheta_i(t,x), \tag{4}$$

$$\alpha_{ij}(t,x,w)=b(t,x,w)+(-1)^j\frac{1}{a(t,x)}(a_t(t,x)+(-1)^{i+1}a(t,x)a_x(t,x)),\ i,j=1,2,$$

$$\beta_i(t,x;u)=D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\alpha_{i1}(t,x,u(t,x)),\quad \mu_i(t,x,w)=\frac{\partial\alpha_{i1}(t,x,w)}{\partial w},\quad i=1,2.$$

Представим основные этапы доказательства теоремы в виде лемм.

Лемма 1. Задача (1)-(2)-(3) эквивалентна системе интегральных уравнений (СИУ)

$$u(t,x)=\phi_0(p_1(0,t,x))+\int_0^t \vartheta_1(s,p_1(s,t,x))ds; \tag{5}$$

$$\vartheta_i(t,x)=\frac{1}{2}\psi_i(p_i(0,t,x))+\frac{1}{2}\alpha_{i1}(t,x,u)u+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_{i2}(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t\beta_i(s,p_i;u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\mu_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_{3-i}(s,p_i)ds+ \tag{6}$$
$$+\int_0^t F(s,p_i,u(s,p_i))ds,\quad i=1,2;$$

где функции $\psi_i(x)$ определяются из соотношения

$$\left[2\vartheta_i-\alpha_{i1}(t,x,u)u\right]_{t=0}=\psi_i(x),\quad i=1,2:$$
$$\psi_i(x)=2\vartheta_i(0,x)-\alpha_{i1}(t,x,u(0,x))u(0,x)=$$
$$=2(\varphi_1(x)+(-1)^i a(0,x)\varphi_0'(x))-$$
$$-\left(b(0,x,\varphi_0(x))+(-1)^{i+1}\frac{1}{a(0,x)}(a_t(0,x)+(-1)^{i+1}a(0,x)a_x(0,x))\right)\varphi_0(x).$$

Доказательство Леммы 1.

Пусть $\vartheta_i(t,x),\ i=1,2$ – компоненты решения СИУ (5)-(6). Непосредственным дифференцированием из (5)-(6) имеем (4) и

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)=\frac{1}{2}\alpha_{i1}(t,x,u)\vartheta_{3-i}(t,x)+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+F(t,x,u),\quad i=1,2.$$

Отсюда получаем выполнение уравнения (1).

Таким образом, мы доказали, что первый компонент решения СИУ (5)-(6) удовлетворяет уравнению (1). Первый компонент решения СИУ(5)-(6) удовлетворяет и начальным условиям (2)-(3).

Теперь покажем, что решение задачи (1)-(2)-(3) является решением СИУ (5)-(6). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\left(2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i\alpha_{i1}(t,x,u))u\right)=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-$$
$$-\beta_i(t,x;u)u-\mu_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_{3-i}(t,x)+2F(t,x,u),\quad i=1,2. \tag{7}$$

Действительно, из (7) имеем:

$$2D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)-\mu_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)-\beta_i(t,x;u)u(t,x)-$$
$$-\alpha_{i1}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-\beta_i(t,x;u)u(t,x)-$$
$$-\mu_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)+2F(t,x,u),\quad i=1,2.$$

Отсюда

$$2D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)-\alpha_{i1}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)=$$
$$=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+2F(t,x,u),\quad i=1,2. \qquad (8)$$

Для (8) получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$
$$=\left(b(t,x,u)-\frac{1}{a(t,x)}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+$$
$$+\left(b(t,x,u)+\frac{1}{a(t,x)}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+$$
$$+2F(t,x,u),\quad i=1,2.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$
$$=2b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+2(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)+$$
$$+2F(t,x,u),\quad i=1,2.$$

Таким образом, мы показали, что из (7) получается уравнение (1).

Введя обозначение $z(t,x;u)=2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i\alpha_{i1}(t,x,u)u(t,x),$ запишем (7) в виде:

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]z(t,x;u)=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-$$
$$-\beta_i(t,x;u)u-\mu_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_{3-i}(t,x)+2F(t,x,u),\quad i=1,2. \qquad (9)$$

Для задачи (9), с учетом определения функций $\psi_i(x)$, применяя метод дополнительного аргумента, имеем

$$z(t,x;u)=\psi_i(p_i(0,t,x))+\int_0^t\alpha_{i2}(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds-$$
$$-\int_0^t\beta_i(s,p_i;u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\int_0^t\mu_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_{3-i}(s,p_i)ds+ \qquad (10)$$
$$+2\int_0^t F(s,p_i,u(s,p_i))ds,\quad i=1,2.$$

В самом деле, дифференцируя (10), получаем (9). Из (10) следует также выполнение начальных условий.

Из обозначения (4) методом дополнительного аргумента получаем (5).

Лемма доказана.

Лемма 2. Существует такое $T^*\in\mathbf{R}_{++}$, что СИУ (5)-(6) имеет единственное решение в области $G_2(T^*)$.

Доказательство. Запишем СИУ (5)-(6) в виде одного векторного равенства

$$\theta(t,x)=A(t,x;\theta), \qquad (11)$$

в котором $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ - вектор-функция переменных (t,x), компоненты которой есть искомые функции, $\theta_1=\vartheta_1(t,x),\quad \theta_2=\vartheta_2(t,x),\ \theta_3=u(t,x),$

Здесь компоненты оператора $A=(A_1,A_2,A_3)$ определяются равенствами:

$$A_i(t,x;\theta)=\frac{1}{2}\psi_i(p_i(0,t,x))+\frac{1}{2}\alpha_{i1i}(t,x,\theta_1)\theta_1+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_{i2}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_i(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t \beta_{i.}(s,p_i;\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \mu_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)\theta_{3-i}(s,p_i)ds+\int_0^t F(s,p_i,\theta_1(s,p_i))ds, \tag{12}$$
$i=1,2$

$$A_3(t,x;\theta)=\varphi_0(p_1(0,t,x))+\int_0^t \theta_1(s,p_1(s,t,x))ds. \tag{13}$$

Покажем, что уравнение (11) имеет в области $G_2(T^*)$ при достаточно малом T^* единственное непрерывное решение. Для этого воспользуемся

Лемма 3. Если оператор A в банаховом пространстве удовлетворяет условиям 1) $||A(0)||\le c = const$; 2) $||Ax-Ay|| \le \theta\, ||x-y||$, $\theta<1$ в шаре $||x||\le\dfrac{c}{1-\theta}$, то он имеет в этом шаре одну неподвижную точку.

Норму в пространстве $C_b(G_2(T^*)\to\mathbf{R}^3)$ определим равенством
$$\|\theta\|_* = \max_{(t,x)\in G_2(T^*)}\left\{ |\theta_i(t,x)|, \quad i=1,2,3\right\}. \tag{14}$$

Далее, получаем, что функции $A_1(t,x;0)$; $A_2(t,x;0)$; $A_3(t,x;0)$ являются ограниченными функциями в силу условий Теоремы.

Следовательно, $A(t,x;0)$ ограничено.

Далее, из условий Теоремы следует, что

$$\|A(\theta')-A(\theta'')\|_* \le T^*L^*\|\theta'-\theta''\|_*,$$

где L^* - некоторая константа, определяемая из норм и коэффициентов Липшица заданных функций и вольтерровского оператора в правых частях (12)-(13).

Из последних двух соотношений следует справедливость Леммы 2, а из доказанных лемм следует справедливость Теоремы.

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
2. Аширбаева А.Ж. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению/ А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Материаловедение. – Бишкек. - 2013. - № 2. – С. 258-261.
3. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального урав-нения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению/ А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.
4. Мамазиаева Э.А. Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Известия ОшТУ. – Ош, 2015. – № 1. -С. 87–90.

УДК 519

СОЗДАНИЯ ПРИ ПОМОЩИ 3D ГРАФИКИ И 3D-АНИМАЦИИ ВИРТУАЛЬНЫХ МИРОВ

Маманов Сирож Кахрамонович, независимый научный сотрудник
sirojmamanov92@gmail.com
Джизакского филиала Национального университета Узбекистана
Джизак, Узбекистан

Аннотация: *Представлены пути решения кадровых и материальных проблем, возникающих у образовательной организации при реализации 3D-технологий в урочной, внеурочной деятельности и в системе дополнительного образования. В статье раскрываются возможности образовательных организаций для формирования у школьников инженерного мышления через внедрение в учебный процесс изучения современной технологии - 3D-моделирования на примере опыта работы Центра детского (юношеского) технического творчества. Статья содержит подробное описание ресурса для систематизации работы по подготовке педагогических кадров и сопровождению их деятельности в области 3D-моделирования в контексте непрерывного образования.*

Ключевые слова: *3D-технологии, технологическая грамотность, строительстве, Технология, Методология, проектирования, профессиональная.*

CREATION WITH THE HELP OF 3D GRAPHICS AND 3D ANIMATIONS OF VIRTUAL WORLDS

Mamanov Siroj Kaxramonovich, Independent researcher
sirojmamanov92@gmail.com
Jizzakh branch of the National University of Uzbekistan
Jizzakh, Uzbekistan

Abstract: *The ways of solving personnel and material problems that arise in an educational organization in the implementation of 3D technologies in classroom, extracurricular activities and in the system of additional education are presented. The article reveals the possibilities of educational organizations for the formation of engineering thinking among schoolchildren through the introduction of modern technology into the educational process - 3D modeling on the example of the experience of the Center for Children's (Youth) Technical Creativity. The article contains a detailed description of the resource for systematizing the work of training teachers and supporting their activities in the field of 3D modeling in the context of lifelong education.*

Key words: *3D technologies, technological literacy, construction, Technology, Methodology, design, professional.*

Уровень технологий определяет экономическое состояние государства, качество жизни. Уровень технологической культуры населения в условиях развития высокотехнологичного производства определяет кадровый потенциал экономики и производства страны, ее конкурентоспособность на мировом рынке, интеллектуализацию человеческого капитала и наукоемких сфер деятельности, обеспечивает безопасность и культуру организации производственных и иных технологических процессов.

3D-технологии открыли новую эру в материальном производстве, обеспечив невиданную ранее скорость изготовления объектов, качество, прочность, экономию материала, а изобретение 3D-принтера сравнивают по значимости с изобретением колеса. «Чернилами» для 3D-принтера может быть и пластик, и бетон, и металл, и кондитерская масса, и даже живые клетки. Все это открывает огромные возможности использования

3Dтехнологий в легкой промышленности, в машиностроении, медицине, строительстве, искусстве, кулинарии. Печатается все: от протезов и имплантатов до деталей машин и жилых домов. Уже сейчас любой желающий может приобрести и поставить 3D-принтер у себя дома.

Как не отстать от этого будущего, которое не просто стучится в дверь, а уже стоит на пороге? Ответом на вопрос становится вооружение этими технологиями наших детей, внедрение их в школьное образование.

3D-технологии – это и сложное оборудование, и специальные компьютерные программы, но главное – специалисты, способные создавать компьютерные 3D-модели, готовые к печати. Если не начать работу по подготовке будущих специалистов со школьной скамьи, можно опоздать.

Скорость развития материальных, информационных и социальных технологий во всех сферах жизни общества стремительно растет. Для разработки и использования новых технологических принципов необходимы определенные модели мышления и поведения (технологическая грамотность и изобретательность), которые, как показывает опыт многих стран, формируются в школьном возрасте.

В настоящее время главное направление модернизации образования – обеспечение его нового качества. Это можно сделать, совершенствуя образовательную систему путем использования современных средств обучения и включения в образовательный процесс актуального содержания. Развитие современного школьного образования направлено на приведение содержания учебного материала в соответствие с требованиями постиндустриального, технологического общества, учет запросов разных целевых групп потребителей на результаты технологической подготовки школьников, а также на применение современных технологий, методов, способов и форм организации обучения. Новое содержание образования призвано помочь ребенку стать успешной, конкурентоспособной, самообучающейся и саморазвивающейся личностью, способной адаптироваться в сложных ситуациях быстро меняющегося рынка труда. «В условиях быстрого «старения» кадров…обеспечение воспроизводства трудовых ресурсов становится приоритетной задачей системы образования».

Образовательная область «Технология» выступает сегодня в школьном образовании той сферой деятельности, которая объединяет и использует образовательные результаты, достигаемые практически во всех образовательных областях учебного плана, являясь интегративным механизмом, обеспечивающим прикладную направленность общего образования. Таким образом, целью реализации предметной области «Технология» является обеспечение необходимого для устойчивого развития общества, национальной экономики и производства уровня развития технологической культуры личности.

В соответствии с развитием технологического образования в системе общего образования в содержание учебного предмета «Технология» включаются новые направления деятельности, среди которых особое место занимает 3D-моделирование.

Уникальность направления «3D-моделирование» заключается в возможности объединить конструирование, моделирование и программирование в одном курсе, что способствует интеграции знаний по информатике, математике, физике, черчению, естественным наукам с развитием инженерного мышления через техническое творчество. Само же техническое творчество становится инструментом синтеза знаний, закладывающим прочные основы системного инженерного мышления, позволяющего решать самые разнообразные учебные задачи.

Для реализации различных направлений развития технологий в рамках учебного предмета «Технология» отводится не так уж много времени. И здесь на помощь приходит внеурочная деятельность. Это иные возможности организации учебного времени: традиционные линейные и новые нелинейные формы организации курсов, участие в игровой, творческой и конкурсной деятельности, работа в разновозрастных группах с учетом интересов и способностей обучающихся.

В соответствии с требованиями образовательного стандарта внеурочная деятельность является неотъемлемой частью образовательного процесса. «Особенностями данного компонента образовательного процесса являются предоставление обучающемуся возможности выбора тематики и направленности занятий в соответствии с его интересами, личностными особенностями и самостоятельность образовательного учреждения в наполнении внеурочной деятельности конкретным содержанием». Внеурочная деятельность призвана расширить границы и возможности образовательной области «Технология» за счет углубленного изучения перспективных направлений содержания технологического образования.

«Внеурочная деятельность может быть организована как непосредственно (территориально) в общеобразовательном учреждении, так и за его пределами. Так, при отсутствии в общеобразовательном учреждении возможностей для реализации внеурочной деятельности (кадровых, материально-технических и др.) общеобразовательное учреждение в рамках соответствующих государственных (муниципальных) заданий, формируемых учредителем, может использовать возможности образовательных учреждений дополнительного образования детей». В связи с этим следует уточнить, что одним из способов реализации воспитательной составляющей и должна стать интеграция общего и дополнительного образования через организацию внеурочной деятельности.

Сама же система дополнительного образования занимает особое место в процессе формирования компетенций, необходимых современному выпускнику. «Дополнительное образование не только компенсирует некоторые недостатки общего образования, но и предоставляет обучающимся альтернативные возможности для образовательных достижений детей, для их разностороннего развития с учетом потребностей современного рынка труда».

Интересы нашей страны на данном этапе развития требуют ориентации школьников на инженерно-техническую деятельность в сфере высокотехнологичного производства. Способствовать формированию и развитию инженерного мышления обучающихся может реализация в учебном процессе направления «3D-моделирование», которое органично может быть включено и в содержание образовательной области «Технология», и во внеурочную деятельность, и в дополнительное образование.

В современных условиях развития производственной сферы компетенции, связанные с формированием инженерного мышления, крайне востребованы, а ресурсные возможности образовательных учреждений различного уровня часто малы. Применение компьютера в качестве нового динамичного, развивающего средства обучения — главная отличительная особенность компьютерного моделирования. Роль и место информационных систем в понимании их как автоматизированных систем работы с информацией в современном информационном обществе неуклонно возрастают. Методология и технологии их создания начинают играть роль, близкую к общенаучным подходам в познании и преобразовании окружающего мира. Это обусловливает необходимость формирования более полного представления о них. Одним из показателей будущей профессиональной пригодности старшеклассников, ориентированных на инженерно-технические виды деятельности, становится умение пользоваться международным языком инжиниринга САПР (система автоматизированного проектирования). 3D-моделирование в САПР пришло на смену традиционному черчению, а появление современных 3D-технологий обуславливает появление новых требований к профессиям, связанным с проектированием, моделированием, конструированием. Техническое творчество в целом - мощный инструмент синтеза знаний, закладывающий прочные основы системного мышления, позволяющего решать самые разнообразные учебные задачи. Знакомясь с 3D-технологиями, школьники могут получить навыки работы в современных автоматизированных системах проектирования, навыки черчения в специализированных компьютерных программах как международного языка инженерной грамотности. Кроме того, школьники могут познакомиться с использованием трехмерной графики и анимации в различных отраслях и сферах деятельности современного человека, с процессом создания при помощи 3D-графики и 3D-анимации виртуальных миров, порой превосходящих реальный мир по качеству представления графической информации.

Что в мире стремительно набирает обороты новая компьютерная технология, за которой большое будущее и без которой невозможно себе представить будущего инженера, изобретателя, поставили перед собой задачу подготовки школьников в области 3D-образования. Организация 3D-образования на этапе обучения подростка в основной школе позволяет сформировать условия для осознанного выбора школьниками технического профиля дальнейшего обучения. При этом 3D-образование может быть реализовано как в системе дополнительного образования, так и в рамках учебной деятельности (урочной и внеурочной).

Одна из проблем организации обучения 3D-технологиям школьников заключается в неподготовленности педагогических работников. Существующие курсы профессиональной подготовки педагогов, как правило, не подразумевают обучение в области 3D-технологий. Дистанционная форма обычно предполагает финансовые затраты, а самообучение затруднено, т.к. учебники, учебные и методические пособия практически отсутствуют. Анализ различных Интернет-ресурсов показал, что большинство из них имеет рекламный или событийный характер.

Инновационный характер работы лаборатории определяется ее содержанием, направленным на обеспечение нового качества образования, деятельностным, практикоориентированным характером обучения педагогов, а также использованием элементов дистанционного обучения.

Одной из основных задач инновационной площадки остается сопровождение деятельности уже обученных педагогических работников, реализующих программы обучения школьников основам 3D-моделирования. Это особенно актуально в период, когда по решению правообладателей идет вынужденное изменение компьютерного Программного обеспечения процесса обучения по основам 3D моделирования.

Для решения задач обучения и дальнейшего взаимодействия педагогов команда специалистов разработала Интернет-ресурс, представленный в виде сайта «Инженерные 3D-технологии школьникам»

ГЛАВНАЯ страница содержит четыре раздела. В разделе «Доступно о 3D-технологиях» собраны видеоролики, статьи, ссылки на сайты и проекты, которые могут служить дидактическим материалом при реализации программ обучения трехмерной графике, печати и пр.

Представлены также материалы для подготовки педагогов к реализации этих курсов, практические задания- пошаговые моделирования, а также положения о конкурсах, подборка видеоуроков. Кроме того, здесь же можно найти методические материалы, в том числе созданные сообществом педагогов по 3D-технологиям. Для контроля развития инженерного, технического мышления в данном разделе предлагается пакет диагностик.

В разделе «Кружок под ключ» размещены материалы по организации деятельности для изучения школьниками 3D-технологий в условиях дополнительного образования, сделан обзор необходимого для реализации такой работы программного обеспечения и технического оснащения. Здесь же находятся материалы по технике безопасности при работе с 3Dоборудованием. Сам раздел представляет собой веб-страницу с системой кнопок и гиперссылок для более удобного знакомства с информацией.

Страница «НОВОСТИ» содержит информацию об актуальных событиях в рамках проекта внедрения 3D-технологий в образование школьников. Кроме того, на данной странице публикуется информация о мероприятиях, к которым могут присоединиться заинтересованные пользователи (например, конкурсы, олимпиады, вебинары и пр.). Здесь можно узнать об опыте других регионов, пройдя по ссылкам, познакомиться с результатами и материалами заочного всероссийского конкурса инновационных решений по компьютерному 3D-моделированию.

На странице «ГАЛЕРЕЯ» размещены результаты работы школьников по различным 3D-проектам. Продукты 3D-моделирования можно посмотреть в объеме, вращая их в предложенных плоскостях с помощью представленных стрелок. Эта страница может выступать как наглядное пособие для педагогов и школьников. Работы школьников, представленные в Галерее, могут стать источником идей для новых разработок 3D-моделей.

На странице «О НАС» размещена подробная информация о разработчиках сайта, составе команды проекта, приведены ссылки на полное описание проекта, которому посвящен сайт, связанные с проектом ресурсы и страницы других сайтов.

Страница «КОНТАКТЫ» позволяет связаться с разработчиками проекта как непосредственно через сайт, так и с использованием контактной информации.

Практическая значимость предлагаемых материалов обусловлена совокупностью и полнотой информации, необходимой для осуществления процесса обучения педагогов возможностям включения в образовательный процесс направления «3D-моделирование» и реализации его содержания для формирования соответствующих компетенций обучающихся. Материалы представляют собой полноценное пособие как для начинающих педагогов, способное оказать неоценимую помощь в педагогической деятельности, так и для педагогов, имеющих значительный опыт в области обучения школьников 3D-технологиям.

«В изменяющихся условиях современного рынка труда, все возрастающей конкуренции одним из ключевых факторов, способствующих эффективной и полноценной реализации личности, становится профессиональная компетентность». Основой профессиональной компетентности технической направленности является инженерное мышление. Технические достижения и социальные изменения XXI века предъявили новые требования к инженерной деятельности. Возможность эффективного усвоения научно-учебной информации, практического применения в разработке, подготовке и обслуживании современного производства требуют понимания графических изображений технических объектов и процессов умения ориентироваться в современных автоматизированных системах включения основ 3D моделирования в образовательный процесс в рамках образовательной области «Технология», внеурочной деятельности и дополнительного образования открывает перед обучающимися широкие возможности для создания принципиально новых продуктов труда, освоения новых вершин в изучении современных технологий. Школьники получают практические знания о черчении, моделировании и параметрическом проектировании, создают собственные инженерно-технические проекты, обеспечивая будущую конкурентоспособность в профессиональном мире.

Литература

1. Маманов.С.К. Development of professional competences in vocational schools through career directed training. International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research 2023.
2. Огановская, Е.Ю. Робототехника, 3D-моделирование и прототипирование на уроках и во внеурочной деятельности:5-7, 8(9) классы / Е.Ю. Огановская, С.В. Гайсина, И.В. Князева. – Санкт-Петербург: КАРО, 2017. – 256 с. – (Педагогический взгляд)
3. Симонов В.П. Педагогическая диагностика в школе и вузе: учебное пособие -М.: Высшая школа, 2008. -210 с.
4. Зверева Н.М. Преподавателю вуза: практическая педагогика: учебное пособие -Н.Новгород: НГПУ им.К.Минина, 2012. -162 с.
5. Muslimov N.A. Kasb ta’limi o‘qituvchisini kasbiy shakllantirishning nazariy-metodik asoslari: Ped. fan. dokt. ...dis. – T.: O‘MKHTTKMO va UQTI, 2007. -315 b.
6. Qo‘ysinov O.A.Bo‘lajak kasb ta’limi o‘qituvchilarining kasbiypedagogik ijodkorligini kompetentli yondashuv asosida rivojlantirish texnologiyalari. Monografiya. – Toshkent: “DELTA PRINT SERVIS” nashriyoti. 2018. 156 b.

УДК: 517.956

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН БИР КЛАССЫ ҮЧҮН ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕНИН ЧЕЧИЛИШИ

Мамытов Айтбай Омонович, ф.-м.и.к.
mamytov1968@list.ru
Назарали кызы Сабина, магистрант
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада тик бурчтуу аймакта үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык тендеме үчүн биринчи түрдөгү чектик маселенин оң жагын аныктоо тескери маселеси изилденди. Изилденип жаткан тик бурчтун ички чекиттерде кошумча шарттар берилген. Тескери маселедеги бардык функциялар үзгүлтүксүз жана талап кылынган даражада жылма функциялар. Тескери маселени чыгарууда алгач белгилөө кийирип үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеме экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемеге алып келинет, андан соң Гриндин функциясынын жардамында чек аралык маселенин чыгарылыш жазылат, аягында Крамердин эрежесин колдонуп белгисиз функциялар табылды. Натыйжада үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин бир классы үчүн тескери маселенин чечилиши далилденди.*

Ачкыч сөздөр: *тескери маселе, жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, баштапкы шарт, чектик шарт, функциянын изи, Гриндин функциясы, маселенин чыгарылышы, маселенин чечилиши.*

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Мамытов Айтбай Омонович, к.ф.-м.н.
mamytov1968@list.ru
Назарали кызы Сабина, магистрант
Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В статье исследуется обратная задача определения правой части краевой задачи первого типа для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка в прямоугольной области. Задаются дополнительные условия во внутренних точках исследуемого прямоугольника. Все функции в обратной задаче являются непрерывными и достаточно гладкими до требуемого порядка. При решении обратной задачи дифференциальное уравнение третьего порядка с помощью обозначения сводится к дифференциальному уравнению второго порядка, а затем с помощью функции Грина записывается решение краевой задачи и в конце неизвестные функции находятся с помощью правила Крамера. В результате было доказано разрешимость обратной задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка.*

Ключевые слова: *обратная задача, дифференциальное уравнение в частных производных, начальное условие, граничное условие, след функции, функция Грина, решение задачи, разрешимость задачи.*

SOLVABILITY OF THE INVERSE PROBLEM FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE THIRD ORDER

Mamytov Aitbay Omonovich, c.ph-m.s.
mamytov1968@list.ru
Nazarali kyzy Sabina, master student
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

Annotation. *The paper investigates the inverse problem of determining the right side of the boundary value problem of the first type for a third-order partial differential equation in a rectangular domain. Additional conditions are set at the interior points of the rectangle under study. All functions in the inverse problem are continuous and sufficiently smooth up to the required order. When solving the inverse problem, a third-order differential equation is reduced to a second-order differential equation using the notation, then the solution of the boundary value problem is written using the Green's function, and at the end, the unknown functions are found using the Cramer rule. As a result, the solvability of the inverse problem for one class of third-order partial differential equations was proved.*
Keywords*: inverse problem, partial differential equation, initial condition, boundary condition, function trace, Green's function, problem solution, problem solvability.*

Төмөнкү тескери маселени изилдейбиз

$$u_t(t,x)=u_{txx}(t,x)+\varphi_1(t)f_1(t,x)+\varphi_2(t)f_2(t,x)+...+\varphi_n(t)f_n(t,x),\ (t,x)\in\Omega \quad (1)$$

$$u(0,x)=\psi(x),\ 0\le x\le 1, \quad (2)$$

$$u(t,0)=u(t,1)=0,\quad 0\le t\le T, \quad (3)$$

$$\begin{gathered} u(t,x_1)=g_1(t), u(t,x_2)=g_2(t),..., u(t,x_n)=g_n(t),\quad t\in[0,T], \\ x_i\in(0,1),\quad i=1,2,...,n;\ x_i\ne x_j,\ i\ne j, \end{gathered}\quad , \quad (4)$$

мында $\Omega=\{(t,x)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$, $0<T\in\mathbf{R}$, x_i (i=1,2,...,n) – белгилүү туруктуу сандар, $\psi(x),\ f_i(t,x),\ g_i(t)\ (i=1,2,...,n)$ – белгилүү функциялар, $\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t)$ жана $u(t,x)$ – функциялары белгисиз;

Маселенин коюлушу: (1)- теңдемени жана (2)-(4) шарттарды канаатандырган $u\in C^{1,2}(\bar{\Omega}),\ \varphi_i\in \mathrm{C}[0,\mathrm{T}],\ i=1,2,...,n$ функцияларын табуу [1]-[11].

Төмөнкү шарттар орун алат деп эсептейбиз:

Ш1. $f_i\in C(\Omega),\ \psi\in \mathrm{C}[0,1],\ g_i\in C^1[0,T],\ i=1,2,...,n,$

Ш2. $\psi(0)=\psi(1)=0,\ g_i(0)=\psi(x_i),\ i=1,2,...,n,$

Маселенин чыгарылышы. Белгилөө кийирип алабыз [3]-[7]:

$$v(t,x)=u_t(t,x), \quad (5)$$

(5)- белгилөөнү эске алып, (1)- дифференциалдык теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$v_{xx}(t,x)-v(t,x)=-(\varphi_1(t)f_1(t,x)+\varphi_2(t)f_2(t,x)+...+\varphi_n(t)f_n(t,x)),\quad (t,x)\in\Omega, \quad (6)$$

(3)- чек аралык шарттардан жана (5)- белгилөөдөн төмөнкүнү алабыз:

$$v(t,0)=v(t,1)=0,\quad 0\le t\le T. \quad (7)$$

Жогорудагы 1- лемманы колдонобуз.

$$v(t,x)=-\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t)\int_0^1 G(x,\xi)f_j(t,\xi)d\xi \quad (8)$$

(8)-де бир тендеме, бирок (n+1) белгисиз. Ошондуктан (4)-шарттарды эске алабыз.

Эгерде (8)де $x=x_i$ деп алсак, анда (8):

$$v(t,x_i)=-\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t)\int_0^1 G(x_i,\xi)f_j(t,\xi)d\xi,\ i=1,2,...,n, \quad (9)$$

Белгилөө кийирип алабыз:

$$m_{ij}(t,x_i) = -\int_0^1 G(x_i,\xi) f_j(t,\xi)d\xi,\ \ i,j = 1,2,...,n$$

Анда (9) төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$v(t,x_i) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) m_{ij}(t,x_i),\ i = 1,2,...,n$$

Эгерде (4)- шарттарды эске алсак, анда биз n белгисиздүү n тендемелердин системасын алабыз:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) m_{ij}(t,x_i) = g'_i(t),\ i = 1,2,...,n \tag{10}$$

Белгилөө кийирип алабыз:

$$M(t) = \begin{pmatrix} m_{11}(t,x_1) & m_{12}(t,x_1) & ... & m_{1n}(t,x_1) \\ m_{21}(t,x_2) & m_{22}(t,x_2) & ... & m_{2n}(t,x_2) \\ & ... & & \\ m_{n1}(t,x_n) & m_{n2}(t,x_n) & ... & m_{nn}(t,x_n) \end{pmatrix},\ \Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \\ \vdots \\ g'_n(t) \end{pmatrix}$$

анда (10)- система

$$M(t)\Phi(t)=B(t)$$

көрүнүшкө келет.

Сызыктуу алгебра курсунан бизге белгилүү болгондой $\Phi(t)$:

$$\Phi(t)=M^{-1}(t)B(t). \tag{11}$$

Белгилөө кийирип алабыз

$$m_i(t,x) = -\int_0^1 G(x,\xi) f_i(t,\xi)d\xi,\ i = 1,2,...,n.$$

(8)ди өзгөртүп жазып алабыз:

$$v(t,x) = M(t,x)\Phi(t), \tag{12}$$

мында $M(t,x) = (m_1(t,x)\ \ m_2(t,x) ...\ m_n(t,x))$.

(11)-ди (12)ге алып келип коебуз:

$$v(t,x) = M(t,x)M^{-1}(t)B(t). \tag{13}$$

(5)- барабардыкты t өзгөрүлмөсү боюнча 0 дон t га чейин интегралдайбыз:

$$u(t,x) = \int_0^t v(s,x)ds + u(0,x),$$

жогоруда (2)- деги $u(0,x) = \psi(x)$ шарттын эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$u(t,x) = \int_0^t v(s,x)ds + \psi(x). \tag{13}$$

(12)-ни (13)-гө алып келип коебуз:

$$u(t,x) = \int_0^t M(s,x)M^{-1}(s)B(s)ds + \psi(x)$$

Натыйжада биз төмөнкү теореманы далилдедик

Теорема. Эгерде **Ш1**, **Ш2** жана $\forall t \in [0,T]: \det M(t) \neq 0$ шарттары аткарылса, анда (1)-(4) тескери маселенин чыгарылышы төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\Phi(t)=M^{-1}(t)B(t), \quad u(t,x) = \int_0^t M(s,x)M^{-1}(s)B(s)ds + \psi(x).$$

Мисал. Төмөнкү маселени карайлы:

$$u_t(t,x) = u_{txx}(t,x) + \varphi(t)(t+x), \ (t,x) \in \Omega$$

$$u(0,x) = x, \ 0 \le x \le 1, \ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad 0 \le t \le T, \ u(t,1/2) = t, \quad t \in [0,T].$$

Жогорудагы алгоритмге таянып, чыгарылышты так жаза алабыз:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{m_1(t,1/2)}, \ u(t,x) = \int_0^t \frac{1}{m_1(s,1/2)} \int_0^1 G(x,\xi)(s+\xi)d\xi ds + x,$$

мында

$$m_1(t,1/2) = \int_0^1 G(1/2,\xi)(t+\xi)d\xi, \quad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{sh(x-1)sh(\xi)}{sh(1)}, & 0 \le \xi \le x \le 1, \\ \dfrac{sh(x)sh(\xi-1)}{sh(1)}, & 0 \le x \le \xi \le 1. \end{cases}$$

Адабияттар

1. Бухгейм, А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. – Новосибирск: Наука, 1983. –207 с.

2. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457 с.

3. Мамытов, А.О. Об одной задаче определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13. - № 3. – С. 31–38.

4. Мамытов, А.О. Разрешимость обратной начально-краевой задачи с известным значением на прямой // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13. - № 2. – С. 18–23.

5. Мамытов, А.О., Асанов А., Турсунов Д.А. Задача восстановления ядра и правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка // ЕНО. – 2021. – № 8(78). – С. 31–34.

6 Мамытов А.О., Асанов А., Турсунов Д.А. Жогорку тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы-чек аралык тескери маселенин чечилиши // ОшМУнун жарчысы. «Математика. Физика. Техника». – 2021. – № 2. – С. 5–13.

7. Алымкулов К., Турсунов Д. А. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач // Изв. вузов. Математика.–2016. – № 12. – С. 3–11.

8. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // Тр. ИММ УрО РАН. – 2016. – Т. 22. – № 1. – С. 271–281.

9. Tursunov D. A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. –2017. – Vol. 38. – No 3. – P. 542–546.

10. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем // Изв. вузов. Математика. – 2018. – № 3. – С. 70–78.

11. Кожобеков К. Г., Турсунов Д. А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2019. – Т. 29. – № 3. – С. 332–340.

УДК 514.75

МЕЙКИНДИКТЕГИ ГЕОМЕТРИЯЛЫК ФРАКТАЛДЫН 3D МОДЕЛИН ТҮЗҮҮ ҮЧҮН КОМПЬЮТЕРДИК ПРОГРАММА

Молдояров Уларбек Дүйшөбекович,
ф.-м.и.к., доцент,
Ош мамлекеттик университети, Кыргыз Республикасы
ular_osh@list.ru
Матиева Гулбадан,
ф.-м.и.д., профессор,
Ош мамлекеттик университети, Кыргыз Республикасы
gulbadan_57@mail.ru

МЕЙКИНДИКТЕГИ ГЕОМЕТРИЯЛЫК ФРАКТАЛДЫН 3D МОДЕЛИН ТҮЗҮҮ ҮЧҮН КОМПЬЮТЕРДИК ПРОГРАММА

Молдояров Уларбек Дуйшобекович,
к.ф.-м.н., доцент Ошского государственного университета, Кыргызская Республика
ular_osh@list.ru
Матиева Гулбадан,
д.ф.-м.н., профессор Ошского государственного университета, Кыргызская Республика
gulbadan_57@mail.ru

COMPUTER PROGRAM OF CONSTRUCTING A 3D MODEL OF A SPATIAL GEOMETRIC FRACTAL

Moldoiarov Ularbek,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Osh State University,
Kyrgyzstan
ular_osh@list.ru
Matieva Gulbadan,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor,
Osh State University,
Kyrgyzstan
gulbadan_57@mail.ru

Аннотация. *Изилдөөнүн предмети катары мейкиндиктеги геометриялык фракталдын 3D моделин түзүү маселеси каралат. Изилдөөнүн максаты болуп тегиздиктеги берилген геометриялык фракталдарды мейкиндиктеги изделүүчү фракталдын проекциялары катары эсептеп, изделип жаткан фракталдын 3D моделин түзүү үчүн компьютердик программаны иштеп чыгуу эсептелинет.*

Мейкиндиктеги изделүүчү фрактал симметрия тегиздигине ээ болсун деп шарт коюп, тегиздиктеги мурдатан белгилүү эки фракталды анын симметрия тегиздиктериндеги проекциялары болсун деп эсептеп, мейкиндиктеги геометриялык фракталдын 3D моделин түзүү үчүн компьютердик программа иштелип чыгылды.

Бул программаны иштеп чыгууда JavaScript программалоо тили, WebGL, Threc.js библиотекалары колдонулду.

Негизги сөздөр: *геометриялык фрактал, проекция, 3D модел, компьютердик программа.*

Аннотация. *Предметом исследования является задача построения 3D модели пространственного геометрического фрактала. Целью исследования является задача разработать компьютерную программу для получения 3D модели искомого пространственного геометрического фрактала с помощью заданных двух геометрических фракталов в плоскости.*

При условии, если искомый пространственный фрактал имеет плоскостей симметрии, считая, что двое известные геометрические фракталы в плоскости являются проекциями искомого фрактала в его плоскостях симметрии, разработана компьютерная программа для получения 3D модели искомого пространственного геометрического фрактала.

При этом использованы язык программирования JavaScript и библиотеки WebGL, Threc.js.

Ключевые слова: *геометрический фрактал, проекция, 3D модель, компьютерная программа.*

Abstract. *The subject of research is the problem of constructing a 3D model of a spatial geometric fractal. The purpose of the study is to develop a computer program for obtaining a 3D model of the desired spatial geometric fractal using the given two geometric fractals in the plane.*

Provided that the desired spatial geometric fractal has planes of symmetry, assuming that two given geometric fractals in the plane are projections of the desired spatial fractal in its planes of symmetry, a program has been developed to obtain a 3D model of the of the desired spatial geometric fractal.

For this, a programming language JavaScript and libraries WebGL, Threc.js are used.

Keywords: *geometrical fractal, projection, 3D model, computer program.*

Киришүү. “Фрактал” түшүнүгү Бенуа Мандельброт тарабынан 1975-жылы киргизилген. Ал өзүнүн “Жаратылыштын фракталдык геометриясы” – деп аталган китебинде “... өткөн жылдардын математиктери бизге жаратылыш көрсөтүп турган формаларды изилдөөдөн дайыма баш тартышкан,” – деп жазат. Алар евклиддик геометриялык фигураларды изилдөө менен бизди курчап турган чыныгы дүйнөнү түшүндүрбөгөн түрдүү теорияларды ойлоп табышууда деп белгилейт. Бирок, Мандельброттун пикири боюнча “... жаңы геометрия бизди курчап турган айлана чөйрөдөгү “туура эмес” жана бүтүн эмес, үзүндү (бөлүкчө) түрүндөгү формаларды сүрөттөөгө жөндөмдүү болгон жана мен фракталдар деп атаган фигуралардын көптүгүн аныктоо менен дээрлик бүткөн теорияларды жаратат,” – деп жазат.

Математикалык көз караш менен караганда фрактал – бул бөлчөк ченемдүү көптүк болуп эсептелет. Белгилүү болгондой кесиндинин ченеми – 1, квадрат – 2 ченемдүү, параллелипипед – 3 ченемдүү.

Ченемдүүлүгү бөлчөк сан болуу – фракталдардын негизги касиети.

Жогоруда аталган Б.Мандельброттун китебинде [1] 1875-1924- жылдар ичинде ушул багытта изилдөөлөрдү жүргүзүшкөн окумуштуулардын (Пуанкарс, Фату, Жюлиа, Кантар, Хуасдорф) илимий жыйынтыктары колдонулган. Ушул мезгилде гана бул эмгектерди бирдиктүү системага салууга мүмкүнчүлүк болду.

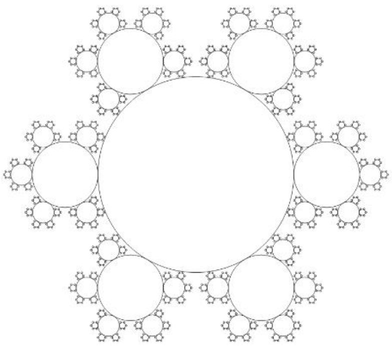
Фракталдык геометрия – бул математикадагы жана жаратылаштын математикалык сүрөттөлүшүндөгү революция деп эсептөөгө болот.

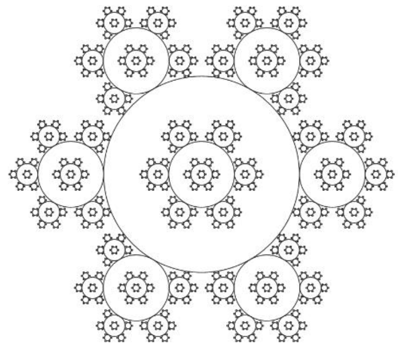
Фрактал деп аталган жаңы фигура жаратылыштагы татаал системалардын (Айдын бети, өпкөнүн бронхиалдык “дарагы”, бөйрйкүн иштеши, кан айлануу системасы, тоо кырлары, кыртыштын эррозиясы, дарактар, чакылган, ж.б.) модели боло алат.

Изилдөөнүн материалдары

Бул макалада төмөндөгүдөй маселе каралат.

Тегиздиктеги фракталдар (1-сүрөт) кандайдыр бир мейкиндик фракталдын бул же тигил симметрия тегиздигиндиктериндеги проекциялары болушса анда ошол мейкиндик фракталдын 3D моделин түзүүчү компьютердик программаны иштеп чыгуу.





“Ак гүл” “Алайгүл”

1-сүрөт

Фракталдарды түзүүнүн эки негизги жолу бар. Биринчи жол L системаларын колдонуу (Lindenmayer атынан коюлган), экинчиси IFS кайталанма функциялдын системасын (iterated function systems) колдонуу.

80-жылдардын ортосунда, Фракталдык структураларды алуунун жөнөкөй каражаты катары Кайталанма Функциялардын Системасы (Систем Итерируемых Функций) – СИФ методу пайда болгон. Аны америкалык математик М.Барнсли ойлоп тапкан, андан кийин Джорджия технологиялык институтунда иштеген.

L – система (Линденмайер системасы) – кайра жазуу паралелдик системасы, Лого тилине окшош граматиканын формалдуу түрү. Ар кандай геометриялык фракталдарды куруу үчүн колдонулган формалдаштырылган тил.

Акыркы жылдары L – системаларын колдонуу менен фракталдык объектилерди куруу өзгөчө актуалдуулукка ээ болдуда.

Чындыгында бул тилди колдонуу менен, L – системалар тилинин буйруктарын түшүнгөн интерпретаторду куруп, натыйжаны визуалдык көрүнүштү алуу үчүн компьютердик графиканын жардамы менен ишке ашырууга ыңгайлуу.

Өзгөрүлмөлөр: *R, l,i; мында* $R_1 = 64$; $R_i = 0{,}3R_{i-1}$; $i = 1, \dots, n$; $l = 2R_i + 0{,}3R_{i-1}$

туруктуулар: $+$, $-$, *[,]*

аксиома: 0;

эрежелер: *(*$R_i \to i{+}lR_{i+1}[\ lR_{i+1}[\ lR_{i+1}[\ lR_{i+1}\ [lR_{i+1}\ [lR_{i+1} - lR_{i+1}]\ lR_{i+1}]\ lR_{i+1}]\ lR_{i+1}]\ lR_{i+1}]\ lR_{i+1}]$*)*

Интерпретация

$+$: xy тегиздигинде иштөө

$-$: yz тегиздигинде иштөө

[: 30 градус солго бурлуу

] : 30 градус оңго бурлуу

l : кадам

i : рекурсия

R_i : радиусу R_i болгон сфера

L-системаларын колдонуу менен үч өлчөмдүү координаталар системасында Фрактал төмөнкүдөй курулат:

x = R * cos(lat) * cos(long)

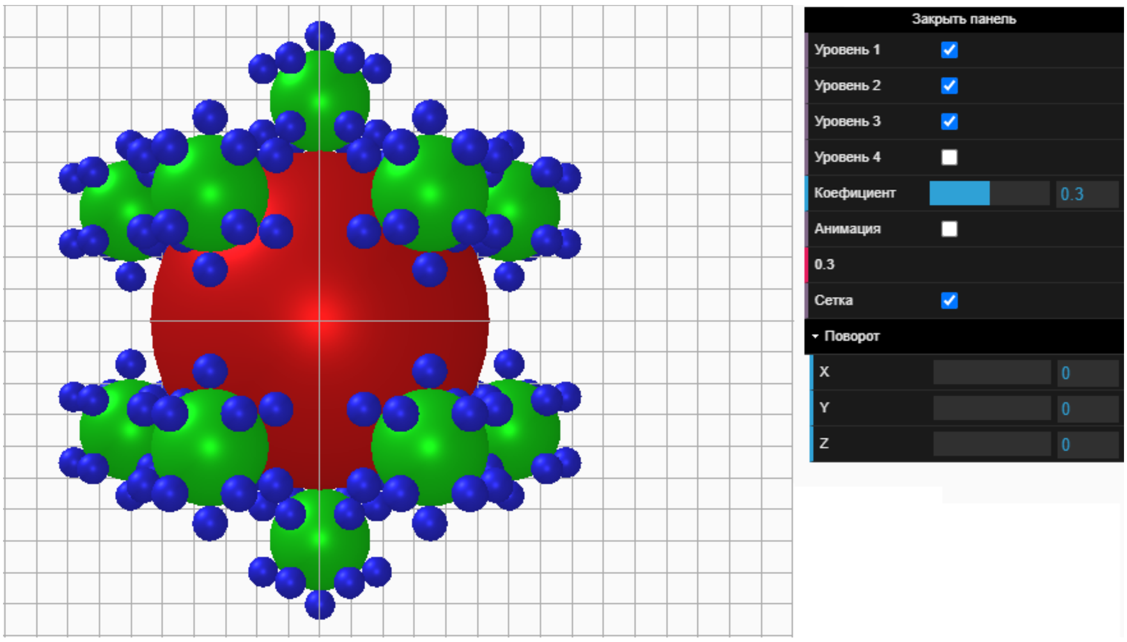
y = R * cos(lat) * sin(long)

z = R * sin(lat),

мында R - радиус, lat - широта (-90 <= lat <= 90), long - долгота (-180 <= long <= 180).

«Он төрт мунаралуу сфера» фракталын визуалдык көрүнүштө алуу үчүн JavaScript программалоо тили, WebGL, Three.js библиотекалары тандалып алынды жана скрипт төмөндө келтирилген:

```
var fr = 64; var rl = 0.3; var sl = 6;
var sfcalc=[], sf=[], frl=rl, anim = false, ax = 0, ay = 0, az = 0;
function SfCalc(x, y, z, r, lv) {
  this.x = x;  this.y = y;  this.z = z;  this.r = r;  this.lv = lv;
  if (this.lv < n-1){
    var dist = this.r/2*(rl+1);
    var a = (angle+Math.PI/4) % Math.PI*2;
    for (let i = 0; i < sl; i++) {
      var nx = dist * Math.cos(a); var ny = dist * Math.sin(a);
      sfcalc.push(new SferaCalc(this.x+nx, this.y+ny, this.z, this.r*rl, this.lv+1));
      a+=angle; }
    var a = (angle+Math.PI/4) % Math.PI*2;
    for (let i = 0; i < sl; i++) {
      if(i!=1 && i!=4) {
        var nz = dist * Math.cos(a); var ny = dist * Math.sin(a);
        sfcalc.push(new SferaCalc(this.x, this.y+ny, this.z+nz, this.r*rl, this.lv+1));
      }
      a+=angle;
}}}
  for (var i = 0; i < sf.length-1 ; i++) {
    sf[i].position.set( sfcalc[i].x, sfcalc[i].y, sfcalc[i].z);
    var kf = sfcalc[i].r/(2*fr);    sf[i].scale.set(kf,kf,kf);
  }
  groupS.rotation.set(ax*Math.PI/180,ay*Math.PI/180,az*Math.PI/180); }
```



2-сүрөт

Иштелип чыккан программа (2-сүрөт), L – система (аксиома, генерация эрежелери, ыктымалдуулук, параметрлер) түрүндөгү моделди, ошондой эле визуалдаштырууну ишке ашырган моделдөө натыйжаларынын интерпретаторунун глобалдык (бир нече моделдер үчүн) жана локалдык (бир модель үчүн) параметрлерин көрсөтүүгө мүмкүндүк берет.

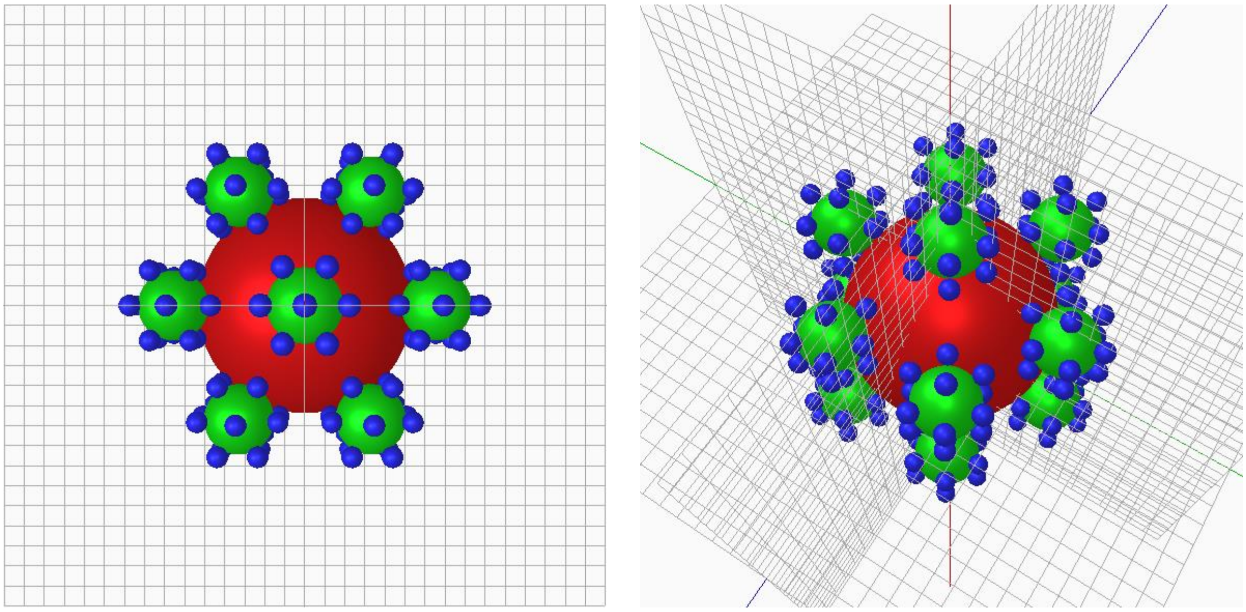
Изилдөнүнү жыйынтыгы.

Жогорудагылардын негизинде төмөндөгүндөй теорема далилденди.

Теорема. Эгерде изделүүчү фракталдын симметрия тегиздиктериндеги проекциялары (1-сүрөт) берилген болсо, анда анын 3D модели 2-сүрөттөгү көрүнүштө болот.

[4] макалада “Алты мунаралуу сфера” деген аталыштагы мейкиндиктеги геометриялык фракталдын 3D моделин түзүү үчүн компьютердик программа иштелип чыккан.

