e-ISSN 1694-8645

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

BULLETIN OSH STATE UNIVERSITY
MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES

№2 (2023)

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА

ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН

ЖАРЧЫСЫ

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

Илимий журнал

№2, 2023

ВЕСТНИК

ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

Научный журнал

BULLETIN

Osh State University

MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNIQUE

СОДЕРЖАНИЕ

Аблабеков Б.С., Аблабеков А.Б., Расулова А.Р. Обратная задача определения временного источника в уравнении диффузии с дробными по времени производными.. **6**

Апаков П., Мамажонов С. М. Решение краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с несимметричными условиями по времени.. **15**

Арзикулов Ф.Н., Уринбоев Ф.С., Абдумуминов М. Характеризация дифференцирований на алгебрах Исаева-Кислицин….. **26**

Арзикулов Ф.Н., Уринбоев Ф.С., Абдумуминов М. Характеризация дифференцирований и автоморфизмов на алгебрах Исаева-Кислицина.. **33**

Асанкулова М., Эшенкулов П, Искандарова Г.С. Задача распределения сырья между потребителями с учетом договорных условий.. **47**

Байзаков А. Б., Шаршенбеков М.М., Момбеков А. Дж. Математическое моделирование магических квадратов высокого порядка и их приложения к информационной безопасности.. **56**

Бердимуратов А.М. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.. **66**

Исломов Б.И., Ахмадов И.А. Базисность по Риссу системы корневых функций краевой задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения с оператором Герасимова-Капуто.. **75**

Керимбеков А., Баетов А.К., Доулбекова С.Б. О разрешимости задачи оптимизации с минимальной энергией при граничном управлении колебательным процессом.. **80**

Керимбеков А., Момбекова Г.Б. Синтез оптимального граничного управления при минимизации кусочно-линейного функционала.. **90**

Мамадалиев Н.А., Бекниязов А.Е. Об одной задаче преследования дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа.. **97**

Матанова К.Б. Задача определения источников в псевдопараболическом уравнении третьего порядка.. **104**

Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами.. **115**

Сулаймонов Ф.У. Абдукодирова М. Моделирование фильтрация и перенос вещества в цилиндрической двухзонной среде с учетом неоднородности поля скоростей фильтрации.. **124**

Урдалетова А.Б., Кыдыралиев С.К., Бурова Е.С. Линейные разностные уравнения первого порядка с приложениями........ **132**

Ушаков А.Л. Еремчук М.П. Расчет изгиба мембраны на упругом основании........ **140**

Хасанов А.Х. Рашидов С.Г. Автомодельные решения для одного класса параболического уравнения с вырождающимся коэффициентом........ **147**

Эргашев Т.Г., Арзикулов З.О., Холмирзаев М.А. Формулы разложения для гипергеометрических функций двух переменных и их применение к теории сингулярных эллиптических уравнений........ **149**

Aripov M. M., Atabaev O. X. On the blowing-up of solutions of one degenerate cross-wise system with nonlinear boundary conditions........ **158**

Ashurov R. R, Saparbayev R. A. Stability of the time-dependent identification problem for a fractional telegraph equation with the caputo derivative........ **166**

Ibragimov G.I. Muminov Z.E. Optimal number of pursuers in the game on the 1-skeleton of tesseract........ **169**

Rahmatullaev M.M., Abraev B.U. Ground states for the sos model with competing binary interactions on a cayley tree of order three........ **180**

Rahmatullaev M.M., Tukhtabaev A.M. *S*ome constructive P-adic generalized gibbs measures for the ising model on a cayley tree........ **187**

Raxmatullayev M.M., Abdukaxorova Z.T. New weakly periodic $P-$ adic generalized gibbs measure for the $P-$adic ising model on the cayley tree of order two........ **195**

Samatov B.T., Turgunboeva M.A. Differential l-capture and evasion games with inertial players under geometric constraints on controls........ **202**

Fayziyev A.K. Nonlinear two-point boundary value problem for a second order impulsive system of integro-differential equations with mixed maxima........ **208**

Hasanov A. Yuldashova K. Integral representation for hypergeometric function of the mittag-leffler type $\bar{F}_B^{(3)}$ **220**

Резолюция международной научной конференции “Актуальные проблемы математики и образования”........ **223**

Жизнь и деятельность Келдибая Алымкулова........ **224**

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_6

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННОГО ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ ДИФФУЗИИ С ДРОБНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физико-математических наук, профессор, Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына, г. Бишкек
e-mail: ablabekov_63@mail.ru
Аблабекова Асел Бактыбаевна, аспирантка
e-mail: aselya05@mail.ru
Расулова Айзат Расуловна, магистрантка
e-mail:rasylovaaizat@gmail.com
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек

Аннотация. *В работе исследуется обратная задача определения неизвестного источника зависящего от времени в задаче Коши для уравнения диффузии с дробными по времени производными с переопределением в точке x = 0. Для решения обратной задачи используется фундаментальное решение уравнения диффузии с дробными по времени производными. Обратная задача сводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. С помощью метода последовательных приближений доказывается существование и единственность решения рассматриваемой задачи. Также получена оценка устойчивости.*

Ключевые слова: *обратная задача, задача Коши, дробная производная Герасимова–Капуто, Функция Миттаг–Леффлера, интегральное уравнение.*

УБАКЫТ БОЮНЧА-БӨЛЧӨК ТУУНДУЛУУ ДИФФУЗИЯ ТEҢДЕМЕСИНДЕГИ УБАКЫТТАН КӨЗ КАРАНДЫ БОЛГОН БУЛАК ФУНКЦИЯСЫН АНЫКТОО ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович,
физика-математика илимдеринин доктору,
профессор, Ж. Баласагын атындагы Кыргыз
улуттук университети, Бишкек ш.,
e-mail: ablabekov_63@mail.ru
Аблабекова Асел Бактыбаевна, аспирант
e-mail: aselya05@mail.ru
Расулова Айзат Расуловна, магистрант
e-mail:rasylovaaizat@gmail.com
Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук
университети, Бишкек ш.

Аннотация. *Бул иште убакыт-боюнча бөлчөк туундулу диффузиянын теңдеме үчүн Коши маселесиндеги убакытка көз каранды болгон белгисиз булак функциясын x = 0 чекитиндеги кайра аныктоо шарты менен аныктоо тескери маселеси изилденет. Тескери маселени чечүү үчүн убакыт боюнча бөлчөк туундулу диффузиялык теңдемесинин фундаменталдык чыгарылышы колдонулат. Тескери маселе экинчи түрдөгү эквиваленттүү сызыктуу Вольтерранын интегралдык теңдемеге келтирилет. Кезектеги жакындоо ыкмасын колдонуу менен биз каралып жаткан маселенин чечиминин бар экендигин жана уникалдуулугун далилдейбиз. Чыгарылыштын туруктуулук баалоосу да алынган.*

Урунттуу сөздөр: *тескери маселе, Коши маселеси, Герасимов – Капуто бөлчөк туундусу, Миттаг – Леффлер функциясы, интегралдык теңдеме.*

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING A TEMPORARY SOURCE IN THE HEAT EQUATION WITH TIME-FRACTIONAL DERIVATIVES

Ablabekov Baktybay Saparbekovich, doctor of physical
and mathematical sciences, professor, Kyrgyz National
University J. Balasagyn, Bishkek
e-mail: ablabekov_63@mail.ru
Ablabekova Asel Baktybaevna, postgraduate student
e-mail: aselya05@mail.ru
Rasulova Aizat Rasulovna, master student
e-mail: rasylovaaizat@gmail.com
Kyrgyz National University
J. Balasagyn, Bishkek