2-сүрөттө көрсөтүлгөн мейкиндик фракталды "Он төрт мунаралуу сфера" деп атайбыз.



Адабияттар

1. Б.Мандельброт Фрактальная геометрия природы – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, – 656 с.
2. Г.Матиева Авторское право на геометрический фрактал “Ак гүл” (№3896 от 05.03.2020)
3. Г.Матиева Авторское право на геометрический фрактал “Алайгүл” (№3901 от 05.03.2020)
4. G.Matieva, U.Moldoyarov Space Fractal Program for 3D model construction – NeuroQuantology / October 2022 / Volume 20 / Issue 14 / Page 505-508 / Doi: 10.4704 / nq.2022.20.14. NQ88071

УДК 517.95

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Окбоев Акмалжон Бахромжонович, PhD
akmaljon12012@gmail.com
Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В работе исследована задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа в смешанной области. Параболическая часть рассматриваемого уравнения состоит из дробной производной по Риману-Лиувиллю, а гиперболическая часть состоит из вырождающегося гиперболического уравнения второго рода. Решение поставленной задачи в гиперболической подобласти найдено как решение задачи Коши, а в параболической подобласти - как решение первой краевой задачи. Для доказательства существования решения задачи используется теория интегральных уравнений Вольтерра второго рода.*

Ключевые слова: *Уравнение параболо-гиперболического типа, смешанная область, задача Трикоми, задача Коши, первая краевая задача.*

AN ANALOG OF THE TRICOMI PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION WITH RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVE

Akmaljon Okboev Bakhromjonovich, PhD
akmaljon12012@gmail.com
V.I. Romanovskii Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences
Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *In this article, the Tricomi problem for a parabolic-hyperbolic type equation in a mixed domain is investigated. Riemann-Liouville fractional derivative participates in the parabolic part of the considerated equation, and the hyperbolic part consists of a degenerate hyperbolic equation of the second kind. The solution of the problem in the hyperbolic sub-domain is found as a solution to the Cauchy problem, and in a parabolic sub-domain as a solution to the first boundary value problem. For proving the existence of the solution of the problem, the theory of second kind Volterra integral equations is used.*

Key words: *parabolic-hyperbolic type equation, mixed domain, Tricomi problem, Cauchy problem, first boundary value problem.*

Введение. В этой работе в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AB$ для уравнения

$$0 = \begin{cases} L_1(u) \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D_{0y}^{\delta} u - \lambda^2 u, & (x,y) \in \Omega_1, \\ L_{\alpha,\lambda}(u) \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial y} - \lambda^2 u, & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases} \tag{1}$$

сформулируем и исследуем задачи Трикоми, где Ω_1-область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AB, BB_0, A_0B_0, AA_0 прямых $y = 0, x = 1, y = 1, x = 0$ соответственно, Ω_2 - область, ограниченная при $y < 0$ дугами AC, BC, AB характеристик $x - 2\sqrt{-y} = 0$, $x + 2\sqrt{-y} = 1$, $y = 0$ уравнения (1), $\delta \in (0,1)$ $\alpha \in (-1/2, 0)$, а λ - действительное или чисто мнимое число, $D_{0x}^{\alpha}\varphi(x)$ - интегро-дифференциальный оператор порядка α в смысле Римана-Лиувилля

$$D_{0x}^{\alpha}\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_0^x\dfrac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, \alpha<0,\\ \varphi(x), \quad \alpha=0,\\ \dfrac{d^n}{dx^n}D_{0x}^{\alpha-n}\varphi(x), \quad \alpha>0.\end{cases}$$

Постановка задачи

Определение 1. *Регулярным в области* Ω_1 *решением уравнения (1), называется функция* $u(x,y)$*, удовлетворяющая в области* Ω_1 *уравнению (1) и следующим условиям* $D_{0y}^{\delta-1}u(x,y)\in C(\overline{\Omega_1})$, $u_{xx}(x,y), D_{0y}^{\delta}u(x,y)\in C(\Omega_1)$.

Задача T_0**.** Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами: а) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области Ω_1 и решением класса R_{00}^{λ} в области Ω_2; б) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to-0}u(x,y)=\lim_{y\to+0}y^{1-\delta}u(x,y), \quad 0\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left[u(x,y)-A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)\right]=\lim_{y\to+0}y^{1-\delta}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^{1-\delta}u(x,y)\right], \quad 0<x<1;$$

в) на границе области Ω удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{AA_0}=\varphi_0(y),\ u|_{BB_0}=\varphi_1(y),\ 0\leqslant y\leqslant 1; \tag{2}$$

$$u|_{AC}=\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1/2, \tag{3}$$

где $A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)$ – определяется формулой

$$A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)=\gamma_1\int_0^1\tau(\zeta)\left[z(1-z)\right]^{\beta}\bar{J}_{\beta}(\sigma)\,dz+\frac{8\gamma_1 y}{(1+\beta)(1+2\beta)}\times$$
$$\times\int_0^1\left(\lambda^2-\frac{d^2}{d\zeta^2}\right)\tau(\zeta)\left[z(1-z)\right]^{1+\beta}\bar{J}_{1+\beta}(\sigma)\,dz,$$

$\gamma_1=\Gamma(1+2\alpha)/\Gamma^2(1/2+\alpha)$, $\quad \sigma=4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, $\quad \zeta=x-2\sqrt{-y}(1-2z)$, $\quad \tau(x)=u(x,-0)$, $J_{\gamma}\ z$ - функция Бесселя первого рода, $\bar{J}_{\gamma}\ z\ =\Gamma\ \gamma+1\ \ z/2^{\ -\gamma}J_{\gamma}\ z$, *т.е.* $\bar{J}_{\gamma}\ z\ =\Gamma\ \gamma+1\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{-1^{\ m}\ z/2^{\ 2m}}{m!\Gamma\ m+\gamma+1}$, $\gamma\ne-1,-2,-3,....,$ а $\varphi_0(y),\varphi_1(y)$ и $\psi(x)$ – заданные непрерывные функции.

Отметим, что Н.К.Мамадалиев [1, 2] исследовал различные задачи для уравнения (1) при различных значениях α, когда $\delta=1$, $\lambda=0$. В работе [3] изучено нелокальная краевая задача для уравнения (1) при $\alpha=\alpha_0-n,\alpha_0\in(1/2,1),n=2,3,...$ и $\delta=1$. В работе [4] поставленна и исследована задача Трикоми для уравнения (1) при $\alpha=\alpha_0-n,\alpha_0\in(1/2,1),n=2,3,...$ и $\delta=1$.

Свойства некоторых операторов с функциями Бесселя в ядрах.

Рассмотрим следующие интегральные операторы [5]:

$$A_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]=g(x)-\int_k^x g(t)\frac{t-k}{x-k}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-k)(x-t)}\right]dt, \tag{4}$$

$$B_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]=g(x)+\int_k^x g(t)\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\lambda\sqrt{(k-t)(x-t)}\right]dt. \tag{5}$$

Свойство 1. *Если* $g(x)\in C(0,1)\cap L_1[0,1]$, *то выражения* $A_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]$ *и* $B_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]$ *будут определены в* $(0,1)$ *и принадлежат классу* $C(0,1)$.

Справедлива следующая теорема и лемма:

Теорема 1[5]. *Если* $g(x)\in C[0,1]$, *то для любых* $k\in[0,1]$ *и* $x\in(0,1)$ *справедливы следующие равенства:* $A_{kx}^{1,\lambda}B_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]=g(x), B_{kx}^{1,\lambda}A_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]=g(x),$ *т.е. в классе непрерывных на* $[0,1]$ *функций операторы (4) и (5) являются взаимно обратными.*

Лемма 1[5]. *При* $\beta<1$ *и* $x\in[0,1]$ *справедливы равенства*

$$\int_0^x (x-t)^{-\beta}\,\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{t(x-t)}\right]g(t)\,dt=\Gamma(1-\beta)D_{0x}^{\beta-1}\left\{B_{0x}^{1,\lambda i}\left[g(x)\right]\right\}, \tag{6}$$

$$\int_x^1 (t-x)^{-\beta}\,\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(t-x)(1-t)}\right]g(t)\,dt=\Gamma(1-\beta)D_{x1}^{\beta-1}\left\{B_{x1}^{1,\lambda i}\left[g(x)\right]\right\}.$$

Исследование задачи T_0

Рассмотрим уравнение (1) в области Ω_2, т.е. рассмотрим уравнение $L_{\alpha,\lambda}(u)=0$. Непрерывное в $\bar{\Omega}_2$ решение видоизмененной задачи Коши для уравнения $L_{\alpha,\lambda}(u)=0$, с начальными данными

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\tau(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1; \tag{7}$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\alpha}(\partial/\partial y)\left[u-A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)\right]=\nu(x),\ \ 0<x<1, \tag{8}$$

в характеристических переменных $\xi=x-2\sqrt{-y}$, $\eta=x+2\sqrt{-y}$ имеет вид

$$u(x,y)=A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)-2^{-2+4\beta}\gamma_2\int_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}\,\bar{J}_{-\beta}(\sigma)\nu(t)\,dt, \tag{9}$$

где $\gamma_2=2\Gamma(2-2\alpha)/\Gamma^2(3/2-\alpha)$, $\sigma=\lambda\sqrt{(\eta-t)(t-\xi)}$,

$$A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)=\gamma_1(\eta-\xi)^{-1-2\beta}\int_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{\beta}(t-\xi)^{\beta}\,\bar{J}_{\beta}(\sigma)\tau(t)\,dt-$$

$$-\frac{\gamma_1(\eta-\xi)^{-1-2\beta}}{2(1+2\beta)(\beta+1)}\int_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{\beta+1}(t-\xi)^{\beta+1}\,\bar{J}_{\beta+1}(\sigma)\left[\lambda^2\tau(t)-\tau''(t)\right]dt.$$

Определение 2. Функция $u(x,y)$, определяемая в области Ω_2 формулой (9), называется решением уравнения $L_{\alpha,\lambda}(u)=0$ из класса R_{0p}^{λ} при $-1/2<\alpha<0$, если функция $\tau(x)$ представима в виде

$$\tau(x)=sign(x-p)\int_p^x |x-t|^{-2\beta}\,\overline{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-t)\right]T(t)dt,$$

где $\nu(x),\,T(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ *и* $\nu'(x),\,T'(x)\in L(0,1)$.

Согласно определению 2, функция $u(x,y)$, определенная в области Ω_2 в виде (9), называется решением уравнения $L_{\alpha,\lambda}(0)=0$ из класса R_{00}^{λ}, если функция $\tau(x)$ представима в виде

$$\tau(x)=\int_0^x (x-s)^{-2\beta}\,\overline{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-s)\right]T(s)ds, \tag{10}$$

а $\nu(x),T(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ и $\nu'(x),\,T'(x)\in L(0,1)$.

Из (10) вытекает, $\tau(x)\in C^3[0,1]$ и

$$\tau(0)=0,\ \tau'(0)=0. \tag{11}$$

Решения задачи {(1), (7), (8)} из класса R_{00}^{λ} в области Ω_2 имеет вид

$$u(x,y)=\int_0^{\xi}(\eta-s)^{-\beta}(\xi-s)^{-\beta}\,\overline{I}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\eta-s)(\xi-s)}\right]T(s)ds+$$

$$+\int_{\xi}^{\eta}(\eta-s)^{-\beta}(s-\xi)^{-\beta}\,\overline{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\eta-s)(s-\xi)}\right]N(s)ds, \tag{12}$$

где $N(s)=(2cos\pi\beta)^{-1}T(s)-4^{2\beta-1}\gamma_2\nu(s)$.

Подчиняя решение (12) краевому условию (3), получаем уравнение относительно $N(\eta)$:

$$\int_0^{\eta}(\eta-s)^{-\beta}s^{-\beta}\overline{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\eta-s)s}\right]N(s)ds=\psi\left(\frac{\eta}{2}\right),\quad 0\le\eta\le 1.$$

Последнее уравнение, в результате применения равенства (6), можно привести к виду, удобному для дальнейшего исследования:

$$D_{0\eta}^{\beta-1}\left\{B_{0\eta}^{1,\lambda i}\left[\eta^{-\beta}N(\eta)\right]\right\}=\frac{1}{\Gamma(-\beta+1)}\psi\left(\frac{\eta}{2}\right),\ \ 0\le\eta\le 1. \tag{13}$$

Применяя к обеим частям уравнения (13) последовательно операторы $D_{0\eta}^{1-\beta}$, $A_{0\eta}^{1,\lambda i}$ и учитывая равенства $D_{0\eta}^{1-\beta}D_{0\eta}^{\beta-1}f(\eta)=f(\eta)$, $A_{0\eta}^{1,\lambda i}B_{0\eta}^{1,\lambda i}g(\eta)=g(\eta)$, а также структуры функции $N(\eta)$, получаем

$$T(x)=\gamma_3\nu(x)+\frac{2cos\pi\beta x^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)}A_{0x}^{1,i\lambda}\left[D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Подставляя это значение $T(x)$ в (10), находим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке $[0,1]$, получаемое из области Ω_2:

$$\tau(x)=\gamma_3\int_0^x (x-s)^{-2\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-s)\right]\nu(s)\,ds+$$

$$+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-s)^{-2\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-s)\right]s^{\beta}A_{0s}^{1,\lambda}\left[D_{0\zeta}^{1-\beta}\psi\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{14}$$

где $\gamma_3=2\cdot 4^{2\beta-1}\gamma_2 cos\pi\beta$.

Согласно условиям задачи T_0, в уравнении (1) и в условиях (2) можно перейти к пределу при $y\to+0$ (например, см. [6], [7]). В результате получим следующие соотношения:

$$\tau''(x)-\Gamma(1+\delta)\nu(x)-\lambda^2\tau(x)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{15}$$

$$\tau(0)=\lim_{y\to+0} y^{1-\delta}\varphi_1(y)=a,\ \tau(1)=\lim_{y\to+0} y^{1-\delta}\varphi_2(y)=b. \tag{16}$$

Если считать, что $\nu(x)$ - известная функция, то при $\lambda\in R$ или $\lambda i\in R$, $\lambda i\neq\pi m, m\in Z$ задача {(15), (16)} имеет единственное решение [8]

$$\tau(x)=a+x(b-a)+$$

$$+\lambda^2\int_0^1 G(x,t;\lambda)\left[a+t(b-a)\right]dt+\Gamma(1+\delta)\int_0^1 G(x,t;\lambda)\nu(t)\,dt, \tag{17}$$

где $G(x,t;\lambda)$ - функция Грина задачи {(15), (16)}

$$G(x,t;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{sh\lambda(x-t)sh\lambda t}{\lambda sh\lambda}, 0\leq x\leq t,\\[2mm] \dfrac{sh\lambda x\, sh\lambda(t-1)}{\lambda sh\lambda}, t\leq x\leq 1.\end{cases}$$

Из формулы (17), в силу равенства (11), вытекают следующие равенства $a=0,\, b=0$ и

$$\tau(x)=\Gamma(1+\delta)\int_0^1 G(x,t;\lambda)\nu(t)\,dt. \tag{18}$$

(18) является основным соотношением между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке $[0,1]$, получаемое из области Ω_1.

Теперь из соотношений (18) и (14) найдем неизвестные функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$. С этой целью, из (18) и (14) исключим функцию $\tau(x)$:

$$\Gamma(1+\delta)\int_0^1 G(x,t;\lambda)\nu(t)\,dt=\gamma_3\int_0^x (x-\zeta)^{-2\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-\zeta)\right]\nu(\zeta)\,d\zeta+$$

$$+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-s)^{-2\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-s)\right]s^{\beta}A_{0s}^{1,\lambda}\left[D_{0s}^{1-\beta}\psi\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{19}$$

Продифференцируем это равенство дважды по x. Затем, от полученного равенства почленно вычтем равенство (19). В результате, имеем интегральное уравнение относительно $\nu(x)$:

$$\nu(x)-\frac{2\beta(2\beta+1)\gamma_3}{\Gamma(1+\delta)}\int_0^x (x-s)^{-2\beta-2}\,\bar{I}_{-\beta-1}\left[\lambda(x-s)\right]\nu(s)ds=Q(x), 0\le x\le 1, \quad (20)$$

где

$$Q(x)=\frac{4\beta(2\beta+1)\cos\pi\beta}{\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta-2}\,\bar{I}_{-\beta-1}\left[\lambda(x-t)\right]\Phi(t)dt,$$

$$\Phi(t)=t^{\beta}A_{0t}^{1,\lambda}\left[D_{0t}^{1-\beta}\psi\left(\frac{t}{2}\right)\right].$$

Так как $\alpha\in(-1/2,0)$, то $\beta=\alpha-1/2\in(-1,-1/2)$ и $-2\beta-2\in(-1,0)$. Поэтому ядро интегрального уравнения (20) имеет слабую особенность.

Пусть выполнены следующие условия:

$$\psi^{(m)}(0)=0,\ m=0,1,2,\ \psi'''(s/2)=s^{p}\psi_0(s),\ p>-2-2\beta, \psi_0(s)\in C[0,1]. \quad (21)$$

Докажем, что $Q(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ и $Q'(x)\in L(0,1)$. С учетом (21) и (4), имеем

$$\Phi(t)=\frac{t^{2+2\beta}}{8\Gamma(2+\beta)}\int_0^1(1-z)^{1+\beta}\,\psi'''\left(\frac{zt}{2}\right)dz-$$

$$-\frac{\lambda^2t^{4+2\beta}}{32\Gamma(2+\beta)}\int_0^1 s^{3+\beta}\bar{J}_1\left[\lambda t\sqrt{s(1-s)}\right]ds\int_0^1(1-z)^{1+\beta}\,\psi'''\left(\frac{zts}{2}\right)dz\ ,$$

$$\Phi'(t)=\frac{\beta t^{1+2\beta}}{8\Gamma(2+\beta)}\int_0^1(1-z)^{1+\beta}\,\psi'''\left(\frac{tz}{2}\right)dz+\frac{t^{1+2\beta}}{8\Gamma(1+\beta)}\int_0^1(1-z)^{\beta}\,\psi'''\left(\frac{zt}{2}\right)dz-$$

$$-\frac{\beta\lambda^2t^{3+2\beta}}{32\Gamma(2+\beta)}\int_0^1 s^{3+\beta}\bar{J}_1\left[\lambda t\sqrt{s(1-s)}\right]ds\int_0^1(1-z)^{1+\beta}\,\psi'''\left(\frac{zst}{2}\right)dz+$$

$$+\frac{\lambda^4t^{5+2\beta}}{128\Gamma(2+\beta)}\int_0^1 s^{3+\beta}(2-s)\bar{J}_2\left[\lambda t\sqrt{s(1-s)}\right]ds\int_0^1(1-z)^{1+\beta}\,\psi'''\left(\frac{zts}{2}\right)dz\ . \quad (22)$$

Отсюда, в силу $\psi'''(s/2)=s^{p}\psi_0(s), p>-2-2\beta, \psi_0(s)\in C[0,1]$, следует, что $\Phi(\zeta)\in C[0,1]$, поэтому $Q(x)\in C[0,1]$. Теперь вычисляем $Q'(x)$:

$$Q'(x)=-\frac{4\beta\cos\pi\beta\lambda^2}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta-1}\,\bar{I}_{-\beta-1}\left[\lambda(x-t)\right]\Phi(t)dt+$$

$$+\frac{4\beta(2\beta+1)\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta-2}\,\bar{I}_{-\beta-1}\left[\lambda(x-t)\right]\Phi'(t)dt-$$

$$-\frac{4\beta\cos\pi\beta\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta-1}\,\bar{I}'_{-\beta-1}\left[\lambda(x-t)\right]\Phi'(t)dt.$$

Отсюда, согласно (21) и (22) следует, что $Q'(x)\in C(0,1)\cap L(0,1)$. Следовательно, $Q(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ и $Q'(x)\in L(0,1)$.

В силу свойств ядра и правой части интегрального уравнения (20), согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [9], оно имеет единственное решение.

После нахождения функции $\nu(x)$ из (20), функция $\tau(x)$ находится по формуле (18). После этого решение задачи T_0 в области Ω_2 определяется по формуле (12), а в области Ω_1 - как решение первой краевой задачи для уравнения $L_1(u)=0$ с условиями (2) и $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\delta}u(x,y)=\tau(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$ определяется по формуле [10]

$$u(x,y)=\int_0^1\tau(t)G(x,y;t,0)\,dt+\int_0^y\varphi_1(s)G_t(x,y;0,s)\,ds-\int_0^y\varphi_2(s)G_t(x,y;1,s)\,ds,$$

где

$$G(x,y;t,s)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\Gamma(x-t+2m,y-s)-\Gamma(x+t+2m,y-s)\right],$$

$$\Gamma(x,y)=\frac{1}{2y}\int_{|x|}^{\infty}e_{1,\delta/2}^{1,0}\left(-\frac{\xi}{y^{\delta/2}}\right)J_0\left(\lambda\sqrt{\xi^2-x^2}\right)d\xi\,,\ e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+\alpha k)\Gamma(\delta-\beta k)},\alpha>\beta.$$

Таким образом, доказана следующая основная

Теорема 2. Если λ – действительное число или чисто мнимое число, отличное от $i\pi n,\ n\in Z,$ а заданные функции удовлетворяют условиям (21) и $y^{1-\delta}\varphi_1(y), y^{1-\delta}\varphi_2(y)\in C[0,1],\ \lim\limits_{y\to+0} y^{1-\delta}\varphi_1(y)=0,\ \lim\limits_{y\to+0} y^{1-\delta}\varphi_2(y)=0$, то задача T_0 имеет единственное решение.

Литература

1. Мамадалиев, Нуманжон К. "О представлении решения видоизмененной задачи Коши." *Сибирский математический журнал* 41, no. 5 (2000): 1087-1097.
2. Мамадалиев, Назиржон Камилжонович. "Об одном подходе к решению задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа." *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук* 9.1 (2007): 66-68.
3. Urinov AK, Okboev AB. Nonlocal boundary-value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020 Sep;41(9):1886-97.
4. Окбоев А.Б. Задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа // Бюллетень Института математики. –Ташкент. 2020. №1. –С. 95 – 103
5. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. –Ташкент: Фан, 1997. 168 с.
6. S. Kh. Gekkieva, A boundary value problem for the generalized trans- fer equation with a fractional derivative in a semi-infinite domain. Izv. Kabardino-Balkarsk. Nauchnogo Tsentra RAN 1 (8) (2002), 6-8.
7. Berdyshev, A. S., A. Cabada, and E. T. Karimov. "On a non-local boundary problem for parabolic-hyperbolic equation involving Riemann-Liouville fractional differential operator."
8. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. –Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
9. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – Москва: Физматгиз, 1959. – 232 с.
10. Mamchuev, M.O. Solutions of the Main Boundary Value Problems for a Loaded Second-Order Parabolic Equation with Constant Coefficients, Differ. Uravn., 2016, vol. 52, no. 6, pp. 789–797.

УДК 517.968

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Рахмонов Фарход Дустмуродович, Доктор Философии
farxod_frd@bk.ru
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *Рассмотрены вопросы разрешимости нелокальной краевой задачи для одного псевдопараболического дифференциального уравнения. С помощью метода ряда Фурье получена счетная система обыкновенных интегральных уравнений Фредгольма второго рода для определения коэффициентов неизвестной функции. При доказательстве однозначной разрешимости счетной системы применен метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Показаны абсолютная и равномерная сходимость и возможность почленного дифференцирования полученных рядов Фурье. Результаты работы сформулированы в виде теорем.*
Ключевые слова: *Уравнение псевдопараболического типа, счетная система, интегральное условие, интегральное уравнение Фредгольма, разрешимость.*

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A HIGH-ORDER PSEUDOPARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION

Rakhmonov Farhod Dustmurodovich, Doctor of Philosophy
farxod_frd@bk.ru
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
Tashkent, Uzbekistan

Annotation. *The questions of solvability of a nonlocal boundary value problem for a pseudoparabolic differential equation are considered. Using the Fourier series method, a countable system of Fredholm ordinary integral equations of the second kind is obtained to determine the coefficients of an unknown function. In proving the unique solvability of the countable system, the method of successive approximations was used in combination with the method of contraction mappings. The absolute and uniform convergence and the possibility of term-by-term differentiation of the obtained Fourier series are shown. The results of the work are formulated in the form of theorems.*
Keywords: *Pseudoparabolic type equation, countable system, integral condition, Fredholm integral equation, solvability.*

1. Постановка задачи

Нелокальные задачи для дифференциальных уравнений параболического, псевдопараболического и гиперболического типов являются одним из актуальных разделов современной математики. Поэтому по данному разделу математики до сих пор появляются большое количество научных публикаций (см. например [1-14]).

Исследуется классическая разрешимость нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения псевдопараболического типа в одномерной области $\Omega = \{(t, x) \mid 0 < t < T\,,\ 0 < x < l\}$:

$$D_{t,x}^{1+4k}[U(t,x)] = f(t,x), \tag{1}$$

где

$$D_{t,x}^{1+4k}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left[(-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right]-(-1)^k\omega(t)\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},$$

T и l - положительные действительные числа, k заданное положительное целое число, $\omega(t)-$ непрерывная функция на отрезке Ω_T, $f(t,x)\in C_{t,x}^{1+4k}(\Omega_T\times\Omega_l)$, $\Omega_T\equiv[0;T]$, $x\in\Omega_l\equiv[0;l]$.

Постановка задачи. Найдем функцию $U(t,x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), следующему нелокальному условию

$$U(0,x)+\int_0^T U(t,x)\,dt=\varphi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{2}$$

условиям типа Дирихле для $0\le t\le T$

$$u(t,0)=u(t,l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,l)=$$

$$=\ldots=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,l)=0 \tag{3}$$

и классу функций

$$U(t,x)\in C(\bar{\Omega})\cap C_{t,x}^{1,4k}(\Omega)\cap C_{t,x}^{1+2k}(\Omega), \tag{4}$$

где $\varphi(x)-$ заданная гладкая функция и имеют место условия

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(l)=$$

$$=\ldots=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi(0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi(l)=0.$$

Мы также предполагаем, что для заданной функции $f(t,x)$ верны следующие граничные условия

$$f(t,0)=f(t,l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,l)=$$

$$=\ldots=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}f(t,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}f(t,l)=0.$$

2. Разложение решения задачи (1)-(4) в ряд Фурье

Нетривиальные решения краевой задачи (1)-(4) ищутся в виде ряда Фурье

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\vartheta_n(x), \tag{5}$$

где

$$u_n(t) = \int_0^l U(t,x)\,\vartheta_n(x)\,d\,x, \tag{6}$$

$$\vartheta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Предполагаем, что следующая функция тоже разлагается в ряд Фурье

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\vartheta_n(x), \tag{7}$$

где

$$f_n(t) = \int_0^l f(t,x)\,\vartheta_n(x)\,d\,x. \tag{8}$$

Подставляя ряды Фурье (5) и (7) в псевдопараболическое уравнение (1), получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменной t

$$u'_n(t) - \lambda_n\omega(t)\,u_n(t) = \frac{f_n(t)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\,, \tag{9}$$

где $\lambda_n = \dfrac{\mu_n^{2k}}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}, \quad \mu_n^{4k} = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^{4k}$.

Интегрируем счетную систему дифференциальных уравнений первого порядка (9) и получаем

$$u_n(t) = A_n + \lambda_n \int_0^t \left[\omega(s)\,u_n(s) + \frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right] d\,s, \tag{10}$$

где $A_n -$ произвольные постоянные.

С помощью коэффициентов Фурье (6) интегральное условие (2) записывается в следующем виде

$$u_n(0) + \int_0^T u_n(t)\,d\,t = \int_0^l \left(U(0,x) + \int_0^T U(t,x)\,d\,t\right)\vartheta_n(x)\,d\,x =$$

$$= \int_0^l \varphi(x)\,\vartheta_n(x)\,d\,x = \varphi_n. \tag{11}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_n в (10), воспользуемся условием (11). Поэтому из (10) получим

$$u_n(0) = A_n,\ A_n T + \lambda_n \int_0^T (T-s)\left[\omega(s)\,u_n(s) + \frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right] ds.$$

Подставляя эти величины в условие (11), получим

$$A_n(1+T)=\varphi_n-\lambda_n\int_0^T(T-s)\left[\omega(s)u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]ds.$$

Отсюда находим неизвестный коэффициент интегрирования:

$$A_n=\frac{\varphi_n}{1+T}-\frac{\lambda_n}{1+T}\int_0^T(T-s)\left[\omega(s)u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]ds. \qquad (12)$$

Подставляя (12) в уравнение (10), получаем счетную систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$u_n(t)=\Im(t;u_n(t))\equiv\frac{\varphi_n}{1+T}+\int_0^T H_n(s)\left[\omega(s)u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]d\,s, \qquad (13)$$

где

$$H_n(s)=\begin{cases}-\dfrac{\lambda_n}{1+T}(T-s),\ t<s\le T,\\ \lambda_n-\dfrac{\lambda_n}{1+T}(T-s),\ 0\le s<t.\end{cases} \qquad (14)$$

Подставляя представление коэффициентов Фурье (13) неизвестной функции в ряд Фурье (5), получаем формальное решение краевой задачи (1)-(4)

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left\{\frac{\varphi_n}{1+T}+\int_0^T H_n(s)\left[\omega(s)u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]d\,s\right\}. \qquad (15)$$

3. Однозначная разрешимость системы из счетных систем интегральных уравнений Фредгольма (13)

Условия гладкости. Пусть для функций

$$\varphi(x)\in C^{4k}\left(\Omega_l\right),\quad f(t,x)\in C^{1,4k}\left(\Omega\right)$$

в области существуют кусочно-непрерывные производные по переменной x порядка $4k+1$. Тогда, интегрируя по частям функций (8) и (11) $4k+1$ раз по переменной x, получаем следующие соотношения

$$|\varphi_n|=\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\frac{\left|\varphi_n^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}}, \qquad (16)$$

$$|f_n(t)|=\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\frac{\left|f_n^{(4k+1)}(t)\right|}{n^{4k+1}}, \qquad (17)$$

где

$$\varphi_n^{(4k+1)}=\int_0^l\frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\vartheta_n(x)\,d\,x,\ i=1,2,$$

$$f_n^{(4k+1)}(t)=\int_0^l\frac{\partial^{4k+1}f(t,x)}{\partial x^{4k+1}}\vartheta_n(x)\,d\,x.$$

Здесь также имеют место неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n^{(4k+1)}\right]^2 \le \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1}\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\right]^2 dx, \tag{18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n^{(4k+1)}(t)\right]^2 \le \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1}\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+1}f(t,x)}{\partial x^{4k+1}}\right]^2 dx. \tag{19}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия гладкости (16) и (17) и условия: $\rho = T\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}} < 1.$ Тогда счетная система (13) однозначно разрешима в пространстве $B_2(T)$. При этом искомое решение может быть найдено из следующего итерационного процесса:

$$\begin{cases} u_n^0(t) = \dfrac{\varphi_n}{1+T}, \\ u_n^{m+1}(t) = \Im(t; u_n^m(t)),\ m = 0,1,2,... \end{cases} \tag{20}$$

Доказательство. Мы используем метод сжимающих отображений в пространстве $B_2(T)$. С учетом формул (16) применяем неравенство Коши-Буняковского и затем применяем неравенства Бесселя (18). Тогда получаем из приближения (20), что справедлива следующая оценка:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|u_n^0(t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_n}{1+T}\right| \le \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_{1,n}^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}} \le$$

$$\le \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{4k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k+2}}}\left\|\frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\right\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty. \tag{21}$$

Теперь для разности произвольных приближений (20) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|u_n^{m+1}(t) - u_n^m(t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\max_{s\in\Omega_T}\left|H_n(s)\right|\cdot\left|u_n^m(s) - u_n^{m-1}(s)\right| ds \le$$

$$\le \int_0^T\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{s\in\Omega_T}\left|H_n(s)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{s\in\Omega_T}\left|u_n^m(s) - u_n^{m-1}(s)\right|^2} ds. \tag{22}$$

Из (14) видно, что справедлива оценка

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{s\in\Omega_T}\left|H_n(s)\right|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{s\in\Omega_T}\left|\lambda_n\frac{1+s}{1+T}\right|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_n\right|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mu_n^{2k}}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^{4k}}} = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}}.$$

С учетом этой оценки, из (22) получим

$$\left\|u^{m+1}(t) - u^m(t)\right\|_{B_2(T)} \le \rho\cdot\left\|u^m(t) - u^{m-1}(t)\right\|_{B_2(T)}, \tag{23}$$

$$\rho = T\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}}\,.$$

Согласно условию теоремы, $\rho < 1$. Следовательно, из оценки (23) следует, что оператор $\Im$ в правой части (13) сжимающий. Из оценок (21) и (23) следует, что существует единственная неподвижная точка, которая является решением счетной системы (13) в пространстве $B_2(T)$. Теорема доказана.

4. Неизвестная функция

Теорема 2. Неизвестная функция $U(t,x)$ определяется с помощью ряда Фурье (15). При этом функция (15) непрерывно дифференцируема по переменным, входящим в уравнение (1).

Доказательство. С учетом того, что $u(t) \in B_2(T)$ и формул (16)-(19), получаем оценку

$$\left|U(t,x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\vartheta_n(x)\right|\cdot\left|\frac{\varphi_n}{1+T}+\int_0^T H_n(s)\left[\omega(s)u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]ds\right| \le$$

$$\le \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_n^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}}+\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^T\left|\omega(s)\right|\sum_{n=1}^{\infty}\left|H_n(s)\right|\cdot\left|u_n(s)\right|+$$

$$+\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left|H_n(s)\right|\cdot\left|\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right|ds \le$$

$$\le \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{4k+1}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k+1}}}\left\|\frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\right\|_{L_2(\Omega_l)}+$$

$$+\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^T\left|\omega(s)\right|ds\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}}\,\left\|u(t)\right\|_{B_2(T)}+$$

$$+\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}}\int_0^T\left\|f(s)\right\|_{B_2(T)}ds < \infty, \tag{24}$$

так как согласно формулам (17) и (19) справедлива оценка

$$\left\|f(t)\right\|_{B_2(T)} \le \sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|f_n(t)\right| \le \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\frac{\left|f_n^{(4k+1)}(t)\right|}{n^{4k+1}} \le$$

$$\le \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k+2}}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|f_n^{(4k+1)}(t)\right|^2} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{4k+1}{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k+2}}}\sqrt{\max_{t\in\Omega_T}\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+1}f(t,x)}{\partial x^{4k+1}}\right]^2dx} < \infty.$$

Из (24) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье (15). Непрерывная дифференцируемость функции (15) по переменным, входящим в уравнение (1), доказывается аналогично.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Asanova A. T. On solvability of nonlinear boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2015. Vol. 63. P. 1–13.

2. Asanova A. T. One approach to the solution of a nonlocal problem for systems of hyperbolic equations with integral conditions // Journal of Mathematical Sciences. 2019.Vol. 238. № 3. P. 189–206.

3. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal problem for a nonlinear fractional mixed type integro-differential equation with spectral parameters // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365. № 060003. 20 p.

4. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal inverse problem for a pseudoheperbolic-pseudoelliptic type differential equation //AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365. № 060004. 21p.

5. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. Москва: Наука, 1986. 336 с.

6. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: СО «Наука», 1983. 319 с.

7. Бердышев А. С. Нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа в области с отходом от характеристики // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2117–2124.

8. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.

9. Дмитриев В. Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. № 2 (42). С. 15–27.

10. Иванчов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. №4. С. 547–564.

11. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №2. С. 294–304.

12. Нахушев А. М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242. №5. С. 1008–1011.

13. Прилепко А. И., Ткаченко Д. С. Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №4. С. 562–570.

14. Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н. Об одной нелокальной задаче для нелинейного параболического уравнения // Владикавказский математический журнал. 2014. Т. 16. № 1. С. 42–49.

УДК 550.344

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СЕЙСМОТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Сайипбекова Анара Мурадовна, д.ф.-м.н., профессор
asaiipbekova@oshsu.kg
Жылдызбек кызы Нурсыпат, преподаватель
njyldyzbekkyzy@oshsu.kg
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотации: *В данной работе проанализированы математические основы сейсмотомографических моделей земной коры и верхней мантии Тянь-Шаня и прилегающих территорий. Для построения двумерных и трехмерных моделей в разные этапы исследований применены три известных программных пакетов, построенных разные годы известными сейсмологами, это обеспечило достоверность полученных данных.*

Ключевые слова: *обратная кинематическая задача, двумерная инверсия, трехмерная инверсия, цифровые записи.*

СЕЙСМОТОМОГРАФИЯЛЫК ИЗИЛДӨӨЛӨРДУН МАТЕМАТИКАЛЫК НЕГИЗИ

Сайипбекова Анара Мурадовна, ф.-м. и. д., профессор
asaiipbekova@oshsu.kg
Жылдызбек кызы Нурсыпат, окутуучу
njyldyzbekkyzy@oshsu.kg
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул эмгекте Тянь-Шандын жана ага чектеш аймактардын жер кыртышынын жана жогорку мантиянын сейсмикалык томографиялык моделдеринин математикалык негиздери талданат. Изилдөөнүн ар кандай баскычтарында эки өлчөмдүү жана үч өлчөмдүү моделдерди куруу үчүн белгилүү сейсмологдор тарабынан ар кайсы жылдарда курулган үч белгилүү программалык пакеттер колдонулган, бул алынган маалыматтардын ишенимдүүлүгүн камсыз кылган.*

Ачкыч сөздөр*: тескери кинематикалык маселе, эки өлчөмдүү инверсия, үч өлчөмдүү инверсия, санариптик жазуулар.*

MATHEMATICAL BASIS OF SEISMOTOMOGRAPHIC INVESTIGATIONS

Saiipbekova Anara Muradovna, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
asaiipbekova@oshsu.kg
Jyldyzbek kyzy Nyrsypat, teacher
njyldyzbekkyzy@oshsu.kg
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract:*This paper analyzes the mathematical foundations of seismic tomographic models of the earth's crust and upper mantle of the Tien Shan and adjacent areas. To build two-dimensional and three-dimensional models at different stages of research, three well-known software packages were used, built in different years by well-known seismologists, this ensured the reliability of the data obtained.*

Keywords*: inverse kinematic problem, two-dimensional inversion, three-dimensional inversion, digital records.*

Известно, что, физические параметры Земной коры и верхней мантии функциями трех переменных. В настоящее время наиболее эффективные алгоритмы получены в основном линеаризованных задач, поэтому на большое количество исследований и интерес к обратным задачам сейсмики продолжает стимулироваться. Второй немаловажный фактор, если раньше записи промышленных, военных взрывов и землетрясений были аналоговыми сейчас, почти все научные организации предпочитают цифровые записи.

Определения скорости распределения упругих волн по данным о времени их пробега с сейсмологии является задачей интегральной геометрии, которая состоит в восстановлении функции, заданный интегралами по некоторыми семейству кривых. Если подойти строго по математике, общая задача интегральной геометрии –это восстановление функции на конечном линейном пространстве по множеству значений на заданном семействе вложенных в это пространство многообразий.

Обратная кинематическая задача сейсмики является некорректно поставленной. Решения такой задачи может быть: а) неустойчивым, б) неединственным [1,2,3] Для выделения устойчивого и единственного решения приходится на решения системы уравнений накладывать дополнительные условия. На западе за работами, связанными с определением латерально – неоднородного строения среды по данным о временах пробега сейсмических волн, закрепилось название сейсмотомографией, а в пространстве СНГ обратной кинематической задачей сейсмики.

Рассмотрим физико-математические аспекты решения задач лучевой сейсмотомографии для трехмерной среды. При решении обратной кинематической задачи сейсмики скорость распространения волн, глубины слоев, размеры блоков, траектории лучей являются параметрами среды, часто неизвестными, подлежащими определению. В сейсмической томографии параметры среды определяют априорную модель, которая уточняется при известном времени вступлений волн. Время пробега луча - Т- функция скорости $V(x, y, z)$ и геометрии лучевой траектории. Обратная задача заключается в определении V по множеству измерений времени на поверхности Земли. Если взять как Т - время пробега вдоль луча S; $U(s) = l/V(s)$ – медленность вдоль луча, тогда время пробега волны:

$$T_i = \int_{S_i} \frac{dS}{V} = \int_{S_i} U(S)dS \quad (1)$$

как мы отметили, где $i = 1, \ldots N;$ T - время пробега вдоль луча $S;$ $U(s)$ величина обратной скорости $U\ (s)$ - медленность

С математической точки зрения определение скорости распределения упругих волн по данным о времени их пробега является задачей интегральной геометрии, которая состоит в восстановлении функции, заданной интегралами по некоторому семейству кривых. Иными словами, в качестве наблюдаемого в неявном виде присутствует в определении лучевой траектории Si. Другими словами, задача определения скорости V(x) является нелинейной из-за сложной зависимости $U(s)$ от S. Общего решения задач типа (1) не существует. В предположении малости горизонтальных вариаций скорости рассматривается линеаризованная постановка задачи

$$T_{\text{наб}} - T_{\text{выч}} = dT = \int U(S)dS \quad (2)$$

где dT - невязка времени пробега, разность между наблюденным и вычисленным временем, соответствующим опорной модели.

Первое математическое доказательство о допустимости линеаризации дано в работе [4] для изотропной не слоистой среды с распределением скоростей, имеющим непрерывные вторые производные.

В работе автор[9] вывел линеаризованную формулу для слоистой анизотропной среды, он же проанализировал общий случай трехмерной анизотропной неоднородной слоистой среды. Он получил явные расчетные формулы для случая двух изотропных однородных полуплоскостей, разделенных жесткой прямолинейной границей. Этот случай был последовательно распространен на произвольное число границ, плавно меняющуюся среду, криволинейные жесткие границы, анизотропные среды между границами и трехмерную среду. В результате, такое полное математическое доказательство позволило сформулировать алгоритм линеаризации для томографической обратной задачи в случае сложных сред с криволинейными границами раздела. Фактически принцип линеаризации сформулирован формуле (2), где U (s) - величина обратной скорости V(x,y,z), а ds - элемент дуги луча. Допустим условием ленеаризации будет $U(s) \ll U_0(z)$, здесь Uo (z) априорно задано. В зависимости U(S) от S в сейсмотомографии задача восстановления моделей по данным наблюдаемого сейсмического параметра решается способами, которые можно разбить на две большие группы: a) основанные на преобразовании Радона, b) алгебраической инверсии (b1-метод сингулярного разложения, b2- метод стохастического обращения).

Среди линеаризованных методов в своих исследованиях мы использовали три метода обращения со своими условиями на решения обратной кинематической задачи сейсмики для объемных волн для того, чтобы понять насколько эффективно можно использовать для сейсмотомографических задач отдельные программные пакеты двумерной - трехмерной инверсии, соответственно для получения двумерно-трехмерных скоростных моделей литосферы Тянь-Шаня и прилегающих территорий. При решении обратной кинематической задачи сейсмики скорость распространения волн, глубины слоев, размеры блоков, траектории лучей являются параметрами среды, часто неизвестными, подлежащими определению. Применяемые алгоритмы:

- Для определения двумерной скоростной модели литосферы (алгоритм и программа А. Сайипбековой, В. Павлунина);
- Для определения трехмерной скоростной коры (алгоритм и программа S. Roecker);
- Для определения трехмерной скоростной модели мантии (алгоритм и программа Ю.А.Бурмакова, А.В. Треусова);
- Для определения границы кора – мантия (почти все программы которые мы использовали).

Развития этих исследований в области сеймологии отражены в области построения трехмерных скоростных моделей нижней части земной коры и верхней мантии широко известны работы [2,7, 9,). С 1983 году первая трехмерная скоростная модель верхней мантии Тянь-Шаня построена в работах [6,7,8], а трехмерная модель земной коры Тянь-Шаня построены в работах [9,].

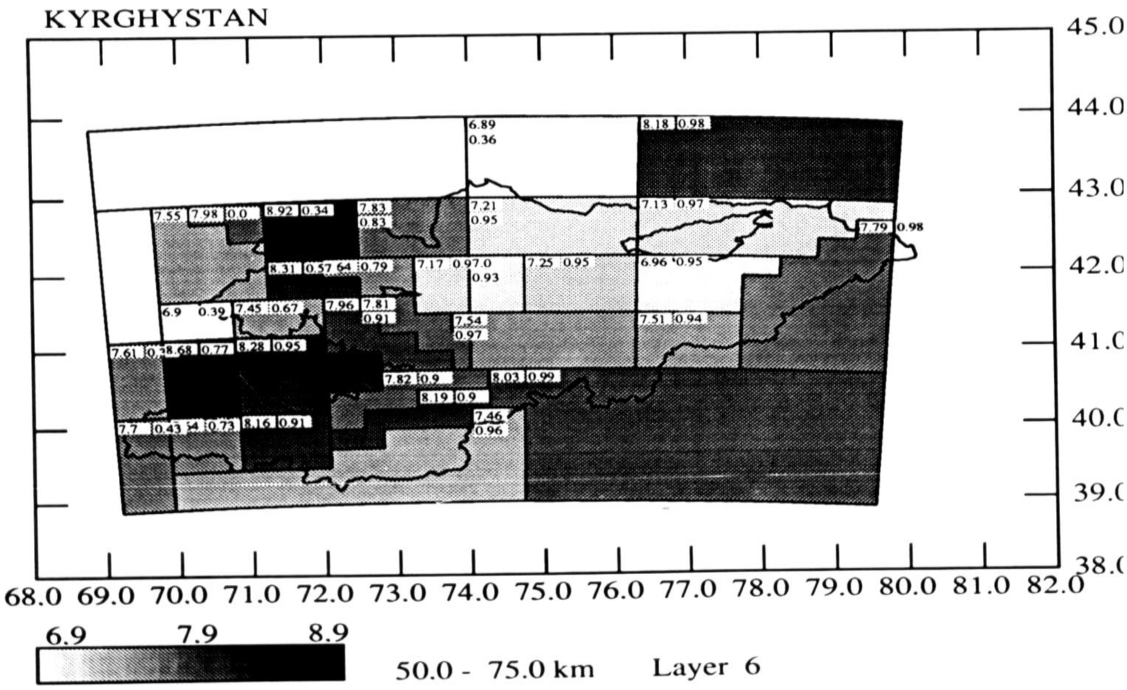


Рис.1. Скоростное поле в интервале глубин от 50 до 75 км, первая цифра Vp, вторая цифра разрешение.

В области прикладной сейсмики профильных наблюдений известны работы [11] Подробный обзор и анализ профильных и площадных исследований по лучевой сейсмической томографии представлен в работах [5,11,13].

При постановке задачи сейсмотомографических исследований изначально изучаемая часть литосферы разбивалась на прямоугольные блоки с постоянной скоростью или же скоростная функция раскладывалась по полиномам Лежандра (т.е. гармонически полиномиальный способ разложения). Когда мы имеем блоковую модель с постоянной скоростью не всегда удается точно установить разно скоростных областей, всегда будет элемент разглаживания. Когда мы используем гармонически –полиномиального способа исследователи сталкиваются с проблемой неточной эктрополяцией искомой функции в слобоизученных территориях (где сейсмическая сеть не густая или в телесейсмике непольный азимутальный охват, 0- 360 градусах). Мы видим недостатки всех этих двух методов. Томографическая задача для двумерной сферы состоит в определении функции f(x, y) по заданному набору ее проекций или линейных интегралов.

$$p(r,\alpha) = \int f(x,y)dl \quad , \tag{3}$$

для различных углов проекции $\alpha = \tan^{-1}(l\,/r)$. Интеграция осуществляется от источника к получателю. Полный набор сумм лучей под заданным углом называется проекцией или профилем. В идеале $f(x,y)$ – непрерывная двумерная функция, и для реконструкции требуется бесконечное количество проекций. На практике f (x, y) вычисляется в конечных точках по конечному числу проекций. Двумерные скоростные модели литосферы Центральной Азии по данным глубинного зондирования построены в работах [13,14] тремя коллективами сейсмологов Казахстана, Кыргызстана и Китая [15] и доложены международных симпозиумах.

Для построения двумерной скоростной модели использованы записи сейсмических станций Института сейсмологии НАН Кыргызстана Манас - Аркит – Токтогул - Аккия -

Арсланбоб – Сопукоргон на рис.3, положение профиля – II. Профиль пересекает Таласскую антиклиналь, Баубашитинский горный массив, Караунгурскую и Кугартскую синклинали, Узгенскую мульду, Алдиярский массив и северовосточные отроги Алайского хребта.

В обработку включены записи объемных волн местных землетрясений с К>8.1, попадающие в полосу +- 15 км от осевой линии за период наблюдения 1970-1994 гг. Материал за 25 летний период позволил отобрать записи только с четкими вступлениями фаз. Используя встречные и нагоняющие годографы рефрагированных волн по региональной сети совместно с опубликованными годографами ГСЗ рассчитан скоростной разрез по профилю.

Характерной особенностью разреза является мозаичная форма изолиний скорости в верхней части земной коры, с их сгущением в районе Южно-Ферганского разлома. Обычно зоны аномального сгущения изолиний соответствуют сейсмическим границам, ответственным за наличие петель на годографах (например, район Токтогула). В районе Северного Памира в интервале глубин 80-160 км выявлена низкоскоростная зона.

Для сопоставления выше указанными разрезами мы приводим карту скоростных неоднородностей для интервала глубин 50-75 км. Окончательно для расчетов поля скоростей верхней мантии выбраны данные времен пробега удаленных землетрясений для 2735 трасс. В пределах исследуемой части Тянь-Шаня станции расположены в среднем на расстоянии порядка нескольких десятков километров друг от друга; минимальное расстояние 12 км.

Получена скоростная модель верхней мантии, представленная в виде трех параллельных слоев содержащих блоки, для интервалов глубин 50-75 км, 75-150 км, 150-300 км. На рис.1 показана карта скоростных неоднородностей в интервале глубин 50-75 км [12].

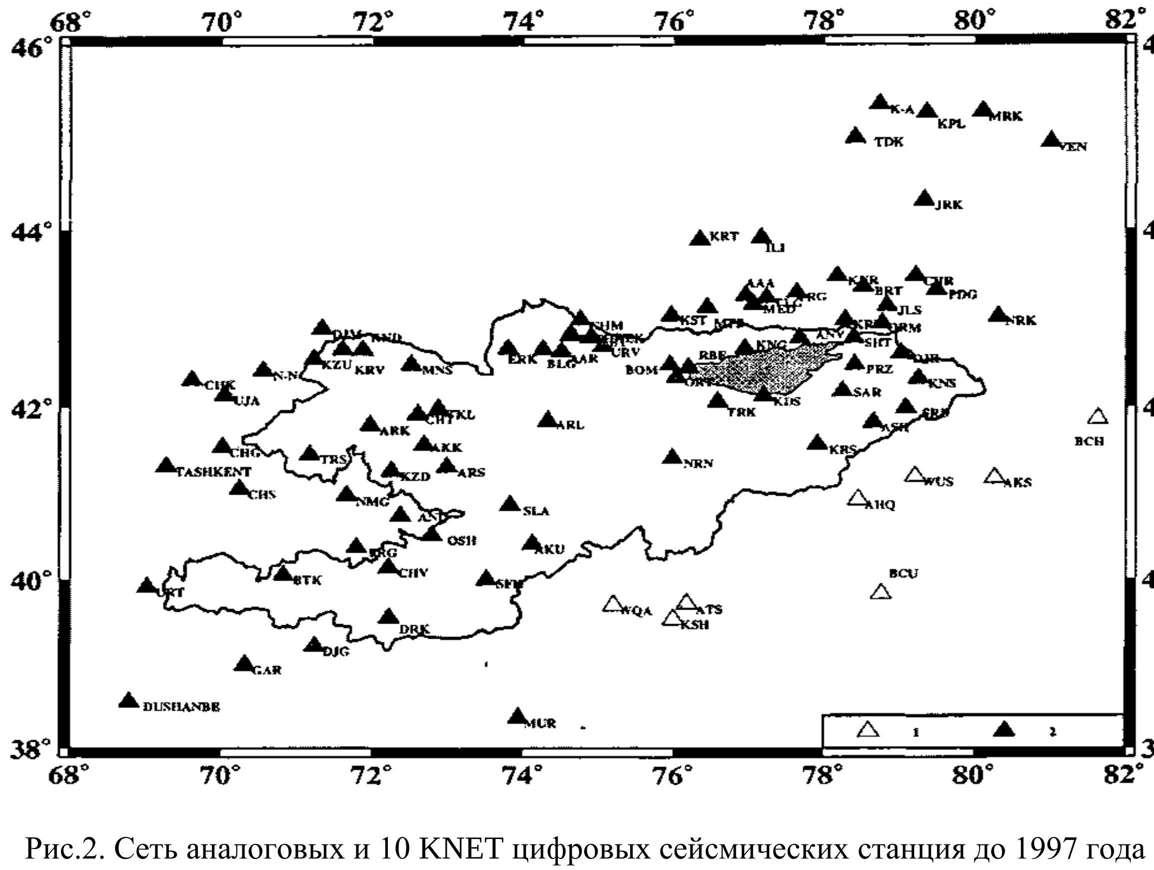


Рис.2. Сеть аналоговых и 10 KNET цифровых сейсмических станция до 1997 года

Нами выявлено, что в целом часть Северного и Срединного Тянь-Шаня характеризуется низкой скоростью по сравнению с западным Тянь-Шанем. Если вместе взять блоки Северного и Срединного Тянь-Шаня в пределах $41^0 30$– $41^0 50$ северной широты и $74^0 00$ – $78^0 30$ восточной долготы под ними значение скорости продольных варьирует от 7,0 км/с (разрешение 0,93) до 7,3 км/с (разрешение - 0,95). В работе [10] авторы пишут о том, что, обширная часть Северного и Срединного Тянь-Шаня характеризуется низкой скоростью. Исходя из вышеизложенного сделаем вывод, именно существование низкой скорости в верхней мантии под Северным и Срединным Тянь-Шанем получилось в разные годы [6,7,8] по данным удаленных землетрясений, подтверждено трехмерной моделью Манас – Аркит – Токтогул – Аккия – Арсланбоб по данным местных и телесейсмических землетрясений полученной в слое 50-75 км [12].

Сопоставляя нами полученный разрез за последние два года по двум алгоритмам, с предыдущей моделью двумерной инверсией рис.3 мы пришли к выводу что, разрешение последних полученных скоростных моделей лучше, но как видно на рис.2 на участке Манас – Аркит – Токтогул – Аккия – Арсланбоб аналоговая сеть густая, по профилю обработаны очень много землетрясений, именно в данном участке скоростное поле достоверное и имеет высокое разрешение.

В классических работа А.Н. Тихонова, В.Я. Арсенина [1], К. Аки, П. Ричардс [5], указано при решении обратных задач, всегда следует учесть всегда три принципа Ж. Адамара хорошо поставленных корректных задач. Первый принцип, они характеризуются наличием решения в определенном множестве, второй принцип математическая определенность задачи (исходные данные не противоречат друг другу, достаточно для однозначного решения задачи), третьим признаком является непрерывная зависимость решения от исходных данных. Это условие обычно называется физической определённостью задачи, то есть её детерминированностью или непрерывной зависимостью решения от исходных данных. Во всех трех алгоритмах эти принципы соблюдены.

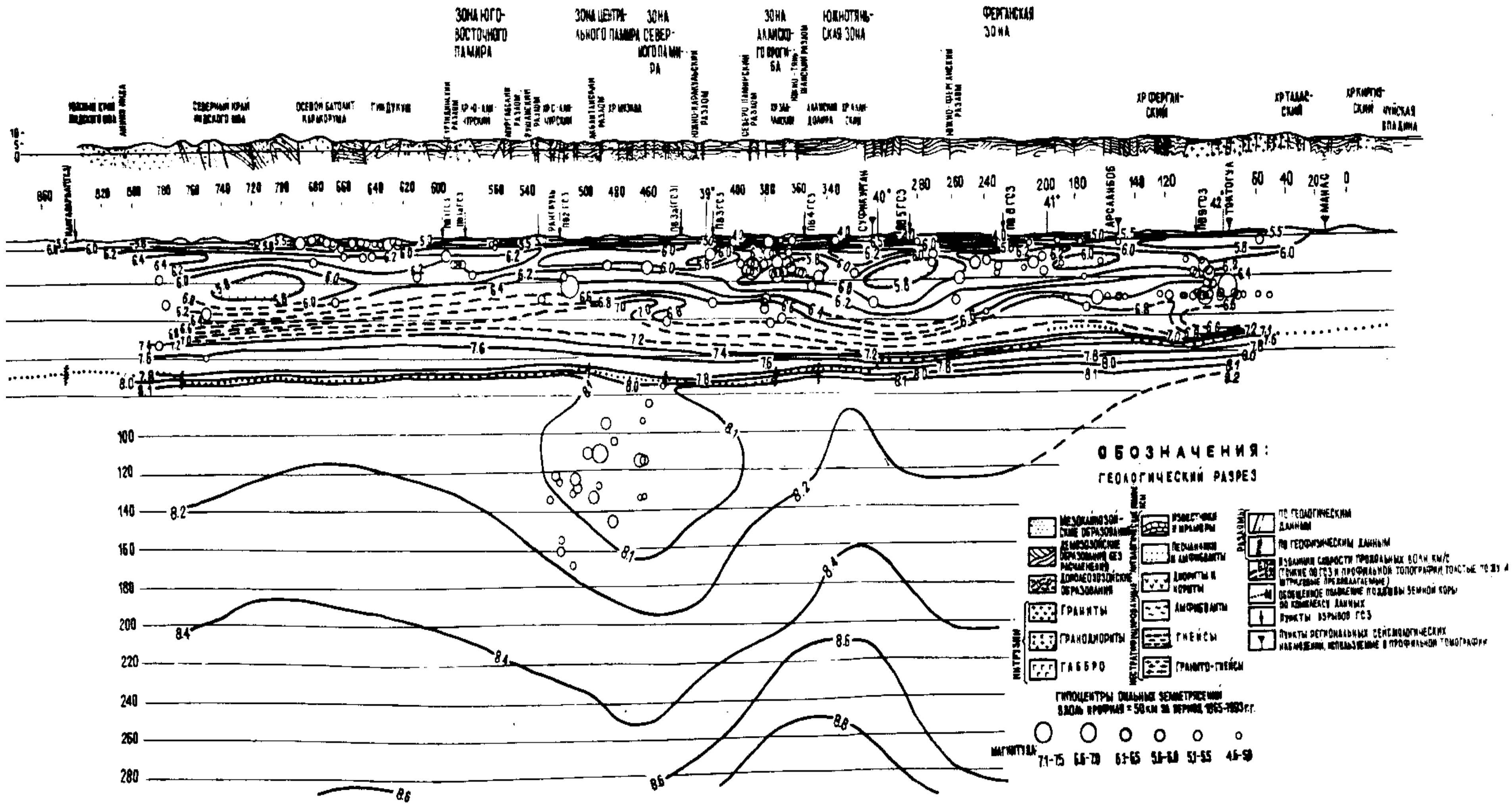


Рис.3 Сейсмический разрез по профилю Манас–Сопукоргон. Условные значения: 1- профили, 2-сейсмостанции, 3 – некоторые населенные пункты, 4-граница стран, 5 – значение Vp, 6 – номера отдельных сейсмогенерирующих зон.

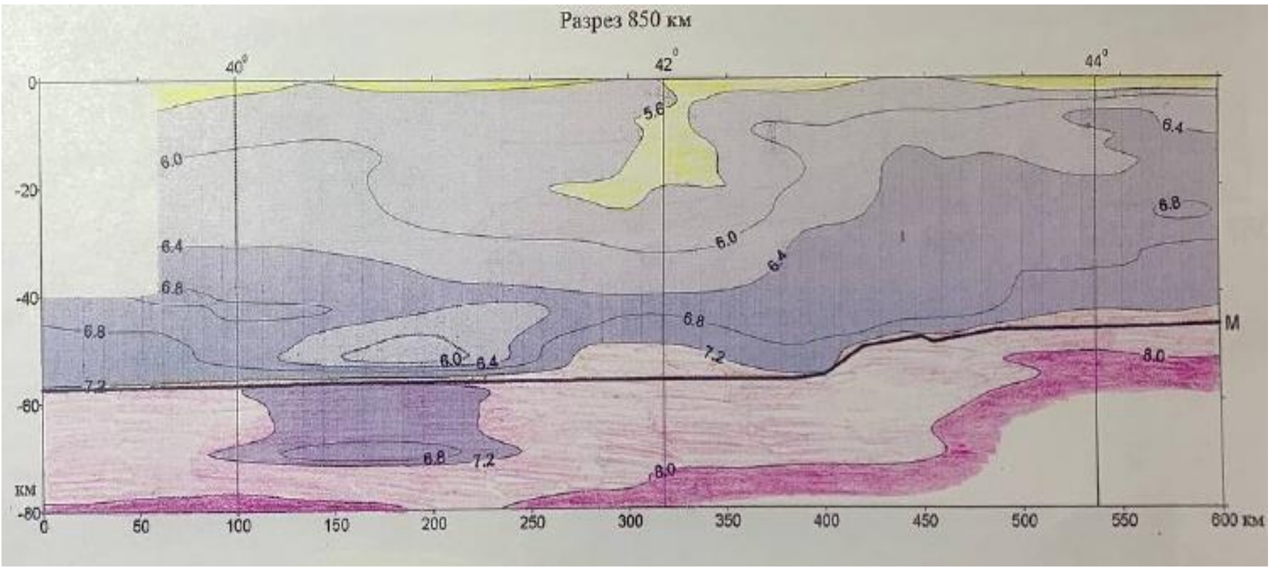


Рис. 4. Цифры значения Vp – продольной волны, по данным записи только цифровых сейсмических скоростей.

Пробные расчеты были сделаны по данным цифровых данных последние годы показывают аномально низкие скорости по полосе Ош – Арсланбоб на глубине 50 км. Мы убедились, что точность значительно повышается при использовании цифровых записей землетрясений и взрывов, если в предыдущих моделях именно на этом срезе характеристики продольной волны были сильно сглажены. Начало анализа математических основ сейсмотомографических наших исследований сделан в работе [14].

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. – 288 с.

2. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г., Чеверда В.А. Численные методы решения прямых и обратных задач теории распространения волн. // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск , 1983, с 165-172.

3. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: «Наука», 1972. –164 С.

4. Червени В. Алгоритмы расчета лучи в трехмерных горизонтально –неоднородных средах // сейсмическая томография, с приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике. Москва: «Мир», Наука, 1990. С.109-144.

5. Аки К., П.Ричардс Количественная сейсмология. Теория и методы // Москва: «Мир», 1983. – 880 С.

6. Бурмаков Ю.А., Винник Л.П., Сайипбекова А.М., Треусов А.В. Трехмерная скоростная модель тектоносферы Тянь-Шаня и Памира, Докл АН СССР, 297, с.56-60, 1987.

7. Vinnik L.P., Saipbekova A.M. Structure of lithosphere and astenosphere of the Tien-Shan. // Annalies geophysicea. 1984. Vol.2. №6. p. 621-626.

8.Сайипбекова А.М. Скоростная модель верхней мантии //В сб. Современная геодинамика литосферы Тянь-Шаня. Москва: «Наука», 1991, 23-29с.

9. Franklin J.N., 1970. Well –posed stochastic extention of ill –posed linear problem // Journal of Mathematical Analysis and Application , v. 31, 682-716.

10. Roecker S.W., Sabitova T.M., Vinnik L.P., Burmakov Y.A., Golvanov M.I., Mamatkanova R., Munirova L. Tree-dimensional elastic wave velocity structure of the Western and Central Tien Shan // JGR. 1993. V.98. N.B9. P. 15,779-15,795.

11. Шацилов В.И., Сайипбекова А.М., Грибанов Ю.Е. Изучение глубинного строения Тянь-Шаня по материалам региональной сейсмологии. // Journal Inland Earthquake. Urumqi: 1995. Vol.9. №4. С.374-381.

12. Сайипбекова А.М., Блинов Г.И., Павлунин В.Е. и др. Томографические модели литосферы Тянь-Шаня. // «Проблемы и перспективы развития науки и техники в области механики, геофизики, нефти, газа, энергетики и химии Казахстана»: Тез. межд. научно.-технической конференции 22-24 мая 1996. Актау: 1996. С.40-41.

13. Сайипбекова А.М. Сейсмотомографическая модель и современная геодинамика литосферы Тянь-Шаня. // Отв. Ред. В.И.Шацилов. Ош: Билим, 2003. –216 С.

УДК 519.852.2

МЕТОД ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Сапарова Гульмира Баатыровна, к.ф.-м.н., доцент
gulya141005@mail.ru
Ошский технологический университет им. М.М.Адышева
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной статье рассмотрен алгоритм решения задачи оптимизации с помощью аппарата обратных вычислений. Рассмотрена задача квадратичного программирования с ограничением в виде равенства, то есть, конкретно задача оптимизации закупок фирмы, в котором нужно определить количество заказываемых товаров таким образом, чтобы максимально удовлетворить спрос потребителя при минимальном бюджете. Предложенный алгоритм решения может быть применен в системах поддержки принятия решений для планирования максимальной закупки товаров организации. Данный алгоритм является более простым в компьютерной реализации по сравнению с классическими методами, то есть, чтобы найти решение задачи оптимизации закупок просто нужно решить систему уравнений. В результате получили одинаковые решения для трех методов: метода на основе обратных вычислений, метода штрафов и метода множителей Лагранжа.*
Ключевые слова*: алгоритм, квадраточное программирование, оптимизация, метод штрафов, множитель Лагранжа, обратные вычисления, система уравнений.*

ОПТИМИЗАЦИЯ МАСЕЛЕЛЕРИН ТЕСКЕРИ ЭСЕПТӨӨ ЫКМАЛАР МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Сапарова Гульмира Баатыровна, ф.-м.и.к., доцент
gulya141005@mail.ru
М.М.Адышев атындагы Ош технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада тескери эсептөө аппаратын колдонуу менен оптимизация маселесин чечүү алгоритми каралган. Барабардык түрүндөгү чектөө болгон квадраттык программалоо маселеси, башкача айтканда, фирманын сатып алууларын оптимизациялоо маселеси каралган, мында минималдуу бюджет менен мүмкүн болушунча көп талап кылган керектөөчүнү канаатандыра тургандай заказ кылынган товарлардын санын аныктоо. Сунушталган чечимдин алгоритмини чечимдерди колдоо системаларында колдонсо болот, уюмдун товарларын максималдуу сатып алууну пландаштыруу үчүн. Бул алгоритм классикалык ыкмаларга салыштырмалуу компьютерди ишке ашырууда жөнөкөй, башкача айтканда, сатып алууларды оптимизация маселесинин чечимин табуу үчүн теңдемелер системасын чыгаруу керек. Натыйжада үч ыкма боюнча бирдей чечимдер алынган: тескери эсептөө ыкмасы, айыптык ыкмасы жана Лагранждын көбөйтүүчү ыкмасы менен.*
Ачкыч сөздөр*: алгоритм, квадраттык программалоо, оптимизация, айыптык ыкма, Лагранж көбөйтүүчүсү , тескери эсептөөлөр, теңдемелер системасы.*

BACK CALCULATION METHOD FOR OPTIMIZATION PROBLEMS

Saparova Gulmira Baatyrovna, assistant professor
gulya141005@mail.ru
Osh technological university named after M.M.Adysheva
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *This article considers an algorithm for solving an optimization problem using the back calculation apparatus. The problem of quadratic programming with a constraint in the form of equality is considered, that is, specifically the problem of optimizing the purchases of a company, in which it is necessary to determine the number* *of ordered goods in such a way as to satisfy consumer demand as much as possible with a minimum budget. The proposed decision algorithm can be applied in decision support systems for planning the maximum purchase of the organizations goods. The algorithm is simpler in computer implementation compared to classical methods, that is, to find a solution to the procurement optimization problem, you just need to solve a system of equations. As a result, the same solutions were obtained for three methods: the back calculation method, the penalty method, and the Lagrange multiplier method.*

***Key words**: algorithm, quadratic programming, optimization, penalty method, Lagrange multiplier, back calculation, system of equations.*

Введение. Методы оптимизации широко применяются в задачах экономики. Математическая модель задачи оптимизации состоит из целевой функции, значение которой нужно минимизировать или максимизировать, и ограничений на переменные. В зависимости как задана целевая функция и ограничения, задача будет линейного или нелинейного программирования.

Данная статья посвящена решению задачи оптимизации закупок фирмы, в которой нужно выбрать вид и количество заказываемого товара у поставщиков при ограниченном бюджете. Такую, но с другими параметрами примерно задачу рассмотрел в своих работах российский ученый экономист Р.Ф.Фарманов [1]. Организация формирует прогнозное значение ежедневного спроса на основе имеющихся статистических данных за предыдущие периоды. Необходимо осуществить закупку товаров таким образом, чтобы максимально удовлетворить спрос при ограниченном количестве денежных средств. Исходными данными модели являются:

$a_i -$ прогнозное значение среднего спроса на товар i $(i = 1,2,\dots,N, N -$количество наименований товаров); $b_i -$ цена закупки $i -$ го товара; В – величина бюджета закупок.

Полученная задача представляет собой задачу квадратичного программирования с линейным ограничением в виде равенства:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N}(x_i - a_i)^2 \to min, \quad (1)$$
$$g(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i x_i = B,\ x_i \geq 0.$$

Задачи такого вида часто встречаются при распределении инвестиций (формировании портфеля), нахождение оценок параметров функции регрессии с ограничениями.

Целью нашей задачи является разработка алгоритма решения задачи с помощью обратных вычислений.

Постановка задачи: Рассмотрим задачу оптимизации закупок продукции кондитерской фабрики "Барбол". Исходные данные в таблице 1.

Таблица 1.

Показатель	**Номер продукции, i**		
	1	**2**	**3**
Прогнозный спрос, кг	11	16	8
Цена закупки, сом / кг	125	105	170

Бюджет закупок равна 2000 сомов.

Построим математическую модель, задача будет квадратичного программирования и будет иметь вид:

$$f(x) = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 \to min,$$
$$g(x) = 125x_1 + 105x_2 + 170x_3 = 2500,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Решим задачу классическими методами, таких как: метод штрафов, метод множителей Лагранжа, а также с помощью обратных вычислений.

Методы решения: Очень часто для задач нелинейного программирования при оптимизации ресурсов предприятия применяются два классических метода: метод штрафов и метод множителей Лагранжа [2], [3]. Идеями этих методов является сведение задачи условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации. Например, в методе штрафов вводится понятие штрафной функции, которая формируется из данной целевой функции и штраф – функции от ограничения и штрафного параметра. На каждом шаге итерации происходит решение задачи безусловной оптимизации штрафной функции при заданном значении штрафного параметра, величина которого постепенно увеличивается. Алгоритм итерации решения заканчивается, когда элементы итерационных последовательностей изменяются от шага к шагу незначительно. Если последовательность аргументов функции является допустимой, то в этом случае штрафной метод называется внутренним, иначе – внешним. В данном случае будет применен квадратичный штраф, применяемый при наличии ограничения – равенства. Решение задачи минимизации будет сводиться к нахождению минимума штрафной функции при различных значениях штрафного параметра R:

$$P(x,R) = f(x) + Rg^2(x), \tag{2}$$

где $P(x,R) -$ штрафная функция; $f(x) -$ целевая функция; $g^2(x) -$ функция – ограничение.

В методе множителей Лагранжа, также сводится задача условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации, в которой появляются параметры – множители Лагранжа. При решении задачи нужно сформулировать функцию Лагранжа, которую нужно минимизировать:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x), \tag{3}$$

где $L(x,\lambda)$ −функция Лагранжа; λ −множитель Лагранжа, на знак которого никаких требований не накладывается.

Вычисляются частные производные функции Лагранжа, осуществляется подстановка полученного выражения для аргументов в ограничение. Путем решения системы уравнения находится множитель Лагранжа и сами аргументы.

Аппарат обратных вычислений разработанный ученым Б.Е.Одинцовым [4],[5], предназначен для определения приростов Δx аргументов функции с применением их начального значения, заданной новой величины функции, коэффициентов относительной важности переменных и направлении их изменения (уменьшения или увеличения). В таком случае решаем систему с тремя переменными.

$$y \mp \Delta y = f\big(x_1 \mp \Delta x_1(\alpha), x_2 \mp \Delta x_2(\beta), x_3 \mp \Delta x_3(\gamma)\big);$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}; \\ \beta = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}; \\ \gamma = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}; \\ \alpha + \beta + \gamma = 1. \end{cases}$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 -$ приращение аргументов; $\alpha, \beta, \gamma -$ коэффициенты относительной важности перменных x_1, x_2, x_3; $y, \Delta y -$ данные значения и приращение функции [6].

Таким образом, данные значения переменных определяются как сумма или разность начальных приростов и величин:

$$x_1^* = x_1 + \Delta x_1(\alpha);\ x_2^* = x_2 + \Delta x_2(\beta);\ x_3^* = x_3 + \Delta x_3(\gamma).$$

Данный метод хорошо применяется в области экономики, образования в задачах управления.

Решение задачи нелинейного программирования методами обратных вычислений состоит из следующих шагов:

1. Определение точки минимума целевой функции $f(x)$. Для данной задачи минимум функции всегда будет равен значениям спроса a_i.
2. Полученная точка минимума функции корректируется с учетом ограничения. Таким образом, осуществляется переход к обратной задаче, которая может быть решена с помощью обратных вычислений. Для расчета коэффициентов применяются значения частных производных функции – ограничения, которые будут равны закупочной стоимости изделий b_i. Данные величины нормируются относительно общей суммы:

$$\alpha = \frac{b_1}{(b_1 + b_2 + b_3)};$$

$$\beta = \frac{b_2}{(b_1 + b_2 + b_3)};$$

$$\gamma = \frac{b_3}{(b_1 + b_2 + b_3)}.$$

Сумма полученных значений будет равна единице.

1. Метод множителей Лагранжа. Приведем данную задачу к задаче

безусловной оптимизации, сформировав функцию Лагранжа. Для этого добавляем к целевой функции ограничение, умноженное на множитель Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 + \lambda(125x_1 + 105x_2 + 170x_3 - 2000).$$

Чтобы найти минимум функции, находим частные производные, приравниваем к нулю и вычислим неизвестные переменные функции.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 22 + 125\lambda; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 32 + 105\lambda; \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 16 + 170\lambda. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 22 + 125\lambda = 0; \\ 2x_2 - 32 + 105\lambda = 0; \\ 2x_3 - 16 + 170\lambda = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{22-125\lambda}{2}; \\ x_2 = \frac{32-105\lambda}{2}; \\ x_3 = \frac{16-170\lambda}{2}. \end{cases}$$

Чтобы вычислить λ нужно решить уравнение:

$$125x_1 + 105x_2 + 170x_3 - 2000 =$$

$$= 125 \cdot \left(\frac{22 - 125\lambda}{2}\right) + 105 \cdot \left(\frac{32 - 105\lambda}{2}\right) + 170 \cdot \left(\frac{16 - 170\lambda}{2}\right) == 2000$$

$$62{,}5 \cdot (22 - 125\lambda) + 52{,}5 \cdot (32 - 105\lambda) + 85 \cdot (16 - 170\lambda) = 2000 \Rightarrow$$

$$1375 - 7812{,}5\lambda + 1680 - 5512{,}5\lambda + 1360 - 14450\lambda = 2000 \Rightarrow$$

$$-27775\lambda = -2415 \Rightarrow \lambda \approx 0{,}087.$$

Подставляя полученное $\lambda \approx 0{,}087$ в систему, находим:

$$x_1 \approx 5{,}566;\ x_2 \approx 11{,}435;\ x_3 \approx 0{,}609.$$

Таким образом, нужно купить 5,566 кг продукта первого вида, 11,435 кг – второго вида и 0,609 кг – третьего вида.

2. Метод штрафов. С помощью штрафной функции переходим от задачи с ограничениями к задаче без ограничений. Процесс нахождения решения является итерационным, изменение штрафного параметра осуществляется последовательно, начиная с малого значения.[6] Штрафная функция составляется прибавлением к целевой функции ограничения умноженного на штрафной параметр:

$$P(x,R) = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 + R(125x_1 + 105x_2 + 170x_3 - -2000)^2,$$

где R – штрафной параметр.

Итерационный процесс начинается с малого значения R, далее штрафной параметр увеличивается. В каждой итерации выполняем решение задачи квадратичного программирования. Решение занесено в таблицу 2.

Таблица 2.

$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{P(x,R)}$	$\boldsymbol{f(x)}$
0	11	16	8	0	0
0,05	5,568	11,437	0,612	104,953	104,915
0,1	5,567	11,436	0,611	104,972	104,953
0,2	5,566	11,436	0,61	104,981	104,972
1	5,566	11,435	0,609	104,989	104,987

3. Методы обратных вычислений. Целевая функция имеет вид:

$$f(x) = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 \to min.$$

Минимумом данной функции будут значения спроса на продукцию a_i: $x_1 = 11$, $x_2 = 16$, $x_3 = 8$.

Вычислим значения коэффициентов относительной важности с применением данных о закупочной стоимости b_i:

$$\alpha = \frac{125}{(125 + 105 + 170)} = 0{,}313;$$

$$\beta = \frac{105}{(125 + 105 + 170)} = 0{,}263;$$

$$\gamma = \frac{170}{(125 + 105 + 170)} = 0{,}425.$$

Далее с помощью обратных вычислений находим изменения значений объема заказа решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 125(11 + \Delta x_1) + 105(16 + \Delta x_2) + 170(8 + \Delta x_3) = 2000; \\ \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3} = 0{,}313; \\ \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3} = 0{,}263; \\ \dfrac{\Delta x_3}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3} = 0{,}425. \end{cases}$$

Решая систему получили значения приростов: $\Delta x_1 = -5{,}4343$; $\Delta x_2 = -4{,}5648$; $\Delta x_3 = -7{,}3906$.

Следовательно, окончательно получаем решение задачи:

$$x_1^* = 11 - 5{,}4343 = 5{,}566;$$

$$x_2^* = 16 - 4{,}5648 = 11{,}435;$$

$$x_3^* = 8 - 7{,}3906 = 0{,}609.$$

Таким образом, вычисленные значения равны результатам, которые получили методом штрафа и методом множителей Лагранжа.

Литература

1. Фарманов Р.Ф. Оптимизация закупок материальных ресурсов в системе ресурсосбережения предприятий АПК // Вопросы структуризации экономики. 2008. №3. С.32 – 37.
2. Новиков А.И., Солодкая Т.И. Задача оптимизации и построения эффективной границы инвестиционного портфеля финансовых активов // Фундаментальные и прикладные исследования кооперативного сектора экономики. 2009. №1. С.41 – 46.
3. Криничианский К.В., Безруков А.В. Некоторые практические задачи модели оптимизации портфеля // Журнал экономической теории.2012. №3. С.142 – 147.
4. Одинцов Б.Е. Обратные вычисления в формировании экономических решений. // М.: Финансы и статистика, 2004. С.256
5. Одинцов Б.Е., Романов А.Н. Итерационный метод оптимизации управления предприятиями средствами обратных вычислений // Вестник Финансового университета. 2014. №2. С. 60 – 73
6. Грибанова Е.Б. Решение задачи оптимизации закупок с помощью обратных вычислений // Экономический анализ: теория и практика. – 2018. – Т.17, №3. – С. 586 – 596.
7. Сапарова Г.Б., Маматова Р., Математическая модель прогнозирования финансового состояния предприятия // Вестник Жалал – абадского государственного университета. 2016. С. 6 – 11.
8. Сапарова Г.Б., Асанова С. Экономико – математическое моделирование влияния информационных технологий на доходность банковских операций // Известия Ошский технологический университет им. М.М. Адышева. 2016. С.47 – 52.

УДК 517.956.6

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СМЕШАННО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА С ЛИНИЕЙ СОПРЯЖЕНИЯ $x = 0$

Сатаров Арзымат Эминович, доцент
asatarov74@mail.ru
Ошский государственный университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи для уравнения смешанно-гиперболического типа с характеристической линией изменения типа $x = 0$. Методом понижения порядка уравнений, разрешимость краевой задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, относительно нормальной производной следа искомой функции на линии изменения типа уравнения. Использованием функции Грина получена соотношение между следа искомой функции и её нормальной производной. Понижением порядка уравнения и общих решений получена представление решение задачи для строго гиперболического уравнения 4-го порядка при $x<0$. Методом последовательных приближений для гиперболического уравнения 4-го порядка определена решение задачи при $x>0$.*

Ключевые слова: *краевые задачи, смешанно-гиперболический оператор, интегральные уравнения, функция Римана и Грина.*

ЖАБЫШТЫРУУ СЫЗЫГЫ $x = 0$ БОЛГОН 4-ТАРТИПТЕГИ АРАЛАШ-ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР ЖӨНҮНДӨ

Сатаров Арзымат Эминович, доцент,
asatarov74@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош., Кыргызстан

Аннотация. *Теңдеме тибинин өзгөрүүсү $x = 0$ мүнөздүк сызыгы болгон 4-тартиптеги аралаш-гиперболалык теңдеме үчүн чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү ыкмасын колдонуу аркылуу, чек аралык маселенин чечилиши, теңдеменин тибинин өзгөрүү сызыгында изделүүчү функциянын изинин нормалдык туундусуна карата экинчи түрдөгү Фредгольмдун интегралдык теңдемесин чыгарууга алып келинет. Гриндин функциясын колдонуу менен изделүүчү функциянын изи жана анын нормалдуу туундусунун ортосундагы байланыш алынат. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү жана жалпы чыгарылышын тургузуу менен $x<0$ болгондо 4-тартиптеги так гиперболалык теңдеме үчүн маселенин чечиминин көрүнүшү алынган. $x>0$ болгондо 4-тартиптеги гиперболалык теңдеме үчүн удаалаш жакындаштыруу ыкмасын менен маселенин чечими аныкталган.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, аралаш-гиперболалык оператор, интегралдык теңдемелер, Риман жана Грин функциялары.*

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MIXED-HYPERBOLIC 4th ORDER EQUATION WITH A JOINT LINE $x = 0$

Satarov Arzymat Eminovich, assistant professor
asatarov74@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Annotation: *The existence and uniqueness theorem for the solution of a boundary value problem for an equation of mixed-hyperbolic type with a characteristic line $x = 0$ of type change is proved. By the method of lowering the order of equations, the solvability of the boundary value problem is reduced to solving the Fredholm integral equation of the second kind, with respect to the normal derivative of the trace of the desired function on the line of change in the type of equation. Using the Green's function, we obtain the relation between the trace of the desired function and its normal derivative. By lowering the order of the equation and general solutions, we obtain a representation of the solution of the problem for a strictly hyperbolic equation of the 4th order for $x<0$. Using the method of successive approximations for a 4th order hyperbolic equation, the solution of the problem is determined for $x>0$.*

Keywords: *boundary value problems, mixed-hyperbolic operator, integral equations, Riemann and Green's function.*

В области D, ограниченная отрезками прямых AC: $x+y=0$, CB: $x-y=\ell$, BB_0: $x=\ell$, B_0A_0: $y=h$, A_0A: $x=0$ рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xxxy}+c(x,y)u,(x,y)\in D_1, \\ u_{xxxy}-u_{yyxy},(x,y)\in D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $c(x,y)$ – заданная функция, $D_1=D\cap(y>0)$, $D_2=D\cap(y<0)$.

В области D_1 уравнение (1) совпадает с уравнением

$$u_{xxxy}+c(x,y)u=0, \tag{2}$$

а в области D_2 - с уравнением

$$u_{xxxy}-u_{xyyy}=0. \tag{3}$$

По классификации, приведенной в [1], уравнение (2) является простейшим представителем канонического вида гиперболического уравнения с 3-х кратными характеристиками $y=const$ и 1-кратными характеристиками $x=const$, а уравнение (3) является представителем канонического вида строго гиперболического уравнения, так как все его характеристики действительны и различны: $x+y=const$. $x-y=const$, $x=const$, $y=const$. Отсюда следует, что тип уравнения (1) при переходе через линии $y=0$ меняется.

Отметим также, что линия $y=0$ является характеристикой одновременно как для уравнения (2), так и для уравнения (3). Поэтому уравнение (1) является смешанно-гиперболическим уравнением с характеристической линией изменения типа. Различные краевые задачи для уравнений (2) и (3) изучены в работах [1, 2, 3, 4]. Краевые задачи для уравнения 4-го порядка параболо-гиперболического уравнения на плоскости изучены в работах [5, 6]. Нелокальные краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве рассмотрены в работах [7, 8].

Задача 1. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap[C^{3+1}(D_1)\cup C^{3+1}(D_2)\cup C^{1+3}(D_2)]$, *удовлетворяющую в области* $D\setminus(y=0)$ *уравнению (1) и условиям:*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{4}$$

$$u_x(0,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h, \tag{5}$$

$$u(x,y)\big|_{AC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le\frac{\ell}{2}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AC}=\psi_2(x),\ \ 0\le x\le \ell, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{AC}=\psi_3(x),\ \ 0\le x\le \ell, \qquad (8)$$

$$u(x,-0)=\alpha(x)u(x,+0)+\delta(x), 0\le x\le \ell, \qquad (9)$$

$$u_y(x,-0)=\beta(x)u_y(x,+0)+\delta(x), 0\le x\le \ell, \qquad (10)$$

причем

$$\begin{gathered} c(x,y)\in C(\bar D_1), \varphi_i(y)\in C^1[0,h]\ (i=\overline{1,3}), \psi_1(x)\in C^4[0,\tfrac{\ell}{2}],\\ \psi_2(x)\in C^4[0,\ell], \psi_3(x)\in C^3[0,\ell], \alpha(x), \beta(x)\in C^1[0,\ell],\\ \gamma(x), \delta(x)\in C[0,\ell]. \end{gathered} \qquad (11)$$

$$\forall\ x\in[0,\ell]: \alpha(x)\beta(x)\ne 0. \qquad (12)$$

Из постановки задачи 1 следует, что функция $u(x,y)$ и ее первая производная $u_y(x,y)$ терпят разрывы первого рода при переходе через линию сопряжения $y=0$. Поэтому введем обозначение:

$$u(x,+0)=\tau_1(x), u(x,-0)=\tau_2(x), u_y(x,+0)=\nu_1(x), u_y(x,-0)=\nu_2(x), 0\le x\le \ell. \qquad (13)$$

Тогда из условия (9), (10) имеем

$$\tau_2(x)=\alpha(x)\tau_1(x)+\gamma(x), 0\le x\le \ell, \qquad (14)$$

$$\nu_2(x)=\beta(x)\nu_1(x)+\delta(x), 0\le x\le \ell. \qquad (15)$$

Рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

Задача 2. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\bar D_2)\cap C^{3+1}(D_2)\cap C^{1+3}(D_2)$, *удовлетворяющую в области* D_2 *уравнению (3) и условиям (6), (7), (8) и* $u(x,-0)=\tau_2(x),\ 0\le x\le \ell$.

Задача 3. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\bar D_1)\cap C^{3+1}(D_1)$, *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению (2) и условиям (4), (5) и* $u(x,+0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le \ell$.

Сначала рассмотрим задачу 2. Дважды интегрируя уравнение (3), имеем:

$$u_{xx}-u_{yy}=\omega_1(x)+\omega_2(y), \qquad (16)$$

где $\omega_1(x)\in C^1[0,\ell], \omega_2(y)\in C^1[-\ell,0]$ – произвольные неизвестные функции.

Общее решения уравнение (16) представляется в следующем виде:

$$u(x,y)=f_1(x+y)+f_2(x-y)+\frac14\int_0^{x+y}d\xi\int_\ell^{x-y}\left[\omega_1\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)+\omega_2\Big(\frac{\xi-\eta}{2}\Big)\right]d\eta, \qquad (17)$$

где $f_1(x+y), f_2(x-y)$ – произвольные четырежды дифференцируемые функции. Нетрудно заметить, что условие (7) равносильно условию:

$$u_x(x,-x)+u_y(x,-x)=\sqrt2\psi_2(x),\ 0\le x\le \ell. \qquad (18)$$

Из (17) и (18) придем к соотношению:

$$2f_1(0)+\frac12\int_\ell^{2x}\left[\omega_1\Big(\frac{\eta}{2}\Big)+\omega_2\Big(-\frac{\eta}{2}\Big)\right]d\eta=\sqrt2\psi_2(x),\ 0\le x\le \ell$$

и дифференцируя ее, имеем:

$$\omega_1(x)+\omega_2(-x)=\sqrt2\psi_2'(x),\ 0\le x\le \ell. \qquad (19)$$

Из условия (8), получим:

$$u_{xx}(x,-x)+2u_{xy}(x,-x)+u_{yy}(x,-x)=2\psi_3(x),\ 0\le x\le \ell .$$

Как и выше, из (17) имеем:

$$4f_1''(0)+\frac{1}{2}\int_{\ell}^{2x}\left[\omega_1'(\frac{\eta}{2})+\omega_2'(-\frac{\eta}{2})\right]d\eta=2\psi_3(x),\ 0\le x\le \ell .$$

Дифференцируя также, получим следующее соотношение:

$$\omega_1'(x)+\omega_2'(-x)=2\psi_3'(x),\ \ 0\le x\le \ell . \tag{20}$$

Дифференцируя (17), и с учетом (18) находим:

$$\omega_1'(x)=\psi_3'(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2''(x),\ 0\le x\le \ell . \tag{21}$$

Нетрудно найти и

$$\omega_2'(-x)=\psi_3'(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2''(x),\ 0\le x\le \ell . \tag{22}$$

При $x=-y$ имеем:

$$\omega_2(y)=\omega_2(0)-\psi_3(-y)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'(-y)+\psi_3(0)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'(0),\ -\ell\le y\le 0 . \tag{23}$$

Из (21) найдем:

$$\omega_1(x)=\omega_1(0)+\psi_3(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'(x)-\psi_3(0)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'(0),\ \ 0\le x\le \ell , \tag{24}$$

Тогда из (23) и (24) имеем

$$\omega_1(x)+\omega_2(y)=\omega_1(0)+\omega_2(0)+\psi_3(x)-\psi_3(-y)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'(-y)-\sqrt{2}\psi_2'(0) \cdot$$

Отсюда, учитывая (19), найдем:

$$\omega_1(x)+\omega_2(y)=\psi_3(x)-\psi_3(-y)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'(-y). \tag{25}$$

Таким образом, решение задачи 2, удовлетворяющее условиям (7), (8) имеет вид:

$$u(x,y)=f_1(x+y)+f_2(x-y)+\Omega(x,y), \tag{26}$$

где

$$\Omega(x,y)=\frac{1}{4}\int_0^{x+y}d\xi\int_{\ell}^{x-y}\left[\psi_3(\frac{\xi+\eta}{2})-\psi_3(-\frac{\xi-\eta}{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'(\frac{\xi+\eta}{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'(-\frac{\xi-\eta}{2})\right]d\eta$$

– известная функция. Используя условия (6) из (25) получим:

$$f_2(x)=\psi_1(\frac{x}{2})-\Omega(\frac{x}{2},-\frac{x}{2})-f_1(0) \cdot \tag{27}$$

Из (25) и (26) имеем:

$$u(x,y)=f_1(x+y)+\psi_1(\frac{x-y}{2})-f_1(0)+\Omega_1(x,y), \tag{28}$$

где $\Omega_1(x,y)=\Omega(x,y)-\Omega(\frac{x-y}{2},-\frac{x-y}{2})$.

Дифференцируем (28) по x и по y, затем возьмем разность полученных выражений и получим соотношение:

$$u_x(x,0)-u_y(x,0)=\Psi(x), \tag{29}$$

где $\Psi(x)=\psi_1'(\frac{x}{2})+\Omega_{1x}(x,0)-\Omega_{1y}(x,0)$. Отсюда, приходим к соотношению:

$$\tau_2'(x)-\nu_2(x)=\Psi(x). \qquad (30)$$

Дифференцируя соотношение (14), имеем

$$\tau_2'(x)=\alpha(x)\tau_1'(x)+\alpha'(x)\tau_1'(x)+\gamma'(x), 0\le x\le \ell. \qquad (31)$$

Подставляя значения $\tau_2'(x)$ из (31), а значения $\nu_2(x)$ из (15) в (30), придем к соотношению

$$\tau_1'(x)+\alpha_1(x)\tau_1(x)=\beta_1(x)\nu_1(x)+\delta_1(x), 0\le x\le \ell, \qquad (32)$$

где $\alpha_1(x)=\dfrac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}, \beta_1(x)=\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}, \delta_1(x)=\dfrac{\delta(x)-\gamma'(x)+\Psi(x)}{\alpha(x)}.$

К уравнению (32) присоединяем начальное условие

$$\tau_1(0)=\psi_1(0). \qquad (33)$$

Рассмотрим однородное уравнение $\tau_1'(x)+\alpha_1(x)\tau_1(x)=0$, общее решение которого имеет вид $\tau_1(x)=C\,exp\left(-\alpha_1(x)\right)$. Частное решение уравнения этого уравнения ищем в виде $\tilde{\tau}_1(x)=C(x)exp\left(-\alpha_1(x)\right)$, где $C(x)$ – произвольная функция, подлежащая определению. Тогда, подставляя значения $\tilde{\tau}_1(x)$ и $\tilde{\tau}_1'(x)$ в (29), определим $C(x)$ в виде:

$$C(x)=\int_0^x \nu_1(\xi)\beta_1(\xi)exp\left(\alpha_1(\xi)\right)d\xi+\int_0^x \delta_1(\xi)exp\left(\alpha_1(\xi)\right)d\xi.$$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$\tilde{\tau}_1(x)=\int_0^x \nu_1(\xi)\beta_1(\xi)exp\left\{-\left[\alpha_1(x)-\alpha_1(\xi)\right]\right\}d\xi+\int_0^x \delta_1(\xi)exp\left\{-\left[\alpha_1(x)-\alpha_1(\xi)\right]\right\}d\xi.$$

Таким образом общее решение уравнения (29) имеет вид

$$\tau_1(x)=C\,exp\left(-\alpha_1(x)\right)+\int_0^x \nu_1(\xi)\beta_1(\xi)exp\left\{-\left[\alpha_1(x)-\alpha_1(\xi)\right]\right\}dt+$$
$$+\int_0^x \delta_1(\xi)exp\left\{-\left[\alpha_1(x)-\alpha_1(\xi)\right]\right\}d\xi. \qquad (34)$$

С учетом начального условия (33), из (34) получим соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ в виде

$$\tau_1(x)=g(x)+\int_0^x N(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi, \qquad (35)$$

где $N(x,\xi)=\beta_1(\xi)exp\left\{-\left[\alpha_1(x)-\alpha_1(\xi)\right]\right\}$,

$$g(x)=\psi_1(0)exp\left\{-\left[\alpha_1(x)-\alpha_1(0)\right]\right\}+\int_0^x \delta_1(\xi)exp\left\{-\left[\alpha_1(x)-\alpha_1(\xi)\right]\right\}d\xi.$$

Из уравнения (2) переходя к пределу при $y\to +0$ имеем следующее соотношение:

$$\nu_1'''(x)=-c(x,0)\tau_1(x), \qquad (36)$$

Исключая $\tau_1(x)$ из (35) и (36), имеем интегро-дифференциальное уравнение относительно $\nu_1(x)$:

$$\nu_1'''(x) = g_1(x) + \int_0^x N_1(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi, \tag{37}$$

где $g_1(x) = -c(x,0)g(x),\ N_1(x,\xi) = -c(x,0)N(x,\xi)$

Для решения уравнения (37), воспользуемся краевыми условиями:

$$\nu_1(0) = \varphi_1'(0),\ \nu_1(\ell) = \varphi_2'(0),\ \nu_1'(0) = \varphi_3'(0). \tag{38}$$

Введем новую функцию

$$\nu_1(x) = \nu(x) + z(x), \tag{39}$$

где $z(x) = (1 - \frac{x^2}{\ell^2})\varphi_1'(0) + \frac{x^2}{\ell^2}\varphi_2'(0) + (x - \frac{x^2}{\ell})\varphi_3'(0)$. Тогда из (37) и (38) получим интегро-дифференциальное уравнение с однородными граничными условиями:

$$\nu'''(x) = g_2(x) + \int_0^x N_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi, \tag{40}$$

$$\nu(0) = 0, \nu(\ell) = 0, \nu'(0) = 0. \tag{41}$$

Так как, решение уравнения $\nu'''(x) = F(x)$, удовлетворяющее условиям (41), имеет вид

$$\nu(x) = \int_0^\ell G(x,\xi)F(\xi)d\xi,$$

где $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(x-\xi)^2\ell^2 - (\ell-\xi)^2x^2}{2\ell^2}, 0 \le \xi \le x, \\ -\dfrac{(\ell-\xi)^2x^2}{2\ell^2}, x \le \xi \le \ell \end{cases}$ – функция Грина, то решение задачи (40), (41) эквивалентно решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода:

$$\nu(x) = f(x) + \int_0^\ell K(x,\xi)\nu(\xi)d\xi, \tag{42}$$

где $K(x,\xi) = \int_\xi^\ell G(x,t)N_1(t,\xi)dt,\ f(x) = \int_0^\ell G(x,\xi)g_2(\xi)d\xi.$

Если выполняется условие

$$\ell \cdot \max_{\substack{0\le x\le \ell \\ 0\le\xi\le\ell}} |K(x,\xi)| < 1, \tag{43}$$

то уравнение (42) имеет единственное решение представимое в виде:

$$\nu(x) = f(x) + \int_0^\ell R(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{44}$$

где $R(x,\xi)$ – резольвента ядра $K(x,\xi)$.

Подставляя найденное значение $\nu(x)$ в (39) определим $\nu_1(x)$, а из (35) – $\tau_1(x)$. Из условия склеивания (14) и (15) определим $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$ соответственно.

После определения $\tau_2(x)$, из (28) найдем

$f_1(x)=\tau_2(x)-\psi_1(\frac{x}{2})+f_1(0)-\Omega_1(x,0).$ Тогда решение задачи 2 в области D_2 представимо в виде:

$$u(x,y)=\tau_2(x+y)-\psi_1(\frac{x+y}{2})+\psi_1(\frac{x-y}{2})-\Omega_1(x,0)+\Omega_1(x,y).$$

Теперь рассмотрим задачу 3. Из уравнения (2) последовательно интегрируя, сначала по y, потом дважды по x, получим:

$$u(x,y)=\Phi_1(x,y)+\frac{1}{2}u_{xx}(0,y)x^2-\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_0^y (x-\xi)^2 c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, \tag{45}$$

где $\Phi_1(x,y)=\varphi_1(y)+\varphi_3(y)x+\tau_1(x)-\varphi_1(0)-\varphi_3(0)x-\frac{1}{2}\tau_1''(0)x^2$.

Из (45), при $x=\ell$ получим:

$$\frac{1}{2}u_{xx}(0,y)=\frac{1}{\ell^2}\varphi_2(y)-\frac{1}{\ell^2}\Phi_1(\ell,y)+\frac{1}{\ell^2}\int_0^\ell d\xi\int_0^y(\ell-\xi)^2c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta.$$

Обратно подставляя это значение в (45), получим уравнение:

$$\begin{aligned}u(x,y)=\Phi(x,y)+\frac{x^2}{2\ell^2}\int_0^\ell d\xi\int_0^y(\ell-\xi)^2c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta-\\-\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_0^y(x-\xi)^2c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,\end{aligned} \tag{46}$$

где $\Phi(x,y)=\Phi_1(x,y)+\frac{x^2}{\ell^2}\varphi_2(y)-\frac{x^2}{\ell^2}\Phi_1(\ell,y)$.

Решение уравнения (46) построим методом последовательных приближений. Положим

$$u_0(x,y)=\Phi(x,y),$$

$$u_1(x,y)=\frac{x^2}{2\ell^2}\int_0^\ell d\xi\int_0^y(\ell-\xi)^2c(\xi,\eta)u_0(\xi,\eta)d\eta-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_0^y(x-\xi)^2c(\xi,\eta)u_0(\xi,\eta)d\eta,$$

$$u_n(x,y)=\frac{x^2}{2\ell^2}\int_0^{\ell}d\xi\int_0^{y}(\ell-\xi)^2c(\xi,\eta)u_{n-1}(\xi,\eta)d\eta-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{x}d\xi\int_0^{y}(x-\xi)^2c(\xi,\eta)u_{n-1}(\xi,\eta)d\eta.$$

Пусть $\max\limits_{\substack{0\le x\le\ell\\0\le y\le h}}\left|\Phi(x,y)\right|=M,\ \max\limits_{\substack{0\le x\le\ell\\0\le y\le h}}\left|c(\xi,\eta)\right|=L.$ Тогда $\left|u_1(x,y)\right|\le LN\dfrac{\ell^3}{3}y.$

Методом полной математической индукции доказано, что

$$\left|u_n(x,y)\right|\le M\,L^n\frac{\ell^{3n}}{3^n}\frac{y^n}{n!},\ n=1,2,... \tag{47}$$

Из оценок (47) следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)$ равномерно сходится. Тогда $u(x,y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)$ является единственным решением уравнения (46), удовлетворяющим условиям задачи 3.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если выполняются условия (11), (12) и (43), то решение задачи 1 существует и единственно.

Литература

1. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. [Текст] / Т.Д. Джураев – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
2. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
3. Сатаров, А.Э. Об одной краевой задаче для строго гиперболического уравнения четвертого порядка [Текст] / А.Э. Сатаров // Вестник ОшГУ. Сер. физ.-мат. наук, Ош, 2001. – №3. – С. 153-157.
4. Сатаров, А.Э. Задача сопряжения для уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / А. Сопуев, А.Э. Сатаров // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. мат., мех., инф. № 2 (53). – Алматы, 2007. – С. 39-48.
5. Абдумиталип уулу, К. Краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором колебания струны [Текст] / К. Абдумиталип уулу // Вестник Ошского государственного университета. – Том 3. – № 1. – Ош, 2021. – С. 10-18.
6. Абдумиталип уулу, К. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка, содержащий параболо-гиперболический оператор [Текст] / К. Абдумиталип уулу // Вестник Ошского государственного университета. – № 1. – Ош, 2022. – С. 20-28.
7. Апаков Ю.П. О некоторых нелокальных задачах для параболо-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве // «Прямые и обратные краевые задачи математической физики». - Ташкент, Фан, 1987,-С. 80-95.
8. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. О решения одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве // Научный вестник Наманганского государственного университета. – Наманган, 2020. - № 4. – С. 21-31.