Abstract: *. The paper investigates the inverse problem of determining the unknown time-dependent source in the Cauchy problem for the diffusion equation with time-fractional derivatives with redefinition at the point x = 0. To solve the inverse problem the fundamental solution of the diffusion equation with time-fractional derivatives is* *used. The inverse problem is reduced to an equivalent linear Volterra integral equation of the second kind. Using the method of successive approximations, we prove the existence and uniqueness of a solution to the problem under consideration. A stability estimate is also obtained.*

Keywords: *inverse problem, Cauchy problem, Gerasimov-Caputo fractional derivative, Mittag-Leffler function, integral equation.*

Введение. Термин дробное исчисление появился более 300 лет назад. Это обобщение обычного дифференцирования и интегрирования в нецелом (произвольном) порядке.

В этой работе рассматривается обратная задача определения источника, зависящее от времени в уравнении теплопроводности с дробными по времени производными по некоторой дополнительной информации о решении прямой задачи.

1. Определение дробных проиводных и интегралов.

Введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего исследования.

Определение 1. Дробным дифференциальным оператором Капуто D_t^α порядка $\alpha, 0<\alpha\le 1$ для дифференцируемой функции f называется оператор, определенный выражением [3,4]:

$$D_t^\alpha\left[f\right](t)=I\left[f'(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\alpha}d\tau, & 0<\alpha<1,\\ f'(t), & \alpha=1,\end{cases}\qquad(1.1)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция.

Определение 2. Дробным интегральным оператором Римана-Лиувилля $D_{0t}^{-\alpha}$ порядка $\alpha, 0<\alpha\le 1$ для интегрируемой функции f называется оператор, определенный выражением [3,4]:

$$D_{0t}^{-\alpha}f(t)=I^\alpha\left[f(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau, & 0<\alpha<1,\\ \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau, & \alpha=1.\end{cases}\qquad(1.2)$$

Определение 3. Двупараметрическая функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ определяемая формулой [3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},\quad(\alpha>0,\quad\beta>0)\qquad(1.3)$$

называется функцией Миттаг-Леффлера.

Приведем некоторые соотношения, приведенные в [3]:

$$E_{1,1}(z)=e^z, \qquad\qquad E_{1,1}(z)=\frac{e^z-1}{z}, \tag{1.4}$$

$$E_{2,1}(z)=ch\sqrt{z},\ E_{2,1}(z)=\frac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \tag{1.5}$$

$$E_{1/2,1}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z}erfc(-\sqrt{z}), \tag{1.6}$$

При $\beta=1$ получим однопараметрическую функцию Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\equiv E_\alpha(z). \tag{1.7}$$

Обобщение формулы Ньютона-Лейбница, при α, $(0<\alpha\le 1)$

$$D_{0t}^{-\alpha}D_t^\alpha z(t)=z(t)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z^{(\alpha-1)}(0). \tag{1.8}$$

2. Постановка задачи. Пусть $Q_T=\{(x,t):x\in\mathbb{R},0<t\le T\}$.

Рассмотрим следующее одномерное аномально-диффузионное уравнение:

$$Lu\equiv D_t^\alpha u-u_{xx}=F(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$u(x,0)=\varphi(x), x\in\mathbb{R}, \tag{2.2}$$

где $\varphi(x)$, $F(x,t)$ – некоторые заданные функции.

Определение 1. Классическим решением задачи (2.1)-(2.2) в области Q_T назовем функцию $u=u(x,t)$ из класса $D_t^\alpha u(x,t)\in C(Q_T)$, $u_{xx}(x,t)\in C(Q_T)$, которая удовлетворяет уравнению (2.1) при всех $(x,t)\in Q_T$, начальному условию (2.2) при всех $x\in\mathbb{R}$.

Для задачи (2.1), (2.2) справедлива теорема существования и единственности решения.

Лемма 1. Если $F(x,t)\in C_b(\bar{Q}_T)$, $\varphi(x)\in C_b^2(\mathbb{R})$, то существует единственная функция $u(x,t)\in C_b^2(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющее задаче (2.1), (2.2).