УДК 512

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИОФАНТОВА УРАВНЕНИЯ

Сатаров Жоомарт, д. ф.-м.н., профессор
Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, к.ф.-м. н.
zulpukarov66@mail.ru
Ошский технологический университет им. М. М. Адышева
Кошокова Бактыгул Карыевна, магистрант
Ошский государственный педагогический университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Теория решения подобных уравнений является классическим разделом математике. В ней не приходится писать сложные и громоздкие формулы, а необходимо проводить аккуратные рассуждения, базирующиеся на определенных понятиях теории чисел связанные в стройную логическую конструкцию. В рамках этой теории можно дать исчерпывающее решение рассматриваемого класса задач с четко описанным алгоритмом получения ответа. Именно этими чертами характеризуется хорошая математическая теория.*

В заметке находятся решения линейного диофантова уравнения с n неизвестными. Строятся они конструктивно. Выявляется также структурное строение этих решений.

Ключевые слова: *диофантово уравнение, наибольший общий делитель, линейные представления, множества решений, абелевой группа.*

СЫЗЫКТУУ ДИОФАНТТЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМДЕРИНИН СТРУКТУРАСЫ ЖӨНҮНДӨ

Сатаров Жоомарт, ф.-м.и.д., профессор
Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, ф.-м. и.к.
zulpukarov66@mail.ru
М. М. Адышев атындагы Ошский технологиялык университети
Кошокова Бактыгул Карыевна, магистрант
Ош мамлекеттик педагогикалык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Мындай теңдемелерди чечүү теориясы математиканын классикалык тармагы болуп саналат. Ал татаал жана түйшүктүү формулаларды жазууга милдеттүү эмес, бирок ырааттуу логикалык конструкцияга байланышкан сандар теориясынын айрым түшүнүктөрүнүн негизинде так ой жүгүртүүнү жүргүзүү зарыл. Бул теориянын чегинде жооп алуу үчүн так сүрөттөлгөн алгоритм менен каралып жаткан маселелердин классына толук чечимди берүүгө болот. Булар жакшы математикалык теориянын өзгөчөлүктөрү.*

Эскертмеде n белгисиз сызыктуу диофанттык теңдеменин чечимдери камтылган. Алар конструктивдүү түрдө курулган. Бул чечимдердин структуралык структурасы да ачылган.

Ачкыч сөздөр: *Диофанттык теңдеме, эң чоң жалпы бөлүүчү, сызыктуу көрүнүштөр, чечимдердин көптүгү, абелиялык топ.*

ON THE STRUCTURE OF SOLUTIONS NO A LINEAR DIOPHANTINE EQUATION

Satarov Zhoomart Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
Zulpukarov Zhakshylyk Alibaevich Candidat of Ph. & Math. Sc.
zulpukarov66@mail.ru
Osh Technological University named after M. M. Adysheva
Koshokova Baktygul Karyevna, graduate student

Osh State Pedagogical University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The theory of solving such equations is a classical branch of mathematics. It does not have to write complex and cumbersome formulas, but it is necessary to carry out accurate reasoning based on certain concepts of number theory, connected into a coherent logical construction. Within the framework of this theory, it is possible to give an exhaustive solution to the considered class of problems with a clearly described algorithm for obtaining an answer. These are the characteristics of a good mathematical theory.*

The note contains solutions to a linear Diophantine equation in n unknowns. They are built constructively. The structural structure of these solutions is also revealed.

Key words: *Diophantine equation, greatest common divisor, linear combinations, sets, abelian group.*

Рассматривается диофантово уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = a_0, \quad n \geq 2 \;, \qquad (ld)$$

где $a_i \in Z,\ a_1a_2 \ldots a_n \neq 0$ (и неизвестные x_i также ищутся в области Z). Нашей целью в этой заметке является нахождение всех решений уравнения (*ld*). Здесь выявляется также структура найденных решений.

Обозначим через $d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ наибольший общий делитель (НОД) коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из (*ld*). Очевидно при $a_0 \vdots d$ заданное уравнение никакого решения не имеет. Поэтому всюду далее мы будем считать, что в (*ld*) $a_0 \vdots d$. Положив $d_n = a_n$, индуктивно вводим к рассмотрению следующие НОД

$$d_k = (a_k, d_{k+1}), \qquad k = n-1, \ldots, 1 \;.$$

С целью сохранения общности в рассуждениях, вводим еще одно число $d_0 = d_1$.

Здесь очевидны делимости $d \vdots d_1$ и $d_k \vdots d_{k-1}$ при всех рассмотренных выше значениях k.

Наш подход в заметке основывается на какую-нибудь (не важно какую!) систему линейных представлений НОД $d_k,\ k = n, \ldots, 1$:

$$\begin{cases} d_n = x_na_n, \\ d_{n-1} = x_{n-1}a_{n-1} + y_{n-1}d_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_k = x_ka_k + y_kd_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_1 = x_1a_1 + y_1d_2 \end{cases} \qquad (lp)$$

(здесь $x_k, y_k \in Z$ при всех $k = n-1, \ldots, 1$ и $x_n = 1$).

Пусть $k, q -$ произвольные номера, для которых $0 \leq k < q \leq n$. Из коэффициентов уравнения (*ld*) и разложений (*lp*) составим величины

$$\sigma_q^k = \frac{a_k}{d_k}\left(\prod_{k<i<q} y_i\right)x_q,$$

где для общности рассуждений при соседних $k = q-1$ и q считается $\prod\limits_{k<i<q} y_i = 1$.

Умножив равенства (lp) с номерами $t,\ \ t \geq k,$ на $\frac{a_{k-1}}{d_{k-1}} \prod_{k \leq i < t} y_i$ соответственно и почленно складывая их, мы приходим к

$$\frac{a_{k-1}}{d_{k-1}} d_k = \sigma_k^{k-1} a_k + \sigma_{k+1}^{k-1} a_{k+1} + \ldots + \sigma_n^{k-1} a_n \qquad (lp_k)$$

(т.е. к линейному представлению $\frac{a_{k-1}}{d_{k-1}} d_k$ через коэффициенты $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$, здесь $d_{k-1} = d_k$ при $k = 1$).

При $k = 1$ равенство (lp_k) дает нам

$$a_0 = \sigma_1^0 a_1 + \sigma_2^0 a_2 + \ldots + \sigma_n^0 a_n .$$

Это означает, что вектор $A^0 = \langle \sigma_1^0, \sigma_2^0, \ldots, \sigma_n^0 \rangle$ есть какое-то решение уравнения (ld). При $k > 1$ те же (lp_k) показывают, что векторы

$$A^{k-1} = \left\langle 0, \ldots, 0, -\frac{d_k}{d_{k-1}}, \sigma_k^{k-1}, \ldots, \sigma_n^{k-1} \right\rangle$$

(длины *n*, где случай отсутствия нулей также включается) являются решениями однородного (для (ld)) уравнения

$$a_1 x_1 + a_n x_2 + \ldots + a_n x_n = 0. \qquad (ld_0)$$

Если обозначить через $S(ld)$ и $S(ld_0)$ множества решений уравнений (ld) и (ld_0) соответственно, то они будут связаны соотношением

$$S(ld) = A^0 + S(ld_0).$$

Это означает, что решения из $S(ld)$ полностью определяются вторым слагаемым. Слагаемое $S(ld_0)$, очевидно, образует абелеву группу (в частности, оно выдерживает умножения на целые числа).

Далее, для векторов $x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ из $S(ld_0)$ и номеров $k,\ 2 \leq k \leq n$, вводим (бинарное) отношение "$\geq$", положив

$$x \text{ "}\geq\text{" } k \leftrightarrow x_1 = \ldots = x_{k-1} = 0.$$

Теперь взяв произвольно вектор $x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ из $S(ld_0)$, имеем импликации

$$a_1 x_1 \vdots d_2 \to \frac{a_1}{d_1} x_1 \vdots \frac{d_2}{d_1} \xrightarrow[\left(\frac{a_1}{d_1}, \frac{d_2}{d_1}\right) = 1]{} x_1 \vdots \frac{d_2}{d_1} \to \exists t_1 \in Z : x_1 = -\frac{d_2}{d_1} t_1 \to$$

$$a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = d_2 \cdot \frac{a_1}{d_2} t_1 \xrightarrow[(lp_2)]{} a_2 (x_2 - t_1 \sigma_2^1) + \ldots + a_n (x_n - t_1 \sigma_n^1) = 0$$

$$\to (x - t_1 A^1) \text{"}\geq\text{"} 2.$$

Принимая за *x* вектор $x - t_1 A^1$ и повторяя для него только что проведенные рассуждения при помощи (lp_3), мы приходим к заключению $(x - t_1 A^1 - t_2 A^2)\text{"}\geq\text{"}3$ при некотором $t_2 \in Z$ и т.д. Продолжая описанный процесс отщепления и далее, на $(n-1)$-м шаге будем иметь

$$(x - t_1 A^1 - t_2 A^2 - \ldots - t_{n-1} A^{n-1})"\geq" n.$$

Поскольку для любого $y \in S(ld_0)$ $y"\geq" n \to y = 0$ (ибо Z – область целостности), мы для рассматриваемого вектора имеем представление

$$x = t_1 A^1 + \ldots + t_{n-1} A^{n-1}, \qquad (lk)$$

где $t_1, \ldots, t_{n-1} \in Z$. Целостность кольца Z влечет за собой также инъективность сюръекции

$$Z^{n-1} \to S(ld), \ \langle t_1, \ldots, t_{n-1} \rangle \to A^0 + t_1 A^1 + \ldots + t_{n-1} A^{n-1} \qquad (bi)$$

(здесь $Z^{n-1} = Z \times \ldots \times Z - (n-1)$-я прямая степень кольца Z), т.е. биективность указанного соответствия. Итак, установлено, что решения $S(ld_0)$ представляются, причем единственном образом, в виде линейной комбинации (*lk*). Это означает, что $S(ld_0)$ не только является абелевой группой, но и как Z -модуль имеет ранг $n-1$.

Иногда, особенно при практических приложениях, решения из $S(ld_0)$ удобно представлять в параметрическом виде

$$\begin{cases} x_1 = \sigma_1^0 - t_1 \dfrac{d_2}{d_1}, \\ x_2 = \sigma_2^0 + t_1 \sigma_2^1 - t_2 \dfrac{d_3}{d_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \sigma_{n-1}^0 + t_1 \sigma_{n-1}^1 + t_2 \sigma_{n-1}^2 + \ldots + t_{n-2} \sigma_{n-1}^{n-2} - t_{n-1} \dfrac{d_n}{d_{n-1}}, \\ x_n = \sigma_n^0 + t_1 \sigma_n^1 + t_2 \sigma_n^2 + \ldots + t_{n-2} \sigma_n^{n-2} + t_{n-1} \sigma_n^{n-1}, \end{cases} \qquad (p)$$

где $t_1, \ldots, t_{n-1}$ независимо друг от друга пробегают множество Z (напомним, что здесь $d_n = a_n$).

Далее, как показывает биективность отображения (*bi*), для мощности всех решений уравнения (*ld*) имеет место (цепочка)

$$|S(ld)| = |S(ld_0)| = |Z^{n-1}| = |Z|^{n-1} = |N|^{n-1} = |N|$$

(см. по этому поводу [1], стр.85), т.е. она будет равна алеф-нулю. Как показывают проделанные выкладки, наша заметка в некотором перекрытии содержит в себе результат из [2] (см. стр.121), где была показана лишь бесконечность множества решений $S(ld)$.

Литература

1. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. – 392 с.
2. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел. М. «Просвещение», 1974 – 383 с.

УДК517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА I РОДА ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ В ОБЛАСТИ $\mathbf{y \geq x, x \geq 0}$

Таалайбеков Нурсултан Таалайбекович, аспирант
atd5929@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызская Республика

Аннотация. *В статье рассматриваются нелокальная задача I рода для гиперболического уравнения четвертого порядка. Нелокальные условия задаются вдоль прямой* $y = x,\ \ 0 \leq x < A, y \geq x$ *Основной целью статьи является доказательство разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения четвертого порядка в области* $D = \{(x, y): 0 \leq x < A, y \geq x\}$, *где* $A < \infty$. *Методом функции Римана задача сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода и доказано существование единственного решения нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения четвертого порядка в области* D.

Ключевые слова: *Функция Римана, нелокальная задача, задача Коши, гиперболическое уравнение, интегральное уравнение, интегральные условия*

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ МОДЕЛДИК ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ШАРТТАРЫ $\boldsymbol{y \geq x, x \geq 0}$ АЙМАГЫНДА БЕРИЛГЕН I ТИПТЕГИ ЛОКАЛДЫК ЭМЕС МАСЕЛЕ

Таалайбеков Нурсултан Таалайбекович, аспирант
atd5929@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргыз Республикасы

Аннотация: *Бул макалада төртүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдеме үчүн I типтеги локалдык эмес маселе каралган. Локалдык эмес шарттар* $y = x,$, *мында* $0 \leq x < A, y \geq x$ *түзүн бойлото коюлган. Макаланын негизги максаты болуп* $D = \{(x, y): 0 \leq x < A, y \geq x\}$, *где* $A < \infty$ *аймагында интегралдык шарттары менен төртүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдеме үчүн локалдык эмес маселенин коррективдүүлүгүн далилдөө эсептелет. Ошондуктан* D *аймагында төртүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдеме үчүн интегралдык шарттары менен локалдык эмес маселеси Риман функциясы усулунун жардамында Вольтеррдин экинчи типтеги интегралдык теңдемелердин системасына алып келинген жана жалгыз чечимдин жашашы далилденген.*

Ачкыч сөздөр: *Римандын функциясы, локалдык эмес маселе, Кошинин маселеси, гиперболикалык теңдеме, интегралдык теңдеме, интегралдык шарттар.*

A NONLOCAL PROBLEM OF THE FIRST TYPE FOR A MODEL FOURTH-ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH CONDITIONS IN THE DOMAIN $\boldsymbol{y \geq x, x \geq 0}$

TaalaybekovNursultanTaalaybekovich, graduate student
atd5929@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The article considers a non-local problem of the first kind for a hyperbolic equation of the fourth order. Non-local conditions are set along the line segment* $y = x,$ *where* $0 \le x < A, y \ge x$ *. The main purpose of the article is to prove the solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a fourth-order hyperbolic equation in the domain* $D = \{(x, y): 0 \le x < A, y \ge x\}$, *where The Riemann function method reduces the problem to a system of Volterra integral equations of the second kind and proves the existence of a unique solution to a non-local problem with integral conditions for a fourth-order hyperbolic equation in the domain D.*
Keywords: *hyperbolic equation, nonlocal problem, integral conditions, function of Ryman, integral equation.*

Введение. Известно, что нелокальные задачи для уравнений в частных производных активно изучены в работах А.И. Кожанова, A. Bouzian, К.Б. Сабитова, Л.С. Пулькиной и их учеников. Однако разрешимости нелокальных задач для гиперболических уравнений четвертого порядка сравнительно мало изучен.

В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных сравнительно активно исследуются. В тех случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для непосредственных измерений, дополнительной информацией, достаточной для однозначной разрешимости соответствующей математической задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме[4-7].

Нелокальными задачами называется такие задачи, в которых задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри нее. Таких соотношений выполняют условия, содержащие интегралы от искомого решения[7]. После полной классификации уравнения в частных производных четвертого порядка А. Сопуевым[1], эта область настоящее время бурно развивается.

В области $D = \{(x, y): 0 \le x < A, y \ge x\},$ где $A < +\infty,$ для модельного гиперболического уравнения

$$u_{xxxy}(x, y) + cu = f(x, y), \tag{1}$$

где $c = const,\ f(x, y) \in C(\overline{D}), M = \{u, u_y, u_{xy}, u_{xxy} \in C(\overline{D}), u_{xxxy} \in C(D)\},$ рассмотрим нелокальную задачу с интегральными условиями.

Постановка задачи. В области D рассмотрим нелокальную задачу с интегральными условиями для уравнения (1). В качестве нелокальных условий задаются интегралы вдоль прямой $y = x,$ где $0 \le x < A, A < +\infty.$ Известно, что характеристики $x = const, y = const$ не пересекают отрезку прямой $y = x,$ где $0 \le x < +\infty,$ не более одного раза. Аналогичные локальные задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка были рассмотрены в работах А. Сопуева и его учеников[1,2].

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса M , удовлетворяющее условиям на прямой $y = x, 0 \le x \le A, A < +\infty,$

$$u\big|_{y=x} = \tau(x), \tag{2}$$

и нелокальным условиям I рода:

$$\int_0^A K_i(x)u(x, y)dx = 0, i = \overline{1,3}, \tag{3}$$

где $\forall x \in [0, \infty), \exists L > 0, (L = const): |K_i(x)| \le L, i = \overline{1,3}$ - заданные монотонные ограниченные функции, удовлетворяют признак Абеля а $\tau(x)$ – заданная гладкая функция.

С начало рассмотрим вспомогательную задачу.

Функция Римана. (Вспомогательная задача) На отрезке прямой $y = x,$ рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u_y\Big|_{y=x} = \nu(x), u_{xy}\Big|_{y=x} = \mu(x), u_{xxy}\Big|_{y=x} = \chi(x), \tag{4}$$

где $\nu(x), \mu(x), \chi(x)$ – пока неизвестные функции, причем на прямой $y = x,$

$$\tau(x) = \tau(y), \nu(x) = \nu(y), \mu(x) = \mu(y), \chi(x) = \chi(y), \tag{5}$$

и условия согласования

$$\int_0^A K_i(x)\tau(x)dx = 0, \int_0^A K_i(x)\nu(x)dx = 0, \int_0^A K_{ix}(x)\nu(x)dx + \int_0^A K_i(x)\mu(x)dx = 0,$$

$$\int_0^A K_{ixx}(x)\nu(x)dx + 2\int_0^A K_{ix}(x)\mu(x)dx + \int_0^A K_i(x)\chi(x)dx = 0, i = \overline{1,3}. \tag{6}$$

Аналогично в работе[2,3], для удобства переходим к переменным ξ, η и для построения функции Римана через произвольную точку $(x, y) \in D,$ проведем характеристическую линии $\xi = x, \eta = y$ тогда образуется прямо-угольный треугольник в плоскости ξ, η – $D_1 = \{(\xi, \eta) : x < \xi < y, \xi < \eta < y\}$ с вершинами $A(x, x), D(y, y), C(x, y).$ Далее известно, что рассмотрим формально сопряженный оператор $L^*(v),$ которое запишем в переменных[2] ξ, η:

$$vL(u) - uL^*(v) = \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}, \tag{7}$$

где $L^*(v) = v_{\xi\xi\xi\eta} + cu, Q = vu_{xxx}, P = -v_y u_{xx} + v_{xy} u_x - v_{xxy} u.$

Используя свойств криволинейного интеграла и формулу Грина в (7) по контуру ∂D_1, построена функции Римана оператора $L(v(x, y; \xi, \eta)),$ удовлетворяющую условиям[2]:

1. Функция $v(x, y; \xi, \eta) \in M$ по совокупности переменных $(x, y; \xi, \eta)$ на $\overline{D_1} \times \overline{D_1}$;

2. При каждой $v(x, y) \in \overline{D_1}$ функция $v(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет сопряжен-ную уравнению:

$$L^*_{(\xi,\eta)}(v) = v_{\xi\xi\xi} + cv = 0, (\xi, \eta) \in D, \tag{8}$$

и условиям на характеристиках $\xi = x, \eta = y$,

$$v(x, y; \xi, \eta)\Big|_{\xi=x} = 0, v_\xi(x, y; \xi, \eta)\Big|_{\xi=x} = 0, v_{\xi\xi}(x, y; x, y) = 1, \tag{9}$$

$$v(x, y; \xi, \eta)\big|_{\eta=y} = \omega(x, y, \xi), \tag{10}$$

где $\omega(x, y, \xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$v_{\xi\xi\xi}(x, y; \xi, y) = 0, \tag{11}$$

$$v(x, y; \xi, y)\Big|_{\xi=x} = 0, v_\xi(x, y; \xi, y)\Big|_{\xi=x} = 0, v_{\xi\xi}(x, y; x, y) = 1. \tag{12}$$

Интегрируя уравнение (11) трижды по ξ в пределах от x до ξ и используя условия (12), учитывая свойства функции, построена функции Римана в виде:

$$v(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c^n}{n!(3n+2)!}(\xi-x)^{3n+2}(\eta-y)^n. \qquad (13)$$

Вычисляя соответствующие производные функции Римана имеем:

$$v_{\xi}(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c^n}{n!(3n+1)!}(\xi-x)^{3n+1}(\eta-y)^n,$$

$$v_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c^n}{n!(3n)!}(\xi-x)^{3n}(\eta-y)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n c^n}{n!(3n)!}(\xi-x)^{3n}(\eta-y)^n,$$

$$v(x,y;0,y)=\frac{1}{2}x^2, v_{\xi}(x,y;0,y)=x, v_{\xi\xi}(x,y;0,y)=1, v(x,y;x,x)=0,$$

$$v_x(x,y;x,x)=0, v_{xx}(x,y;x,x)=1, v_{\xi}(x,y;x,x)=0, v_{\xi x}(x,y;x,x)=-1,$$

$$v_{\xi\xi}(x,y;x,x)=1, v_{\xi\xi x}(x,y;x,x)=0, v_{\xi xx}(x,y;x,x)=0, v_{\xi\xi xx}(x,y;x,x)=0,$$

$$v_{\xi\xi\xi xx}(x,y;x,x)=-\frac{c}{6}(x-y), v_{\xi\xi\xi}(x,y;x,x)=0, v_{\xi\xi\xi}(x,y;y,y)=0. \qquad (14)$$

Тогда на прямой $y=x$, задача Коши для уравнения (1) с условиями (4) имеет единственное решение и представимо через функции Римана в виде:

$$u(x,y)=v_{\xi\xi}(x,y;x,x)\tau(x)+\int_x^y\big[v(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)-v_{\xi}(x,y;\xi,\xi)\mu(\xi)+$$
$$+v_{\xi\xi}(x,y;\xi,\xi)\nu(\xi)+v_{\xi\xi\xi}(x,y;\xi,\xi)\tau(\xi)\big]d\xi-\int_x^y d\xi\int_{\xi}^y v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta, \qquad (15)$$

Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений. Умножив обе части на $K_i(x)$ и интегрируя уравнение (15) по x в пределах от 0 до A и воспользовавшись (6), (14), условиям (2),(3), обозначив все известные функции через $g_1(y)$, имеем[2,3]:

$$\int_x^y\big[H_{1i}(y,\xi)\chi(\xi)-H_{2i}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{3i}(y,\xi)\nu(\xi)\big]d\xi=g_i(x,y), i=\overline{1,3}, \qquad (16)$$

где

$$H_{1i}(y,\xi)=\int_0^A K_i(x)v(x,y;\xi,\xi)dx,\ H_{2i}(y,\xi)=\int_0^A K_i(x)v_{\xi}(x,y;\xi,\xi)dx,$$

$$H_{3i}(y,\xi)=\int_0^A K_i(x)v_{\xi\xi}(x,y;\xi,\xi)dx,\ i=\overline{1,3},$$

$$g_i(x,y)=-\int_x^y\left(\int_0^A K_i(x)v_{\xi\xi\xi}(x,y;\xi,\xi)dx\right)\tau(\xi)d\xi+\int_0^A\left(\int_x^y d\xi\int_{\xi}^y v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta,\right)dx,$$

$i=\overline{1,3}.$

Известно, что (16) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода относительно функций $\nu(x),\mu(x),\chi(x)$.

Разрешимость задачи 1 Из теории интегральных уравнений[8], известно, что «диагональ» ядра не обращается в нуль и если производные ядра по x, по y существуют и непрерывны, то можно привести интегральное уравнение Вольтерра первого рода к интегральному уравнению Вольтерра второго рода двумя способами.

В нашем случае, в основного интервала каждое ядро в системе интегральных уравнений по свойству функции Римана не обращается в нуль и производные ядра по ξ, по y существуют и непрерывны. А $K_i(x), i=\overline{1,3}$ заданные достаточно гладкие функции, не обращается в нуль, по этому $H_{ki}(y,\xi)\neq 0, k,i=1,2,3.$ Тогда с первым более простым способом, т.е. дифференцированием обеих частей системы интегральных уравнений можно привести к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Дифференцируя обеих частей (16) по переменному y и учитывая (5) имеем:

$$\begin{gathered}H_{1i}(y,y)\chi(x)-H_{2i}(y,y)\mu(x)+H_{3i}(y,y)\nu(x)-\int\limits_x^y\big[H_{1iy}(y,\xi)\chi(\xi)-\\ -H_{2iy}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{3iy}(y,\xi)\nu(\xi)d\xi=\frac{\partial}{\partial y}g_i(x,y), i=\overline{1,3},\end{gathered}\tag{17}$$

Системы интегральных уравнений запишем в векторной форме.

Введем следующие обозначение:

$$H(y)=\begin{pmatrix}H_{1i}(y,y) & -H_{2i}(y,y) & H_{3i}(y,y)\end{pmatrix}, i=\overline{1,3},$$
$$K(y,\xi)=\begin{pmatrix}H_{1iy}(y,\xi) & -H_{2iy}(y,\xi) & H_{3iy}(y,\xi)\end{pmatrix}, i=\overline{1,3},$$

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\chi(x)\\ \mu(x)\\ \nu(x)\end{pmatrix}, G(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}g_1(x,y)\\ \frac{\partial}{\partial y}g_2(x,y)\\ \frac{\partial}{\partial y}g_3(x,y)\end{pmatrix},$$

$$H(y)\Phi(x)-\int\limits_y^x K(y,\xi)\Phi(\xi)d\xi=G(x,y).\tag{18}$$

Очевидно, что матрица $\boldsymbol{H}(y)$ невырожденная матрица, так, как

$$\left|H(y)\right|\neq 0.\tag{19}$$

Тогда (18) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. Так, как решение системы уравнений (18) существует и единственно. Найдя решение $\chi(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ системы интегральных уравнений (18), методом последовательных приближений, учитывая (5) и подставляя в (15), получим решение задачи 1.

Итак, справедлива

Теорема 1. Если выполняются условий (2), (3), (6) и (19) то в области D решение задачи 1 существует и единственно в классе M.

Из формулы Римана вытекают некоторые следствия, представляющие общий интерес.

Легко видеть, что значение этого решения в некоторой точке $C(x,y)$ вовсе не зависит от данных Коши вне треугольника ABC, образованного двумя характеристиками, проведенными через эту точку, и прямой, несущей начальные данные. Если мы будем менять данные вне этого треугольника, то решение будет меняться лишь вне этого треугольника. Таким образом, каждая характеристика будет отделять область, где решение осталось неизменным, от той области, где оно изменилось. Мы приходим к следующему выводу: к данному решению задачи, зафиксированному внутри треугольника АВС**,** можно присоединять вдоль характеристики, вообще говоря, различные решения, являющиеся его продолжением.

Таким образом, характеристики - это суть линии, вдоль которых можно разрезать область существования решения, если мы хотим в некоторых частях этой области заменить одно решение другим так, чтобы при этом снова получать решения уравнения во всей области. Это важное свойство характеристик тесно связано с тем, что при произвольных начальных данных, заданных на характеристиках, задача Коши, вообще говоря, неразрешима. Для всякой другой линии, зная решения по одну сторону линии, мы могли бы найти значения решения и его производных на этой линии и решить задачу Коши по другую сторону линии. Таким образом, за всякую не характеристическую линию решение уравнения продолжается однозначно.

Итак, в той стороны прямой $y = x$ или в области $D = \{(x, y): 0 \le x < A, y \le x\}$, где $A < +\infty$, нелокальная задача для уравнения (1) однозначна, разрешима и аналогично доказывается.

Задача 2. Найти в области *D* решение уравнения (1) из класса *M,* удовлетворяющее условиям (2) и нелокальным условиям I рода:

$$\int_0^A K_1(x)u(x, y)dx = 0, \int_0^A K_2(x)u_x(x, y)dx = 0, \int_0^A K_3(x)u_{xx}(x, y)dx = 0, \tag{19}$$

где $K_i(x), i = \overline{1,3}, \tau(x)$ – заданные гладкие функции.

Разрешимость задачи 2 доказывается аналогично методом функции Римана.

Литература

1. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: Дис. …докт. физ. –мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 1996. – 249 с.
2. Асылбеков Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дис. … канд. физ. –мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 130 с.
3. Асылбеков Т.Д., Нуранов Б.Ш., Таалайбеков Н.Т. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами // Республиканский научно-теоретический журнал “Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана”, № 3 – Бишкек, 2019. №3. – С. 11-17.
4. Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. 1986. № 1. – С. 171-174.
5. Пулькина Л.С. О разрешимости в L2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2000. № 2. – С. 279-280.
6. Пулькина Л.С., Кечина О.М. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2009. – № 2(68). – С. 80–88.
7. Пулькина Л. С. “Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода” // Изв. вузов. Матем., 2022. № 4. С. 74–83.
8. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – Москва: ИЛ, 1960. -229 с.

УДК 004.93.14

ИРГӨӨ ТҮРҮНДӨ КУБУЛУШТАРДА «САЙМАНЫ» АНЫКТООЧУ ЫКМА

Тагаева Сабина Базарбаевна, ф.-м.и.к.
tagaeva_72@mail.ru
Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институту
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Баш аламандыктан тартип пайда болгону процесстери (адабиятта биринчи белгилүү болгон энергия тарткатылганынан энтропиянын жергилик азаюу процессинин аталышы боюнча алганда, «иргөө» тибиндеги процесстер) каралат; алардын негизги өзгөчөлүктөрүн төмөнкүчө белгилешет: алар чыныгы (анын ичинде компьютерлердин аракеттери) жана кокустан, ар бир учурда бир нече компоненттер (компьютердин абалдары) менен аныкталат. Мурда, автор катышуусу менен сунуштаган аныктама боюнча, көп элементтерден турган системалар гана үчүн пайда болуучу кубулуштар «көпчө» эффектиси деп аталган. Мындай кубулушка алып келүүчү, ошол кубулуш менен байланышкан, эң кичине сан турактуу болуп саналат. Тегиздикте жөнөкөй саймаларды аныктап таануучу ар бир чекиттин коңшуларын алгоритм ишке ашырылган.*

Ачкыч сөздөр: *ыкма, ирет, башаламандык, иргөө, «көпчө», эффект, кубулуш, сайма.*

МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ «УЗОРОВ» В ПРОЦЕССАХ ТИПА ИРГӨӨ

Тагаева Сабина Базарбаевна, к.ф.-м.н.
tagaeva_72@mail.ru
Институт математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Рассматриваются процессы возникновения порядка из хаоса (процессы типа «иргөө» по названию первого такого процесса локального уменьшения энтропии вследствие диссипации энергии, известного в литературе), их основные признаки: они - реальные (включая действия компьютеров) и случайны, определяются несколькими компонентами (состояниями компьютера) в каждый момент. Ранее, по определению с участием автора, возникновение явлений только для систем с большим количеством компонент названо эффектом «множественности». Самое малое число, вызывающее такое явление, названо постоянной, связанной с этим явлением. Реализован алгоритм для выявления простых узоров на плоскости, основанный на подсчете соседей каждой точки.*

Ключевые слова: *алгоритм, порядок, хаос, иргөө, множественность, эффект, явление, узор.*

A METHOD TO DETECT “TRACERIES” IN IRGÖÖ-TYPE PROCESSES

Tagaeva Sabina Bazarbaevna, Cand. of sci.
tagaeva_72@mail.ru
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *Processes of generation of order from chaos (irgöö-type processes by the name of the first process of local diminishing of entropy due to dissolving of energy mentioned in literature) were considered; they are real (including running computers) and random, are defined by some components (states of computer) at each moment. Supra, with the author’s participation, appearance of phenomena in systems only with large number of components is said to be the effect of numerosity. The least number of components preserving such phenomenon was said to be the constant related to it. Algorithm to detect simple traceries on a plane by means of counting of neighbors of each point was implemented.*

Keywords*: algorithm, order, chaos, irgöö, numerosity, effect, phenomenon, tracery.*

1. Кириш сөз

Кыргызстанда эффекттердин кесепеттери катары кубулуштарды системалуу издөө башталды. Иште хаостан тартиптин жаралуу процесстери (эргөө тибиндеги процесстер, адабияттарда айтылган энергиянын эрүүсүнөн улам энтропиянын локалдуу төмөндөшүнүн биринчи процессинин аты менен) каралат [1]. Мындай процесстердин негизги өзгөчөлүктөрү: алар реалдуу (анын ичинде иштеп жаткан компьютерлер), кокустуктар, ар бир көз ирмемде кээ бир компоненттер (компьютердин абалы) менен аныкталат.

Компьютерди реалдуу объект, ал эми компьютердик презентацияларды реалдуу процесс катары кароо [2]-де белгиленген.

Жаңы «кубулуштардын» жана «эффекттердин» ачылыштары илимди өнүктүрүүдө жетиштүү кадамдар болгон, бирок буга чейин [4] бул түшүнүктөрдүн «эффекттердин» натыйжасы катары жаңы «кубулуштарды» издөө үчүн методикалык тиешелүү аныктамалар жана мисалдар менен аныктамалары болгон эмес.

2-бөлүм сандыктын эффектисинин, көптүктүн константасынын жана үлгү таануунун жалпы маселесинин курамдык бөлүгү катары кубулуштарды аныктоо алгоритминин аныктамаларын камтыйт.

3-бөлүмдө белгилүү процесстин мисалы бар.

4-бөлүмдө биз үлгүнү аныктоо үчүн жаңы алгоритмди сунуштайбыз.

2. Сандыктын эффектисинин жана константаларынын аныктамалары жана кубулуштарды аныктоочу алгоритм

Чоң сандар мыйзамын статистиканын кээ бир кубулуштары катары кароого болот.

Биздин аныктама боюнча, көп сандагы компоненттери бар системалардагы кубулуштардын пайда болушу сандыктын эффектиси деп айтылган.

Бул эффекттин айынан статистикага тиешеси жок кээ бир көрүнүштөрдү таптык.

Аныктама. Кубулуштардын көп сандагы компоненттери бар системаларда гана пайда болушун сандыктын эффектиси деп аташат.

Аныктама. Эгерде кубулуш Nден аз компоненттердин саны үчүн азыраак болуп, Nдан көп компоненттердин саны үчүн көп болсо, анда N саны бул кубулуш үчүн сандыктын константасы деп аталат.

Белгилүү бир реалдуу эксперимент же эсептөө эксперименти тарабынан берилген сандар жыйындысы менен иштеген ар кандай алгоритм кокус баштапкы маалыматтар “ооба” же “жок” деп чыксын (алгоритмде параметрлер да болушу мүмкүн).

Аныктама. Эгерде алгоритм болжолдонгон кубулушту ишке ашыруучу 50%дан ашык көптөгөн эксперименттерде "ооба" деп чыкса, анда мындай көрүнүш бар.

Белгилүү кубулуштарга мындай алгоритмдерди куруу маселеси келип чыгат.

3. Иргөө түрүндө элестетилген түртүү процесси

Биз жабышчаак чөйрөдө дискреттик электрдик заряддардын өз алдынча тартибин издедик [3]. Топологиялык торустун (чектелген бетинде чети жок) туш келди баштапкы бөлүштүрүүдөн Кулон мыйзамы боюнча тең, тебүүчү электр заряддарынын кыймылы акыркы регулярдуу торду түздү, компьютерде моделдешти.

N электрдик заряддардын кыймылын N эки өлчөмдүү дифференциалдык теңдемелердин системасы менен сүрөттөөгө болот. Бул дифференциалдык теңдемелер айырма теңдемелеринин системасы менен жакындатылган. Алгоритм сунушталган [5].

4. Ыкма жана паскалча программа

Бул жерде биз жаңы сунуштайбыз

Алгоритм. Чектелген метрикалык (жергиликтүү Евклиддик) мейкиндиктеги K айырмалуу $\{z[1].. z[K]\}$ чектүү жыйындысы берилсин. Туруктуу v>1ди тандаңыз.

а) $M[i]:=min\{|z[i]–z[j]|: j\neq i\}, 1\le i\le K$ минимумдары табылды.

б) Бардык чекиттердин кошуналарынын санын эсептөө,

$C[i]:=card\{j: M[i]\le |z[i]–z[j]|\le M[i]\cdot v\}, i=1..K;$

в) Жыштыктарды, эң көп жыштыгын жана анын жыштыгын эсептеңиз

$W[q]:= card\{i:C[i]=q\}, q=1..6;$

$FW:=max\{W[q]: q=1..6\}; FI:=argmax\{W[q]: q=1..6\}; FQ:=FW/K.$

с) Чыгуу FI жана FQ.

Эгерде $FQ> 0,5$ болсо, анда $C[i]$ сандарынын көбү бирдей жана үлгү бар.

Мисалы, R^2де: эгерде $FI=3$ болсо, анда алты бурчтуу тор бар;

эгерде $FI=4$ болсо, анда алты бурчтуу тор бар; эгерде $FI=6$ болсо, анда үч бурчтуу тор бар.

Төмөнкү программа паскаль тилинде жазылган, $v=1.5$.

```
PROGRAM sabina_aln; USES CRT, math;
var hxy,vx,vy,dx,dy,dxy,dxy1,hxy1,z,z2,xj,yj,dxy2,dxyd,
d_xy2,mn,rel_xy,scous,v: real; i,j,nxy,it,nt,np,ihand,n_time,ik: longint;
ncount: array[1..500] of integer; w: array[0..100] of integer;
var f,n,iw,jcase: integer; x,y:array[1..500] of real;
function dxy_2(ii,jj:longint): real; begin
xj:=x[jj]; if xj>x[ii]+z2 then xj:=xj-z; if xj<x[ii]-z2 then xj:=xj+z;
yj:=y[jj]; if yj>y[ii]+z2 then yj:=yj-z; if yj<y[ii]-z2 then yj:=yj+z;
dxy_2:=sqr(x[ii]-xj)+sqr(y[ii]-yj); end;
begin {main} randomize;
writeln('  Tagaeva, Dec. 2022. Repelling charges on torus, improved');
for jcase:=1 to 5 do begin write(' Give number of charges and wait a little: '); readln(nxy);
v:=1.5; z:=700.; z2:=z/2.0; np:=10; hxy:=1.0; hxy1:=hxy; nt:=1000;
for ik:=1 to nxy do begin  x[ik]:=z*random; y[ik]:=z*random; end;
for it:=0 to nt do begin {it} if it>np then hxy:=2.0*hxy1;
if it>2*np then hxy:=4.0*hxy1;
for i:=1 to nxy do begin {i=ix} vx:=0.; vy:=0.; for j:=1 to nxy do
begin if j<>i then begin dxy2:=dxy_2(i,j)+1.;
dxy1:=z/(dxy2*sqrt(dxy2)); if dxy1<sqr(z)/nxy then begin
dx:=(x[i]-xj)*dxy1; dy:=(y[i]-yj)*dxy1; vx:=vx+dx; vy:=vy+dy; end; end; end;
x[i]:=x[i]+vx*hxy; if x[i]>z then x[i]:=x[i]-z; if x[i]<0. then x[i]:=x[i]+z; y[i]:=y[i]+vy*hxy; if
y[i]>z then y[i]:=y[i]-z; if y[i]<0. then y[i]:=y[i]+z;
                                   end {i=ix}; end {it};
for iw:=0 to 100 do w[iw]:=0; for i:=1 to nxy do begin mn:=100000.0;
for j:=1 to nxy do begin if i<>j then mn:=Min(mn, dxy_2(i,j)) end;
ncount[i]:=0;
for j:=1 to nxy do begin if (i<>j) and (dxy_2(i,j)<mn*v) then ncount[i]:=ncount[i]+1 end;
end;
for j:=1 to nxy do w[ncount[j]]:=w[ncount[j]]+1;
for iw:=2 to 7 do begin write(' ',iw:1,' ',w[iw]:2,';') end; writeln; end; readln; END.
```

Бул программа бүтүн сандын квадраты болгон ар бир N үчүн W кошуналардын эң көп санын эсептөө үчүн көп жолу иштетилген.

N: 81 100 121 144 169 196 225

W: 5,6 4,5 5,6 4 6 4 6

Демек, сандыктын катуу константасы ~ 144 (ачык алмашуунун башталышы).

Ошондой эле, заряддардын саны жуп сандын квадраты болгондо торчо эксперименттердин көбүндө квадрат болот; ал так сандын квадраты болгондо торчо эксперименттердин көпчүлүгүндө үч бурчтуу болот.

5. Корутунду

Биз сунуш кылынган аныктамалар реалдуулукта жана эсептөө эксперименттеринде жаңы кубулуштарды берет жана башка реалдуу жана виртуалдык процесстер үчүн сандык константалар табылат деп үмүттөнөбүз. Жалпы көйгөй: кандайдыр бир алгоритмдер менен кандай үлгүлөрдү аныктоого болот?

Адабияттар

1. Панков П.С. Иргөө кубулушу диссипациялык системалардын биринчи мисалы катарында жана аны компьютерде ишке ашыруу / П.С.Панков, Г.М. Кененбаева // Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Кабарлары, 2012, № 3. – 105-108 б.

2. Борубаев А.А. Компьютерное представление кинематических топологических пространств / А.А.Борубаев, П.С. Панков. - Бишкек: КГНУ, 1999. – 131 с.

3. Тагаева С.Б. Явление самоупорядочения большого количества отталкивающихся электрических зарядов на топологическом торе / П.С.Панков П.С., С.Б. Тагаева // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С.12-17.

4. Кененбаева Г.М. Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений. – Бишкек: Илим, 2012. - 204 с.

5. Tagaeva S.B. Category of irgöö-type processes in computational mathematics and algorithms to detect patterns / G.M. Kenenbaeva, S.B. Tagaeva. Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR, 2021, No. 2, pp. 13-20.

УДК 517.946

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ТРЕХМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Турсунов Фарход Рузикулович, д.фил.-по ф.-м.н., доцент
farhod.tursunov.76@mail.ru
Рузикулов Фаридун Фарходович, студент
faridunruzikulov2211@gmail.com
Норимов Азижжон Комилович, магистр
aziznoimov46gmail.com
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова
Самарканд, Узбекистан

Аннотация: *В статье изучается задача продолжения решения линейных систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G, т. е. изучается задача Коши для решения линейных систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами. Рассматриваемая задача относится к некорректным задачам математической физики, т.к. отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области и данные Коши на части границы области заданы точны. Для данной некоректной задачи получена явная формула продолжения. Получена оценка устойчивости решения задачи Коши в классическом смысле.*

Ключевые слова: *Задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.*

CAUCHY PROBLEM FOR FIRST-ORDER LINEAR ELLIPTIC SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN A THREE-DIMENSIONAL BOUNDED DOMAIN

Tursunov Farhod Ruzikulovich, PhD, assistant professor,
farhod.tursunov.76@mail.ru
Ruzikulov Faridun Farhodovich, student,
faridunruzikulov2211@gmail.com
Norimov Azizjon Komilovich, master student
aziznoimov46gmail.com
Samarkand State University named after Sharof Rashidov
Samarkand, Uzbekistan

Abstract: *The paper studies the problem of continuing the solution of linear systems of elliptic type of the first order with constant coefficients in a domain G by its known values on the smooth part S of the boundary ∂G, i.e. the Cauchy problem is studied for solving linear systems of equations of the elliptic type of the first order with constant coefficients. The problem under consideration belongs to the ill-posed problems of mathematical physics, since there is no continuous dependence of the solution on the initial data. It is assumed that a solution to the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain, and the Cauchy data on a part of the boundary of the domain are given exact. For this ill-posed problem, an explicit continuation formula is obtained. An estimate of the stability of the solution of the Cauchy problem in the classical sense is obtained.*

Keywords: *Cauchy problem, ill-posed problems, Carleman function, regularized solutions, regularization, continuation formulas.*

Введение. Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$ точки трёхмерного Евклидового пространства R^3 и $x^T=(x_1,x_2,x_3)^T$ - транспонированный вектор x.

Вводим следующие обозначения:

$$y'=(y_1,y_2),\quad x'=(x_1,x_2),$$

$$r=|y-x|,\quad \alpha=|y'-x'|,\quad \alpha^2=s,\quad w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3,\quad u\ge 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T,\ \frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_3}\right)^T,$$

$$U(x)=(U_1(x),U_2(x),...,U_n(x))^T,\ u^0=(1,1,...,1)\in R^n.$$

Рассмотрим ограниченная односвязная область G в R^3 с границей $\partial G=S\cup Q$, состоящей из компактной связной части Q плоскости $y_3=0$ и гладкого куска поверхности Ляпунова S, лежащей в полупространстве $y_3\ge 0$. Положим $\overline{G}=G\cup\partial G$.

Обозначим через $A_{l\times n}(x)$ класс матриц $D(x^T)$, элементами которых являются линейные формы с комплексными коэффициентами таких, что выполняется равенство $D^*(x^T)D(x^T)=E\left(|x|^2u^0\right)$; здесь $D^*(x^T)$ - сопряженная к $D(x^T)$ матрица, а $E(x)$ - диагональная матрица размерности $(n\times l)$, $n,l\ge 3$.

Рассмотрим задачу Коши

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x)=0\ ,\ x\in G\ , \tag{1}$$

$$U(x)\big|_S=f(x), \tag{2}$$

относительно неизвестной функции $U(x)=\left(U_1(x),U_2(x),...,U_n(x)\right)^T$; $n\ge 3$, здесь, $f(x)$ - непрерывная функция, заданная на части S границы области G.

Система уравнений (1) представляет собой систему эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами. Такие системы охватывают широкий класс эллиптических систем; например, классическое уравнение Лапласа $\Delta w(x)=0$ в двухмерном случи можно рассматривать как частный случай системы (1).

Задача Коши для системы Коши - Римана (для голоморфных функций в классической версии) является известной проблемой, находящей свое применение в физике, электродинамике, механике жидкости и газа и т. д. (см. [1], [2], [8]). На самом деле она является типичным примером некорректной задачи для более общего класса эллиптических систем (см. [4], [5], [8]) или даже эллиптических дифференциальных комплексов [10,11]. Как отмечалось в [8], метод регуляризации наиболее эффективен для изучения данной задачи. Литературы [2,6,7] дают достаточно полное описание условий разрешимости задачи, а также пути ее регуляризации.

Основные результаты. Если функция $U(x)\in C^1(G)\cap G(\overline{G})$ является решением системы (1), то верно следующее интегральное представление [7]:

$$U(x)=\int_{\partial G}M(x,y)U(y)dS_y, \tag{3}$$

где

$$M(x,y)=\left(E\left(\frac{1}{4\pi r}u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T),$$

$t=(t_1,t_2,t_3)$ - единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y границы ∂G.

Метод получения указанных результатов основан на конструкции в явном виде фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра, исчезающего вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на Q, когда полюс фундаментального решения лежит в полуплоскости $y_2 > 0$. Следуя М.М. Лаврентьеву, фундаментальное решение с указанным свойством назовем функцией Карлемана [3].

В работе [14,15] с помощью функции Карлемана получены оценки отклонения производных первого порядка приближённого решения от производных точного решения в зависимости от расстояния до плоской части границы в двумерных и трёхмерных областях для уравнения Лапласа а в работе [16] в двумерных областях специального вида для бигармонического уравнения.

Известно, что если функция Карлемана построена то используя формулу Грина можно написать регуляризованное решение в явном виде. Отсюда вытекает, что эффективность построения функции Карлемана эквивалентно построению регуляризованного решения задача Коши. В работе [9] при помощи функции Карлемана построена регуляризованные решение уравнения Лапласа в неограниченной области на плоскости.

Пусть $\sigma > 0$. Определим при $\alpha > 0$ функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ следующим равенством [12].

$$-2\pi^2 \exp(\sigma x_3^2)\Phi_\sigma(x, y) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Im}\left[\frac{\exp(\sigma w^2)}{w - x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,. \tag{4}$$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x, y)$, имеем

$$\Phi_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi^2}\exp(-\sigma(\alpha^2 + x_3^2 - y_3^2))\left[\int_0^{\infty}\frac{\exp(-\sigma u^2)\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}\,du}{u^2+r^2} - \right.$$
$$\left. -\int_0^{\infty}\frac{\exp(-\sigma u^2)(y_3 - x_3)\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right]. \tag{5}$$

Формула (3) верна, если вместе $\dfrac{1}{4\pi r}$ подставим функцию вида [12,13]:

$$\Phi_\sigma(x, y) = \frac{1}{4\pi r} + G_\sigma(x, y) \tag{6}$$

где $G_\sigma(x, y)$- гармоническая функция по y в R^3 включая $y = x$. Поэтому, для функция $U(x) \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ и любого $x \in G$ справедливо следующее интегральное представление:

$$U(x) = \int_{\partial G} N_\sigma(x, y) U(y) dS_y, \quad x \in G\,, \tag{7}$$

где

$$N_\sigma(x, y) = \left(E(\Phi_\sigma(x, y)u^0)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D\left(t^T\right). \tag{8}$$

Положим

$$U_\sigma(x) = \int_S N_\sigma(x, y) U(y) dS_y, \quad x \in G\,. \tag{9}$$

Теорема 1. Пусть $U(x)$ вектор- функция из класса $C^1(G) \cap C(\overline{G})$, является решением системы (1) на S удовлетворяющим начальному условию (2) и на части Q границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)| \le M, \quad M > 0, \quad y \in Q. \tag{10}$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливо неравенство

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le \psi_3(\sigma, x_3) M \exp(-\sigma x_3^2), \tag{11}$$

где

$$\psi_3(\sigma, x_3) = \left(\frac{5}{2\pi} + \frac{3}{\sqrt{\pi\sigma}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi\sigma} x_3} \right). \tag{12}$$

Следствие 1. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \to \infty} U_\sigma(x) = U(x).$$

Обозначим через $\overline{G}_\varepsilon$ множество

$$\overline{G}_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in G, \quad a > x_3 \ge \varepsilon, \quad a = \max_Q h(x_1, x_2), 0 < \varepsilon < a, \right\}.$$

Легко заметить, что множество $\overline{G}_\varepsilon \subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x \in \overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$

$$U_\sigma(x) \rightrightarrows U(x)$$

сходится равномерно при $\sigma \to \infty$.

Отметить, что множества $\Pi_\varepsilon = G \setminus \overline{G}_\varepsilon$ служить пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерная сходимость.

Предположим теперь, что поверхность S задана уравнением $y_3 = h(y_1, y_2), (y_1, y_2) \in Q$, где h однозначная функция такая, что поверхность S является поверхностью Ляпунова. Положим

$$a = \max_Q h(y_1, y_2) \text{ и } b = \max_Q \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy_1}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dy_2}\right)^2}.$$

Приведём оценку устойчивости решения задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка.

Теорема 2. Пусть на части Q границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)| \le M, \quad y \in Q, M > 0$$

а на S неравенство

$$|U(y)| \le \delta, \quad y \in S, \quad 0 < \delta \le M e^{-\sigma a^2}. \tag{13}$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливо неравенство

$$|U(x)| \le 2\varphi(\sigma, x_3) M^{1 - x_3^2/a^2} \delta^{x_3^2/a^2},$$

где

$$\varphi(\sigma, x_3) = \max_S(\psi_3(\sigma, x_3), q(\sigma, x_3)), c = const,$$

$$q(\sigma, x_3) = c\left(\frac{4ab\sqrt{\sigma} + 4a^2 b\sqrt{\pi\sigma} + b\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{b\pi + b}{4\sqrt{\pi\sigma}(a - x_3)} + \frac{13ab\pi\sigma + 24ab\sigma}{4\sqrt{\pi\sigma}} + \frac{4a^2 b\sigma + b}{2\pi} \right).$$

Обозначим

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S N_\sigma(x, y) U(y) dS_y, \quad x \in G. \tag{14}$$

Теорема 3. Пусть вектор - функция $U(x)$ являющееся решением системы (1) из класса $C^1(G)\cap C(\overline{G})$, на части S границы ∂G удовлетворяет условие (2) и выполняется неравенство (13). Также заданы приближения $f_\delta(x)$ класса $C(S)$ с заданным уклонением $\delta>0$ функции $f(x)$ т.е.

$$\max_S |f(x)-f_\delta(x)|<\delta, \quad 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2}.$$

Тогда для любого $x\in G$ справедливо неравенство

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)|\le\psi_3(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2}, \tag{15}$$

где $\sigma=\dfrac{1}{a^2}\ln\dfrac{M}{\delta}, \quad \delta<M$.

Следствие 3. При каждом $x\in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta\to 0}U_{\sigma\delta}(x)=U(x).$$

Следствие 4. Если $x\in\overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_{\sigma\delta}(x)\}$

$$U_{\sigma\delta}(x) \rightrightarrows U(x)$$

сходиться равномерно при $\delta\to 0$.

Литература

1. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения / Л. А. Айзенберг, – Новосибирск: Наука, 1990. - 246 с.
2. Carleman T. Les Functions quasi analytiques / T. Carleman. – Paris: Gauthier - Villar, 1926. - 116 p.
3. Лаврентьев М.М. О Задача Коши для уравнения Лапласа / М.М. Лаврентьев. //Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. -Том 20. № 6. – С. 819-842.
4. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка / М. М. Лаврентьев. // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 2. – С. 195–197.
5. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962. - 92 с.
6. Polkovnikov A. N. Construction of Carleman formulasby using mixed problems with parameter-dependent boundary conditions / A. N. Polkovnikov, A. A. Shlapunov. // Siberian Mathematical Journal. 2017. Volume 58. № 4. P. 870-844. (in Russian).
7. Тарханов Н.Н. Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных и некоторых его приложениях. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа / Н.Н.Тарханов.- Красноярск: –1980. С. 147- 160.
8. Tarkhanov, N. N. The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. 1.ed / Nikolay N .Tarkhanov.– Berlin: Akademie Verlag, 1995. - 479 p.
9. Турсунов Ф.Р. Регуляризация решение задача Коши для уравнения Лапласа в неограниченной области / Ф.Р. Турсунов, Д.С. Шодиев, Х.Х. Тухтаева . // Научный вестник СамГУ, 2021. №1. С. 34-39.
10. Fedchenko D. P. On the Cauchy problem for the Dolbeault complex in spaces of distributions / D. P. Fedchenko , A. A. Shlapunov. // Complex Variables, Elliptic Equ. 2013. Vol. 58. № 11. P. 1591–1614.
11. Fedchenko D. P. On the Cauchy problem for the elliptic complexes in spaces of distributions / / D. P. Fedchenko , A. A. Shlapunov. // Complex Variables, Elliptic Equ. 2014. Vol. 59. № 5. P. 651–679.
12. Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши / Ш. Ярмухамедов. // Математические заметки, 2008. -Том 83, выпуск 5. С. 763-778.
13. Ярмухамедов Ш. О гармоническом продолжении дифференцируемых функций, заданных на куске границы / Ш. Ярмухамедов. // Сибирский математический журнал, 2002. Том 43. № 1. С. 228-239.
14. Хасанов А.Б. О задаче Коши для уравнения Лапласа / А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов // Уфимский математический журнал. 2019. -Том 11. №4. С. 92-106.
15. Хасанов А.Б. Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа / А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов // Известия высших учебных заведений. Математика, 2021. №2. С. 56-73.
16. Shodiyev D. On the Cauchy Problem for the Biharmonic Equation / D. Shodiyev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2022. 15(2) C.199–213.

УДК 517.954

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Умаров Рахматилла Акрамович, аспирант,
r.umarov1975@mail.ru
Наманганский инженерно-строительный институт,
Наманган, Узбекистан

Аннотация: *В работе для неоднородного уравнения третьего порядка с младшими членами рассмотрена вторая краевая задача в прямоугольной области. Единственность решение поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Используя метод разделения переменных решение задачи ищется в виде произведения двух функций X(x) и Y(y). Для определения X(x) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с тремя граничными условиями, а для Y(y) – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными условиями. Методом функции Грина построены решения указанных задач. Получены оценки резольвенты и функции Грина. При обосновании равномерной сходимости решения используется отличность от нуля «малого знаменателя».*

Ключевые слова: *уравнения с кратными характеристиками третьего порядка, вторая краевая задача, переменный коэффициент, функция Грина, интегральное уравнения Фредгольма второго рода*.

CONSTRUCTION OF A SOLUTION TO THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD ORDER EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Umarov Rakhmatilla Akramovich, graduate student
r.umarov1975@mail.ru
Namangan Engineering-Construction Institute,
Namangan, Uzbekistan

Abstract: *In this paper, for an inhomogeneous third-order equation with lower terms, the second boundary value problem in a rectangular domain is considered. The uniqueness of the solution of the formulated problem is proved by the method of energy integrals. Using the method of separation of variables, the solution of the problem is sought as a product of two functions X(x) and Y(y). To determine X(x), we obtain a third-order ordinary differential equation with three boundary conditions, and for Y(y), we obtain a second-order ordinary differential equation with two boundary conditions. The Green's function method is used to construct solutions to these problems. Estimates for the resolvent and Green's function are obtained. When justifying the uniform convergence of the solution, the non-zero "small denominator" is used.*

Keywords: *equations with multiple characteristics of the third order, second boundary value problem, variable coefficient, Green's function, Fredholm integral equation of the second kind.*

1. **Введение.** Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка изучаются многими авторами (см., например, [1-11]).

В совокупности, всех уравнений третьего порядка особое место по специфическому характеру занимают, уравнения с кратными характеристиками.

В работе [12], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx}+u_{yy}-\frac{\nu}{y}u_y=u_x u_{xx}, \quad \nu=const.$$

Это уравнение при $\nu=1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu=0$ описывает плоско - параллельный поток [13].

В работах [14-18], рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, при помощи построения функции Грина. В работе [19] было найдена решения уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами и с другими краевыми условиями.

2. **Постановка задачи.** В области $D=\{(x,y):\ 0<x<p, 0<y<q\}$ рассмотрим следующее уравнение третьего порядка в вида

$$L(u)=U_{xxx}-U_{yy}+A_1(x)U_{xx}+A_2(x)U_x+A_3(x)U+A_4U_y=g_1(x,y), \tag{1}$$

где $p, q, A_4\in R,\ A_i(x), i=\overline{1,3},\ g_1(x,y)$ заданные достаточно гладкие функции в $\bar{D}$.

Заменой

$$U(x,y)=\exp\left(-\frac{1}{3}\int_0^x A_1(\xi)d\xi+\frac{A_4}{2}y\right)u(x,y),$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx}-u_{yy}+a_1(x)u_x+a_2(x)u=g(x,y). \tag{2}$$

Задача B_2. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2,1}_{x,y}(\bar{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$u_y(x,0)=0, \quad u_y(x,q)=0, \quad 0\le x\le p, \tag{3}$$

$$u(0,y)=\psi_1(y), \quad u_x(\mathrm{p},y)=\psi_2(y), \quad u_{xx}(p,y)=\psi_3(y), \quad 0\le y\le q, \tag{4}$$

где $\psi_i(y), i=\overline{1,3}$, $g(x,y)$ заданные функции.

3. **Единственности решения.**

Теорема 1. Если задача B_2 имеет решение, то при выполнении условий $a_1(x)\ge 0,\ a_2(x)-\frac{1}{2}a_1'(x)\ge 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное. Пусть задача B_2 имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL[u]=uu_{xxx}-uu_{yy}+a_1(x)uu_x+a_2(x)u^2=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}a_1(x)u^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2+\left(a_2(x)-\frac{1}{2}a_1'(x)\right)u^2=0.$$

Интегрируя это тождество по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q a_1(x)u^2(p,y)dy+\frac{1}{2}\int_0^q u_x^2(0,y)dy+\iint_D u_y^2dxdy+\iint_D\left(a_2(x)-\frac{1}{2}a_1'(x)\right)u^2dxdy=0.$$

Из третьего слагаемого $u_y(x,y)=0$. Отсюда $u(x,y)=f(x)$. Поставляя в уравнения (2), имеем $f'''(x)=0$. Тогда $f(x)=C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$. Учитывая краевые условие (4) получим $f(x)=0$, тогда $u(x,y)\equiv 0$. Теорема доказана.

4. **Существование решения.**

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

1) $\psi_i(y)\in C^3[0,q],\ i=\overline{1,3};$

2) $\dfrac{\partial^3 g(x,y)}{\partial x\partial y^2}\in C\left[\bar{D}\right],\ 0\le x\le p;\quad g(x,0)=g(x,q)=0$

3) $C<\min\left\{\dfrac{2}{3p^3+2p^2},\dfrac{\lambda_1^2}{Kp(1+\lambda_1)}\right\},$

4) $a_1(p)=0,$

то решение задачи B_2 существует. Здесь $\lambda_1=\sqrt[3]{\left(\dfrac{\pi}{q}\right)^2}$,

$C=\max\left\{\left|a_1(x)\right|,\left|a_1'(x)-a_2(x)\right|,x\in[0,p]\right\}$, $K=\dfrac{4}{3}\left(1-\exp\left(-\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right)\right)^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases}Y''(y)+\lambda^3Y(y)=0,\\ Y'(0)=Y'(q)=0.\end{cases}\tag{5}$$

Известно, что нетривиальное решение задачи (6), существует только при

$$\lambda_0^{\ 3}=0 \text{ и } \lambda_n^{\ 3}=\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2,\ n=1,2,3,...$$

Эти числа являются собственные значения задачи (5), а соответствующие ими собственные функции имеют вид:

$$Y_n(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{q}}, & n=0,\\ \sqrt{\dfrac{2}{q}}\cos\left(\dfrac{\pi n}{q}y\right), & n\in N.\end{cases}$$

Разложим $g(x,y)$ в ряд Фурье по $\{Y_n(y)\}$:

$$g(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)Y_n(y),$$

где $g_n(x)=\sqrt{\frac{2}{q}}\int\limits_0^q g(x,\eta)\cos\left(\frac{\pi n}{q}\eta\right)d\eta$.

Решение задачи B_2 ищем в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\cos\left(\frac{\pi n}{q}y\right). \tag{7}$$

(7) поставляя в уравнение (2) получим следующую задачу:

$$\begin{cases} X_n'''+a_1(x)X_n'+a_2(x)X_n+\lambda_n^3X_n=g_n(x), \\ X_n(0)=\psi_{1n},\ X_n'(p)=\psi_{2n},\ X_n''(p)=\psi_{3n}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\psi_{in}=\sqrt{\frac{2}{q}}\int\limits_0^q\psi_i(\eta)\cos\left(\frac{\pi n}{q}\eta\right)d\eta,\ i=\overline{1,3}$.

С помощью

$$V_n(x)=X_n(x)-\rho_n(x) \tag{9}$$

функции изменим граничные условия в однородные, где

$$\rho_n(x)=\psi_{1n}+\psi_{2n}x+\left(\frac{1}{2}x^2-px\right)\psi_{3n}. \tag{10}$$

Подставляя (10), (9) в (8) получим задачу

$$\begin{cases} V'''+\lambda_n^3V=\lambda_n^3f_n(x)-a_1V'-a_2V, \\ \quad V(0)=V'(p)=V''(p)=0, \end{cases} \tag{11}$$

здесь

$$f_n(x)=-\left(\frac{a_2(x)}{\lambda_n^3}+1\right)\psi_{1n}-\left(\frac{xa_2(x)+a_1(x)}{\lambda_n^3}+x\right)\psi_{2n}-$$

$$-\left(\frac{xa_1(x)-pa_1(x)-xa_2(x)p}{\lambda_n^3}+\frac{a_2(x)}{\lambda_n^3}x^2+\frac{1}{2}x^2-px\right)\psi_{3n}+\frac{g_n(x)}{\lambda_n^3}$$

Задача (11) для $\lambda_0=0$ имеет вид:

$$\begin{cases} V_0'''=f_0(x)-a_1(x)V_0'-a_2(x)V_0, \\ \quad V_0(0)=V_0'(p)=V_0''(p)=0, \end{cases} \tag{12}$$

здесь

$$f_0(x)=g_0(x)-\psi_{10}a_2(x)+\left(-a_1(x)-xa_2(x)\right)\psi_{20}+$$

$$+\left(-xa_1(x)+pa_1(x)-\frac{1}{2}x^2a_2(x)+pxa_2(x)\right)\psi_{20}.$$

Решения задачи (12) имеет вид

$$\begin{aligned} V_0(x)=&\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi-\int\limits_0^p a_1(\xi)G_0(x,\xi)V_0'(\xi)d\xi- \\ &-\int\limits_0^p a_2(\xi)G_0(x,\xi)V_0(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{13}$$

здесь $G_0\left(x,\xi\right)$ функция Грина для задачи (12), которая обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial^3 G_0\left(x,\xi\right)}{\partial x^3}=0,$$

$$G_{10}\left(0,\xi\right)=G_{20x}\left(p,\xi\right)=G_{20xx}\left(p,\xi\right)=0,$$

$$G_{20}\left(\xi,\xi\right)-G_{10}\left(\xi,\xi\right)=0;$$

$$G_{20x}\left(\xi,\xi\right)-G_{10x}\left(\xi,\xi\right)=0;$$

$$G_{20xx}\left(\xi,\xi\right)-G_{10xx}\left(\xi,\xi\right)=1;$$

и имеет вид

$$G_0\left(x,\xi\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+\xi x,\ при\ 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{1}{2}\xi^2,\ \ при\ \ \xi\le x\le p.\end{cases}$$

Интегрируя по частям второй интеграл в (13), имеем,

$$V_0\left(x\right)=\int_0^p G_n\left(x,\xi\right)f_n\left(\xi\right)d\xi+$$
$$+\int_0^p\left(\left(a_1'\left(\xi\right)-a_2\left(\xi\right)\right)G_0\left(x,\xi\right)+a_1\left(\xi\right)G_{0\xi}\left(x,\xi\right)\right)V_0\left(\xi\right)d\xi. \tag{14}$$

Если вводём обозначения

$$\alpha_0\left(x\right)=\int_0^p G_0\left(x,\xi\right)\,f_0\left(\xi\right)d\xi,$$

$$\bar{G}_0\left(x,\xi\right)=\left(a_1'\left(\xi\right)-a_2\left(\xi\right)\right)G_0\left(x,\xi\right)+a_1\left(\xi\right)G_{0\xi}\left(x,\xi\right)$$

тогда (14) имеет вид,

$$V_0\left(x\right)=\alpha_0\left(x\right)+\int_0^p\bar{G}_0\left(x,\xi\right)V_0\left(\xi\right)d\xi\,, \tag{15}$$

(15) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Решаем (15) методом итерации и получим решения в виде

$$V_0\left(x\right)=\alpha_0\left(x\right)+\int_0^p R_0\left(x,\xi\right)\alpha_0\left(\xi\right)d\xi.$$

Решение задачи (11) ищем следующим образом:

$$V_n\left(x\right)=\lambda_n^3\int_0^p G_n\left(x,\xi\right)f_n\left(\xi\right)d\xi-\int_0^p G_n\left(x,\xi\right)a_1\left(\xi\right)V_n'\left(\xi\right)d\xi-$$
$$-\int_0^p G_n\left(x,\xi\right)a_2\left(\xi\right)V_n\left(\xi\right)d\xi, \tag{16}$$

где $G_n\left(x,\xi\right)$ функция Грина задачи (11), которая обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial^3 G_n\left(x,\xi\right)}{\partial x^3}+\lambda_n^3 G_n\left(x,\xi\right)=0$$

$$G_{1n}\left(0,\xi\right)=G_{2nx}\left(p,\xi\right)=G_{2nxx}\left(p,\xi\right)=0$$

$$G_{2n}(\xi,\xi)-G_{1n}(\xi,\xi)=0;$$
$$G_{2nx}(\xi,\xi)-G_{1nx}(\xi,\xi)=0;$$
$$G_{2nxx}(\xi,\xi)-G_{1nxx}(\xi,\xi)=1,$$

и имеет вид:

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases}G_{1n}(x,\xi), 0\le x<\xi,\\ G_{2n}(x,\xi), \xi<x\le p.\end{cases}$$

здесь

$$G_{1n}(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\left(-e^{\lambda_n\left(p-x-\frac{\xi}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)-e^{\lambda_n\left(\xi-x-\frac{p}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p\right)+\right.$$
$$+e^{\lambda_n\left(\xi+\frac{x}{2}-\frac{p}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(x-p)\right)+e^{\lambda_n\left(p+\frac{x}{2}-\frac{\xi}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)-$$
$$\left.2e^{-\lambda_n\left(\frac{\xi}{2}+\frac{p}{2}-\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(\xi-p)+\frac{\pi}{6}\right)\right),$$

$$G_{2n}(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\left(1-2e^{-\frac{3\lambda_n}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)\right)\cdot$$
$$\left(\frac{1}{2}e^{\lambda_n(\xi+p-x)}+e^{\lambda_n\left(\xi-\frac{p}{2}+\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(x-p)\right)\right),$$

$$\Delta=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\lambda_n p}\left(1+2e^{-\frac{3\lambda_n}{2}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p\right)\right).$$

Интегрируем по частям второй интеграл в (16), и учитывая условия теоремы имеем

$$V_n(x)=\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^p\left(G_{n\xi}(x,\xi)a_1(\xi)+G_n(x,\xi)\left(a_1'(\xi)-a_2(\xi)\right)\right)V_n(\xi)d\xi. \quad (17)$$

Для удобства введём обозначения

$$V_{0n}(x)=\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi,$$

$$\bar{G}_n(x,\xi)=G_{n\xi}(x,\xi)a_1(\xi)+G_n(x,\xi)\left(a_1'(\xi)-a_2(\xi)\right),$$

тогда (17) примет вид

$$V_n(x)=V_{0n}(x)+\int_0^p\bar{G}_n(x,\xi)V_n(\xi)d\xi. \quad (18)$$

Уравнение (18) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Запишем решение (18) с помощью резольвенты в виде

$$V_n(x)=V_{0n}(x)+\int_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi$$

где

$$R_n(x,\xi)=\bar{G}_n(x,\xi)+\sum_{m=1}^{\infty}\bar{G}_{mn}(x,\xi),$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi)=\int_0^p \bar{G}_n(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds,\ m=1,2,\ldots,\quad \bar{G}_{0n}(x,\xi)=\bar{G}_n(x,s).$$

В силу (7) и (9) решение задачи B_2 имеет вид

$$u(x,y)=\left(\int_0^p G_0(x,\xi)\,f_0(\xi)d\xi+\int_0^p R_0(x,\xi)\int_0^p G_0(x,\xi)\,f_0(\xi)d\xi d\xi+\rho_0(x)\right)Y_0(y)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi+\lambda_n^3\int_0^p R_n(x,\xi)\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi d\xi+\rho_n(x)\right)Y_n(y).$$

Доказана, что решение $u(x,y)$ и его частные производные u_{xxx}, u_{yy} сходятся абсолютно и равномерно. Таким образом, доказана теорема 2.

Литература

1. Abdullaev O.K. and Matchanova A.A., On a problem for the third order equation with parabolic-hyperbolic operator including a fractional derivative, // Lobachevskii J. Math. 43, 275–283 (2022).

2. Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками // Вестн. Самар. тех. ун-та, сер.: Физ.-мат. науки 30, 31–36 (2013).

3. Зикиров О.С. О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка // Рус. мат. Т. 58 (7). С. 53–60 (2014).

4. Репин О.А., Кумыкова С. К. Задача со сдвигом для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. Самар. тех. ун-та, сер.: Физ.-мат. науки 29 (4), 17–25 (2012).

5. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифферен. урав. 47, 706–714 (2011).

6. Сопуев А., Аркабаев Н.К. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестн. Томск. ун-та, мат. мех. 21 (1), 16–23 (2013).

7. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравн. 18, 689–699 (1982).

8. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро - дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - № 1(34). - С.56-65.

9. Юлдашев Т.К. Об интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // Рус. мат. 59 (9), 62–66 (2015).

10. Yuldashev T.K., Apakov Yu.P., and Zhuraev A.Kh., Boundary value problem for third order partial integrodifferential equation with a degenerate kernel //Lobachevskii J. Math. 42, 1317–1327 (2021).

11. Yuldashev T.K., Islomov B.I., and Alikulov E.K., Boundary-value problems for loaded third-order parabolichyperbolic equations in infinite three-dimensional domains //Lobachevskii J. Math. 41, 926–944 (2020).

12. Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

13. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.

14. Apakov Y.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. -Vilnius, 2011. - Vol. 16. -№ 3. - pp. 255-269.

15. Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. -Киев. 2012. Т.64. № 1. С. 1-11.

16. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина // Узбекский математический журнал. 2011, №3, - С.36-42.

17. Yuldashev T.K., Apakov Y.P., Zhuraev A.Kh. Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel //Lobachevski Journal of Mathematics.2021 Vol, 42, № 6, -pp. 1316-1326.

18. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для одного вырождающего уравнения высокого порядка с младшими членами //Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2019. – №. 6. – С. 23-29.

19. Apakov Y. P., Umarov R. A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function //Lobachevskii Journal of Mathematics, 43:3 (2022), 738–748.

УДК 517.957

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ИСТОЧНИКОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА В КЛАССЕ БЫССТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Хасанов Темур Гафуржонович, аспирант
temur.xasanov.2018@mail.ru
Ургенчский государственный университет
Ургенч, Узбекистан.

Аннотация. *Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и самосогласованным источником интегрального типа в классе быстроубывающих функций. Выводится эволюция данных рассеяния оператора Штурма-Лиувилля, коэффициент которого является решением уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и самосогласованным источником интегрального типа в классе быстроубывающих функций.*

Ключевые слова. *Нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза, оператор Штурма- Лиувилля, решения Йоста, интегральное уравнение Гельфанда- Левитана- Марченко*.

ALGORITHM FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR THE LOADED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH AN INTEGRAL TYPE SOURCE IN THE CLASS OF RAPIDLY DECREASING FUNCTIONS

Khasanov Temur Gafurjonovich, PhD student
temur.xasanov.2018@mail.ru
Urgench State University
Urgench (Uzbekistan).

Abstract. *The method of the inverse spectral problem is used to integrate the Korteweg-de Vries equation with loaded terms and a self-consistent source of integral type in the class of rapidly decreasing functions. The evolution of the scattering data of the Sturm-Liouville operator is derived, whose coefficient is a solution of the Korteweg-de Vries equation with loaded terms and a self-consistent source of integral type in the class of rapidly decreasing functions.*

Keywords*. Loaded Korteweg-de Vries equation, Sturm-Liouville operator, Jost solutions, integral equation Gelfand-Levitan-Marchenko.*

В данной работе рассматривается система нелинейных нагруженных уравнений вида:

$$u_t + \beta(t)u(x_0,t)\left(u_{xxx} - 6uu_x\right) + \gamma(t)u(x_1,t)u_x = 2\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \xi_m \varphi(x,\eta,t)\varphi(x,-\eta,t)d\eta \qquad (1)$$

$$L(t)\varphi = \eta^2\varphi \qquad (2)$$

где

$$u = u(x,t), \quad L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$$

и $\beta(t)$ и $\gamma(t)$- заданные непрерывно дифференцируемые функции, а $x_0, x_1 \in R$, ξ_m, $m = 1, 2, ..., N$ заданное вещественные число. Система нелинейных уравнений (1)-(2) рассматривается при начальном условии.

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in R \tag{3}$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладают следующим свойствами:

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|u_0(x)|\,dx < \infty; \tag{4}$$

2) оператор $L(0) := -\dfrac{d^2}{dx^2} + u_0(x), \ x \in R$ имеет ровно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), ..., \lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задаче функция $\varphi(x,\eta,t)$ – решение уравнения (2), определяемое асимптотикой

$$\varphi(x,\eta,t) = h(\eta,t)e^{-i\eta x}, \ \text{ при } \ x \to \infty, \tag{5}$$

где $h(\eta,t)$ – изначально заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta,t)h(-\eta,t)d\eta < \infty \tag{6}$$

при всех неотрицательных значения t.

Пусть функции $u(x,t)$ и $\varphi(x,\eta,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своими пределами при $x \to \pm\infty$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1 + |x|\right)|u(x,t)| + \sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^3} \right| \right] dx < \infty, \quad t > 0, \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\varphi(x,\eta,t)|^2 + |\varphi(x,-\eta,t)|^2 + \left| \frac{\partial \varphi(x,\eta,t)}{\partial \eta} \right|^2 \right) d\eta < \infty. \tag{8}$$

Основная цель данной работы- получить представления для решения $u(x,t)$, $\varphi(x,\eta,t)$ задачи (1)-(8) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Лемма 1. Пусть функции $y(x,\lambda)$ и $z(x,\mu)$ соответственно являются решениями

$$Ly(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda), \quad Lz(x,\mu) = \mu z(x,\lambda).$$

Тогда справедливо равенство:

$$\frac{d}{dx} W\left\{ y(x,\lambda), z(x,\mu) \right\} = \left(\lambda - \mu \right) y(x,\lambda) z(x,\mu).$$

Доказательство данной леммы исходит из простых расчетов.

Справедливо следующая теорема.

Теорема 1. Задание данных рассеяния однозначно определяет потенциал $u_0(x)$.

Лемма 2. Справедливы следующие тождества:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds = 4k^2 a(k,t)b(-k,t) \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x,k,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(x,\eta)\varphi(x,-\eta)\right)dx = -\frac{2a(k,t)b(-k,t)\left|h(\eta,t)\right|^2 k^2}{k^2-\eta^2} \tag{10}$$

Лемма 3. Если G определяется равенством (20), то справедливы следующие тождества

$$\int_{-\infty}^{\infty} Gg_n^2 dx = 0,\ n = 1,2,...,N\,. \tag{11}$$

Доказательство. Для доказательства (36), сперва запишем его в следующем виде,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Gg_n^2 dx = -\int_{-\infty}^{\infty} Q(u(x_1,t))u_x g_n^2 dx + 2\int_{-\infty}^{\infty} g_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,\eta,t)\varphi(x,-\eta,t)d\eta dx\,. \tag{12}$$

Сперва вычислим первой интеграл провой части этого равенство:

$$-Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty} u_x g_n^2 dx = -Q(u(x_1,t))ug_n^2\Big|_{-\infty}^{\infty} + Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty} 2ug_n g_n' dx =$$

$$= 2Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty} ug_n g_n' dx\,.$$

Отсюда, используя тождество $L_n(t)g_n \equiv -g_n'' + ug_n = k_n^2 g_n$, имеем

$$2Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty} ({k_n}^2 g_n + g_n'')g_n' dx = 2Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty}\left(k_n^2 g_n g_g' + g_n'' g_n'\right)dx\,.$$

Интегрируя полученное выражение, имеем следующее:

$$2Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty}\left(k_n^2 g_n g_g' + g_n'' g_n'\right)dx = Q(u(x_1,t))k_n^2 g_n^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - Q(u(x_1,t))g_n'^2\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\,.$$

Теперь изучим второй интеграл правой части (37):

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n^2 \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,\eta,t)\varphi(x,-\eta,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x,\eta)g_n W\left\{g_n,\varphi(x,-\eta)\right\} + \right.$$

$$\left.\varphi(x,-\eta)g_n W\left\{g_n,\varphi(x,\eta)\right\}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n - \eta^2}W\left\{g_n,\varphi(x,\eta)\right\}W\left\{g_n,\varphi(x,-\eta)\right\}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0\,,$$

поэтому

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = 0\,.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. Если функции $u(x,t),\ \varphi(x,\eta,t),\ m = \overline{1,N},\ x \in R,\ t > 0$ является решением задачи (1)-(8), то данные рассеяния $\left\{r^+(k,t),\lambda_n(t),B_n(t),\ n = \overline{1,N}\right\}$ оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$, удовлетворить следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt}=0$$

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt}=\left(8ik^3\beta(t)u(x_0,t)-2ik\gamma(t)u(x_1,t)-2i\xi_n V.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(\eta)|^2}{\eta-k}d\eta-2\pi|h(k)|^2\right)r^+(k,t)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt}=\left(8\chi_n^3\beta(t)u(x_0,t)+2\chi_n\gamma(t)u(x_1,t)-\frac{\chi_n\xi_n}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(\eta)|^2}{\eta^2+\chi_n^2}d\eta\right)B_n(t),\ \ n=1,2,3,...,N$$

Замечание. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$ и тем самым дают возможность применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(8).

Пусть задана функция $u_0(x)\left(1+|x|\right)\in L^1(R)$. Тогда решение задачи (1)-(8) находится с помощью следующего алгоритма.

- Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ получаем данные рассеяния $\left\{r^+(k),\chi_n,B_n,n=\overline{1,N}\right\}$ для оператора $L(0)$.
- Используя теорему 2, находим данные рассеяния для $t>0$

$$\left\{r^+(k,t),\chi_n(t),B_n(t),n=\overline{1,N}\right\}.$$

- Используя метод, опирающийся на интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. находим $u(x,t)$ из данных рассеяния для $t>0$, полученных на предыдущем шаге. После этого легко найти решение $\varphi(x,\eta,t)$ уравнения

$$L(t)\varphi_m(x,\eta,t):=-\varphi_m''(x,\eta,t)+u(x,t)\varphi_m(x,\eta,t)=\lambda_m\varphi_m(x,\eta,t),\ m=1,2,...,N.$$

Литература

1. Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций. Записки научных семинаров ПОМИ. т. 506, стр. 258-278 (2021).
2. Hasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions. Proceeding of the Institute of Math. And Mechan. National academy of sciences of Azerbaijan. Vol., 47, №2, 2021, p. 250-261.
3. Хоитметов У.А. Интегрирование нагруженного уравнения КдФ с самосогласованным источником интегрального типа в классе быстроубывающих комплекснозначных функций. Математические труды. .т. 24, №2, стр. 181-198 (2021).
4. Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом и источником. *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2022**, 25**:2, 127–142
5. M.S.Osman, K.U.Tariq, A.Bekir, A.Elmoasry, N.S.Elazab, M.Younis, M.Abdel-Aty. Investigtion of soliton solutions with different wave structures to the (2+1)-dimensional Heisenberg ferromagnetic spin chain equation. Commun. in Theory. Phys., 72:3, (2020), 035002.
6. D.Lu, K.U.Tariq, M.S.Osman, D.Baleanu, M.Younis, M.M.A.Khater. New analytical wave structures for the (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili and the generalized Boussinesq models and their applications. Results Phys., 14, (2019), 102491.

УДК 517.928.2

БӨЛЧӨК ТАРТИПТЕГИ ТУУНДУЛАР ЖАНА ИНТЕГРАЛДАР

Шайдуллаев Бекболот Камилович, магистр
Рысбекова Гулбара Рысбекована, магистр
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *макалада бөлчөк тартиптеги туундулар жана бөлчөк тартиптеги интегралдарды чыгаруу жолдору каралат. Математикалык анализдин чөйрөсүдө бул бөлчөк эсептөө деп аталат. Бөлчөк тартиптеги туундуларды жана интегралдарды эсептөөнүн ар кандай жолдору бар. Эң кеңири таралганы Риман – Лиувиллдин аныктамасысын жардамында эсептөөгө болоруу макалада көрсөтүлгөн. Ошондой эле* x^n *даражалык функциясынын бүтүн сандык туундусун жалпылоо менен каалагандай* n*-тартиптеги туундуларын алуу жолдорк каралган. Бөлчөк тартиптеги туундулардын жана интегралдардын чечимдерин табуу үчүн Г(х) – гамма-функциясынын колдонулушу кеңири көрсөтүлгөн. Риман-Лиувиллдин бөлчөк интегралдарыны касиеттери берилип, алар далилденген. Бул эсептөө жолдору түшүнүктүү болушу үчүн эң жөнөкөй бир нече мисалдар келтирилген.*

Ачкыч сөздөр: *бөлчөк тартиптеги туунду, бөлчөк тартиптеги интеграл, Риман-Лиувиллдин аныктамасы, жалпы тартиптеги туунду, гамма-функция.*

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ

Шайдуллаев Бекболот Камилович, магистр
Гулбара Рысбекова Рысбекова, магистр
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация*: в статье рассматриваются производные дробного порядка и способы вывода интегралов дробного порядка. В области математического анализа это называется дробным исчислением. Существуют различные способы вычисления дробных производных и интегралов. Самый распространенный из них можно рассчитать с помощью определения Римана-Лиувилля, которое показано в статье. Также предусмотрено, что, обобщая целочисленную производную степенной функции* x^n*, можно получить желаемые производные n-го порядка. Подробно показано использование Г(х) – гамма-функции для нахождения решений дробных производных и интегралов. Приведены и доказаны свойства дробных интегралов Римана-Лиувилля. Приведено несколько простых примеров, чтобы сделать эти методы расчета более понятными.*

Ключевые слова*: производная дробного порядка, интеграл дробного порядка, определение Римана-Лиувилля, производная общего порядка, гамма-функция.*

FRACTIONAL DERIVATIVES AND INTEGRALS

Shaidullaev Bekbolot Kamilovich, master
Gulbara Rysbekova Rysbekova, master
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *the article deals with fractional order derivatives and methods for deriving fractional order integrals. In the field of mathematical analysis, this is called fractional calculus. There are various ways to calculate fractional derivatives and integrals. The most common of these can be calculated using the Riemann-Liouville definition, which is shown in the article. It is also provided that by generalizing the integer derivative of the power function* x^n*, one can obtain the desired n-th order derivatives. The use of the Г(x) – gamma function for finding solutions to fractional derivatives and integrals is shown in detail. The properties of Riemann-Liouville fractional integrals are given and proved. Some simple examples are given to make these calculation methods more understandable.*

***Key words**: fractional order derivative, fractional order integral, Riemann-Liouville definition, general order derivative, gamma function.*

Киришүү. Бул иштин актуалдуулугу көптөгөн физикалык процесстер дифференциалдык теңдемелерди, анын ичинде бөлчөк туундулары бар дифференциалдык теңдемелерди колдонуу менен сүрөттөлөт. Азыркы учурда бөлчөк туундулары бар дифференциалдык теңдемелердин теориясы жана колдонулушу боюнча көптөгөн китептер жана макалалар бар, бирок бөлчөк дифференциалдык теңдемелер менен сүрөттөлгөн объекттерге болгон кызыгуу ушул убакка чейин алсыраган эмес. Бөлчөк (же фракталдык) мүнөздөгү динамикалык процесстерди моделдөөдө көбүнчө түз эле эмес, тескери маселени да чечүү керек, б.а. баштапкы функцияны табуу, анын бөлчөк туундусу бул моделде колдонулат. Ошентип, бөлчөк туунду деген эмне экенин жана ал кандай процесстерди мүнөздөөрүн абдан так элестетүү керек.

Бул иштин максаты студенттердин дифференциалдык жана интегралдык эсептөө тармагында, ошондой эле бөлчөк фракталдык өлчөм теориясы боюнча практикалык көндүмдөрүн өнүктүрүү болуп саналат.

Бөлчөк тартиптеги туунду. Математикалык анализдин чөйрөсүдө бул бөлчөк эсептөө деп аталат. Ошондой эле бөлчөк тартиптеги туундуларга жана интегралдарга арналган көптөгөн изилдөөлөр жана колдонуулар бар. Ошондой эле узак тарыхка жана бай мазмунга ээ.

Бөлчөк эсептөөнүн суроолору математиканын ар түрдүү бөлүмдөрү менен терең байланышта: функциялар теориясы, интегралдык жана дифференциалдык теңдемелер жөнүндөгү теориялар ж.б.

$\frac{d^p f(t)}{dt^p}$ дифференцирлөөдө p нин бөлчөк маанилерине жалпылоо идеясы дифференциалдык эсептөөнүн пайда болушу менен дээрлик бир убакта пайда болгон. Бул багыттагы алгачкы кадамдарды Л.Эйлер, П.Лаплас жана Ж.Фурье жасаган. Чындыгында, бөлчөк эсептөөнүн тарыхын Н.Х.Абель менен Ж.Лиувиллдин 19-кылымдын 30-жылдарында пайда болгон эмгектеринен издөө керек.

Ж. Лиувиллдин эмгектеринен кийинки орунда бөлчөк тартиптеги интегралдолрор боюнча Б. Римандын эмгектерин коюу керек. Себеби, бөлчөк тартиптеги интегралдоолордун негизги формалары Б.Римандын эмгектери болуп эсептелет жана бул эсептөөлөр анын атынан аталып калган.

Бөлчөк туундулар ар кандай жолдор менен аныкталат. Эң кеңири таралганы Риман – Лиувиллдин аныктамасы

$$\frac{d^a f(x)}{dx^a} = \frac{1}{\Gamma(1-a)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^a}$$

жана x^n даражалык функциясынын бүтүн сандык туундусун жалпылоого негизделген аныктама

$$\frac{d^n(x^k)}{dx^n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)}x^{k-n}$$

анын колдонулушу төмөндө кеңири талкууланат. Мында $\Gamma(z)$– гамма-функция, Легенхард Эйлер тарабынан киргизилген математикалык функциясы.

Ошол эле учурда Эйлердин (1730) баштапкы аныктамасы төмөнкүдөй формага ээ:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1}dx,$$

андан гамма-функциянын негизги касиеттеринин бири түздөн-түз келип чыгат:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Бул функция ошондой эле Эйлердин толуктоо формуласын

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

жана Гаусстун көбөйтүү формуласын канааттандырат:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right).\ .\ .\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma(nz)$$

Эгерде $n = 2$ болсо, анда :

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = n^{1-nz} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(nz).$$

Гамма-функциянын негизги касиеттери жана маанилери төмөндө келтирилген. Бул иштин алкагында Эйлер, Гаусс жана Леджендре тарабынан деталдуу изилдөөнүн объектиси болгон гамма-функциянын төмөнкүдөй маанилерине ээ болот:

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$
$$\Gamma(2) = 1! = 1$$
$$\Gamma(3) = 2! = 2$$
$$\Gamma(4) = 3! = 6$$
$$\Gamma(5) = 4! = 24$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi} = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}$$

Риман-Лиувиллдин бөлчөк тартиптеги интегралы жана туундусу

Аныктама1. $f(x) \in L_1(a,b)$ болсун

$$\left(I_{a+}^{\gamma} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \quad, x > a \tag{1}$$

$$\left(I_{b-}^{\gamma} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \quad, x < b \tag{2}$$

Мында $\gamma > 0$, γ тартиптеги бөлчөк интеграл деп аталат. Бул интегралдардын биринчиси сол тараптуу, экинчиси оң тараптуу деп аталат. I_{a+}^{γ}, I_{b-}^{γ} операторлору бөлчөк тартиптеги интегралдоо операторлору деп аталат. (1), (2) интегралдары Риман-Лиувилдин болчөк интегралдары деп аталат.

Риман-Лиувиллдин бөлчөк интегралдарынын эң жөнөкөй касиеттери:

1. $RI_{a+}^{\gamma} = I_{b-}^{\gamma} R\,, \qquad RI_{b-}^{\gamma} = I_{a+}^{\gamma} R$ (3)
2. $\int_a^b f(x)\left(I_{a+}^{\gamma} g\right)(x)dx = \int_a^b g(x)\left(I_{b-}^{\gamma} f\right)(x)dx$ (4)

Далилдөө. Бул жөнөкөй эле жогорудагы интегралды ордуна коюу менен далилденет:

$$\int_a^b f(x)\left(I_{a+}^{\gamma}g\right)(x)dx = \int_a^b f(x)\left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}}\right)dx =$$

$$= \int_a^b g(x)\,(\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}} = \int_a^b g(x)(\,I_{b-}^{\gamma}f)(x)dx$$

3. $I_{a+}^{\gamma}\cdot I_{a+}^{\delta} = I_{a+}^{\gamma+\delta}, \qquad I_{b-}^{\gamma}\cdot I_{b-}^{\delta} = I_{b-}^{\gamma+\delta}$

Далилдөө:

$$I_{a+}^{\gamma}\cdot I_{a+}^{\delta}f = \frac{1}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\gamma}}\int_a^t \frac{f(v)dv}{(x-v)^{1-\beta}}$$

Интегралдоонун тартибин өзгөртөбүз, ана ичиндеги интегралды $t = v + s(x-v)$ менен алмаштырабыз жана төмөнкүнү алабыз:

$$I_{a+}^{\gamma}\cdot I_{a+}^{\delta}f = \frac{\mathrm{B}(\gamma,\delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}\int_a^x \frac{f(v)dt}{(x-t)^{1-\gamma-\delta}}$$

Ал эми бөлчөк дифференциалга келсек, аны бөлчөк интегралдоого тескери операция катары киргизүү кадимки көрүнүш.

2-аныктама.$[a,b]$ кесиндисинде аныкталган $f(x)$ функциясы үчүн

$$\left(D_{a+}^{\gamma}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \tag{5}$$

$$\left(D_{b-}^{\gamma}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \tag{6}$$

Туюнтмалары $\gamma,\ \ 0<\gamma<1$ тартиптеги бөлчөк тартиптеги туунду деп аталат жана тиешелүү түрдө сол жана оң жак. $(5),(6)$ бөлчөк туундулары адатта Риман-Лиувиллдин туундусу деп аталат.

Практика бөлүгү

1-мисал.

$f(x) = x^k$ болсун.

Анда бул функциянын биринчи тартиптеги туундусу:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}$$

жана n −тартиптеги туунусу

$$f^n(x) = \frac{d^n}{dx^n}x^k = \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}$$

болот.

Факториалдарды гамма-функциялар менен алмаштырсак, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)}x^{k-n}$$

a) Анда $f(x) = x$ жарым туундусу:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+1\right)}x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

Бул операцияны дагы бир жолу кайталап, биз төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)}x^0 = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1$$

Демек,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x\right)=\frac{d}{dx}x=1$$

b) $f(x)=x$ тын $\frac{1}{3}$ тартиптегши туундусу:

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}x=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{3}+1\right)}x^{1-\frac{1}{3}}=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{3})}x^{\frac{2}{3}}=1\frac{1}{9}x^{\frac{2}{3}}$$

c) Ал эми $f(x)=x^2$ жарым туундусу төмөнкүгө барабар болот:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^2=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma\left(2-\frac{1}{2}+1\right)}x^{2-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$$

2-мисал.

$$f(x)=\sin(ax+b)$$

1-тартитеги туундусу: $f'(x)=\frac{d}{dx}\sin(ax+b)=a\cos(ax+b)=a\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$,

2-тартиптеги туундусу:

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\sin(ax+b)\right)=\frac{d}{dx}\left(a\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)\right)=a^2\sin(ax+b+\pi)$$

Жана n −тартиптеги туундусу:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\sin(ax+b)=a^n\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}n\right),$$

Анда $n=\frac{1}{2}$ (жарым туунду) болгондо төмөнкүнү алабыз:

$$f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\sin(ax+b)=\sqrt{a}\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{4}\right)$$

Эгерде дагы бир жолу жарым туунду алсак, анда төмөнгө ээ болобуз:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\sin(ax+b)\right)=\sqrt{a}\cdot\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{a}\cos(ax+b)=f'(x)$$

3-мисал.

Турактуу сандын жарым туундусу: $1^{\left(\frac{1}{2}\right)}=?$

2-аныктаманын негизинде төмөнкүдөй болот:

$$1^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{1}{(x-t)^{1-\frac{1}{2}}}dt=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left(-2(x-t)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^x\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

a) Жогорудагы жыйынтыкты кайра жарым интегралдоо үчүн төмөнкү иш-аракеттерди аткарабыз:

$$I^{\left(\frac{1}{2}\right)}f=D^{\left(\frac{1}{2}\right)}(I'f)$$

$$I^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\right)=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\int\frac{1}{\sqrt{\pi x}}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\int x^{-\frac{1}{2}}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(2\sqrt{x}\right)=$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)} x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}{1} x^0 = 1$$

б) Ал эми жогорудагы жыйынтыкты дагы бир жолу жарым туунду алсак:

$$\left(1^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)} x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(0)} x^{-1} = \frac{1}{\Gamma(0)x}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

$$z = 0: \qquad \Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \frac{1}{0}$$

Анда $\lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{\Gamma(z)x} = 0.$

Адабияттар

1. Боброва И.А., Бугримов А.Л. Кузнецов В.С. О применении дробных производных в физических моделях. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. – 2017, № 3.
2. Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о дробном дифференцировании. // Вестник Самарского университета. Естественно-научная серия. Том 24, №3, 2018.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688с.
4. Риман Б. Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования // Риман Б. Сочинения / пер с нем. под ред. В.Л. Гончарова, М.; Л.: Государственное издательство теоретико-технической литературы, 1948. С. 262–275.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, 1987

УДК 517.946

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Шодиев Дилшод Сирожиддинович, старший преподаватель
dilshod.shodiyev.76@mail.ru
Хайруллаев Мухаммад Сайдулла угли,магистр
xayrullayevmuhammad063@gmail.com
Махмудов Шохмалик Таникул угли, магистр
maxmudovshohmalik4@gmail.com
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова
Самарканд, Узбекистан

Аннотация: *В данной работе изучается задача продолжения решения задача Коши для бигармонического уравнения в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G. Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области с точно заданным данными Коши. Для этого случая при помощи функции Карлемана предлагается явная формула регуляризации. При этом предполагается, что решение ограничено на части T границы. Метод получения результатов основано на конструкции построения фундаментального решения уравнения Лапласа в явном виде, зависящего от положительного параметра, который стремиться к нулю при стремлении параметра к бесконечности на части границы области, в которых не даны условые Коши*

Ключевые слова: Задача Коши, некорректные задачи, бигармонические уравнения, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.

CAUCHY PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION

Shodiyev Dilshod Sirojiddinovich, senior lecturer
dilshod.shodiyev.76@mail.ru
Xayrullayev Muhammad Saydulla o’g’li, master student
xayrullayevmuhammad063@gmail.com
Maxmudov Shoxmalik Tanikul o’g’li, master student
maxmudovshohmalik4@gmail.com
Samarkand State University
named after Sharof Rashidov
Samarkand, Uzbekistan

Abstract: *In this paper, we study the problem of continuing the solution of the Cauchy problem for a biharmonic equation in a domain G by its known values on the smooth part S of the boundary ∂G. The problem under consideration belongs to the problems of mathematical physics, in which there is no continuous dependence of solutions on the initial data. It is assumed that a solution to the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain with exactly given Cauchy data. For this case, using the Carleman function, an explicit regularization formula is proposed. It is assumed that the solution is bounded on a part T of the boundary. The method for obtaining results is based on the construction of constructing a fundamental solution of the Laplace equation in an explicit form, depending on a positive parameter that tends to zero as the parameter tends to infinity on the part of the boundary of the region in which conditional Cauchies are not given.*

Keywords: *Cauchy problem, ill-posed problems, biharmonic equations Carleman function, regularized solutions, regularization, continuation formulas.*

Введение. Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$ точки вещественного евклидового пространства R^3, G - ограниченная односвязная область в R^3 с границей ∂G, состоящей из компактной части T плоскости $y_3=0$ и гладкого куска поверхности S -Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3>0$. $\bar{G}=G\cup\partial G$, $\partial G=S\cup T$.

В области G рассмотрим бигармонического уравнения

$$\Delta^2 U(y)=0,\ y\in G, \tag{1}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}$ оператор Лапласа.

Постановка задачи. Требуется найти бигармоническую функцию $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar{G})$, у которого известны значения на части S границы ∂G, т.е.

$$\begin{aligned} U(y_1,y_2,y_3)\big|_S &= f_1(y), & \left.\frac{\partial U(y_1,y_2,y_3)}{\partial n}\right|_S &= f_2(y),\\ \Delta U(y_1,y_2,y_3)\big|_S &= f_3(y), & \left.\frac{\partial(\Delta U(y_1,y_2,y_3))}{\partial n}\right|_S &= f_4(y), \end{aligned} \tag{2}$$

где $f_i(y),\ i=1,2,3,4$ - заданные достаточна гладкие функции, $\frac{d}{dn}$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

Рассматриваемая задача (1) –(2) является некорректным задачам математической физики [6,7, 16]. Ж. Адамар [1] заметил, что решение задачи (1)-(2) неустойчиво.

В 1943 году А.Н. Тихонов [5] указал на практическую важность некорректных задач и возможность устойчивого их решения.

Понятие регуляризирующего алгоритма и связанного с ним понятие регуляризованного семейства приближенных решений и введения положительного параметра σ в зависимости от погрешности исходных данных впервые замечено М.М. Лаврентьевым [8], [9].

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана. В [2] Карлеман установил формулу, дающую решение уравнений Коши – Римана в области специального вида. Развивая идею Карлемана, Г.М. Голузин и В.И.Крылов [3] вывели формулу для определения значений аналитических функций по данным, известным лишь на участке границы, уже для произвольных областей. Одномерным и многомерным обобщениям формулы Карлемана посвящена монография Л.А.Айзенберга [1].

Матрицу Карлемана для уравнения Коши–Римана в случае, когда S — произвольное множество положительной меры, построено в работе [3].

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и близких к ней в случаях, когда $\partial\Omega \setminus S$ — часть поверхности конуса, построена в работе Ш.Я. Ярмухамедова [9,10].

В работе [12,13] с помощью функции Карлемана восстановлено по данными Коши на части границы области не только сама гармоническая функция, но и его производные для уравнения Лапласа в двумерных и трехмерных ограниченных областях, а в работе [14] для бигармонического уравнения.

В данной работе при помощи функции Карлемана предлагается явная формула регуляризации. При этом предполагается, что решение ограничено на части T границы.

Конструкция функции Карлемана. Определим функцию $\Phi_\sigma(x,y)$ [см. 11] следующим равенствам

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3^2}\Phi_\sigma(x,y)=\int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_3}\right]\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,. \tag{3}$$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x,y)$, имеем

$$\begin{gathered}\Phi_\sigma(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}e^{-\sigma(\alpha^2+x_3^2-y_3^2)}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}udu}{u^2+r^2}-\right.\\ \left.-\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2}(y_3-x_3)\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right],\end{gathered} \tag{4}$$

где $\sigma>0,\ \ u\ge 0\ y'=(y_1,y_2),\ x'=(x_1,x_2),\ \ r=|y-x|,\ \alpha=|y'-x'|,$ $w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3$.