Доказательство. Для доказательство этой леммы, используем представление следующей задачи Коши [3]:

$$Lu\equiv D_t^\alpha u-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}-C(x)u=F(x,t),\quad (x,t)\in Q_T$$

$$u(x,0)=u_0(x), x\in\mathbb{R}^n,$$

которое определяется формулой

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n} Z(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi+ \\ +\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} Y(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{2.3}$$

где

$$Z(x-\xi,t)=\pi^{-n/2}\left|x-\xi\right|^{-n} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{1}{4}t^{-\alpha}\left|x-\xi\right|^2\Big|_{(n/2,1/2)(1,1)}^{(1,\alpha)}\right],$$

$$Y(x-\xi,t-\tau)=\pi^{-n/2}\left|x-\xi\right|^{-n}(t-\tau)^{\alpha-1}H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{1}{4}(t-\tau)^{-\alpha}\left|x-\xi\right|^2\Big|_{(n/2,1)(1,1)}^{(\alpha,\alpha)}\right],$$

функция H является H – функцией Фокса. Функции $Y(x,t)$ и $Z(x,t)$ связаны формулой $Y(x,t)=D_t^{\alpha}Z(x,t)$. (см. [3]).

Из формулы (2.3) при $n=1$, имеем

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{2.4}$$

Отметим, что для функций $Z(x,t)$, $Y(x,t)$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^i Z(x,t)}{\partial x^i}\right|\le Ct^{-\frac{\alpha(1+i)}{2}}\exp\left\{-\mu_i t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right\},\quad i=0,1,2, \tag{2.5}$$

$$\left|\frac{\partial^i Y(x,t)}{\partial x^i}\right|\le Ct^{-\frac{\alpha(1+i)}{2}-1+\alpha}\exp\left\{-\mu_i t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right\},\quad i=0,1,2, \tag{2.6}$$

для $x^2>t^{\alpha}$; $\mu_0:=(2-\alpha)^{\alpha/(2-\alpha)}2^{-2/(2-\alpha)}$ и μ_i может выбрано как μ_0.

$$\left|\frac{\partial^i Z(x,t)}{\partial x^i}\right|\le Ct^{-\frac{\alpha(1+i)}{2}},\quad i=0,1,2, \tag{2.7}$$

$$\left|\frac{\partial^i Y(x,t)}{\partial x^i}\right|\le Ct^{-\frac{\alpha(i-1)}{2}-1},\quad i=0,1,2, \tag{2.8}$$

для $x^2\le t^{\alpha}$; $(x,t)\in Q_T$.

Для функции $Z(x,t)$ справедлива

$$\int_{\mathbb{R}} Z(x,t)dx=1, \tag{2.9}$$

и верно неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} Y(x,t)dx=C_0t^{\alpha-1},\quad t\in[0,T], \tag{2.10}$$

где C_0 зависит только от α.

Пусть $\varphi_0:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\varphi(x)\right|$, $F_0:=\left\|F\right\|^{\alpha}$. Тогда из (2.3), (2.9), (2.10), имеем

$$\lfloor u(x,t)\rfloor \le \int_{\mathbb{R}} |Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)|\,d\xi + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} |Y(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)|d\xi d\tau \le$$
$$\le \varphi_0 + F_0\frac{T^\alpha}{\alpha}.$$

Аналогично, можно показать, что производные $D_t^\alpha u, u_{xx}$ тоже ограничены.

Перейдем теперь к исследованию обратной задачи.