В работе [11] доказано, что функция $\Phi_\sigma(x,y)$, определенная равенствами (3) при $\sigma>0$, представима в виде

$$\Phi_\sigma(x,y)=F(r)+G_\sigma(x,y) \tag{5}$$

где $F(r)=\dfrac{1}{4\pi r}$, $G_\sigma(x,y)$-функция гармоническая по y в R^3 включая $y=x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x,y)$ для любого $\sigma>0$ по y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x,y)$ с указанным свойством называется функцией Карлемана для полупространства [8].

Известно, что если функция Карлемана построена то используя формулу Грина можно написать регуляризованное решение в явном виде. Отсюда вытекает, что эффективность построения функции Карлемана эквивалентно построению регуляризованного решения задача Коши.

Для функции $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar{G})$ и любого $x\in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина [15].

$$\begin{gathered}U(x)=\int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial\left(\Delta L(x,y)\right)}{\partial n}-\Delta L(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+\\ +\int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L(x,y)}{\partial n}-L(x,y)\frac{\partial\left(\Delta U(y)\right)}{\partial n}\right]dS_y,\ x\in G\end{gathered} \tag{6}$$

где $L(x,y)=r^2\left(\dfrac{1}{4\pi r}\right)=\dfrac{r}{4\pi}$ является фундаментальным решением уравнение (1).

Так как $\Phi_\sigma(x,y)$ представлена в виде (5), тогда в интегральное представление (6), $L(x,y)$ заменяя на функции $L_\sigma(x,y)=r^2\Phi_\sigma(x,y)$, имеем

$$\begin{aligned}U(x)=\int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}-\Delta L_\sigma(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+\\+\int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}-L_\sigma(x,y)\frac{\partial\left(\Delta U(y)\right)}{\partial n}\right]dS_y,\ \ x\in G.\end{aligned} \tag{7}$$

Где

$$L_\sigma(x,y)=r^2\Phi_\sigma(x,y)=r^2\left\{\frac{1}{2\pi^2}e^{-\sigma(\alpha^2+x_3^2-y_3^2)}\left[\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}udu}{u^2+r^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma u^2}(y_3-x_3)\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right]\right\},$$

$$\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}=\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\cos\alpha+\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\cos\alpha+\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_3}\cos\gamma$$

и $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ являются координатами единичной внешней нормали n в точке y границы ∂G. Далее, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}=\left[2(y_1-x_1)\Phi_\sigma(x,y)+r^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\right]\cos\alpha+\\+\left[2(y_2-x_3)\Phi_\sigma(x,y)+r^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\right]\cos\beta+\\+\left[2(y_3-x_3)\Phi_\sigma(x,y)+r^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3}\right]\cos\gamma;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta L_\sigma(x,y)=\Delta\left(r^2\Phi_\sigma(x,y)\right)=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\left[r^2\Phi_\sigma(x,y)\right]+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\left[r^2\Phi_\sigma(x,y)\right]+\\+\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\left[r^2\Phi_\sigma(x,y)\right]=6\Phi_\sigma(x,y)+4(y_1-x_1)\frac{\partial\mathit{\Phi}_\sigma(x,y)}{\partial y_1}+\\+4(y_2-x_2)\frac{\partial\mathit{\Phi}_\sigma(x,y)}{\partial y_2}+4(y_3-x_3)\frac{\partial\mathit{\Phi}_\sigma(x,y)}{\partial y_3};\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial y_1}\cos\alpha+\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial y_2}\cos\beta+\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial y_3}\cos\gamma=$$

$$=\left[10\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}+4(y_1-x_1)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1^2}+4(y_2-x_2)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_2}+\right.$$

$$\left.+4(y_3-x_3)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_3}\right]\cos\alpha+\left[10\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}+4(y_1-x_1)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_2}+\right.$$

$$\left.+4(y_2-x_2)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2^2}+4(y_3-x_3)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2\partial y_3}\right]\cos\beta+$$

$$+\left[10\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3}+4(y_1-x_1)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_3}+4(y_3-x_3)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3^2}+\right.$$

$$\left.+4(y_2-x_2)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2\partial y_3}\right]\cos\gamma.$$

Формула продолжения и регуляризация по М. М. Лаврентьеву. Обозначим

$$U_\sigma(x)=\int_S\left[f_1(y)\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}-f_2(y)\Delta L_\sigma(x,y)\right]dS_y+$$
$$+\int_S\left[f_3(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}-f_4(y)L_\sigma(x,y)\right]dS_y,\ x\in G \tag{8}$$

Теорема 1. Пусть функция $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar G)$ на части S границы удовлетворяет условие (2), и на части T границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|+|\Delta U(y)|+\left|\frac{\partial\Delta Uu(y)}{\partial n}\right|\le M,\ y\in T, M>0\,. \tag{9}$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливо оценки

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le\varphi(\sigma,x_3)Me^{-\sigma x_3^2} \tag{10}$$

где

$$\varphi(\sigma,x_3)=\frac{9}{\sigma}+8\sigma+8\sqrt{\pi\sigma}+2\sqrt{\pi}\sigma x_3+8\sigma x_3^2+\frac{5}{2\sigma x_3}+$$
$$+12\sqrt{\sigma\pi}x_3+2\sqrt{\sigma\pi}x_3^2+\frac{11\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}}+46. \tag{11}$$

Следствие 1. При каждом $x\in G$ справедлива равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty}U_\sigma(x)=U(x)\,.$$

Обозначим через $\bar G_\varepsilon$ множество

$$\bar G_\varepsilon=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in G,\ a>x_3\ge\varepsilon,\ a=\max_T h(x_1,x_2),\ 0<\varepsilon<a\right\}.$$

Множество $\bar G_\varepsilon\subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x\in\bar G_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ сходится равномерно при $\sigma\to\infty$ т.е.

$$U_\sigma(x) \Rightarrow U(x).$$

Здесь множества $\Pi_\varepsilon = G \setminus \bar{G}_\varepsilon$ служит пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

Литература

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. -Москва: Наука, 1978. — 352 с.
2. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе / Л.А. Айзенберг. –Новосибирск: Наука, 1990. -247 с.
3. Айзенберг Л.А. Абстрактная формула Карлемана / Л.А. Айзенберг, Н.Н.Тарханов. // *ДАН СССР. – 1988*. – Т.*298*. –. №*6*. – С. *1292–1296*.
4. Carleman T. Les Functions quasi analytiques / T. Carleman. –Paris: Gauthier- Villar, 1926. -116 p.
5. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач / А.Н. Тихонов. //ДАН СССР. 1943. -Том 39. №5. С. 147-160.
6. ТихоновА.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин.- Москва: Наука, 1995. -288 с.
7. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - Москва: Наука, 1974. -735 с.
8. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962. - 92 с.
9. Лаврентьев М.М. О Задача Коши для уравнения Лапласа / М.М. Лаврентьев. //Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. -Том 20. № 6. С. 819-842.
10. Ярмухамедов Ш. О гармоническом продолжении дифференцируемых функций, заданных на куске границы / Ш. Ярмухамедов. // Сибирский математический журнал, 2002. -Том 43. № 1. С. 228-239.
11. Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши / Ш. Ярмухамедов. // Математические заметки, 2008. -Том 83, выпуск 5. С. 763-778.
12. Хасанов А.Б. О задаче Коши для уравнения Лапласа / А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов // Уфимский математический журнал. 2019. Том 11. №4. С. 92-106.
13. Хасанов А.Б. Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа / А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов // Известия высших учебных заведений. Математика, 2021. №2. С. 56-73.
14. **Shodiyev** D**. On the Cauchy Problem for the Biharmonic Equation / D. Shodiyev //** Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2022. 15(2) С.199–213.
15. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н Векуа. – Ленинград, ОГИЗ Государственное издательство техники – теоретической литературы, 1948. -296.
16. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. - Новосибирск: Сибирские научное издательство, 2009. - 457с.

УДК 517.956.6

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ТРИКОМИ И ФРАНКЛЯ НА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Эргашева Сарвиноз Бахтияровна, доктарант
sarvinozergasheva96@mail.ru
Термезский государственный университет,
Термез, Узбекистан

Аннотация: *Для уравнения $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - m(2y)^{-1}u_y = 0$, где $m > 0$, рассматриваемого в некоторой смешанной области, доказаны теоремы единственности и существования решения краевой задачи с аналогами условий Трикоми и Франкля на одной граничной характеристике.*

Ключевые слова: *уравнения смешанного типа, сингулярный коэффициент, граничная характеристика, недостающее условие Трикоми, аналог условия Франкля.*

ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM WITH TRICOMI AND FRANKL CONDITIONS ON ONE BOUNDARY CHARACTERISTIC FOR ONE CLASS OF MIXED TYPE EQUATIONS

Ergasheva Sarvinoz Bakhtiyarovna, doctoral student
sarvinozergasheva96@mail.ru
Termez State University,
Termez, Uzbekistan

Abstract: *For the equation, $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - m(2y)^{-1}u_y = 0$, where $m > 0$, considered in some mixed domain, we prove uniqueness and existence theorems for a solution to a boundary value problem with analogues Tricomi and Frankl conditions on one boundary characteristic.*

Keywords: *equations of mixed type, singular coefficient, boundary characteristic, missing Tricomi condition, analogue of the Frankl condition.*

1. **Постановка задачи Трикоми-Франкля (TF).**

Пусть $D -$ конечная односвязная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой

$$\sigma_0(y = \sigma_0(x)): x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1,$$

с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - m(2y)^{-1}u_y = 0, \qquad (1)$$

где $m -$ положительная постоянная.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через A_1 и A_2 точку пересечения характеристики AC с характеристиками уравнения (1), выходящими из точек $E_1(-c, 0)$ и $E_2(c, 0)$, где $0 < c < 1$. $J = (-1,1) -$ интервал оси $y = 0$.

В задаче Трикоми [1,с.29] во всех точках характеристике AC задается значения искомой функции. В данной работе исследуется корректность задачи, котороя отличается от задачи Трикоми тем, что куски AA_1 и A_2C, характеристики AC освобождены от локального краевого условия, и это недостающее условие Трикоми заменено аналогами условиями Франкля [2]-[4] на $AA_1 \subset AC$ и $A_2C \subset AC$, и на сегментах AE_1 и E_2B отрезка AA.

Задача ($\boldsymbol{TF}$). Требуется найти в области D функцию $u(x,y) \in C(\overline{D})$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x,y)$ принадлежит $C^2(D^+)$ и удовлетаоряет уравнению (1) в области D^+;

2) функция $u(x,y)$ является в области D^- обобщенным решением класса $R_1[5, c.104; 6, c.35]$ уравнения (1) ($u(x,y) \in R_1$), если в формуле Даламбера $\tau'(x),\ \nu(x) \in H$ (см.ниже (8));

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad x \in J, \tag{2}$$

причем эти приделы при $x = \pm 1$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \qquad x \in [-1,1], \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{A_1A_2} = \psi(x), \qquad x \in [-(1+c)/2, -(1-c)/2], \tag{4}$$

$$u[\theta(x)] - u[\theta(-x)] = \rho(x), \qquad x \in [-1,-c], \tag{5}$$

$$u(x,0) - u(-x,0) = f(x), \qquad x \in [-1,-c], \tag{6}$$

$$\theta(x_0) = \frac{x_0-1}{2} - i\left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$\theta(x_0) -$ аффикс точки пересечения характеристики AC с характеристикой исходящей из точки $(x_0,0),\ x_0 \in [-1,-c]$ [7,8].

Заданные функции $\varphi(x),\ \psi(x),\ \rho(x),\ f(x)$ –непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем $\varphi(x) = (1-x^2)\varphi_0(x),\ \varphi_0(x) \in C^1[-1,1]$.

Заметим, что условия (5) и (6) являются аналогами условия Франкля [2] соответственно на участках AA_1 и A_2C характеристики AC и на частях AE_1 и E_2B отрезка вырождения AB. Обозначим $u(x,0) = \tau(x)$, тогда условие (6) примет вид

$$\tau(x) - \tau(-x) = f(x), \qquad x \in [-1,-c]. \tag{6*}$$

Задача TF при значение параметра $c = 1$ переходит в задачу Трикоми, а при $c = 0$ в задачу с аналогами условия Франкля на характеристике AC и на отрезке AB.

2. Единственность решения задачи $\boldsymbol{TF}$.

Теорема 1. Решение задачи TF при однородных краевых условиях: $\psi(x) \equiv 0,\ \rho(x) \equiv 0,\ f(x) \equiv 0$, своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в области $\overline{\mathrm{D}}^+$ принимает только в точках кривой σ_R или в точках $E_1(-c,0)$ и $E_2(c,0)$.

Доказательство. Решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0) = \tau(x),\ x \in \bar{J};\ \lim_{y\to -0}(-y)^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x),\ x \in J, \tag{7}$$

дается формулой Даламбера [9]

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right) + \tau\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)\right] -$$

$$-\frac{(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\int_{-1}^{1}\nu\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)dt. \qquad (8)$$

В силу (8) из краевого условия (5) нетрудно получить соотношение

$$\tau'(x)+\tau'(-x)-\nu(x)-\nu(-x)=2\rho'(x), \qquad x\in(-1,-c). \qquad (9)$$

С учетом (6^*) соотношение (9) преобразуем к виду

$$\nu(x)+\nu(-x)=f'(x)-2\rho'(x), \qquad x\in(-1,-c). \qquad (10)$$

Теперь в силу краевого условия (4), с учетом (8) нетрудно получить следуюшее соотношение

$$\tau'(x)-\nu(x)=\psi'((x-1)/2), \;\; x\in(-c,c), \qquad (11)$$

Заметим, что соотношения (10) и (11) являются основными функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенными из области D^- соответственно на промежутки $(-1,-c)$ и $(-c,c)$ оси $y=0$.

Пусть искомая функция $u(x,y)$ своего НПЗ в области $\overline{D}^+$ достигает в точке (x_0,y_0), в силу принципа Хопфа [10,с.25] эта точка не находиться внутри области D^+, т.е. $(x_0,y_0)\notin D^+$. Теперь допустим, что искомая функция $u(x,y)$ своего НПЗ достигает в точке $M(x_0,0)$ интервала AB т.е. $x_0\in(-1,1)$. Здесь рассмотрим три случая возможного расположения точки x_0 на интервале $(-1,1)$.

1. Пусть $x_0\in(-1,-c)$, тогда в силу соответствуюшего однородного условия (6^*) (с $f(x)\equiv 0$), искомое решение своего НПЗ достигает и в точке $M(-x_0,0)$ т.е. $-x_0\in(c,1)$, тогда в силу принципа Заремба-Жиро [10,с.26] в этих точках $\nu(x_0)<0$, $\nu(-x_0)<0$, следовательно

$$\nu(x_0)+\nu(-x_0)<0. \qquad (12)$$

Неравенство (12) в силу (2) противоречит соответствующему однородному равенству (10) (с $f'(x)\equiv 0$, $\rho'(x)\equiv 0$), в силу которого должно быть $\nu(x_0)+\nu(-x_0)=0$, полученное противоречие доказывает, что $x_0\notin(-1,-c)$, следовательно, в силу (6^*) (с $f(x)\equiv 0$) эта точка не находиться и на интервале $(c,1)$.

2. Пусть $x_0\in(-c,c)$, тогда в этой точке в силу соответствуюшего однородного соотношения (11) (с $\psi'((x-1)/2)=0$) следует, что $\nu(x_0)=0$, а это согласно (2) противоречит известному принципу Заремба-Жиро в силу которого $\nu(x_0)<0$ [10,с.26], следовательно $x_0\notin(-c,c)$.

Таким образом, функция $u(x,y)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1 своего НПЗ в области $\overline{D}^+$ достигает в точках нормальной кривой σ_0 или в точках $E_1(-c,0)$, $E_2(c,0)$.

Анологичным методом как и выше можно показать, что решение $u(x,y)$ задачи TF удовлетворяюшее условиям теоремы 1 своего НОЗ так же достигает в точках нормальной кривой σ_0. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Задача TF имеет не более одного решения.

Доказательство. В самом деле, в силу теоремы 1 решение однородной задачи TF своего НПЗ и НОЗ в области $\overline{D}^+$ достигает в точках кривой σ_0 или в точках $E_1(-c,0)$, $E_2(c,0)$ отрезка AB. В силу соответствуюшего однородного (с $\varphi(x)\equiv 0$) условия (3) $u(x,y)|_{\sigma_0}=0$, тогда эти значения достигаются в точках $E_1(-c,0)$ и $E_2(c,0)$ и в этих точках в силу соответствуюшего однородного (с $f(x)\equiv 0$) условия (6) они равны, тогда $u(x,y)=C$, $\forall(x,y)\in\overline{D}^+$. Так как $u(x,y)|_{\sigma_0}=0$, тогда $C=0$. Отсюда следует, что $u(x,y)\equiv 0$ всюду в замкнутой области $\overline{D}^{+}$. Тогда $\lim_{y\to+0} u(x,y)=0$, $\lim_{y\to-0} y^{-\frac{m}{2y}}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$ и в силу непрерывности решения в смешанной области и условия сопряжения (2) следует, что $\lim_{y\to-0} u(x,y)$, $\lim_{y\to-0} (-y)^{-\frac{m}{2y}}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$. Отсюда в силу соответствующих однородных начальных данных (7) (с $\tau(x)\equiv 0$, $\nu(x)\equiv 0$) из (8) следует, что $u(x,y)\equiv 0$. Следовательно, и во всей смешанной области D. Следствие 1 доказана.

Литература

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.–Л., 1947, 192 с.

2. Франкль Ф.И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчиваюшейся прямым скатком уплотнения. // Прикладная математика и механика. 1956, том 20 №2, С.196-202.

3. Девингталь Ю.В. О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И.Франкля. // Известия вузов.Математика. 1958, том 2 №3, С.39-51.

4. Линь Цзянь-бин. О некоторых задачах Франкля. // Вестник ЛГУ. Математика механика астрономия. 1961, том 3 №13, С.28-39.

5. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа . М., 1985,-304с.

6. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005 "Университет" -224 с.

7. Жегалов.В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии.// Ученные записки.Казанский университет. Россия. 1962, том 22, КНЗ. С.3-16.

8. Нахушев А.М. К теории краевых задач для вырождаюшихся гиперболических уравнений. // Сообщения АН.ГССР.,1975,том 77 №3, С.545-548.

9. Мирсабурова У.М. Задача со смещением на внутренних характеристиках в неограниченной области для уравнения Геллерстедта с сингулярными коэффициентами. // Известия вузов.Математика. 2022, № 9, с. 70-82.

10. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981,-448с.

УДК 517.928.2

ӨЗГӨЧӨЛҮГҮ БОЛГОН II ТАРТИПТЕГИ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН САНДЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Эсенгул кызы Пейил, кенже илимий кызматкер, PhD
peyil.esengul@manas.edu.kg
Абылаева Элла Дайырбековна, доц.м.а., PhD
ella.abylaeva@manas.edu.kg
Кыргыз-Түрк Манас университети
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада берилген маселе Ломов тарабынан иштелип чыккан теориянын негизинде катаал маселени чектелген айырмалар методун колдонуп чыгарууга арналган. Алынган айырма теңдемени чыгарууда кубалоо методунун алгоритми колдонулду.*
Ачкыч сөздөр: *Катаал маселе, чектелген айырмалар методу, өзгөчө чекит, кубалоо методу, кеңейтилген маселе.*

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ II ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЬЮ

Пейил Эсенгул кызы, млад. науч. сотрд., PhD
peyil.esengul@manas.edu.kg
Абылаева Элла Дайырбековна, и.о.доц., PhD
ella.abylaeva@manas.edu.kg
Кыргызско-Турецкий университет “Манас”
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Задача представленная в статье предназначена для решения жесткой задачи методом конечных разностей на основе теории разработанной Ломовым. Для решения полученного разностного уравнения был использован алгоритм метода прогонки.*
Ключевые слова: *Жесткая задача, метод конечных разностей, особенная точка, метод прогонки, расширенная задача.*

NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ORDER II WITH A SINGULARITY

Peyil Esengul kyzy, Research Assist. Dr., PhD
peyil.esengul@manas.edu.kg
Abylaeva Ella Dairbekovna, Assist. Prof. Dr., PhD
ella.abylaeva@manas.edu.kg
Kyrgyz-Turkish Manas University
Bishkek, Kyrgyzstan

Аннотация. *The problem presented in the article is intended for solving a rigid problem by the finite difference method based on the theory developed by Lomov. The algorithm of the sweep method was used to derive the obtained difference equation.*
Ачкыч сөздөр: *Rigid problems, finite difference method, singular point, sweep method, extended problem.*

1. Киришүү Катаал маселелерди чыгарууда Ломов методун [1] жана чектелген айырмалар методун [3-5] колдондук. Биз төмөнкү өзгөчөлүгү болгон катаал маселени изилдедик

$$\varepsilon u''(x) + xa(x)u'(x) - u(x) = f(x) \tag{3.1}$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B \tag{3.2}$$

Мында төмөнкүдөй шарттар коюлган:

a) $a(x), f(x)\epsilon C^2[0,1]$ – функциялары белгилүү,

b) $a(x) > 0, \ \forall x\epsilon[0,1]$.

x көз каранды эмес өзгөрмөсүнүн катарына төмөнкү формула боюнча көз карандысыз өзгөрмө киргизебиз

$$\tau_i = \frac{\varphi_i(x)}{\varepsilon^\alpha}.$$

Регуляризациялануучу асимтотиканы $\varphi(x)$ түрүндө тандайбыз

$$\frac{\varepsilon^{\alpha-1}xa(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon^\alpha} = \tau \quad же \quad \varphi(x)\varphi'(x) = \varepsilon^{2\alpha-1}xa(x).$$

Эгерде $\alpha = 1/2$ болсо, анда

$$\varphi(x)\varphi'(x) = xa(x) \ => \ [\varphi^2(x)]' = 2xa(x) =>$$

$$\varphi(x) = (2\int_0^x sa(s)ds)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Ошону менен катар өзгөчөлүгү болгондугуна байланыштуу дагы бир өзгөрмө киргизүүгө туура келет

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{x} sa(s)ds = \frac{\omega(x)}{\varepsilon}.$$

$u(x,\varepsilon) = \tilde{u}(x,\tau,\mu,\varepsilon)$ деп туундуларын

$$u' = \partial_x\tilde{u} + \frac{\varphi'(x)}{\varepsilon^\alpha}\partial_\tau\tilde{u} + \frac{\omega'(x)}{\varepsilon}\partial_\mu\tilde{u}$$

$$u'' = \partial_x^2\tilde{u} + \left(\frac{\varphi'(x)}{\varepsilon^\alpha}\right)^2\partial_\tau^2\tilde{u} + \left(\frac{\omega'(x)}{\varepsilon}\right)^2\partial_\mu^2\tilde{u} + D_x\partial_\tau\tilde{u}\frac{1}{\varepsilon^\alpha} + T_x\partial_\mu\tilde{u}\frac{1}{\varepsilon},$$

$$D_x = 2\varphi'(x)\partial_x + \varphi''(x), \quad T_x = 2\omega'(x)\partial_x + \omega''(x), \tag{3.4}$$

(3.4) формуласынын негизинде төмөнкү кеңейтилген маселеге келебиз

$$\varepsilon\partial_x^2\tilde{u} + \varepsilon\left(\frac{\varphi'(x)}{\varepsilon^\alpha}\right)^2\partial_\tau^2\tilde{u} + \varepsilon(\frac{\omega'(x)}{\varepsilon})^2\partial_\mu^2\tilde{u} + \varepsilon^{1-\alpha}D_x\partial_\tau\tilde{u} + T_x\partial_\mu\tilde{u} + xa(x)\partial_x\tilde{u}$$
$$+ xa(x)\frac{\varphi'(x)}{\varepsilon^\alpha}\partial_\tau\tilde{u} + xa(x)\frac{\omega'(x)}{\varepsilon}\partial_\mu\tilde{u} - \tilde{u} = f(x)$$

Эми жогорку маселедеги x'ке карата алынган айрым туундуларды чектелген айырмалар методу менен алмаштырабыз.

$$\tilde{u} = y_i; \qquad \partial_x\tilde{u} = y\,'(x_i) = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h}; \tag{3.5}$$

$$\partial_x^2\tilde{u} = y''(x_i) = \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}; \tag{3.6}$$

$$\varepsilon\frac{y_{i+1}(\tau,\mu)-2y_i(\tau,\mu)+y_{i-1}(\tau,\mu)}{h^2} + \varepsilon\left(\frac{\varphi'(x_i)}{\varepsilon^\alpha}\right)^2\partial_\tau^2 y_i(\tau,\mu) + \varepsilon\left(\frac{\omega'(x)}{\varepsilon}\right)^2\partial_\mu^2 y_i(\tau,\mu) +$$
$$\varepsilon^{1-\alpha}\partial_\tau\left[2\varphi'(x_i)\frac{y_{i+1}(\tau,\mu)-y_i(\tau,\mu)}{h} + \varphi''(x_i)y_i(\tau,\mu)\right] + \partial_\mu\tilde{u}\left[2\omega(x_i)\frac{y_{i+1}(\tau,\mu)-y_i(\tau,\mu)}{h} +\right.$$
$$\left.\omega''(x_i)y_i(\tau,\mu)\right] + x_i a(x_i)\frac{y_{i+1}(\tau,\mu)-y_i(\tau,\mu)}{h} + x_i a(x_i)\frac{\varphi'(x_i)}{\varepsilon^\alpha}\partial_\tau y_i(\tau,\mu) +$$
$$x_i a(x_i)\frac{\omega'(x_i)}{\varepsilon^\alpha}\partial_\mu y_i(\tau,\mu) - y_i(\tau,\mu) = f(x_i)$$

Бул маселенин чыгарылышын төмөнкү класста издейбиз:

$$\tilde{u} = c(x_i)\,erf\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) + v(x_i)\,exp(-\mu) + q(x_i) \tag{3.7}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Мындан τ'га карата биринчи жана экинчи туундусун алып, (3.1) маселеге коёбуз

$$\partial_\tau \tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c(x_i)\, exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) \tag{3.8}$$

$$\partial_\tau^2 \tilde{u} = -\frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} c(x)\, exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)$$

$$\partial_\mu \tilde{u} = -v(x_i)\exp(-\mu)$$

$$\partial_\mu^2 \tilde{u} = v(x_i)\exp(-\mu)$$

$$\varepsilon\left(\frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{h^2} erf\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} exp(-\mu) + \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2}\right)$$
$$+ (\varphi'(x_i))^2\left[-\frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} c_i\, exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) + \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} c_i\, exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\right]$$
$$+ \frac{\left(\omega'(x)\right)^2}{\varepsilon}\left[v_i \exp(-\mu) + \frac{\mu}{\varepsilon} v_i \exp(-\mu)\right]$$
$$+ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\left[2\varphi'(x_i)\frac{c_{i+1} - c_i}{h} + \varphi''(x_i)c_i\right]$$
$$- \exp(-\mu)\left[2\omega'(x_i)\frac{v_{i+1} - v_i}{h} + v_i\omega''(x_i)\right]$$
$$+ x_i a(x_i)\left(\frac{c_{i+1} - c_i}{h} erf\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v_{i+1} - v_i}{h} exp(-\mu) + \frac{q_{i+1} - q_i}{h}\right)$$
$$- \left(c_i\, erf\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) + v_i\, exp(-\mu) + q_i\right) = f_i$$

$$erf\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)\left[\varepsilon\frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{h^2} + x_i a(x_i)\frac{c_{i+1} - c_i}{h} - c_i\right] = 0$$

$$exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}}\left[2\varphi'(x_i)\frac{c_{i+1} - c_i}{h} + \varphi''(x_i)c_i\right] = 0$$

$$\exp(-\mu)\left[\varepsilon\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + \frac{\left(\omega'(x)\right)^2}{\varepsilon} v_i + \left(\omega'(x)\right)^2 \mu v_i - 2\omega'(x_i)\frac{v_{i+1} - v_i}{h}\right.$$
$$\left. - v_i\omega''(x_i) + x_i a(x_i)\frac{v_{i+1} - v_i}{h} - v_i\right] = 0$$

$$\varepsilon\frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2} + x_i a(x_i)\frac{q_{i+1} - q_i}{h} - q_i = f_i$$

$$2\varphi'(x_i)\frac{c_{i+1} - c_i}{h} + \varphi''(x_i)c_i = 0 \;\; => \quad c_i = \frac{\frac{2\varphi'(x_i)}{h} c_{i+1}}{\frac{2\varphi'(x_i)}{h} - \varphi''(x_i)}$$

Бул теңдемеден $c_i\ (i = 0,1,\ldots)$ лерди табабыз. Бирок бул жердеги c_n ди табыш үчүн биринчи орунда төмөнкү теңдемени чыгарып алышыбыз зарыл. Мында $\varepsilon = 0$ болгон учурда

$$xa(x_i)\frac{q_{i+1} - q_i}{h} - q_i = f_i,$$

белгилүү болгон чектердин негизинде

$$c_0 + v_0 + q_0 = A,$$
$$c_n + q_n = B,$$

Мында $v_n = 0$ деп тандап алабыз.

$erf(x)$ функциясынын мааниси $0 < \tau < \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}$ аралыгында

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}} exp(-\frac{s^2}{2})ds \approx 1$$

барабар болгондуктан c_0 менен c_n нөлгө барабарлай албайбыз.

Теорема: Эгерде a,b) шарттары аткарылса жана берилген функциялар жылмакай болушса, анда тургузулган сандык чыгарылыштын каталыгы *O(h)* тактыгында орун алат.

Мисал:

Биз кичине параметрлүү дифференциалдык теңдеме үчүн чектик маселени чыгарууда чектелген айырмалар методун колдонобуз. Биз төмөнкүдөй маселени тандап алдык. Албетте так чыгарылышы бизге белгилүү.

$$\varepsilon u''(x) + xu'(x) - u(x) = -(1+\varepsilon\pi^2)\cos(\pi x) - \pi x sin(\pi x) \qquad (1)$$

$$u(-1) = -1, \quad u(1) = 1, \qquad (2)$$

$$\varepsilon = 10^{-3}, \qquad h = \frac{1}{15}$$

$$u(x) = \cos(\pi x) + x + \frac{xerf\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + \sqrt{2\varepsilon/\pi}\exp(-\frac{x^2}{2\varepsilon})}{\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + \sqrt{2\varepsilon/\pi}\exp(-\frac{1}{2\varepsilon})} \qquad (3)$$

(3) – маселенин так чыгарылышы.

Мында $a(x_i) = 1$, $f_i = -(1+\varepsilon\pi^2)\cos(\pi x) - \pi x sin(\pi x)$, $x_0 = -1$, $b = 1$

$$\varphi(x) = (2\int_0^x sa(s)ds)^{1/2} = \sqrt{2\int_0^x sds} = \sqrt{2(\frac{x^2}{2})} = x$$

$$\tau = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon^\alpha} \;=>\; \alpha = \frac{1}{2},\; \tau = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \;=>\; \varphi' = 1;$$

$$\varphi'' = 0;$$

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^x sa(s)ds = \frac{\omega(x)}{\varepsilon} \;=>\; \omega(x) = \int_{x_0}^x sds = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \;=>\; \mu = \frac{x^2-1}{2\varepsilon}$$

$$\omega' = x; \;\; \omega'' = 1;$$

Бизге белгилүү функцияларды таап алгандан кийин ордуна коюп эсептөөлөрдү жүргүзөбүз.

$$erf\left(\frac{x_i}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)\left[\varepsilon\frac{c_{i+1}-2c_i+c_{i-1}}{h^2} + x_i\frac{c_{i+1}-c_i}{h} - c_i\right] = 0$$

$$exp\left(-\frac{x_i^2-1}{2\varepsilon}\right)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}}\left[2\frac{c_{i+1}-c_i}{h}\right] = 0$$

$$\exp\left(-\frac{x_i^2-1}{2\varepsilon}\right)\left[\varepsilon\frac{v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}}{h^2} + \frac{x_i^2}{\varepsilon}v_i + x_i^2\frac{x_i^2-1}{2\varepsilon}v_i - 2x_i\frac{v_{i+1}-v_i}{h} - v_i + x_i\frac{v_{i+1}-v_i}{h} - v_i\right] = 0$$

$$\varepsilon\frac{q_{i+1}-2q_i+q_{i-1}}{h^2} + x_i\frac{q_{i+1}-q_i}{h} - q_i = f_i$$

$\varepsilon = 0$ болгон учурдагы маселенин маанисин q_i деп тандап алабыз.

$$x_i\frac{q_{i+1}-q_i}{h} - q_i = f_i$$

Мындан q_i нин маанилерин таап, $\begin{cases} c_0 + v_0 + q_0 = -1 \\ c_n + q_n = 1 \end{cases}$ системин эске алуу менен төмөнкүгө ээ болобуз.

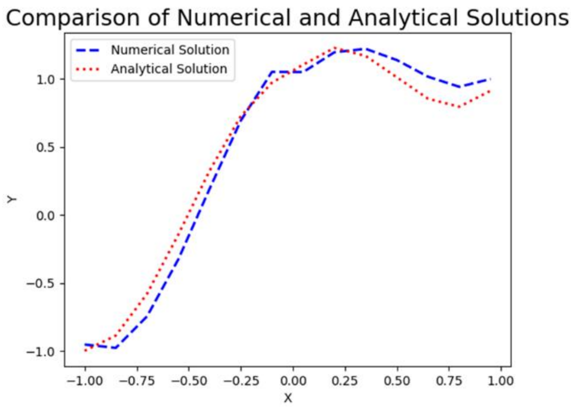
$$c_i = c_{i+1}$$

$$(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{x_i}{h})v_{i+1} + (-\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{x_i^2}{\varepsilon} + x_i^2\frac{x_i^2-1}{2\varepsilon} + \frac{x_i}{h} - 2)v_i + (\frac{\varepsilon}{h^2})v_{i-1} = 0\,,$$
$$v_0 = A - c_0 - q_0, \qquad v_n = 0$$

Алынган итерациянын программасы Python тилинин math библиотекасы колдонулуп жазылды.

```
import numpy as np
import math
def Numerical(x0, xn, A, B, h, eps):
    m = (xn - x0) / h
    n = math.ceil(m)
    pi = math.pi
    x = np.zeros(n)
    f = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        x[i] = x0 + i * h
        f[i] = -(1 + eps * pi ** 2) * math.cos(pi * x[i]) - pi * x[i] * math.sin(pi * x[i])
    q = np.zeros(n)
    q[0] = A
    for i in range(n - 1):
        q[i + 1] = (1 + h / x[i]) * q[i] + (f[i] * h) / x[i]
    c = np.zeros(n)
    c[n - 1] = B - q[n - 1]
    for i in range(n - 2, -1, -1):
        c[i] = c[i + 1]
    v = np.zeros(n)
    v[0] = A - c[0] - q[0]
    v[n - 1] = 0
    e = np.zeros(n)
    d = np.zeros(n)
    s = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        e[i] = eps / h ** 2 - x[i] / h
        d[i] = -2 * eps / h ** 2 + x[i] ** 2 / eps + (x[i] ** 4 - x[i] ** 2) / (2 * eps) + x[i] / h - 2
        s[i] = eps / h ** 2
        f[i] = 0
    L = np.zeros(n)
    K = np.zeros(n)
    t = np.zeros(n)
    myu = np.zeros(n)
    u = np.zeros(n)
    y = np.zeros(n)
    L[0] = 0
    K[0] = v[0]
    K[n - 1] = 0
    L[n - 1] = 0
    v[0] = A - c[0] - q[0]
```

```
    s[n - 1] = 0
    for i in range(1, n - 1):
        L[i] = -e[i] / (d[i] + c[i] * L[i-1])
        K[i] = (h ** 2 * f[i-1] - c[i] * K[i-1]) / (d[i] + c[i] * L[i-1])
    for i in range(n):
        t[i] = x[i] / math.sqrt(eps)
        myu[i] = (x[i] ** 2 - 1) / (2 * eps)
        u[i] = c[i] * math.erf(t[i] / math.sqrt(2)) + v[i] * math.exp(-myu[i]) + q[i]
        y[i] = math.cos(pi * x[i]) + x[i] + (x[i] * math.erf(x[i] / math.sqrt(2 * eps)) + math.sqrt(2 * eps / pi) * math.exp(-x[i] ** 2 / 2 * eps)) / (math.erf(1/math.sqrt(2*eps)) + math.sqrt(2*eps/pi)*math.exp(-1/2*eps))
    return x, u, y
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x, u, label='Numerical Solution', color='blue', linestyle='--', linewidth=2)
plt.plot(x, y, label='Analytical Solution', color='red', linestyle=':', linewidth=2)
plt.legend()
plt.title('Comparison of Numerical and Analytical Solutions', fontsize=18)
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.show()
```



1-сүрөт. Так жана сандык чыгарылыштардын графиги

Мында эске ала кетчү нерсе кадам. Кадамдын туруктуу $h = \frac{1}{15}$ (const) болушу керек.

Жогорку сүрөттө көрүнүп тургандай жыйынтык так чыгарылыш менен сандык чыгарылыш жакын экендиги көрсөтүлдү.

Адабияттар

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. – Москва: Наука, 1981.
2. Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач / А.С. Омуралиев. – Бишкек:КТМУ, 2005.
3. Дулан Э. “Равномерные численные методы решение задач с пограничным слоем “, перевод с английского Г.В.Демидова, под редакцией Н.Н. Яненко / Э. Дулан, Дж. Миллер, У. Шилдерс. – Москва: “Мир”, 1983.
4. Ракитский Ю.В. “Численные методы решения жестких систем”/ Ю.В. Ракитский, С.М. Устинов, И.Г. Черноруцкий. – Москва: “Наука”, 1979.
5. Дубинский Ю. А. “Исследование по дифференциальным уравнениям и их приложениям” : выпуск 201 / Ю. А. Дубинский, С.А. Ломов, С.И. Похожаев. – Москва, 1974.

УДК 517.951

ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Юлбарсов Хожиакбар Акбарович, докторант (PhD)
xojiakbaryulbarsov1@gmail.com
Ферганский государственный университет
Фергана, Узбекистан

Аннотация: *В настоящее время в связи с проблемами передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвенных грунтах, нестационарного процесса фильтрации в трещиновато-пористой среде и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению начально-краевых и краевых задач для неклассических уравнений с частными производными. К таким неклассическим уравнениям относится уравнения псевдопараболического типа.*

В прямоугольной области исследована вторая начально-краевая задача для однородного псевдопараболического уравнения третьего порядка с дробной по времени производной Капуто и с оператором Бесселя по другой перемененной. Установлены условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций. Существование решения второй краевой задачи доказано методом Фурье.

Ключевые слова: *псевдопараболическое уравнение, краевые задачи, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто, дробный интеграл Римана-Лиувилля, метод Фурье, функция Миттаг-Леффлера, оператор Бесселя.*

THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PSEUDO-PARABOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH A FRACTIONAL DERIVATIVE AND WITH A BESSEL OPERATOR

Yulbarsov Khojiakbar Akbarovich, doctoral student (PhD)
xojiakbaryulbarsov1@gmail.com
Fergana State University
Fergana, Uzbekistan

Abstract: *At present, in connection with the problems of heat transfer in a heterogeneous environment, moisture transfer in soil, nonstationary filtration process in a fractured-porous medium, and a number of other problems, interest in the study of initial-boundary value and boundary value problems for non-classical partial differential equations has increased significantly. Such non-classical equations include equations of pseudoparabolic type.*

In a rectangular domain, the second initial-boundary value problem for a homogeneous third-order pseudoparabolic equation with a time-fractional Caputo derivative and a Bessel operator with respect to another variable is studied. Conditions for the unique solvability of the problem considered in the class of continuously differentiable functions are established. The existence of a solution to the second boundary value problem is proved by the Fourier method.

Keywords: *pseudoparabolic equation, boundary value problems, fractional order differential equation, Caputo fractional derivative, Riemann-Liouville fractional integral, Fourier method, Mittag-Leffler function, Bessel operator.*

Введение. Дифференциальные уравнения с дробными производными естественным образом возникают в ряде областей науки, таких как физика, инженерия, биофизика, явления кровотока, аэродинамика, электронно-аналитическая химия, биология, теория управления и т.д. Более подробную информацию о таких уравнениях можно найти в работах [1–4].

Псевдопараболические уравнения с дробными производными возникают при описании процессов фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде, фильтрации жидкости в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин, переноса почвенной влаги в зоне с учетом ее движения против потенциала влажности [4–7]. В связи с этим возникает необходимость исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными и разработки методов их решений.

Задача Коши, начально-краевые задачи для псевдопараболического уравнения, в том числе для уравнения Аллера с дробными производными Римана-Лиувилля были изучены в работах [8–10]. В статьях [11–13] изучаются начально-краевые задачи для уравнений параболического и псевдопараболического типов с участием оператора Бесселя.

В данной работе изучается первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с дробными производными Капуто.

1. Определение дробных проиводных и интегралов.

Введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего исследования.

Определение 1. Дробным дифференциальным оператором Капуто D_t^{β} порядка β, $0<\beta\le 1$ для дифференцируемой функции f называется оператор, определенный выражением [3,4]:

$$D_t^{\beta}\left[f(x)\right](t)=I\left[f'(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\displaystyle\int_0^t f'(t)(t-\tau)^{-\beta}\,d\tau, & 0<\beta<1,\\ f'(t), & \beta=1,\end{cases} \tag{1}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция.

Определение 2. Дробным интегральным оператором Римана-Лиувилля $D_{0t}^{-\beta}$ порядка β, $0<\beta\le 1$ для интегрируемой функции f называется оператор, определенный выражением [3,4]:

$$D_{0t}^{\beta}f(t)=I^{\beta}\left[f(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^t f(t)(t-\tau)^{\beta-1}\,d\tau, & 0<\beta<1,\\ \displaystyle\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, & \beta=1,\end{cases} \tag{2}$$

Определение 3. Двухпараметрическая функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ определяемая формулой [3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},\quad (\alpha>0,\ \beta>0), \tag{3}$$

называется функцией Миттаг-Леффлера.

Приведем некоторые соотношения, приведенные в [3]:

$$E_{1,1}(z)=e^z,\quad E_{1,1}(z)=\frac{e^z-1}{z}, \tag{4}$$

$$E_{2,1}(z)=ch\sqrt{z},\quad E_{2,1}(z)=\frac{sh\sqrt{z}}{z}, \tag{5}$$

$$E_{1/2,1}(z)=\frac{2}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{erfc}\left(-\sqrt{z}\right). \tag{6}$$

При $\beta=1$ получим однопараметрическую функцию Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\equiv E_\alpha(z) \tag{7}$$

Обобщение формулы Ньютона-Лейбница, при α, $(0<\alpha\le 1)$

$$D_{0t}^{-\beta}D_t^{\beta}f(t)=z(t)-\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}z^{(\beta-1)}(0) \tag{8}$$

2. Постановка и основной результат

В области $\Omega_T=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t\le T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\beta}u-D_t^{\beta}B_p^{x}u-B_p^{x}u=0,\ 0<\beta\le 1,\ p=\alpha-1/2,\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le T, \tag{9}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad 0\le x\le 1, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0}x^{2\beta}u_x(x,t)=u_x(1,t)=0,\qquad 0\le t\le T, \tag{11}$$

где $\varphi(x)$ заданная функция, $B_p^x\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2p+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ - оператора Бесселя .

Здесь D_t^{β} – дробная производная Капуто порядка β, $(0<\beta\le 1)$.

Определение 4. Классическим решением задачи $(9)-(11)$ в области Ω_T назовем функцию $u=u(x,t)$ из класса $D_t^{\beta}u(x,t)\in C(\Omega_T)$, $D_t^{\beta}B_p^{x}u(x,t)\in C(\Omega_T)$, $B_p^{x}u(x,t)\in C(\Omega_T)$, которая удовлетворяет уравнению (9) при всех $u(x,t)$, начальному условию (10) при всех $x\in[0,1]$, и краевым условиям (11) при всех $t\in[0,T]$.

Теорема. Пусть $\varphi(x)\in C^2[0,1]$, $\varphi'''(x)\in L_1(0,1)$, и $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(1)=0.$ Тогда задача (9) -(11) имеет единственное решение. Это решение представимо в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n E_\alpha\left(\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^{\alpha}\right)x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x), \tag{12}$$

где $\varphi_n=\dfrac{2}{J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)}\displaystyle\int_0^1\varphi(x)x^{1/2+\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)dx.$

Доказательство. Согласно методу Фурье, нетривиальные решения уравнения (9), удовлетворяющее граничным условиям (11) ищем в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{13}$$

Подставляя значения $u(x,t)$ из (12) в (13) и разделяя переменные, получим

$$\frac{D_{0t}^{\beta}T(t)}{D_{0t}^{\beta}T(t)+T(t)}=\frac{B_p^{x}X(x)}{X(x)}=-\lambda$$

Отсюда, предполагая, что $D_{0t}^{\alpha}T(t)+T(t)\neq 0$, и учитывая условие (11), получим следующие уравнения относительно функций $X(x)T(t)$:

$$X''(x)+\frac{2\alpha}{x}X'(x)+\lambda X(x)=0, \tag{14}$$

$$X'(0)=0,\ X'(1)=0; \tag{15}$$

$$D_{0t}^{\beta}T(t)+\frac{\lambda}{1+\lambda}T(t)=0, \tag{16}$$

$$T'(0)=0, T'(1)=0 \tag{17}$$

Из уравнения (14), произведя замену

$$X(x)=\left(t/\sqrt{\lambda}\right)^{1/2-\alpha}\ p(t),$$

где $t=\sqrt{\lambda}x$ получим уравнение Бесселя [14, § 3.1]:

$$t^2p''(t)+tp'(t)+\left(t^2+\left(1/2-\alpha\right)^2\right)p(t)=0. \tag{18}$$

Принимая во внимание вид общего решения [14, § 3.1] уравнения (18) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (14) в виде

$$X(x)=c_1x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+c_2x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{19}$$

Здесь c_1 и c_2 - произвольные постоянные, J_l и J_{-l} - функция Бесселя порядка l первого рода [14, §§ 3.1, 3.5] соответственно. Из (19) следует, что решение уравнения (14), удовлетворяющее первому из условий (15), существует при $\alpha<1/2$ и оно определяется равенством

$$X(x)=c_1x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{20}$$

Подставляя (20) во второе из условий (15), получим условия существования нетривиального решения задачи (14), (15):

$$J_{\alpha+1/2}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0\,. \tag{21}$$

Известно, что при $l>-1$ функция Бесселя J_l имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [14, § 15. 23]. Так как $1/2-\alpha>0$ уравнение (21) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через σ_n-n-ный положительный корень уравнения (21), получим значения параметра λ при которых существуют нетривиальные решения задачи (14), (15), т. е. ее собственные значения:

$$\lambda_n=\sigma_n^2,\ \ n\in N.$$

Полагая в (20) $\lambda=\lambda_n$, $n\in N$ и $c_1=1$, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи (14), (15):

$$X_n(x)=c_1x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_nx),\ \ n\in N. \tag{22}$$

Теперь перейдем к исследованию задачи (16), (17).

Решение дробного дифференциального уравнения вида (16), удовлетворяющего граничному условию (17), имеет следующий вид

$$T_n(t)=C_nE_\alpha\left(-\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}t^\alpha\right), \quad (23)$$

где $E_{\alpha,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$ функция Миттаг-Леффлера, $C_n,\ n=1,2,...$ -пока произвольные постоянные.

Объединив $X(x), T(t)$ получим:

$$u_n(x,t)=C_nE_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)$$

решение удовлетворяющей уравнению (9) с граничными условиями (11).

Воспользовавшись обобщенным принципом суперпозиции, запишем решение задачи (9), (11) в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nE_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x). \quad (24)$$

Для нахождения неизвестных постоянных C_n, воспользуемся начальным условием (10). Тогда из (24) имеем

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\, x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x). \quad (25)$$

Согласно [14, § 15.25], система функций $\left\{J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональнос весом x на отрезке $[0,1]$. Поэтому в силу равенства

$$\int_0^1 x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\sigma_m x)x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x)x^{2\alpha}dx=\int_0^1 xJ_{1/2-\alpha}(\sigma_m x)J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x)dx=0$$

система собственных функций (22) ортогональна с весом $x^{2\alpha}$ на $[0,1]$.

Согласно [14, § 18.1], система функций $\left\{J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ полна с весом x в пространстве $L_2[0,1]$ и имеет место соотношение

$$\int_0^1 xJ_{1/2-\alpha}^2(\sigma_n x)dx=\frac{1}{2}J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n).$$

Отсюда следует, что система собственных функций (22) полна в пространстве $L_2[0,1]$ с весом $x^{2\alpha}$ и для функций этой системы имеет место соотношение

$$\int_0^1 x^{1-2\alpha}J_{1/2-\alpha}^2(\sigma_n x)x^{2\alpha}dx=\int_0^1 xJ_{1/2-\alpha}^2(\sigma_n x)dx=\frac{1}{2}J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n).$$

Рассматривая (25) как разложение $\varphi(x)$ в ряд Фурье, найдем коэффициенты Фурье

$$\varphi_n=C_n=\frac{2}{J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)}\int_0^1\varphi(x)x^{1/2+\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)dx. \quad (26)$$

Подставив найденные C_n в (24), получим формальное решение задачи (9)-(10):

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x). \tag{27}$$

Теперь покажем, что найденная функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи (9)-(11). Сначала покажем непрерывность функции $u(x,t)$ в области Ω_T.

Далее покажем, что формально построенное решение (27) является классическим, т. е. регулярным при $0<x<1,\ 0<t<T,$ непрерывным по x при $0\le x\le 1$ и удовлетворяет дополнительным условиям (9), (11).

Используя неравенство и то, что

$$E_\alpha(-z)\le\frac{M}{1+z}\le M,\ z\ge 0,\ 0<\alpha<1,$$

из формулы (27), имеем

$$|u(x,t)|\le\sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_n|\left|E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)\right|\left|x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M|\varphi_n|\sigma_n^{\alpha-1/2}}{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1/2)}. \tag{28}$$

Из (26) можно получить, проинтегрировав уравнение по частям один раз

$$\varphi_n=-\frac{2}{\sigma_n J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)}\int_0^1\varphi'(x)x^{\alpha+1/2}J_{\alpha+1/2}(\sigma_n x)dx. \tag{29}$$

Обозначив интеграл в выражении (29) через $\tilde{\varphi}_n$, его можно выразить следующим образом.

$$\varphi_n=-\frac{2}{\sigma_n J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)}\tilde{\varphi}_n \tag{30}$$

Подставляя выражение (30) в (28), получим

$$\begin{aligned}|u(x,t)|&=\sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_n|\left|E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)\right|\left|x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)\right|\le\\&\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3/2-\alpha}M\tilde{\varphi}_n}{\sigma_n^{3/2-\alpha}J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)\Gamma(\alpha+1/2)}\end{aligned} \tag{31}$$

Данный ряд (31) является сходящимся рядом.

Поэтому функция $u(x,t)$, определяемая рядом (27), непрерывна в области Ω_T и удовлетворяет начальному условию (9) и граничным условиям (11).

Остается показать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (9) в области Ω_T. Для этого достаточно показать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_t^\beta u(x,t),\ \sum_{n=1}^{\infty}D_t^\beta B_p^x u(x,t),\ \sum_{n=1}^{\infty}B_p^x u(x,t).$$

Формально дифференцируя ряд (27), находим

$$D_t^\beta u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n D_t^\beta E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x),$$

$$B_p^x u(x,t) = -\lambda X(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x),$$

$$D_t^\beta B_p^x u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n D_t^\beta E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} t^\alpha\right) B_p^x x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{\sigma_n^4}{1+\sigma_n^2} E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} t^\alpha\right) x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x),$$

$$\left|D_t^\beta u(x,t)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| \left|\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}\right| \left|E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} t^\alpha\right)\right| \left|x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)\right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n| \left|\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}\right| M}{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1/2)\sigma_n^{1/2-\alpha}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3/2-\alpha} |\tilde{\varphi}_n| \left|\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}\right| M}{\sigma_n^{3/2-\alpha} J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)} < +\infty$$

$$\left|B_p^x u(x,t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sigma_n^2\right| \left|x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^{\alpha+3/2}}{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1/2)} < +\infty$$

$$\left|D_t^\beta B_p^x u(x,t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| \left|\frac{\sigma_n^4}{1+\sigma_n^2}\right| \left|E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} t^\alpha\right)\right| \left|x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)\right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3/2-\alpha} |\tilde{\varphi}_n| \left|\frac{\sigma_n^4}{1+\sigma_n^2}\right| M}{\sigma_n^{3/2-\alpha} J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)} < +\infty. \tag{32}$$

Из оценок (32) заключаем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} D_t^\beta u(x,t), \sum_{n=1}^{\infty} D_t^\beta B_p^x u(x,t), \sum_{n=1}^{\infty} B_p^x u(x,t)$ сходятся равномерно к $D_t^\beta u(x,t)$, $D_t^\beta B_p^x u(x,t)$, $B_p^x u(x,t)$ соответственно. Теорема доказана.

Литература

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J. “Teory and Applications of Fractional Differential Equations,” North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, 2006.
2. Miller K.S. and. Ross B. “An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,” John Wiley, New York, 1993.
3. Podlubny I. “Fractional Differential Equations,” Academic Press, San Diego, New York, London, 1999.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.- Минск: Наука и техника, 1987.— 688 с.
5. Джарбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.-672с.
6. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
8. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.
9. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений.-Бишкек: Илим, 2001.-183 с.
10. Аблабеков, Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи // Наука и новые технологии.-1999.- № 4.- С. 12–19.
11. Karimov Sh.T. Method of Solving the Cauchy Problem for One-Dimensional Polywave Equation With Singular Bessel Operator. Russian Mathematics, 2017, Vol. 61, No. 8, pp. 22–35. DOI: 10.3103/S1066369X17080035.
12. Karimov Sh.T. On Some Generalizations of Properties of the Lowndes Operator and their Applications to Partial Differential Equations of High Order Filomat 2018 Volume 32, Issue 3, Pages: 873-883 https://doi.org/10.2298/FIL1803873K.
13. Каримов Ш.Т, Юлбарсов Х.А. Аналог задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка. «Стохастик таҳлилнинг долзарб муаммолари» конференция. Тошкент. 2021 г. 309-311 с.

14. Watson G
15. .N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge, Cambridge University Press, 1922.

УДК 517.98

ANALYZING THE UNIFORM CONVERGENCE OF EIGENFUNCTION EXPANSION FOR THE BIHARMONIC OPERATOR IN CLOSED DOMAINS

Borubaev Altai Asylkanovich, Academyc, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor
fiztech-07@mail.ru
National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Institute of Mathematics
Bishkek, Kyrgyzstan
Akhmedov Anvarjon Ahatjonovich, PhD
aakhmedov@dallascollege.edu
Dallas College, Richland Campus
Dallas, Texas, USA

Abstract. *In the realm of mathematical models governing diverse vibrating systems, partial differential equations stand as fundamental tools. The pursuit of solutions to these equations unfolds through the intricate development of eigenfunction expansions for differential operators. Within this context, the biharmonic equation, a fourth-order differential equation, surfaces prominently in problems related to plane elasticity and in characterizing the dynamics of slow flows in viscous, incompressible fluids. The versatility of the biharmonic operator extends to capturing various physical processes within real space through the lens of spectral theory for differentiable operators. This research delves into the nuanced exploration of the uniform convergence of eigenfunction expansions. Specifically, we focus on functions belonging to Nikolskii classes that correspond to the biharmonic operator. Through rigorous investigation, this paper aims to contribute valuable insights into the challenges and intricacies surrounding the uniform convergence of eigenfunction expansions, shedding light on the broader understanding of the spectral theory associated with the biharmonic operator.*

Keywords: *Biharmonic operator, biharmonic equation, differential operator, differential equation, uniform convergence, expansion in eigenfunctions.*

АНАЛИЗ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ЗАКРЫТЫХ ОБЛАСТЯХ

Борубаев Алтай Асылканович, Академик, доктор ф.-м.н., профессор
fiztech-07@mail.ru
Национальная академия наук Кыргызской Республики, Институт математики
Бишкек, Кыргызстан
Ахмедов Анваржон Ахатжонович, PhD
aakhmedov@dallascollege.edu
Даллаский колледж, Кампус Ричленд
Даллас, Техас, США

Аннотация: *В области математических моделей, управляющих различными колебательными системами, уравнения в частных производных являются фундаментальным инструментом. Поиск решений этих уравнений осуществляется посредством сложной разработки разложений по собственным функциям дифференциальных операторов. В этом контексте бигармоническое уравнение, дифференциальное уравнение четвертого порядка, занимает видное место в задачах, связанных с плоской упругостью и при характеристике динамики медленных течений в вязких несжимаемых жидкостях. Универсальность бигармонического оператора распространяется на отражение различных физических процессов в реальном пространстве через призму спектральной теории дифференцируемых операторов. Это исследование углубляется в тонкое исследование равномерной сходимости разложений по собственным функциям. В частности, мы концентрируемся на функциях, принадлежащих классам Никольского, соответствующих* *бигармоническому оператору. Благодаря тщательному исследованию эта статья призвана внести ценный вклад в понимание проблем и тонкостей, связанных с равномерной сходимостью разложений по собственным функциям, проливая свет на более широкое понимание спектральной теории, связанной с бигармоническим оператором.*

Ключевые слова: *бигармонический оператор, бигармоническое уравнение, дифференциальный оператор, дифференциальное уравнение, равномерная сходимость, разложение по собственным функциям.*

БИГАРМОНИЯЛЫК ОПЕРАТОРДУН ЖАБЫК АЙМАКТАРДАГЫ ӨЗДҮК ФУНКЦИЯЛАРЫНЫН КЕҢЕЙИШИНИН БИРДИК ЖАКЫНДАШУУСУН АНАЛИЗДӨӨ

Борубаев Алтай Асылканович, Академик, ф.-м.и. доктору, профессор
fiztech-07@mail.ru
Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясы, Математика институту
Бишкек, Кыргызстан
Ахмедов Анваржон Ахатжонович, PhD
aakhmedov@dallascollege.edu
Даллас колледжи, Ричленд Кампусу
Даллас, Техас, США

Аннотация: *Ар кандай термелүүчү системаларды башкарган математикалык моделдер тармагында жарым-жартылай дифференциалдык теңдемелер негизги курал болуп саналат. Бул теңдемелердин чечимдерин издөө дифференциалдык операторлордун өздүк функциялары боюнча кеңейтүүлөрдү комплекстүү иштеп чыгуу аркылуу ишке ашырылат. Бул контекстте бигармоникалык теңдеме, төртүнчү даражадагы дифференциалдык теңдеме тегиздик ийкемдүүлүккө байланышкан маселелерде жана илешкектүү кысылбаган суюктуктардагы жай агымдардын динамикасын мүнөздөөдө маанилүү орунду ээлейт. Бигармоникалык оператордун универсалдуулугу дифференциалдануучу операторлордун спектрдик теориясынын призмасы аркылуу реалдуу мейкиндикте ар кандай физикалык процесстерди чагылдырууга тарайт. Бул изилдөө өздүк функциянын кеңейүүлөрүнүн бирдиктүү конвергенциясын майда-чүйдөсүнө чейин изилдейт. Тактап айтканда, биз бигармоникалык операторго туура келген Никольский класстарына тиешелүү функцияларга көңүл бурабыз. Кылдат иликтөө аркылуу бул макала бигармоникалык оператор менен байланышкан спектрдик теорияны кеңири түшүнүүгө жарык чачып, өздүк функциянын кеңейүүлөрүнүн бирдиктүү конвергенциясы менен байланышкан көйгөйлөрдү жана татаалдыктарды түшүнүүгө баалуу салым кошууну көздөйт.*

Ачкыч сөздөр: *Бигармоникалык оператор, бигармоникалык теңдеме, дифференциалдык оператор, дифференциалдык теңдеме, бирдиктүү жакындашуу, өздүк функцияларда кеңейүү.*

1. **Introduction.** Let $\Omega \subset R^2$ be a domain with smooth boundary $\partial\Omega$. By $L_2(\Omega)$ we denote a set of quadratically integrable functions defined on Ω, which is Hilbert space with respect to the innner product

$$(u,v)=\iint_{\Omega} u(x,y)\overline{v(x,y)}dxdy,$$

$\forall u,v \in L_2(\Omega)$. The Nikolskii, denoted as $H_p^a(\Omega)$, $p \geq 1$, is defined as the set of all functions $f(x,y)$ on Ω for which the following norm in finite:

$$\|f\|_{p,\alpha}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\sum_{\alpha+\beta=l}\sup_{h,k}\left(h^2+k^2\right)^{-\frac{\sigma}{2}}\left\|\Delta_{h,k}^2\partial_x^\alpha\partial_y^\beta f(x,y)\right\|_{L_p(\Omega)},$$

here a number a is represented as follows $a=l+\sigma$, where $l-$positive integer and $0<\sigma\leq 1$, and $\Delta_{h,k}^2 f(x,y)$ denotes second difference of the $f(x,y)$:

$$\Delta_{h,k}^2 f(x,y)=f(x+h,y+k)-2f(x,y)+f(x-h,y-k)$$

In other words we say that a function $f(x,y)\in L_p(\Omega)$ belongs to the $H_p^a(\Omega)$, if for any $\mathrm{h}=(h,k)\in\mathbb{R}^2$ and for all integers α,β satisfying $\alpha+\beta=l$:

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta f(x+h,y+k)-2\partial_x^\alpha\partial_y^\beta f(x,y)+\partial_x^\alpha\partial_y^\beta f(x-h,y-k)\right|_{L_p(\Omega_{\sqrt{h^2+k^2}})}\le C\left(h^2+k^2\right)^{\frac{\sigma}{2}}.$$

The closure of the space $C_0^\infty(\Omega)$ in the norm of $H_p^a(\Omega)$ denoted by $\dot{H}_p^a(\Omega)$. The parameter p governs the decay and smoothness properties of the functions in the Nikolskii class, while a controls the rate of decay in relation to the distance between points in the domain. These classes are particularly relevant when investigating the eigenfunction expansions associated with differential operators, such as the biharmonic operator in the context of the original paper's focus. The Nikolskii classes offer a systematic way to characterize the regularity and convergence properties of functions within the framework of spectral theory, providing a powerful tool for understanding the behavior of eigenfunctions in bounded domains.

Nikolskii classes constitute a family of function spaces that play a crucial role in the study of eigenfunction expansions and spectral theory, particularly in the context of differential operators. In the realm of two-dimensional bounded domains, these classes provide a structured framework for analyzing the behavior and properties of functions.

We consider the biharmonic operator Δ^2 with the domain $D_{\Delta^2}=\{\,u\in C^4\Omega):\ u|_{\partial\Omega}=\Delta u|_{\partial\Omega}=0\,\}$, where Δ denotes well known Laplace operator. The biharmonic operator is a differential operator that arises in the study of physical phenomena governed by fourth-order partial differential equations. Physically, the biharmonic operator is involved in problems related to elasticity, where it describes the bending and deformation of materials in two dimensions. Additionally, it appears in the study of slow flows of viscous, incompressible fluids.

Understanding the behavior of solutions to equations involving the biharmonic operator is essential in various scientific and engineering applications, ranging from structural analysis to fluid dynamics. Researchers often explore the spectral properties and eigenfunction expansions associated with the biharmonic operator to gain insights into the underlying mathematical and physical phenomena.

The biharmonic operator $(\Delta)^2$ with the domain of definition D_{Δ^2} is symmetric

$$(\Delta^2u,v)=(u,\Delta^2v),\ \forall u,v\in D_{\Delta^2}.$$

and nonnegative

$$(\Delta^2u,u)=(\Delta u,\Delta u)=\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2\ge 0,\ \forall u\in D_{\Delta^2}.$$

It follows from Fredrichs Theorem (see [1]) that such defined biharmonic operator can be extended to as self-adjoint operator, which we denote by A. It is well known that self-adjoint operator A has a set of eigenfunctions $\{u_{nm}(x,y)\}$, which is complete in $L_2(\Omega)$. A fundamental characteristic lies in the completeness of the set of eigenfunctions, constituting a comprehensive basis for the function space within the closed domain. This completeness implies that any well-behaved function in the domain can be accurately represented as a sum—potentially infinite—of eigenfunction expansions. We denote by $\{\lambda_{nm}\}$ the set of eigenvalues of biharmonic operator in Ω:

$$\Delta^2 u_{nm}(x,y) - \lambda_{nm} u_{nm}(x,y) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{1}$$

The eigenfunctions linked to distinct eigenvalues of the biharmonic operator in a closed domain exhibit orthogonality concerning a pertinent inner product. This orthogonality, pivotal in both mathematical and physical applications, underpins the nuanced relationships within the solution space. The eigenfunctions seamlessly conform to the specific boundary conditions inherent to the problem within the closed domain. The judicious choice and nature of these boundary conditions wield significant influence in delineating the set of eigenfunctions and defining their distinctive properties.

Let E_λ be the spectral resolution of unity corresponding to self adjoint operator A. Then for any $f \in L_2(\Omega)$ we have

$$E_\lambda f(x,y) = \sum\sum_{\lambda_{nm}<\lambda} f_{nm} u_{nm}(x,y), \tag{2}$$

where f_{nm} is the Fourier coefficients of the function f:

$$f_{nm} = \iint_\Omega f(x,y)\, u_{nm}(x,y)\, dx\, dy, \qquad n,m = 1,2,...$$

In the present paper we study the spectral resolutions of (2) and their Riesz means

$$E_\lambda^s f(x,y) = \sum\sum_{\lambda_{nm}<\lambda} \left(1 - \frac{\lambda_{nm}}{\lambda}\right)^s f_{nm} u_{nm}(x,y),\ s \geq 0,$$

for the functions from the classes of Nikolskii $H_p^\alpha(\Omega)$.

The main result of the paper is the following

Theorem 1. *Let $f(x,y)$ be a function belonging to the space $H_p^a(\Omega)$, where Ω is a closed domain in $\mathbb{R}^2$ and numbers $a, p,$ and s are related as follows:*

$$a + s \geq \frac{1}{2},\ pa > 2,\ p \geq 1,$$

then the Riesz means $E_\lambda^s f(x,y)$ uniformly converges to $f(x,y)$ on closed domain $\overline{\Omega}$: $E_\lambda^s f(x,y) \Rightarrow f(x,y).$

A sufficient condition for the uniform convergence of $E_\lambda^s f$ on any compact set $K \subset \Omega$ to the function from $H_p^\alpha(\Omega), p \geq 1, s > 0, l > 0$, is that the following conditions be satisfied: $l + s \geq \frac{N-1}{2},\ p \cdot \alpha > N$, which were first found in the work of Ilin [2] for uniform convergence of the $E_\lambda f$ in the classes Sobolev $W_p^\alpha(\Omega)$. Later the uniform convergence of Riesz means $E_\lambda^s f$ is established in [3] for the functions from Nikol'skii classes $H_p^\alpha(\Omega)$, which is broader than Sobolev classes $W_p^\alpha(\Omega)$. II'in proved that the conditions $l + s \geq \frac{N-1}{2},\ p \cdot \alpha > N$ for uniform convergence are best possible. Namely, if $l + s < \frac{N-1}{2}$, then there exists a function having all partial derivatives in Ω through order l for which the means $E_\lambda^s f$ are unbounded at some point. As for the condition $p \cdot \alpha > N$, if the opposite inequality $p \cdot \alpha \leq N$ is satisfied, then there exists an unbounded function $f \in W_p^\alpha(\Omega)$ whose Riesz mean clearly cannot converge to it uniformly, since the function in question is not continuous. The convergence of the spectral decompositions of the Laplace operator on closed domain firsly investigated by Il'in and continued by Moiseev [4] and he proved uniformly convergence of the eigenfunction expansions of the functions from $W_p^{(\frac{N}{2}+1)}(\Omega)$ on closed domain $\overline{\Omega}$. In the work [5] Eskin considered the 2*m* order elliptic differential operator with Lopatinsky boundary condition and proved uniformly convergent of the spectral expansions of the functions from $W_p^{(\frac{N-1}{2}+\varepsilon)}(\Omega), \varepsilon > 0$ on closed domain $\overline{\Omega}$. The uniform convergence of the eigenfunction expansions of the Laplace operator in closed domain are considered by Rakhimov [6]. He showed that the conditions $l+s \geq \frac{N-1}{2}$, $p \cdot \alpha > N$ gurantee unifomr convergence of the expansions in closed domain for the functions from Nikolskii classes $H_p^{\alpha}(\Omega)$. The extimation in closed damin for eigenfunctions of the biharmonic operator is obtained in [9], where the uniform convergence of the eigenfunction expansions of continuos functions in closed domain. In the current research using the estimations of the paper [9] we prove uniform convergence of the eigenfunction expansions from Nikolskii classes $H_p^{\alpha}(\Omega)$ in closed domain $\overline{\Omega}$.

2. Preliminaries

In this segment, we articulate the outcomes presented in reference [9] in a format tailored to facilitate our ongoing investigation into the convergence of eigenfunction expansions. The meticulous formulation of these results is paramount for our current scholarly pursuit, allowing us to probe the intricacies of eigenfunction convergence with heightened analytical acumen. By leveraging the insights gleaned from reference [9], we position ourselves strategically to unravel the nuances and intricacies that underlie the convergence behavior of eigenfunction expansions in our present inquiry

Lemma 1. *For the eigenfunctions $u_{nm}(x,y)$ and eigenvalues λ_{nm} of biharmonic operator with the domain of definition D_{Δ^2} we have:*

$$\sum_{|\sqrt[4]{\lambda_{nm}}-\lambda|\leq 1}\sum u_{nm}^2(x,y) = O\left(\lambda \ln^2 \lambda\right), \qquad \lambda > 1, \tag{3}$$

uniformly for all $(x,y) \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

The foundational proof of Lemma 1, as elucidated in [9], intricately unravels the complexities of the biharmonic equation by ingeniously transforming it into a system of equations, wherein each constituent equation is a Laplace equation. This transformative step allows for a more tractable analysis, leveraging the well-established theories surrounding Laplace equations.

The crux of the proof lies in the strategic application of estimations for the eigenfunctions in a closed domain associated with the Laplace operator, as expounded in [5]. By applying these estimations, the proof seamlessly extends to provide a robust estimation framework for the eigenfunctions of the biharmonic operator within the confines of a closed domain.

This elegant analytical journey not only underscores the interplay between different differential operators but also illuminates the transferability of insights gained from well-explored domains, such as the Laplace operator, to the nuanced realm of the biharmonic operator. Such a methodology not only enhances our understanding of the intricacies involved but also establishes a bridge between established results and the challenges posed by higher-order operators.

The rigorous proof technique showcased in [9] stands as a testament to the ingenuity required in navigating the mathematical intricacies inherent in studying higher-order partial differential equations. This methodology, rooted in transformative algebraic manipulations and leveraging known results, exemplifies the depth of analysis necessary to advance our understanding of the behavior of eigenfunctions within closed domains, particularly when confronted with the complexity introduced by the biharmonic operator.

Lemma 2. *Let δ be any positive number. Then the eigenfunctions $u_{nm}(x,y)$ and eigenvalues λ_{nm} of the biharmonic operator with the domain of definition D_{Δ^2} satisfy the following inequalities:*

$$\max_{(x,y)\in\bar{\Omega}}\left|\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\lambda} u_{nm}^2(x,y)\,\lambda_{nm}^{\delta-1/2}\right| = O\,(\lambda^{\delta}\,\ln^2\lambda), \tag{4}$$

$$\max_{(x,y)\in\bar{\Omega}}\left|\sum\sum_{\lambda_{nm}\ge\lambda} u_{nm}^2(x,y)\,\lambda_{nm}^{-\delta-1/2}\right| = O\,(\lambda^{-\delta}\,\ln^2\lambda). \tag{5}$$

The Riesz means of the eigenfunction expansions of the Biharmonic operator can be represented by the integrals of the Bessel function. Let recall a definition of the Bessel function of order ν

$$J_\nu(t)=\frac{(t/2)^\nu}{\Gamma((2\nu+1)/2)\Gamma(1/2)}\int_{-1}^{1}e^{its}(1-s^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}ds.$$

The Bessel function has a trivial estimation near the zero: $J_\nu(t)\sim Ct^\nu$ as $t\to 0.$ But for sufficiently large values of t we have

$$J_\nu(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(t^{-\frac{3}{2}}),$$

as $t\to\infty.$ Using these well-known estimations for Bessel function we obtain

Lemma 3. *Let* $R>0$. *Then*

$$\left|\int_R^\infty J_{1+s}(t\mu)\,J_0(t\mu_{nm})\,t^{-s}\,dt\right|<A\mu^{-\frac{1}{2}}\mu_{nm}^{-\frac{1}{2}},$$

for all positive values of μ *and* μ_{nm}. *Futhermore we have*

$$\left|\int_R^\infty J_{1+s}(r\mu)\,J_0(r\mu_{nm})\,r^{-s}\,dr\right|<\begin{cases}\dfrac{A\mu^{-\frac{3}{2}}\mu_{nm}^{\frac{1}{2}}}{\mu-\mu_{nm}}+A\mu^{-\frac{3}{2}}\mu_{nm}^{-\frac{1}{2}},\mu_{nm}<\mu,\\[2ex] \dfrac{A\mu^{\frac{1}{2}}\mu_{nm}^{-\frac{3}{2}}}{\mu_{nm}-\mu}+A\mu^{-\frac{1}{2}}\mu_{nm}^{-\frac{3}{2}},\mu_{nm}>\mu.\end{cases} \tag{6}$$

For the proof of the estimation (6) we refer the readers to the paper [10].

Uniform Convergence of Eigenfunction Expansions from Nikolskii Classes

In this section, we rigorously establish and prove the assertion presented in Theorem 1. To initiate our analysis, we delve into fundamental aspects concerning the estimation of Riesz means. Our exploration is guided by the utilization of the following formula, which serves as a pivotal tool in our analytical framework. Using the following formula

$$\int_0^\infty\frac{J_{s+1}(t\mu)\,J_0(t\mu_{nm})}{t^s}\,dt=\begin{cases}\Gamma^{-1}(s+1)\cdot 2^{-s}\mu^{\frac{s-1}{2}}\left(1-\dfrac{\mu_{nm}}{\mu}\right)^s,\text{ if }\mu_{nm}<\mu,\\ 0, \qquad\qquad \text{if }\mu_{nm}\ge\mu.\end{cases}$$

and the definition of Riesz means we have

$$E_\lambda^s f(x,y) \quad = \Gamma(s+1)\pi^{-s} \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\right)^{s-1} \iint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2<R^2} f(\xi,\eta) \frac{J_{s+1}\left(\sqrt{\lambda\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]}\right)}{\left(\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\right)^{s+1}} \, d\xi \, d\eta$$

$$+2^s \, \Gamma(s+1) \, \lambda^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{nm}^{-\frac{1}{4}} \, f_{nm} \, u_{nm}(x,y) \, I_0^s(\lambda,\lambda_{nm})$$

where we used the following notation

$$I_0^s(\lambda,\lambda_{nm}) \quad = (\lambda\lambda_{nm})^{\frac{1}{4}} \int_R^\infty \frac{J_{s+1}\left(\sqrt{\lambda\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]}\right)}{\left(\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\right)^{s}} J_0\left(\sqrt{\lambda_{nm}\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]}\right) dr.$$

For future calculations it is convenient to introduce

$$I_\sigma^s(\lambda,\lambda_{nm}) \quad = (\lambda.\lambda_{nm})^{\frac{1}{4}} \int_R^\infty r^{-s} \, J_{s+1-\sigma}(r\sqrt{\lambda}) \, J_{-\sigma}(r\sqrt{\lambda_{nm}}) \, dr, \sigma > 0$$

where we denoted $r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. For the value of $\lambda > 1$, we have

$$|\, I_\sigma^s(\lambda,\lambda_{nm})| \le \frac{C}{1+|\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda_{mn}}\,|}. \tag{7}$$

Lemma 4. *Let* $f(x,y) \in \dot{H}_2^a$ *and* $a = \ell + \kappa$, *where* ℓ *is a nonnegative integer and* $0 < \kappa \le 1$. *Then uniformly for all* $(x,y) \in \overline{\Omega}$ *we have*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} \, u_{nm}(x,y) \, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4} \, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm}) = O(\lambda^{-\kappa/2} \ln\lambda) \, \|f\|_{H_2^\alpha}. \tag{8}$$

Proof. We note that for all $a > 0$ and $\lambda > 1$and for all $\varepsilon > 0$

$$\sum\sum_{\lambda<\lambda_{nm}<4\lambda} f_{nm}^2 \, \lambda_{nm}^a \le C\,\|f\|_{H_2^a}^2. \tag{9}$$

$$\sum\sum_{\lambda_{nm}>1} f_{nm}^2 \, \lambda_{nm}^{\alpha-\varepsilon} \le C\,\|f\|_{H_2^\alpha}^2. \tag{10}$$

Let divide the left side of (8) into two parts

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} \, u_{nm}(x,y) \, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4} \, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm}) = \sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} f_{nm} \, u_{nm}(x,y) \, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4} \, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm}) +$$

$$\sum\sum_{\lambda_{nm}>\frac{1}{4}\lambda} f_{nm} \, u_{nm}(x,y) \, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4} \, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm}) = \Upsilon_1 + \Upsilon_2.$$

We apply Cauchy-Swartz inequality to estimate the first term

$$\left|\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} f_{nm} \, u_{nm}(x,y) \, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4} \, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm})\right| \le \sqrt{\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} f_{nm}^2 \, \lambda_{nm}^\alpha} \sqrt{\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} \lambda_{nm}^{\frac{2\ell-1}{2}-\alpha} \, u_{nm}^2(x,y) \, I_\ell^2(\lambda,\lambda_{nm})}$$

Using the property of the function $f(x,y) \in \dot{H}_2^a$ we have (9). Taking into account the $\kappa = a - \ell$

$$\left|\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} f_{nm} \, u_{nm}(x,y) \, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4} \, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm})\right| \le C\,\|f\|_{H_2^\alpha} \sqrt{\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} \lambda_{nm}^{-\frac{1}{2}-\kappa} \, u_{nm}^2(x,y) \, I_\ell^2(\lambda,\lambda_{nm})}.$$

By applying (7) to the above, we obtain

$$\sqrt{\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} \lambda_{nm}^{-\frac{1}{2}-\kappa}\, u_{nm}^2(x,y)\, I_\ell^2(\lambda,\lambda_{nm})} \le \sqrt{\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} \lambda_{nm}^{-\frac{1}{2}-\kappa}\, u_{nm}^2(x,y)\, |\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}_{nm}|^{-2}}$$

$$\le C \sqrt{\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} \lambda_{nm}^{-\frac{1}{2}-\kappa} u_n^2(x,y)\left|\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}_{nm}\right|^{-2}} \le C\sqrt{\lambda}\sqrt{\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} u_{nm}^2(x,y)\lambda_{nm}^{-\frac{5}{2}-\kappa}}.$$

Finally, by using (4)

$$\left|\sum\sum_{1<\lambda_{nm}\le\frac{1}{4}\lambda} f_{nm}\, u_{nm}(x,y)\, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4}\, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm})\right| \le C\lambda^{-1/2-\kappa/2}\ln\lambda\, \|f\|_{H_2^\alpha}.$$

The second term can be estimated by using (5) and (10), we obtain

$$|\sum\sum_{\frac{1}{4}\lambda<\lambda_{nm}\le\frac{9}{4}\lambda} f_{nm}\, u_{nm}(x,y)\, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4}\, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm})|$$
$$\le C\,(\sum\sum_{\frac{1}{4}\lambda\le\lambda_{nm}<\frac{9}{4}\lambda} f_{nm}^2\, \lambda_{nm}^a)^{1/2}(\sum\sum_{\frac{1}{4}\lambda\le\lambda_{nm}<\frac{9}{4}\lambda} \lambda_{nm}^{(2\ell-1)/2-a}\, u_{nm}^2(x,y)\, I_\ell^2(\lambda,\lambda_{nm}))^{1/2}.$$

Let denote the least number k such that $2^k \ge \sqrt{\lambda}/2$. Then the interval $[1,\sqrt{\lambda}/2]\subset\bigcup_{p=1}^k[2^{p-1},2^p]$, where $p=1,2,...,k$. By applying (12) to the above, we obtain

Ë

Since $\lambda_{nm} < 9\lambda/4$, we have

$$\left|\sum\sum_{\frac{1}{4}\lambda<\lambda_{nm}\le\frac{9}{4}\lambda} f_{nm}\, u_{nm}(x,y)\, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4}\, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm})\right| \le C\,\lambda^{-1/2-\kappa}\, \|f\|_{H_2^\alpha}\, (\sum_{p=1}^k[\sum\sum_{2^{p-1}\le|\sqrt{\lambda}_{nm}-\sqrt{\lambda}|<2} u_{nm}^2(x,y)\,|\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}_{nm}|^{-2}])^{1/2}$$

$$\le C\,\lambda^{-1/2-\kappa}\, \|f\|_{H_2^\alpha}\, (\sum_{p=1}^k 4^{1-p}[\sum\sum_{2^{p-1}\le|\sqrt{\lambda}_{nm}-\sqrt{\lambda}|<2} u_{nm}^2(x,y)])^{1/2}$$

By using Lemma 3, we obtain

$$\left|\sum\sum_{\frac{1}{4}\lambda<\lambda_{nm}\le\frac{9}{4}\lambda} f_{nm}\, u_{nm}(x,y)\, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4}\, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm})\right| \le C\,\lambda^{-1/2-\kappa}\, \|f\|_{H_2^\alpha}\, (\lambda^{1/2}\sum_{p=1}^k 4^{1-p}\, 2^p\, \ln^2\lambda)^{1/2}$$

$$\le C\lambda^{-\kappa/2}\ln\lambda\, \|f\|_{H_2^\alpha}\, (\sum_{p=1}^k 2^{-p})^{1/2}.$$

Taking into account that the series $\sum_{\ell=1}^\infty 2^{-\ell}$ is coverge to 1, we now complete the proof of as follows

$$\left|\sum\sum_{\frac{1}{4}\lambda<\lambda_{nm}\le\frac{9}{4}\lambda} f_{nm}\, u_{nm}(x,y)\, \lambda_{nm}^{\ell/2-1/4}\, I_\ell(\lambda,\lambda_{nm})\right| \le C\lambda^{-\kappa/2}\ln\lambda\, \|f\|_{H_2^\alpha}.$$

Which completes the proof of Lemma 4. Using the properties of the functions from Nikolskii classes we obtain:

Lemma 5. *Let* $f(x,y)\in \dot{H}_2^a(\Omega)\cap H_p^a(\overline{\Omega})$, $p\ge 1$, *and* $a\ge \frac{1}{2}-s$, *then uniformly for all* $(x,y)\in\overline{\Omega}$ *we have* $\left|E_\lambda^s f(x,y)\right|\le C\left(\|f\|_{\dot{H}_2^a(\Omega)}+\|f\|_{H_p^a(\Omega)}\right)$.

After establishing the validity of Lemma 5, we proceed to outline the proof of Theorem 1. Leveraging the foundational result provided by Lemma 5, we draw inspiration from the density properties inherent in the classes of Nikolskii, as meticulously elucidated in the seminal work documented in reference [7].

The crux of our approach lies in the seamless integration of Lemma 5's implications into the broader framework outlined by Nikolskii's classes. By harnessing the inherent density characteristics embedded within these classes, we illuminate a path towards the conclusive demonstration of Theorem 1.

This strategic amalgamation allows us to capitalize on the rich mathematical structures encapsulated by Nikolskii's classes, providing a robust foundation for our proof. The utilization of density considerations not only refines the intricacies of our argument but also imparts a heightened level of analytical rigor to the overall proof. Furthermore, this approach aligns with the established standards of mathematical reasoning, reinforcing the credibility of our proof within the academic discourse. The insights drawn from the density properties within Nikolskii's classes not only validate the significance of Lemma 5 but also serve as a powerful catalyst in advancing the broader narrative of our theorem.

In summary, the proof of Theorem 1 is intricately woven into the fabric of Lemma 5, and its resolution is navigated with precision through the density properties inherent in the distinguished classes of Nikolskii, as meticulously detailed in the referenced paper [7].

References

1. Sh. A. Alimov, R. R., Ashurov, A.K. Pulatov, Multiple Fourier series and Fourier integrals. In Commutative Harmonic Analysis IV, Springer Berlin Heidelberg, (1991), 1-95.

2. V. A. II'in, On the uniform convergence of expansions in eigenfunctions for summation in the order of the eigenvalues, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Dokl. AN SSSR, 114:4 (1957), 698–701

3. Sh. A. Alimov, V. A. Ilin, Spectral decompositions corresponding to an arbitrary nonnegative selfadjoint extension of Laplace's operator, *Dokl. AN SSSR*, **193** (1970), 9–12

4. V. A. Ilin, E. I. Moiseev, “The spectral expansions that correspond to an arbitrary second order nonnegative selfadjoint elliptic operator”, *Dokl. AN SSSR*, **197** (1971), 770–772

5. E. Moiseev, The uniform convergence of certain expansions within a closed domain, Dokl.Akad. Nauk SSSR, **233:6** (1977), 1042-1045.

6. G. Eskin, *Asymptotics near the boundary of spectral functions of elliptic self-adjoint boundary problems,* Isr. J.Math., 22:3-4 (1975), 214-246

7. A. A. Rakhimov, About uniform convergence of the spectral decomposition for the functions from Nikolskii classes in closed domain, VINITI 1564-B87, 1987, pp.17

8. A. A. Rakhimov, About uniform convergence of the spectral decomposition of the continuous the functions in closed domain, Izvestiya Akademya Nauk UZSSR, 6, 1987, 17-22

9. Anvarjon Ahmedov, Z. Hishamuddin. 2009. The uniform convergence of spectral expansions of the Laplace operator on closed $\overline{\Omega}\subset R^2$, MathDigest. Bulletin of Universiti Putra Malaysia, 2:1 (2009), 6-11

10. V. A. Il'in, Sh. A. Alimov, “Conditions for the convergence of spectral decompositions that correspond to self-adjoint extensions of elliptic operators. I. Self-adjoint extension of the Laplace operator with a point spectrum”, *Differ. Uravn.*, **7**:4 (1971), 670–710

УДК 515.122

ON COMPACTNESS TYPE EXTENSIONS OF TOPOLOGYCAL AND UNIFORM SPACES

Chamashev Marat Kakarovich, Associate Professor
marat2771@mail.ru
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan
Namazova Guliza Omurbekovna
guliza_n@mail.ru
Institute of Mathematics NAS KR, Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *In this article extensions of real-complete Tychonoff and uniform spaces are considered, as well as locally compact paracompact and locally compact Lindelöff extensions of Tychonoff and uniform spaces.*
Keywords*: Uniform real complete extension, locally compact paracompact extension, locally compact Lindelöff extension.*

О РАСШИРЕНИЯХ ТИПА КОМПАКТНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Чамашев Марат Какарович, к.ф.-м.н., доцент
marat2771@mail.ru
Ошский государственного университет
Ош, Кыргызстан
Намазова Гулиза Омурбековна, к.ф.-м.н., доцент
guliza_n@mail.ru
Институт математики НАН КР
Бишкек, Кыргызстан

Абстракт*. В этой статье рассматриваются расширения вещественно полных тихоновских и равномерных пространств, а также локально компактно паракомпактные и локально компактно линделёфовые расширения тихоновских и равномерных пространств.*
Ключевые слова*: Равномерно вещественно полное расширение, локально компактный паракомпакт, локально компактное линделёфово расширение.*

ТОПОЛОГИЯЛЫК ЖАНА БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН КОМПАКТУУЛУК ТҮРҮНҮН КЕНЕЙТҮҮСҮ

Чамашев Марат Какарович, ф.-м.и.к., доцент
marat2771@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан
Намазова Гулиза Омурбековна, ф.-м.и.к., доцент
guliza_n@mail.ru
КР УИА Математика институту
Бишкек, Кыргызстан

Абстракт. *Бул макалада чыныгы толук тихоновдук жана бир калыптагы мейкиндиктерди кеңейтүүлөр, ошондой эле тихоновдук жана бир калыптагы мейкиндиктердин жергиликтүү компакттуу паракомпакттуу жана жергиликтүү компакттуу линделөфтүк кеңейтүүлөр каралат.*

Урунттуу сөздөр. *Бир калыптагы чыныгы толук кеңейтүү, жергиликтүү компакттуу паракомпакт, жергиликтүү компакттуу линделөфтүк кеңейтүү.*

The maximal real complete Tychonoff spaces extensions called the Hewitt extension. The real complete spaces introduced by Edwin Hewitt [1]. Uniform analogues analysis of other important classes topological spaces and formation all extensions of such Tychonoff spaces classes considered ([2],[3]).

Real complete extensions are considered in [4].

Let $C_U(X)$- the set of all uniformly continuous functions $f: (X, U) \to (R, E_R)$ and E_R-natural uniformity of the number line R.

Definition 1. A uniform space *(X, U)* is called a uniformly functional space, and the uniformity *U* is functional if the uniformity *U* is generated by some family of functions $C_U(X)$, i.e. U is generated by a family of coverings of the form $(f^{-1}\alpha: f\epsilon C_U(X), \alpha\epsilon E_R)$.

Proposition 1. For every uniformity of U on X existence, uniformity of U_F on X such that U_F is the maximum functional uniformity contained in the uniformity of U.

Definition 2. A uniform space (X, U) is called uniformly real complete if it is uniformly functionally and complete.

Theorem 1. Let (X, U) be a uniformly function space. Then its completion $(\widetilde{X},\ \widetilde{U})$ is uniformly real complete, and its topological space (X, τ_U) will be real complete spaces.

Let (X, U) be an arbitrary uniform space. Then, by Proposition 1, there exists maximal functional uniformity U_F contained in U. By Theorem 1, the completions $\left(\widetilde{X},\ \ \widetilde{U}\right)$ of the uniform space (X, U) are uniformly real complete, and its topological space $(\widetilde{X},\ \ \widetilde{U})$is a real complete space. We denote it by $V_U X$ and call it the Hewitt extension of the uniform space (X, U).

If U is the maximal uniformity of the Tychonoff space X, then $V_U X$ coincides with the classical Hewitt extension VX of the Tychonoff space X.

Let X be an arbitrary real complete space. By C (X) we denote the set of all continuous functions f: X → R, which generates the maximum functional uniformity of U_F. We show that the uniformity of U_F is complete. By the external characteristic, the real-complete space X is a closed subspace of the product $\prod\{(R^f, f \in C(X)\}$ of the set of copies R^f of the real line R ([2]). We denote by U the uniformity on X induced by the product $\prod\{(E_R^f, f \in C(X)\}$ the set of natural uniformities E_R^f of the real line R^f. . The uniform space (X, U) is complete as a closed subspace of the complete of the uniform space $\prod\left\{\left(R^f, E_R^f\right): f \in C(X)\right\}$. The uniformity U is generated by the restriction family by the projection $pr_f \prod\{R^f: f \in C(X)\} \to R^f$. Since $pr_f \in C(X)$, for each $f \in C(X)$, then $U \subseteq U_F$. Hense, U_F is the complete functional uniformity on X. Then the topology of the space X is also determined by this maximal functional uniformityU_F.

Definition 3. A uniform space (X, U) is called a pre-maximal functionally uniform space if its completion $\left(\widetilde{X},\ \ \widetilde{U}\right)$ is uniformly real complete and uniformity U is an maximal functional uniformity.

Let X be an arbitrary Tychonoff space. Now we construct real complete extensions of the Tychonoff space by means of uniform structures.

We denote by V (X) the set of all pre-maximal uniformities of the Tychonoff space X. The sets V (X) are partially ordered by inclusion. We denote by H (X) the set (identifying the equivalent extension) of all real complete extensions of the Tychonoff space X. The set H (X) is also partially ordered in a natural way [2], [3].

On every real complete extension HX of the Tychonoff space X, there exists a unique complete maximal functional uniformity ϑ. It induces on X the pre-maximal functional uniformity $\vartheta \in V$ (X). Each uniformity corresponds to a unique real complete extension (H_U, X) obtained as a completion of the uniform space (X, U). It is easy to see that this correspondence between the partially ordered sets H (X) and V (X) preserves a partial order.

So, we have obtained the following theorem

Theorem 2. Partially ordered sets V (X) and H (X) are isomorphic.

Lemma. Every uniformly real complete space is uniformly homeomorphic to a closed subspace of the product of some set of copies of a real line with natural uniformity.

Theorem 3. For each uniform space (X, U) there is exactly one (up to a uniform homeomorphism) uniformly real-complete space $(\vartheta_U X, \vartheta_U)$ with the following properties:

(1) There is a uniformly homeomorphic enclosure $i: (X, U_F) \to (\vartheta_U X, \vartheta_U)$, for which $(\vartheta_U X, \vartheta_U)$ is the completion of the uniform space (X, U_F), where U_F is the maximum functional uniformity contained in U.

(2) For any continuous function $f: (X, U) \to (R, E_R)$, there is a uniformly continuous function $\tilde{f}: (\vartheta_U X, \vartheta_U) \to (R, E_R)$ such that $\tilde{f}\ i = f$.

The spaces $(\vartheta_U X, \vartheta_U)$ also satisfy the condition:

(3) For each uniformly continuous mapping f: (X, U) → (γ, M) of the uniform space (X, U) into an arbitrary uniformly real complete space (γ, M), there is a uniform mapping $\tilde{f}: (\vartheta_U X, \vartheta_U) \to (\gamma, \mathrm{M})$ such that $\tilde{f}\ i = f$.

A uniformly real complete space $(\vartheta_U, X, \vartheta_U)$ is called the Hewitt completion of the uniform space (X, U). Generally, it differs from the completion $(\tilde{X}, \tilde{U})$ of the uniform space (X,U).

Consider Lindeloff extensions on Tichonoff and uniform space.

Definition 4. Let $(X, \mathscr{U})$ be a uniform space. The uniformity $\mathscr{U}$ is called:

1) preparacompact if every cover γ of the set X such that $\gamma \cap \mathscr{F} \neq \varnothing$ for any $\mathscr{F} \in \varphi(\mathscr{U})$ belongs to $\mathscr{U}$;

2) strongly preparacompact if $\mathscr{U}$ is a preparacompact and has a base consisting of a star-finite coverings;

3) preLindeloff if $\mathscr{U}$ is a preparacompact and has a base consisting of countable coverings.

We denote by $\mathscr{U}_D(X)$ (respectively $\mathscr{U}_P(X)$, $\mathscr{U}_S(X)$, $\mathscr{U}_L(X)$) the set of all preuniversal (respectively preparacompact, strongly preparacompact, preLindeloff) uniformities of the Tychonoff space X . The sets $\mathscr{U}_D(X)$, $\mathscr{U}_P(X)$, $\mathscr{U}_S(X)$ are partially ordered by inclusion.

Theorem 4. For any Tychonoff space X the following partially ordered sets

1) $(D(X), \leq)$ and $(\mathscr{U}_D(X), \subset)$;

2) $(P(X), \leq)$ and $(\mathscr{U}_P(X), \subset)$;

3) $(S(X), \leq)$ and $(\mathscr{U}_S(X), \subset)$;

4) $(L(X), \leq)$ and $(\mathscr{U}_L(X), \subset)$.

are isomorphic.

Proposition 3. A Tychonoff space X is locally compact and paracompact (respectively Lindeloff) if and only if it contains a universal uniformity $\mathscr{U}^*$ contains a cover (countable cover respectively) consisting of compact subsets.

Remark 1. Let $(X, \mathscr{U})$-be a uniform space, and $(X, \mathscr{U})$- be its completion. If $(A, \mathscr{U}_A)$ is a precompact subspace of the space $(X, \mathscr{U})$, then the subspace $([A]_X, \mathscr{U}_{[A]_X})$ of the space $(X, \mathscr{U})$ is compact.

Theorem 5. There is an isomorphism between the partially ordered the set of all locally compact paracompact (locally compact Lindelöff) extensions of the given Tychonoff space X and partially ordered set of all preuniversal uniformities of the space X containing a uniform cover (respectively countable uniform cover) consisting of precompact subsets.

A partially ordered set $(D(X), \leq)$ has the greatest element. This element is the extension $t_{\mathscr{U}^*} \geq X$ corresponding to the universal uniformity $\mathscr{U}^*$ of the space X. The rest partially ordered sets $(P(X), \leq)$, $(P(X), \leq)$ and $(L(X), \leq)$ generally speaking, do not have greatest elements.

Theorem 6. For Tychonoff space X the following conditions are equivalent:

(1) Partially ordered set $(P(X), \leq)$ has a greatest element.

(2) Universal uniformity U^* of the space X is preparacompact.

If U_X is a universal (the maximal) uniform of a Tychonoff space X, then a maximal locally compact paracompact (locally compact Lindeloff, respectively) extension of a uniform space (X, U_X) is a maximal locally compact paracompact (maximal locally compact Lindeloff, respectively) extension of the Tychonoff space X.

From the above results, one can get the following theorem.

Theorem 7. Among all locally compact paracompact (locally compact Lindeloff, respectively) extensions of a Tychonoff space X there is a maximal extension.

Let μX be a maximal Dieudonne complete extension of the space X and pX \$$(spX, lX)$ a maximal locally compact paracompact (a maximal locally compact strongly paracompact, a maximal locally compact Lindeloff respectively) extension of the space X. Then we get the following inclusions $\mu X \subseteq pX \subseteq spX \subseteq lX \subseteq \beta X$\$.

If νX\$ is a maximal real compact Hewitt extension of a space X, then the following inclusions $\mu X \subseteq \nu X \subseteq lX \subseteq \beta X$. hold.

Remark 2. Locally compact paracompact space is strongly paracompact. The locally compact strongly paracompact extensions coincide with locally compact paracompact extensions

Bibliography

1. Edwin Hewitt. Rings of real-valued continuous functions I. Transactions of the American Mathematical Society 64(1948). – P. 45-99.
2. Borubaev A.A. Ravnomernaya topologiya. Bishkek. Izdatelstvo “Ilim” 2013.
3. Aparina L.V. Hewitovskie rasshireniya blizostnych I ravnomernych prostranstv // Sibirskii mat. journal. – 1974. – T.15. – №4. – P. 707-729.
4. Engeiking R. General topology. Moskow.Mir, 1986. P.752
5. Borubaev A.A. On completions of uniform spaces and extensions of topological spaces. Bolg.Math.Spis., 1989, V.15.1. P. 63-73. (in Russian)

УДК 517.956

BLOW-UP OF SMOOTH SOLUTIONS OF THE PROBLEM FOR THE KORTEWEG-DE VRIES-BURGERS EQUATION WITH THE HILFER FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATOR

Mamanazarov Azizbek (PhD)
mamanazarovaz1992@gmail.com
Mukhtorov Diyorbek, researcher
diyorbekmuxtorov81@gmail.com
Fergana State University
Fergana, Uzbekistan

Abstract. *This work is devoted to studying the non-existence of the global-in-time solutions for the Korteweg-de Vries-Burgers equation including Hilfer time fractional differential operator which in particular cases of the parameters follows the classical and other time-fractional Korteweg-de Vries-Burgers equation. Applying the method of nonlinear capacity which was suggested by S.I. Pokhozhaev for some initial-boundary value problems, it has been obtained sufficient conditions for the non-existence of global solutions.*

Keywords: *Hilfer derivative, the method of nonlinear capacity, non-existence of the solution.*

РАЗРУШЕНИЕ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИСА-БЮРГЕРСА С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ХИЛЬФЕРА

Маманазаров Азизбек, (PhD)
mamanazarovaz1992@gmail.com
Мухторов Диёрбек, студент
diyorbekmuxtorov81@gmail.com
Ферганский государственный университет
Фергана, Узбекистан

Аннотация. *Настоящая работа посвящена изучению отсутствия глобальных по времени решений уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса, включающего дробно-дифференциальный оператор Гильфера по времени, который в частных случаях параметров следует классическому и другим дробным по времени уравнениям Кортевега-Бюргерса. уравнение де Фриза-Бюргерса. Применяя метод нелинейной емкости, предложенный С.И. Похожаевым для некоторых начально-краевых задач, получены достаточные условия отсутствия глобальных решений.*

Ключевые слова: *производная Гильфера, метод нелинейной емкости, отсутствие решения.*

1. PRELIMINARIES. In this section, we give some basic concepts of fractional calculus.

Definition 1.1. [1] Let $f \in L([a,b])$. The following integrals

$$I_{a+}^{\alpha}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \tag{1.1}$$

and

$$I_{b-}^{\alpha}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s)ds \tag{1.2}$$

are called the left-sided and the right-sided Riemann-Liouville integrals of the fractional order $\alpha > 0$, respectively, where $\Gamma(z)$ denotes the Euler's gamma function.

Definition 1.2. The Riemann-Liouville left-sided fractional derivative $D_{a+}^{\alpha} f$ of order $\alpha\left(0<\alpha<1\right)$ is defined by

$$D_{a+}^{\alpha}[f](t)=\frac{d}{dt} I_{a+}^{1-\alpha}[f](t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{a}^{t}(t-s)^{-\alpha} f(s) ds . \tag{1.3}$$

Definition 1.3. The Riemann-Liouville right-sided fractional derivative $D_{b-}^{\alpha} f$ of order $\alpha\left(0<\alpha<1\right)$ is defined by

$$D_{b-}^{\alpha}[f](t)=-\frac{d}{dt} I_{b-}^{1-\alpha}[f](t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{t}^{b}(s-t)^{-\alpha} f(s) ds . \tag{1.4}$$

Definition 1.4. The Hilfer derivative $D_{a+}^{\alpha,\beta} f$ of order $0<\alpha<1$ and type $0 \leq \beta \leq 1$ is defined by

$$D_{a+}^{\alpha,\beta}[f](t)=I_{a+}^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}[f](t) \tag{1.5}$$

where I_{a+}^{σ}, $\sigma>0$ is the Riemann-Liouville fractional integral.