Пусть $F(x,t)=f(t)h(x,t)+g(x,t),\quad h(x,t),g(x,t)$ – известные функции, а $f(t)$ – искомая функция.

$$u(0,t)=\psi(t), 0\le t\le T, \tag{2.7}$$

Определение 2. Пару функций $\{u,\ f\}$ назовем решением задачи (2.1), (2.2) и (2.7), если

1) $u(x,t)$ классическое решение задачи Коши (2.1), (2.2) в Q_T,
2) $u(0,t)=\psi(t), 0\le t\le T.$

Теорема 1. Пусть функции удовлетворяют условиям $h(x,t), g(x,t)\in C_b^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, $\varphi(x)\in C_b^{2+\alpha}(\mathbb{R}),\ \ \psi\in C^{1+\alpha}[0,T]$ и выполнено условие согласования $\phi(0)=\psi(0)$. Тогда решение обратной задачи (2.1), (2.2), (2.7) существует и единственно.

Доказательство. Заметим, что так как задача (2.1), (2.2), (2.7) линейна, то ее решение можно искать в виде

$$(u,\ f)=(v,0)+(w,\ f),$$

где

$$Lv=g(x,t), \qquad v(x,0)=\phi(x),$$
$$Lw=\ f(t)h(x,t), w(x,0)=0,\ w(0,t)=\psi(t)-v(0,t).$$

Отсюда следует, что для доказательства теоремы разрешимости задачи (2.1), (2.2), (2.7) достаточно доказать существование и единственность решения обратной задачи определения пары функций $\{w,\ f\}$ из условий

$$Lw=\ f(t)\,h(x,t), (x,t)\in Q_T, \tag{2.8}$$
$$w(x,t)=0, x\in\mathbb{R}, \tag{2.9}$$
$$w(0,t)=\psi(t)-v(0,t)=\psi_0(t), 0\le t\le T. \tag{2.10}$$

Так как любое решение задачи (2.8)-(2.10) из пространства $H^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}$ имеет вид

$$w(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)\,f(\tau)h(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{2.11}$$

то применив оператор к равенству (2.11) D_t^α, и положив $x=0$, а также учитывая, что $D_t^\alpha w=w_{xx}+f(t)h(x,t)$, получим относительно $f(t)$ линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$D^{\alpha}\psi_0(t)=[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}Y(x-\xi,t-\tau)h(\xi,\tau)\,d\xi]\big|_{x=0}f(\tau)\,d\tau+f(t)\,h(0,t),$$ или

$$f(t)=\int\limits_0^t K(t,\tau)\,f(\tau)d\tau+D^{\alpha}\psi_0(t)/h(0,t),\,0\le t\le T, \tag{2.12}$$

где

$$K(t,\tau)=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{\mathbb{R}}Y(x-\xi,t-\tau)h(y,\tau)\,dy\right]\big|_{x=0}/\,h(0,t). \tag{2.13}$$

Как и в работе, можно показать, что ядро $K(t,\tau)$, определенное формулой (2.13), удовлетворяет неравенствам

$$|K(t,\tau)|<C_2, \tag{2.14}$$

$$\left|K(t,\tau)-K(t^{\circ},\tau)\right|\le C_3\left|t-t^{\circ}\right|^{\alpha/2}. \tag{2.15}$$

Отсюда следует, что решение интегрального уравнения (2.12) существует, единственно и имеет вид

$$f(t)=D^{\alpha}\psi_0(t)h^{-1}(0,t)+\int\limits_0^t H(t,\tau)D^{\alpha}\psi_0(\tau)\,h^{-1}(0,\tau)\,d\tau, \tag{2.16}$$

где функция $H(t,\tau)$, разрешающее ядро для $K(t,\tau)$.

Покажем, что функция $f(t)$, определенная формулой (2.16), принадлежит пространству $C^{\alpha/2}[0,T]$. Для этого рассмотрим разность $f(t)-f(t^{\circ})$. Тогда из (2.12) получаем

$$h(0,t)\,f(t)-h(0,t^{\circ})\,f(t^{\circ})=D^{\alpha}\psi_0(t)-D^{\alpha}\psi_0(t^{\circ})-\int\limits_0^t K(t,\tau)\,f(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{t^{\circ}}K(t^{\circ},\tau)\,f(\tau)d\tau=D^{\alpha}\psi_0(t)-D^{\alpha}\psi_0(t^0)-$$

$$-\int\limits_0^t[K(t,\tau)-K(t^0,\tau)]\,f(\tau)\,d\tau. \tag{2.17}$$

Из (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) и предположений теоремы получаем неравенство

$$\left|f(t)-f(t^0)\right|\le C_1\left|t-t^0\right|^{\alpha/2}+C_2\left|t-t^0\right|+C_3\left|t-t^0\right|^{\alpha/2}. \tag{2.18}$$

Из (2.18) получим, что $f(t)\in C^{\alpha/2}[0,T]$.