The Hilfer derivative was introduced in [2], [3]. These references provide information about the applications of this derivative and how it arises. It is easy to see that this derivative interpolates the Riemann-Liouville fractional derivative $(\beta=0)$ and the Caputo fractional derivative $(\beta=1)$ (see [1]).

The fractional integration by parts is defined as follows.

Lemma 1.1. Le $\alpha>0, p \geq 1, q \geq 1$ and $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq 1+\alpha$ ($p \neq 1$ and $q \neq 1$ in the case $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\alpha$). If $\varphi \in L_{p}(a,b)$ and $\psi \in L_{q}(a,b)$, then

$$\int_{a}^{b} \varphi(t) I_{a+}^{\alpha}[\psi](t) dt=\int_{a}^{b} \psi(t) I_{b-}^{a}[\varphi] dt . \tag{1.6}$$

2. NON-EXISTENCE OF THE SOLUTION OF TIME-FRACTIONAL KORTEWEG-DE-VRIES-BURGERS EQUATION

Let denote by $\Pi_{a,b}$ a rectangular domain of $\mathbb{R}^{2}$, i.e $\Pi_{a,b}=\{(t,x) \in \mathbb{R}^{2}: 0<t<T,$ $a<x<b\}$. In the domain $\Pi_{a,b}$, we consider the time-fractional Korteweg-de Vries-Burgers equation

$$D_{0+,t}^{\alpha,\beta} u(t,x)+u(t,x) u_{x}(t,x)+u_{xxx}(t,x)=\nu u_{xx}(t,x) \tag{2.1}$$

with the following initial condition

$$I_{0+,t}^{\gamma-1} u(0,x)=u_{0}(x),\ x \in[a,b], \tag{2.2}$$

where $D_{a+}^{\alpha,\beta}$ is the Hilfer derivative of order $0<\alpha<1$ and type $0 \leq \beta \leq 1$ with respect to *t*, $\nu>0$ and $u_{0}(x)$ is a given function.

If $\beta=1$ then the equation (2.1) takes the form which studied in [4]. And when $\beta=1$ and $\alpha=1$ it becomes the classical Korteweg-de Vries-Burgers equation [5]. We should note the Korteweg-de Vries-Burgers equation can be applied as the mathematical model for many real-life processes [5].

Our aim is to investigate blow-up solutions of the problem (2.1)-(2.2). To do this we apply the method of nonlinear capacity. This concept for analyzing blow-up of solutions nonlinear equations was suggested by Pokhozhaev in [6].

We consider a class $\Phi\left(\Pi_{a,b}\right)$ of test functions $\varphi(t,x)$, defined on the domain $\Pi_{a,b}$ with arbitrary parameters $T>0$, $a,b\in\mathbb{R}$, have the following properties:

(i) $\varphi_t,\varphi_{xx},\varphi_{xxx}\in C\left(\Pi_{a,b}\right)$;

(ii) $\varphi_x\geq 0$ in $\Pi_{a,b}$;

(iii) $I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)}\varphi(x,t)=0$ at $t=T$ and $x\in(a,b)$;

(iv) $\zeta\left(\Pi_{a,b}\right)=\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\frac{\left(L^*\varphi\right)^2}{\varphi_x}dtdx<+\infty$,

where $L^*\varphi=-I_{T-,t}^{(1-\beta)(1-\alpha)}D_{T-,t}^{1-\beta(1-\alpha)}\varphi+\nu\varphi_{xx}-\varphi_{xxx}$.

Suppose that there exists an $T>0$ for which weak solution of the problem (2.1)-(2.2) satisfying $u_{xx},D_{0+,t}^{\alpha,\beta}u\in C\left([a,b]\times[0,t]\right)$.

By multiplying the equation (2.1) by a test function $\varphi\in\Phi\left(\Pi_{a,b}\right)$ and then integrating over $\Pi_{a,b}$ obtained equality, we get

$$\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\varphi(t,x)D_{0+,t}^{\alpha,\beta}u(t,x)\,dtdx+\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\varphi(t,x)u(t,x)u_x(t,x)\,dtdx+$$
$$+\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\varphi(t,x)u_{xxx}(t,x)\,dtdx=\nu\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\varphi(t,x)u_{xx}(t,x)\,dtdx\cdot \tag{2.3}$$

Applying the rule of integration by parts, it is easy to obtain the following equalities

$$\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\varphi(t,x)u(t,x)u_x(t,x)\,dtdx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^T u^2(t,x)\varphi(t,x)\Big|_a^b dt-\frac{1}{2}\iint\limits_{\Pi_{a,b}}u^2(t,x)\varphi_x(t,x)\,dtdx\,, \tag{2.4}$$

$$\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\varphi(t,x)u_{xx}(t,x)\,dtdx=$$
$$=\int\limits_0^T\left[u_x(t,x)\varphi(t,x)-u(t,x)\varphi_x(t,x)\right]\Big|_a^b dt-\iint\limits_{\Pi_{a,b}}u(t,x)\varphi_{xx}(t,x)\,dtdx\,, \tag{2.5}$$

$$\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\varphi(t,x)u_{xxx}(t,x)\,dtdx=$$
$$\int\limits_0^T\left[\varphi u_{xx}-\varphi_x u_x+\varphi_{xx}u\right]\Big|_a^b dt-\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\varphi_{xxx}(t,x)u(t,x)\,dtdx\quad . \tag{2.6}$$

Using Definition 1.4 and applying Lemma 1.1, we have

$$\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\varphi(t,x)D_{0+,t}^{\alpha,\beta}u(t,x)\,dtdx=\iint\limits_{\Pi_{a,b}}\varphi(t,x)I_{0+}^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dt}I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}u(t,x)\,dtdx=$$
$$=\iint\limits_{\Pi_{a,b}}I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)}\varphi(t,x)\frac{d}{dt}I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}u(t,x)\,dtdx\,.$$

Hence, applying the rule of integration by parts and using Lemma 2.1, we obtain

$$\iint\limits_{\Pi_{a,b}} \varphi(t,x) D_{0+,t}^{\alpha,\beta} u(t,x)\,dtdx = \int\limits_a^b \left\{ I_{0+,t}^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t,x)\, I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(t,x) \right\} \Big|_0^T dx -$$

$$-\iint\limits_{\Pi_{a,b}} \frac{d}{dt} I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(t,x)\, I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t,x)\,dtdx =$$

$$\int\limits_a^b \left\{ I_{0+,t}^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t,x)\, I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(t,x) \right\} \Big|_0^T dx - \iint\limits_{\Pi_{a,b}} u(t,x)\, I_{T-,t}^{(1-\beta)(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(t,x)\,dtdx .$$

Taking this and equalizes (2.4), (2.5) into account and also using Definition 2.3, from (2.3) we drive

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\Pi_{a,b}} u^2(t,x)\varphi_x(t,x)\,dtdx = -\iint\limits_{\Pi_{a,b}} u(t,x)\left(L^*\varphi\right)(t,x) +$$
$$+\int\limits_a^b \left\{ I_{0+,t}^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t,x)\, I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(t,x) \right\} \Big|_0^T dx + \int\limits_0^T B\big(u(t,x),\varphi(t,x)\big)\Big|_a^b dt , \tag{2.7}$$

where

$$B\big(u(t,x),\varphi(t,x)\big) = \frac{1}{2}u^2(t,x)\varphi(t,x) - \nu u_x(t,x)\varphi(t,x) + \nu u(t,x)\varphi_x(t,x) +$$
$$\varphi(t,x)u_{xx}(t,x) - \varphi_x(t,x)u_x(t,x) + \varphi_{xx}(t,x)u(t,x) .$$

Taking (2.2) and *(iii)* property of test functions, from the last we get

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\Pi_{a,b}} u^2(t,x)\varphi_x(t,x)\,dtdx = -\iint\limits_{\Pi_{a,b}} u(t,x)\left(L^*\varphi\right)(t,x)\,dtdx + \int\limits_0^T B\big(u(t,x),\varphi(t,x)\big)\Big|_a^b dt -$$
$$-\int\limits_a^b u_0(x)\, I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(x,t)\,dx . \tag{2.8}$$

By applying Hőlder and Young's inequalities, it is easy to see that

$$\left| \iint\limits_{\Pi_{a,b}} u(t,x)\left(L^*\varphi\right)(t,x)\,dtdx \right| = \left| \iint\limits_{\Pi_{a,b}} u(t,x)\sqrt{\varphi_x(x,t)}\,\frac{\left(L^*\varphi\right)(t,x)}{\sqrt{\varphi_x(x,t)}}\,dtdx \right| \le$$

$$\left(\iint\limits_{\Pi_{a,b}} u^2(t,x)\varphi_x(t,x)\,dtdx \right)^{1/2} \left(\iint\limits_{\Pi_{a,b}} \frac{\left(\left(L^*\varphi\right)(t,x)\right)^2}{\varphi_x(x,t)}\,dtdx \right)^{1/2} \le$$

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\Pi_{a,b}} u^2(t,x)\varphi_x(t,x)\,dtdx + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Pi_{a,b}} \frac{\left(\left(L^*\varphi\right)(t,x)\right)^2}{\varphi_x(x,t)}\,dtdx .$$

Taking this inequality and *(iv)* property of test functions into account from (2.8), we have

$$0 \le \frac{1}{2}\zeta\left(\Pi_{a,b}\right) + \int\limits_0^T B\big(u(t,x),\varphi(t,x)\big)\Big|_a^b dt - \int\limits_a^b u_0(x)\, I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(x,t)\big|_{t=0} dx . \tag{2.9}$$

The following theorem is valid:

Theorem 3.1. Suppose that the boundary conditions and the initial function $u_0(x) \in L[a,b]$ satisfy the following assumption: there exists a function $\varphi(x,t) \in \Phi\left(\Pi_{a,b}\right)$ such that $B\big(u(t,x),\varphi(t,x)\big)\Big|_a^b \in L[0,T]$ and the following inequality

$$\frac{1}{2}\zeta\left(\Pi_{a,b}\right)+\int_0^T B\left(u\left(t,x\right),\varphi\left(t,x\right)\right)\Big|_a^b dt-\int_a^b u_0\left(x\right)I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)}\varphi\left(x,t\right)\big|_{t=0}dx<0. \qquad (2.10)$$

Then problem (2.1)-(2.2) does not admit a global-in-time solution in $\Pi_{a,b}$ with these initial and boundary conditions.

Proof. Let us assume the opposite i.e. the problem (2.1)-(2.2) admits a global-in-time solution in $\Pi_{a,b}$. Then we arrived at contradiction by virtue of inequalities (2.9) and (2.10).

Now, we consider the fractional Korteweg-de Vries-Burgers equation (2.1) with $\nu=1$ in the rectangular domain $\Pi_{a,b}=\left\{\left(t,x\right)\in\mathbb{R}^2:0<t<T,0<x<1\right\}$ with the initial condition (2.2) and the following boundary conditions

$$u\left(t,0\right)=\tau_1\left(t\right),\ u_x\left(t,0\right)=\tau_2\left(t\right),\ 0<t<T, \qquad (2.11)$$

where τ_1 and τ_2 are given functions such that $\tau_1,\tau_2\in L\left[0,T\right]$.

Multiply the time-fractional Korteweg-de Vries-Burgers equation (2.1) by a test function $\varphi\in\Phi\left(\Pi_{a,b}\right)$, after some calculations and simplifications we obtain

$$0<\frac{1}{2}\zeta\left(\Pi_{0,1}\right)+\int_0^T B\left(u\left(t,x\right),\varphi\left(t,x\right)\right)\Big|_0^1 dt-\int_0^1 u_0\left(x\right)I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)}\varphi\left(x,t\right)\big|_{t=0}dx.$$

We take a test function satisfying the following boundary conditions:

$$\varphi\left(t,1\right)=0,\ \varphi_x\left(t,1\right)=0,\ 0<t<T. \qquad (2.12)$$

Then,

$$B\left(u,\varphi\right)\Big|_0^1=-\left[\frac{1}{2}\tau_1^2\left(t\right)-\tau_2\left(t\right)\right]\varphi\left(t,0\right)-\tau_1\left(t\right)\varphi_x\left(t,0\right).$$

In this case, the following theorem is valid:

Theorem 2.2. Let the initial-boundary problem (2.1), (2.2), (2.11) be such that there exists a test function $\varphi\in\Phi\left(\Pi_{0,1}\right)$ satisfying the boundary conditions (2.12) and also the following inequality

$$\frac{1}{2}\zeta\left(\Pi_{0,1}\right)<\int_0^T\left[\frac{1}{2}\tau_1^2\left(t\right)\varphi\left(t,0\right)-\tau_2\left(t\right)\varphi\left(t,0\right)+\tau_1\left(t\right)\varphi_x\left(t,0\right)\right]dt+$$
$$+\int_0^1 u_0\left(x\right)I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)}\varphi\left(x,t\right)\big|_{t=0}dx. \qquad (2.13)$$

Then the problem (2.1), (2.2), (2.11) does not admit a global-in-time solution in $\Pi_{0,1}$.

References

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, North-Holland, 2006.
2. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, Singapore, 200, p.87 and p.429.
3. Hilfer R. Experimental evidence for fractional time evolution in glass materials, Chem. Physics. 284 (2002), 399-408.
4. Ahmed Alsaedi, Mokhtar Kirane and Berikbol T.Torebek (2020) Blow-up smooth solutions of the time-fractional Burger equation, Questiones Mathematical, 43:2, 185-192, DOI:10.2989/16073606.2018.1544596.
5. Burger J.M. A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence, Adv.in Appl. Mech. I, pp.171-199, Academic Pres, New York, 1948.
6. Pokhozhaev S.I. Essentially nonlinear capacities induced by differential operators. Dokl.Ros. Akad. Nauk. 357(5) (1997), 592-594.

УДК 517.978

DIFFERENTIAL *l*-CATCH AND *l*-ESCAPE GAMES IN THE CASE OF NON-STATIONARY GEOMETRIC CONSTRAINTS ON CONTROLS

Turgunboeva Mohisanam Akhmadullo kizi, student of PhD
turgunboyevamohisanam95@gmail.com
Namangan State University
Namangan, Uzbekistan

Abstract: *This paper is devoted to the l-catch and l-escape differential games with two players, called pursuer and evader, whose controls adhere to non-stationary geometric constraints of various types. Such problems are quite relevant for the processes where the rates of control parameters fluctuate consistently during the time. First, the pursuit problem is discussed and a pursuer strategy guaranteeing the l-catch is defined using the method of Chikrii's resolving functions. Then, the evasion problem is dealt with by means of a specific control function of evader.*
Keywords: *Differential game, l-catch, evasion, pursuer, evader, geometric constraint, strategy, guaranteed time of l-catch.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНИХ ИГР *l*-ПОИМКИ И *l*-УБЕГАНИЯ В СЛУЧАЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЯМИ

Тургунбоева Мохисанам Ахмадулло кизи, аспирант
turgunboyevamohisanam95@gmail.com
Наманганский государственный университет
Наманган, Узбекистан

Аннотация: *В этой статье рассмотрена проблемы чем l-поимка и l-убегания для дифференциальных игр с двумя игроками, называется преследователь и убегающий, управление которых придерживается нестационарного геометрические связи различных типов. Такие проблемы весьма актуальны для процессы, в которых скорости управляющих параметров постоянно колеблются во времени. Мы построили стратегию сходимости на основе метода разрешающих функции А.А.Чикрия для преследователя и представили новые достаточные условия l-поимки. Здесь, под l-захватом мы понимаем момент, когда преследователь приближаться к убегающему на расстояние l>0. В задаче об уклонении мы определили стратегию, гарантирующую уклонение убегающего от преследователя на расстояние большее, чем l>0. Кроме того, показаны новые достаточные условия уклонения.*
Ключевые слова: *дифференциальная игра, l-поимка, убегания, преследователь, убегающий, геометрическое ограничение, стратегия, гарантированное время l-поимка.*

1. Introduction. Differential Theory of Differential Games looks into conflict problems in systems which are expressed by differential equations. As a result of the growth of Pontryagin's maximum principle, it became apparent that there was a link between optimal control theory and differential games. Actually, problems of differential game describe a generalization of optimal control problems in cases where there are more than one player.

The study of differential games was initiated by American mathematician R. Isaacs. His research was published in the form of a monograph [1, p. 340] in 1965, in which a great number of examples were considered, and theoretical que stions were only affected. Differential games have been one of the basic research fields since the 1960th and their fundamental results were gained by L.S. Pontryagin [2, p. 551], N.N. Krasovsky [3, p. 517].

N.N .Krasovsky and his followers estimated the quality of pursuit by the time span from the initial instant of the process up to the ℓ-capture instant ($\ell > 0$). This method is based on the extreme sighting rule which gives in a number of cases of the equilibrium point. The method was conclusively formulated in the monograph by N.N. Krasovsky.

The problem for the case of ℓ-approach [5, p. 272] was first studied by Indian mathematician Ramchundra. Analogous effects in the case of geometrical constraint were considered in the works of Pshenichnyi [6, p. 484-485], Petrosyan [4, p. 31-38], Satimov [7, p. 203], Azamov [8, p. 38-43], Samatov [9, 10] and others studied that problem, and interesting results were obtained by them. In the work of Petrosyan and Dutkevich [4, p. 31-38], the l-capture problem was investigated for the players moving at the limited velocities by coordinates on the plane and also, a lifeline game was solved by geometrical method. Later on, by virtue of Chikrii's method of resolving functions, B.T.Samatov [9, p. 907-921; 10, p. 94-107] solved the problem of group pursuit for the case of l-capture in a simple motion of the players under integral constraints on controls. In [11, p. 574-579], Khaidarov considered the problem of positional l-capture of one evader by a group of pursuers provided that each of the players has a simple movement.

In the paper, we have considered the l-catch and l-escape problems in a differential game with one evader and one pursuer, whose controls are subject to non-stationary geometrical constraints. In the l-catch problem, an approach strategy is constructed for a pursuer and sufficient conditions of l-catch are obtained. In the l-escape problem, a specific strategy is suggested for an evader and sufficient conditions of evasion are found. Furthermore, it is shown how the distance between the players changes during the evasion game.

2. Statement of problems. We will consider the differential game which includes two players *P* (Pursuer) and *E* (Evader) whose state vectors are x and y, and whose velocity vectors are u and v, respectively in the space $\mathbb{R}^n$. Let, in this consideration, the motion dynamics of *P* and *E* be described by the differential equations

$$P: \qquad \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E: \qquad \dot{y} = u, \quad y(0) = y_0 \tag{2}$$

correspondingly, where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_0, y_0 are the initial states of the players for which it is presumed that $|x_0 - y_0| > l$, $l > 0$; the velocity vectors u and v act as control parameters of the players respectively, and they depend on time $t \geq 0$.

The controls u and v are regarded as measurable functions $u(\cdot):[0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot):[0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ accordingly, and they are subject to the constraints

$$|u(t)| \leq \rho a^{-kt} + a^{kt} \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)| \leq \sigma a^{-kt} + a^{kt} \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{4}$$

where ρ, σ, k are the given positive parametric numbers. Let $U_\rho^{a,k}$ stand for the family of all measurable functions corresponding to (3). Similarly, let the family of all measurable functions satisfying (4) be represented by $V_\sigma^{a,k}$.

Definition 1. The measurable functions $u(\cdot)=\left(u_1(\cdot),...,u_n(\cdot)\right)\in U_\rho^{a,k}$ $\left(v(\cdot)=\left(v(\cdot)=v_1(\cdot),...,v_n(\cdot)\right)\in V_\sigma^{a,k}\right)$ is called an admissible control of the player *P* (of the player *E*).

If $u(\cdot)\in U_\rho^{a,k}$ and $v(\cdot)\in V_\sigma^{a,k}$, then the solutions to Cauchy's problems (1) and (2) are

$$x(t)=x_0+\int_0^t u(s)ds\,, \qquad y(t)=y_0+\int_0^t v(s)ds$$

and the pairs $\left(x_0,u(\cdot)\right)$ and generate the motion trajectories ***of the player* P *and* E *appropriately.***

The main target of the player P is to gain ground the player E at the distance $l>0$ (l-catch problem), i.e., to achieve the relation

$$\left|x(\theta)-y(\theta)\right|\le l \tag{5}$$

at some finite time $\theta>0$. Whereas the objective of the player E is to avoid the occurrence of (5) (l-escape problem, i.e., to keep the inequality

$$\left|x(t)-y(t)\right|>l \tag{6}$$

for all $t\ge 0$ or, if it is impossible, to put off the time of the occurred of (5).

There is no doubt that control functions depending only on the time-parameter $t, t\ge 0$ are not sufficient to solve the l-catch problem, and hence the acceptable types of controls should be strategies for the player P.

We will introduce the following denotations for the sake of convenience:

$$z(t)=x-y, \quad z_0=x_0-y_0.$$

Then equation (1) and (2) come to the unique Cauchy problem in the form

$$\dot z=u-v, \quad z(0)=z_0. \tag{7}$$

3. The main results.

Definition 2. For $\rho\ge\sigma$, we call the function

$$\mathrm{u}\left(z_0,t,v\right)=v+\lambda\left(z_0,t,v\right)\left(m\left(z_0,t,v\right)-z_0\right) \tag{8}$$

the *l-approach strategy* or Π_l *-strategy* for *P* in the differential game (1)-(4), where $\lambda(v,z_0)=\dfrac{1}{\left|z_0\right|^2-l^2}\left[\left\langle v,z_0\right\rangle+\varphi(t)l+\sqrt{\left(\left\langle v,z_0\right\rangle+\varphi(t)l\right)^2+\left(\left|z_0\right|^2-l^2\right)\left(\varphi^2(t)-\left|v\right|^2\right)}\right]$,

$\varphi(t)=\rho a^{-kt}+a^{kt}$, $m\left(z_0,t,v\right)=-\dfrac{v-\lambda\left(z_0,t,v\right)z_0}{\left|v-\lambda\left(z_0,t,v\right)z_0\right|}l$.

Here $\left\langle v,z_0\right\rangle$ is scalar product of the vectors v and z_0 in $\mathbb{R}^n$. Moreover, the function $\lambda(z_0,t,v)$ is usually called the *resolving function*. Below we will provide some important properties for the strategy (8) and the resolving function $\lambda(z_0,t,v)$.

Proposition 1. If $\rho \geq \sigma$ holds, then the strategy (8) is defined and continuous for any v, $|v| \leq \beta$, and the equality $\left|\mathrm{u}\left(z_0, t, v\right)\right| = \varphi(t)$ holds during the *l*-catch game.

Proposition 2. If $\alpha \geq \beta$ is valid, then the function $\lambda(v, z_0)$ is defined, non- negative and continuous for any v, $|v| \leq \beta$, and it is bounded as

$$\left(\varphi(t) - |v(t)|\right) / \left(|z_0| - l\right) \leq \lambda(z_0, t, v) \leq \left(\varphi(t) + |v(t)|\right) / \left(|z_0| - l\right). \tag{9}$$

Definition 3. It is said that the Π_l -strategy (8) *guarantees to occur l*-catch on time interval $\left[0, T\left(z_0, v(\cdot)\right)\right]$ if, for any $v(\cdot) \in V_\sigma^{a,k}$:

a) their exists an instant $t_* \in \left[0, T\left(z_0, v(\cdot)\right)\right]$ at which $|z(t_*)| \leq l$ is satisfied;

b) an inclusion $\mathrm{u}\left(v, z_0\right) \in U_\rho^{a,k}$ is fullfilled on the interval $\left[0, t_*\right]$, where we say the number $T\left(z_0, v(\cdot)\right)$ a *guaranteed time of l*-catch**.**

Theorem 1. If one of the following conditions holds in differential game (1) – (4), that is, 1. $0 < a < 1$, $\rho > \sigma$ or 2. $a > 1$, $\rho > \sigma + k(|z_0| - l)\ln a$, then Π_l -strategy (8) guarantees to occur l-catch on the time $T\left(z_0, v(\cdot)\right) \leq T_l$ in the *l*-catch problem (1)-(4), where

$$T_l = \frac{1}{k}\log_a \frac{\rho - \sigma}{\rho - \sigma - \left(|z_0| - l\right)k\ln a}.$$

Definition 4. We call the control function

$$v_*(t) = -\left(\sigma a^{-kt} + a^{kt}\right)\frac{z_0}{|z_0|} \tag{10}$$

a strategy of the player *E* in the game (1)-(4).

Definition 5. We say that the strategy $v_*(t)$ is *winning* if, for any control $u(\cdot) \in U_\rho^{a,k}$**,** *the solution* $z(t)$ *of*

$$\dot{z} = u(t) - v_*(t),\ z(0) = z_0 \tag{11}$$

fulfills the inequality (6) for all t, $t \geq 0$.

Theorem 2. If one of the following conditions holds:

1. $0 < a < 1$, $\rho \leq \sigma$ *; or 2.* $a > 1$, $\rho \leq \sigma + k(|z_0| - l)\ln a$,

then in the differential game (1) – (4), the *l*-escape problem is solved by the strategy of the player *E* (10) and a change function between the players will be in the following form:

$$E(t) = |z_0| - l + \frac{\sigma - \rho}{k\ln a}\left(1 - a^{-kt}\right).$$

References

1. Isaacs R. Differential games. John Wiley and Sons, New York. 1965, – 340 p.
2. Pontryagin L.S. Selected Works. MAKS Press, Moscow. 2014, – 551 p.
3. Krasovsky N.N. Game-Theoretical Control Problems/ Subbotin A.I. Springer, New York. 1988, – 517 p.

4. Petrosyan L.A. Games with “a Survival Zone”. Occasion *L*-catch / Dutkevich V.G. Vestnik Leningrad State Univ., 1969, Vol.3, № 13, – P. 31-38.

5. Nahin P.J. Chases and escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion. Princeton University Press, Princeton. 2012. – 272. P.

6. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. Cybernetics and Systems Analysis, 1976, Vol. 12, № 5, p. 484-485.

7. Satimov N.Yu. Methods for solving the pursuit problem in the Theory of Differential Games. Izd-vo NUUz, Tashkent. 2003. P. 203

8. Azamov A.A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Serdica Bulgariacae math., 1986, Vol. 12, № 1, p. 38-43.

9. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. Cybernetics and Systems Analysis, 2013, Vol. 49, № 6, p. 907-921.

10. Samatov B.T. Differential game with a lifeline for the inertial movements of players / Soyibboyev U.B. Ural Mathematical Journal, Vol. 7, № 2, p. 94-107.

11. Khaidarov B.K. Positional *l*-catch in the game of one evader and several pursuers. Prikl. Matem. Mekh., 1984, Vol. 48, № 4, p. 574-579.

UDC 004.946

AXIOMATIZATION OF MOTION IN VIRTUAL TOPOLOGICAL SPACES

Zhoraev Adahamzhan Khamitzhanovich, Cand. Sci.
adaham_67@mail.ru
KUIU named after B.Sydykov
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The goal of this paper is to survey problems of axiomatization in general, to survey of axiomatization of motion in various spaces and to present a system of axioms to present controlled motion of stretched objects with bounded velocity. Survey of peculiarities of axiomatization in mathematics based on works by A.A. Borubaev and G.M. Kenenbaeva, axiomatization of kinematical spaces is presented in the paper. A new notion of generalized kinematical space is defined: given a family of connected sets of a kinematical space (passes) and a family of connected (isomorphic) sets (things); "passes" contain continuous sequences of "objects".*

Keywords: *axiomatization, topological space, kinematical space, virtual space, velocity, motion.*

ЭЛЕСТЕТИЛГЕН ТОПОЛОГИЯЛЫК МЕЙКИНДИКТЕРДЕ КЫЙМЫЛДООНУ АКСИОМАЛАШТЫРУУ

Жораев Адахамжан Хамитжанович, ф.-м.и.к., доцент
adaham_67@mail.ru
Б. Сыдыков атындагы КӨЭАУ
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Макаланын максаты – жалпысынан аксиомалаштыруу маселелерин карап чыгуу, ар түрдүү мейкиндиктерде кыймылдын аксиомалаштыруусун карап чыгуу, мейкиндикте чектелген ылдамдыктагы объекттердин башкарылуучу кыймылы үчүн аксиомалардын системасын көрсөтүү. Макалада А.А. Борубаев менен Г.М. Кененбаеванын эмгектеринин негизинде математикадагы аксиомалаштыруунун өзгөчөлүктөрү жана кинематикалык мейкиндиктерди аксиомалаштыруу боюнча жалпы маалымат көрсөтүлгөн. Жалпыланган кинематикалык мейкиндиктин жаңы түшүнүгү аныкталды: кинематикалык мейкиндиктеги көптүктөрдүн топтому (өтмөктөр) жана көптүктөрдүн (объекттердин) топтомдору (изоморфтук) берилет; "Өтмөктөр" "объекттердин" үзгүлтүксүз ырааттуулугун камтыйт.*

Ачкыч сөздөр: *аксиомалаштыруу, топологиялык мейкиндик, кинематикалык мейкиндик, элестетилген мейкиндик, ылдамдык, кыймылдоо.*

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ В ВИРТУАЛЬНОМ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Жораев Адахамжан Хамитжанович, к.ф.-м.н., доцент
adaham_67@mail.ru
КУМУ имени Б. Сыдыкова
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Цель статьи – обзор проблем аксиоматизации в целом, обзор аксиоматизации движения в различных пространствах, представление системы аксиом для управляемого движения объектов в пространстве с ограниченной скоростью. В статье представлены обзор особенностей аксиоматизации в* *математике на основе работ А.А. Борубаева и Г.М. Кененбаевой и аксиоматизация кинематических пространств. Определено новое понятие обобщенного кинематического пространства: даны семейство множеств в кинематическом пространстве (проходов) и семейство (изоморфных) множеств (объектов); «проходы» содержат непрерывные последовательности «объектов».*

Ключевые слова: *аксиоматизация, топологическое пространство, кинематическое пространство, виртуальное пространство, скорость, движение.*

1. Introduction In [1] virtual reality was defined as a computer presentation of various spaces known in mathematics in ways close to ways of presenting real (3D-Euclidean) space. This initiated new capacities for investigation.

Nevertheless, in various publications only real space is considered. For instance, [2]: *the virtual reality technology, which has provided a powerful tool for people to experience the virtual world.*

The goal of this work is to survey problems of axiomatization in general, to survey of axiomatization of motion in various spaces and to present a system of axioms to present controlled motion of stretched objects with bounded velocity.

The second section presents a survey of axiomatization. A.A.Borubaev [3] considered ideas and axiomatization of topology and uniform topology. On this base, in the series of works [4-6] a general survey of mathematics was proposed: firstly, some ideas appeared, effects and phenomena had been discovered; further, systems of axioms were developed.

The third section contains a survey of axiomatization of controlled motion of points in a topological space.

The fourth section presents controlled motion of stretched objects with bounded velocity. Topological structures on sets are built by introducing families of subsets meeting some properties. To generalize the notion of a kinematical space we propose to use a family of subsets having "length" (we will call them "passes") and a family of subsets (we will call them "things") which are to be moved along "passes".

2. Survey of axiomatization in mathematics. We cite [3]: *Axiomatization of the notion of continuity had led to the notion of a topological space. There were two ways of axiomatization of the notion of uniform continuity: 1) through the proximity relation of two sets A and B (distance(A,B) is zero in a metric space) as development of P.S. Alexandroff's and K. Kuratowski's viewpoint on a topological space; 2) through axiomatization of properties of the system of ε-neighborhoods in a metric space as development of Hausdorff's viewpoint. The first way had led to the construction of proximity spaces (V.A. Efremovich), the analysis of proximity spaces was held by Ju.M. Smirnov, the second way had led to the construction of uniform spaces (A. Weyl).*

The first systematic exposition of the theory of uniform spaces in terms of entourages was given in Bourbaki's book. Another, but equivalent to the previous concept of a uniform space and defined in terms of a family of coverings was introduced and studied by Tukey. Later, a broad and important study of uniform spaces in the terms of coverings was carried by Yu.M. Smirnov. Isbell's book, in which the theory of uniform spaces got an important development, was also written in terms of the coverings. One can see that the uniform spaces can also be described in terms of pseudometrics …; in terms of metrics over semifields …; in terms of equivalent nets … and small sets … and others.

On the base of this, in the series of works [4-6] a general survey of mathematics was done: firstly, some ideas appeared, effects and phenomena had been discovered; further, systems of axioms were developed. As different systems of axioms codify the same idea, they are equivalent (and proof of their equvalence.

3. Survey of axiomatization of motion of points. The first idea was Gauss's notion of shortest ways along any smooth surfaces (geodesic lines).

As a codifying the ancient idea of controlled motion with bounded velocity, the notion of kinematical space was introduced [1].

Definition 3.1. *A computer program is said to be a* ***presentation*** *of a computer kinematical space if:*

P1) there is an (infinite) metrical space X of points and a set X_1 of display-presentable points being sufficiently dense in X;

P2) the user can pass from any point x_1 in X_1 to any other point x_2 by a sequence of adjacent points in X_1 by their will;

P3) the minimal time to reach x_2 from x_1 is (approximately) equal of the minimal time to reach x_2 from x_1.

The space X is said to be a ***kinematic space****; the space X_1 is said to be a* ***computer kinematic space****; this minimal time is said to be the* ***kinematical distance*** *ρ_X between x_1 and x_2; a sequence of adjacent points is said to be a* ***route****. Passing to a limit as X_1 tends to X we obtain the following.*

There is a set K of ***routes****; each route M, in turn, consists of the positive real number T_M (****time*** *of route) and the function $m_M : [0, T_M] \to X$ (****trajectory*** *of route);*

(K1) For $x_1 \neq x_2 \in X$ there exists such $M \in K$ that $m_M(0) = x_1$ and $m_M(T_M) = x_2$, and the set of values of such T_M is bounded with a positive number below;

(K2) If $M = \{T_M , m_M(t)\} \in K$ then the pair $\{T_M , m_M (T_M - t)\}$ is also a route of K (the reverse motion with same speed is possible); (cf. P3).

(K3) If $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$ and $T^* \in (0, T_M)$ then the pair: T^* and function $m^*(t)=m_M(t)$ $(0 \le t \le T^*)$ is also a route of K (one can stop at any desired moment);

(K4) concatenation of routes for three distinct points x_1, x_2, x_3.

If there exists a kinematic consistent with the given metric then the metric space is said to be ***kinematizable****.*

A similar definition also based on the notion of path was proposed in [7].

Denote the set of connected subsets of *R* as *In.* A *path* is a continuous map $\gamma : In \to X$ (a topological space).

The following definition is composed of some definitions in [7] reduced to a "a priori" bounded, path-connected space *X*.

Definition 3.2 (briefly)**.** *A length structure in X consists of a class A of admissible paths together with a function (length) $L: A \to R_+$.*

(A1) The class A is closed under restrictions: if $\gamma \in A$, $\gamma : [a, b] \to X$ and $[u, v] \subset [a, b]$ then the restriction $\gamma|_{[u, v]} \in A$ and the function L is continuous with respect to u,v;

(A2) The class A is closed under concatenations of paths and the function L is additive correspondingly. If a path $\gamma : [a, b] \to X$ is such that its restrictions γ_1, γ_2 to [a, c] and [c, b] belong to A, then so is γ.

(A3) The class A is closed under linear reparameterizations and the function L is invariant correspondingly: for a path $\gamma \in A$, $\gamma : [a, b] \to X$ and a homeomorphism $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ of the form $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, the composition $\gamma(\varphi(t))$ is also a path.

(A4) [similar to (Kl)].

The metric in X is defined as

$\rho_L(z_0, z_1) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \to X;\ \gamma \in A;\ \gamma(a) = z_0;\ \gamma(b) = z_1\}.$

4. Axiomatization of motion of points with bounded velocity. We [8] proposed controlled motion of stretched sets in topological spaces with bounded velocity based on motion of points as [1].

We propose more general definition.

Consider the following task. Let there be a “thing” and “obstacles”. It is necessary to move the thing to another place. Is it possible? If “yes” then in what minimal time it can be done?

The following definition improves one in [9].

Definition 4.1. Let there be a family P of connected subsets of the kinematical space X (**passes**); each pass has the positive **length (time)** and a family Q of connected (isomorphic) subsets of the set X (**things**). [i.e. a thing moves along a pass].

(G1) For each $x\in p\in P$ there exists such $q\in Q$ that $x\in q$ [a thing can be in each place of a pass].

(G2) For each $x_1 \neq x_2 \in X$ there exists such pass $p\in P$ that $x_1, x_2 \in P$ and the set of lengths of such p is bounded with a positive number below; this infimum is said to be the **generalized kinematical distance** ρ_X between points x_1 and x_2.

(G3) For each $q_1 \neq q_2 \in Q$ there exists such pass $p\in P$ that $q_1, q_2 \in P$ and they are continuously connected by elements of Q; the set of lengths of such p is bounded with a positive number below; this infimum is said to be the **generalized kinematical distance** ρ_X between things p_1 and p_2.

(G4) If $x_1, x_2 \in p_1$ and $x_2, x_3 \in p_2$ then there exists such pass $p_3 \in P$ that $x_1, x_2, x_3 \in p_3$ and $\text{length}(p_3) \leq \text{length}(p_1) + \text{length}(p_2)$.

The space X is said to be a **generalized kinematic space**.

If $Q=X$ then Definition 4.1 generalizes Definition 3.1.

5. Conclusion. We hope that the new definitions in this paper would provide effective computer presentations for motion of things in virtual and real spaces.

References

1. Борубаев А.А., Панков П.С. Компьютерные представления кинематических топологических пространств. – Бишкек: КГНУ, 1999.
2. Liu X., Zhang J., Hou G., Wang Z. Virtual Reality and Its Application in Military // Conference Series Earth and Environmental Science, 2018, Vol. 170, issue 3. – P. 32-41.
3. Борубаев А.А. Равномерная топология. - Бишкек: Илим, 2013.
4. Кененбаева Г.М. Обзор эффектов и явлений в различных разделах математики // Вестник Жалал-Абадского государственного университета, 2016, № 1(32). – С. 46-51.
5. Pankov P., Kenenbaeva G. Effect of "numerosity" and other effects in mathematics // Abstracts of the Third BULLETIN OF OSH STATE UNIVERSITY "Actual problems of the theory of control, topology and operator equations" / Ed. by Academician A. Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2017. – P. 87.
6. Pankov P. S., Kenenbaeva G. M. Hypothesis on effect of "numerosity" and other effects in mathematics // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2017, № 5. – С. 60-62.
7. Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A Course in Metric Geometry // Graduate Studies in Mathematics, Volume 33, American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 2001.
8. Zhoraev A.H. Motion of sets and orientation dimension of kinematical spaces // Abstracts of the VI Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Astana: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2017. – P. 124.
9. Zhoraev A.H. Axiomatization of kinematical spaces // Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR, 2021, No. 1. – P. 16-21.

Резолюция международной научной конференции “Актуальные проблемы математики и образования”

Резолюция

международной научной конференции **“Актуальные проблемы математики и образования”**, посвященной 80-летию заслуженного деятеля науки Кыргызкой Республики, члена-корреспондента НАН КР, доктора физико-математических наук, профессора, почетного академика НАН КР Келдибая Алымкулова

12-13 мая 2023 года в Ошском государственном университете состоялась международная научная конференция **“Актуальные проблемы математики и образования”**, посвященной 80-летию заслуженного деятеля науки Кыргызкой Республики, члена-корреспондента НАН КР, доктора физико-математических наук, профессора, почетного академика НАН КР **Келдибая Алымкулова**.

Организатором конференции выступил Ошский государственный университет.

В работе конференции приняли участие ученые, преподаватели высших учебных заведений региона и республики. Широкая география участников видных ученых-математиков из **России, Казахстана, Узбекистана, Испании, Германии, Чехии** подтверждает актуальность темы конференции и рассматриваемых в её рамках вопросов.

Программа конференции включала пленарное и шесть секционных заседаний по различным актуальным направлениям математики и образования. Для обеспечения участия широкого круга заинтересованных лиц был обеспечен онлайн формат работы.

В работе конференции приняли участие более **120 человек**. Было заслушано свыше **190 докладов и сообщений**. Темы докладов и выступлений затрагивали самые разнообразные и актуальные проблемы таких направлений как геометрия, топология, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теория операторов, спектральная теория, математическое и компьютерное моделирование, методика преподавания математики и информатики и др.

Участники конференции подчеркнули значительную роль профессора **Келдибая Алымкулова** в развитие математической науки, его весомый вклад в воспитание и подготовку молодых научных кадров; указали современные направления и проблемы математической науки и образования и необходимость развития фундаментальных и прикладных исследований; отметили, что в настоящее время в современном мире и Кыргызстане повышается роль математики и математического образования.

Материалы конференции будут опубликованы в журналах **«Вестник ОшГУ: Математика. Физика. Техника», «Вестник ОшГУ: Педагогика. Психология», «Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования».**

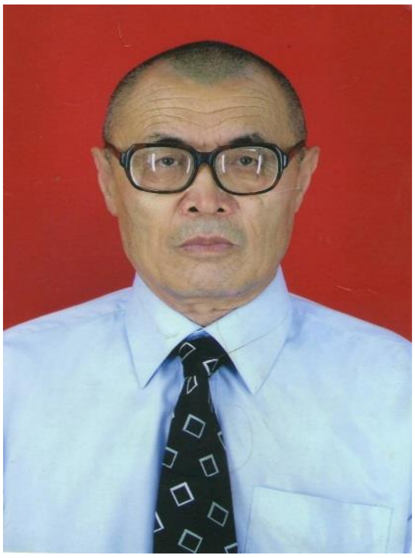
По итогам проведенных пленарных, секционных заседаний и дискуссий Конференция рекомендует:

- *акцентировать внимание молодых ученых на решения приоритетных и прикладных проблем математик, экономики, медицины, экологии, энергетики и IT-технологии;*

- *уделять внимание на подготовку высококвалифицированных научно-педагогических кадров, отвечающих современным требованиям времени;*
- *усилить интеграцию исследовательских деятельностей научных организаций, школ и вузов различных стран;*
- *широко использовать информационные и коммуникационные технологии, способствующие взаимодействию участников образовательного процесса, доступ к информационным источникам, эффективный мониторинг и контроль результатов образовательного процесса;*
- *развивать критическое и системное мышления учеников, студентов и магистрантов в процессе преподавания математических дисциплин;*
- *ежегодно проводить научную конференцию «Алымкуловские чтения».*

Участники конференции отмечают высокий уровень организации и проведения данного мероприятия, способствующего установлению новых творческих связей, объединению научного потенциала ученых, научных и образовательных организаций различных стран.

Жизнь и деятельность Келдибая Алымкулова



Алымкулов Келдибай родился 11 января 1943 года в селе Герейт-Шорон Ноокатского района Ошской области. Трудовую деятельность начал в 1964 году после окончания физико-математического факультета Кыргызского государственного университета в г. Фрунзе (ныне Бишкек). По рекомендации член-корреспондента АН КР, профессора Ю.В. Быкова он был принят на работу в Академию младшим научным сотрудником.

В 1965 году служил в Советской Армии на Украине.

В 1966-1969 годах учился в аспирантуре при Академии наук КР.

В 1969-1971 годах работал учителем математики в Кок-Жарской средней школе Ноокатского района.

В 1971-1999 годах работал старшим научным сотрудником, заведующим лабораторией АН КР.

В 1973 году под руководством академика М.Иманалиева защитил кандидатскую диссертацию (г. Фрунзе).

В 1991 году под руководством академика РАН Д.В. Аносова в Математическом институте имени Стеклова АН СССР в Москве защитил докторскую диссертацию.

В 1999-2001 годах был профессором кафедры математического анализа физико-математического факультета ОшГУ.

В 2001-2007 годах был заведующим кафедрой общей информатики Ошского государственного университета.

С 2007 года профессор кафедры алгебры и геометрии факультета МИТ ОшГУ.

С 2007 года и до последних дней жизни являлся директором Института фундаментальных и прикладных исследований Ошского государственного университета.

Алымкулов Келдибай внес значительный вклад в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярным возмущением. Он разработал аналитические методы: «Униформизация», «Структурное сращивание» и «Нелокальная бифуркация периодических решений».

Келдибай Алымкулович внес большой вклад в подготовку научных кадров ОшГУ, возглавил научную школу по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, подготовил 2 докторов наук и 9 кандидатов наук, является автором более 150 научных статей и монографии.

Келдибай Алымкулович участвовал и выступал с научными докладами в международных конференциях в Болгарии (Варна), Венгрии (Будапешт), Польше (Варшава), Таиланде (Бангкок), Греции (остров Самос-Пифагор), Швеции (Стокгольм), России (Москва, Новосибирск, Нальчик и др.), Украине (Киев, Черновцы, Тернополь), Казахстане (Алма-Ата), Узбекистане (Ташкент, Самарканд), Азербайджане (Баку).

По инициативе К. Алымкулова в 2008 году в ОшГУ был открыт диссертационный совет на соискание ученой степени кандидата наук по направлениям “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление” и “Геометрия и топология”, которым руководил до 2015 года, в то же время был членом диссертационного совета в городе Бишкек. Келдибай Алымкулов с 2015 года был членом диссертационного совета при Институте математики НАН КР г. Бишкек.

Награды и звания:

- Почетная грамота Министерства образования, науки и культуры КР, 1999 г.
- Почетная грамота государственной администрации Ошской области, 2001 г.
- Лучший работник образования КР, 2005 г.
- Член-корреспондент Национальной академии наук Кыргызской Республики, 2010 г.
- Заслуженный деятель науки Кыргызской Республики, 2011 г.
- С 2011 года он являлся членом редколлегии американского журнала «Математика и статистика», членом Американского и Европейского общества математиков, вице-президентом Кыргызского общества математиков.
- Почетная грамота Правительства Кыргызской Республики, 2014 г.
- Лауреат премии «Хан-Тенрии», 2017 г.
- Академик Российской академии естественных наук, 2019 г.
- Почетный академик Национальной академии наук Кыргызской Республики, 2021 г.

Келдибай Алымкуловдун өмүрү жана чыгармачылыгы

Алымкулов Келдибай 1943-жылдын 11-январында Ош облусунун, Ноокат районунун, Төөлөс айыл өкмөтүнүн Герейт-Шорон кыштагында туулган. 1964-жылы Фрунзе (азыркы Бишкек) шаарында Кыргыз Мамлекеттик университетинин физика-математика факультетин бүтүргөн. Кыргыз илимдер Академиясынын мүчө-корреспонденти, профессор Я.В. Быковдун сунушу менен Академиянын кичи илимий кызматкери катары ишке кабыл алынган.

1965-жылы Украинада Советтик Армияда кызмат өтөгөн.

1966-1969-жылдары Кыргыз илимдер Академиясынын аспирантурасында окуган.

1969-1971-жылдары Ноокат районунун Көк-Жар орто мектебинде математика мугалими болуп эмгектенген.

1971-1999-жылдары Кыргыз илимдер Академиясында улук илимий кызматкер, лаборатория башчысы болуп эмгектенген.

1973-жылы Фрунзе шаарында академик М. Иманалиевдин жетекчилиги алдында кандидаттык диссертациясын коргогон.

1991-жылы Россия илимдер Академиясынын академиги Д.В. Аносовдун жетекчилиги алдында Москва шаарындагы СССР илимдер Академиясынын Стеклов атындагы математика институнда доктордук диссертациясын коргогон.

1999-2001-жылдары ОшМУнун физика-математика факультетинин математикалык анализ кафедрасынын профессору,

2001-2007-жылдары ОшМУнун жалпы информатика кафедрасынын башчысы,

2007-жылдан тартып ОшМУнун МИТ факультетинин Алгебра жана геометрия кафедрасынын профессору,

2007-жылдан тартып көзү өткөнгө чейин ОшМУнун алдындагы Фундаменталдык жана прикладдык изилдөөлөр институтунун директору кызматтарын аркалап келген.

Алымкулов Келдибай Алымкулович кадимки дифференциалдык сингулярдуу козголгон теңдемелер теориясына бараандуу салым кошкон. Агай “Униформдаштыруу”, “Структуралык жалгаштыруу” жана “Мезгилдуу чечимдердин локалдык эмес бифуркациясы” аналитикалык методдорун кийирген.

Келдибай Алымкуловичтин ОшМУга, Кыргызстанга илимий кадраларды даярдоодо салымы зор, 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер адистиги боюнча илимий мектепти жетектеп, илимдин 2 докторун жана 9 кандидатын чыгарган, ошондой эле 150дөн ашуун илимий макаланын жана монографиянын автору. Келдибай Алымкулович Болгарияда (Варна), Венгрияда (Будапешт), Польшада (Варшава), Таиландда (Бангкок), Грецияда (Самос-Пифагор аралы), Швецияда (Стокгольм), Россияда (Москва, Новосибирск, Нальчик, ж.б.), Украинада (Киев, Черновцы, Тернополь), Казахстанда (Алма-Ата), Өзбекстанда (Ташкент, Самарканд), Азербайжанда (Баку) болгон конференцияларга катышып, илимий докладдарды жасап келген.

2008-жылы ОшМУнун алдында 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер жана 01.01.04 – геометрия жана топология адистиктери боюнча илимдин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн диссертациялык кеңешин ачып, 2015-жылга чейин жетектеп, ошол эле мезгилде Бишкек шаарындагы диссертациялык кеңеште мүчө болуп келген. 2015-жылдан бери Бишкек шаарындагы КР УИАнын математика институтуна жана Ж. Баласагын атындагы КУУга караштуу диссертациялык кеңешинде мүчө болуп келди.

Сыйлыктары:

- Кыргыз Республикасынын билим берүү, илим жана маданият министрлигинин Ардак грамотасы, 1999-ж.
- Ош облусунун мамлекеттик администрациясынын Ардак грамотасы, 2001-ж.
- Кыргыз Республикасынын билим берүүсүнүн мыктысы, 2005-ж..
- Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын мүчө-корреспонденти, 2010-ж.
- Кыргыз республикасынын илимине эмгек сиңирген ишмер", 2011-ж.
- 2011-жылдан тартып Американын "Математика жана статистика" журналынын редакциялык кеңешинин мучөсү, Америка жана Европа математиктер коомунун мүчөсү, Кыргызстан математиктер коомунун вице президенти болуп келди.
- 2014-жылы Кыргыз Республикасынын Өкмөтүнүн Ардак грамотасы, 2014-ж.
- "Хан-Теңири" сыйлыгынын лауреаты, 2017-ж.
- Россиянын табигый илимдер академиясынын академиги, 2019-ж.
- Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Ардактуу Академиги, 2021-ж.

**«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ.
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА»
ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ**

Техникалык редактор: ***Папиева Толкун***

ОшМУнун “Билим” редакциялык басма бөлүмүндө даярдалып,
басмадан чыгарылды.

Биздин дарек: 723500, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331.
Байланыш телефону: +996 553 50 00 54
Факс: (+9963222) 70915
Электрондук дарек: journal-mpht@oshsu.kg
Сайт: www.oshsu.kg

Негиздөөчүсү – Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги,
Ош мамлекеттик университети

Басууга берилди: 30.03.2024
Көлөмү: 26,7 б.т.
Форматы: 176х250 1/8 Нуска: 300 д.

«Билим» редакциялык – басма бөлүмү