Теперь покажем, что пара функций $w(x,t)$, $f(t)$, где функция $f(t)$ определена формулой (2.16), а $w(x,t)$-формулой

$$w(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)\,h(\xi,\tau)\,f(\tau)d\xi\,d\tau \qquad (2.19)$$

является решением задачи (2.8)-(2.10). Действительно, функция $w(x,t)$, заданная формулой (2.19), является единственным решением прямой задачи (2.8), (2.9), так как функция $w(x,t)\in C_b^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ и удовлетворяет условиям (2.8), (2.9). Проверим, что условие (2.10) также выполнено. Пусть функция $\psi_1(t)=w(0,t)$ удовлетворяет равенству

$$D^{\alpha}\psi_1(t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)\,f(\tau)h(\xi,\tau)d\xi d\tau\big|_{x=0}+f(t)\,h(0,t), \qquad (2.20)$$

Так как $f(t)$ – решение уравнения (2.12), то из (2.12) и (2.20) относительно функции $\psi_2(t)=\psi_0(t)-\psi_1(t)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение с дробной производной:

$$D^{\alpha}\psi_2=0, \psi_2(0)=0. \qquad (2.21)$$

Следовательно, $\psi_0(t)=\psi_1(t)$ и условие (2.10) выполнено.

Отметим, что доказано не только существование решения, но и дан метод нахождения функции $f(t)$.

Единственность решения задачи I следует из следующей леммы.

Лемма 1. Пара функций $w(x,t), f(t)$ – решение задачи (2.8)-(2.10) тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ есть решение интегрального уравнения

$$D^{\alpha}\psi_0(t)=\int_0^t K_1(t,\tau)\,f(\tau)d\tau+h(0,t)\,f(t),$$

где $K_1(t,\tau)=h(0,t)K(t,\tau),$ а функция w определяется формулой (2.19).

Доказательство. Было доказано, что если $f(t)$ решение (2.20), то задача (2.8)-(2.10) имеет решение. Обратно, пусть w и f решение задачи (2.8)-(2.10). Так как $w\in C_b^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, $f\in C^{\alpha/2}[0,T]$, то функция w представима в форме

$$w(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)\,h(\xi,\tau)\,f(\tau)d\xi\,d\tau.$$

Из условия (2.10) и уравнения (2.10) получим, что $f(t)$ – решение интегрального уравнения (2.20). Лемма 1 доказана.

Таким образом, мы показали, что решение обратной задачи (2.8)-(2.10) существует и единственно. Следовательно, существует единственное решение задачи (2.1)-(2.3). Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J. “Theory and Applications of Fractional Differential Equations,” *North-Holland Mathematics Studies,* Vol. 204, 2006.

2. Miller K. S. and. Ross B. “An Introduction to the Frac-tional Calculus and Fractional

Differential Equations," John Wiley, New York, 1993.
3. Podlubny I. "Fractional Differential Equations," Aca-demic Press, San Diego, New York, London, 1999.
4. Eidelman S.D., Kochubei A.N. Cauchy Problem for Fractional Diffusion Equations, Vol. 199, yr.2018.pages 211-255.
5. Аблабеков Б.С., Жуман кызы.А. О разрешимости первой начально-краевой задачи для одномерного псевдопараболического уравнения с дробными производными // Вестник Ошского государственного университета. 2022, № 1. С. 29-37.

УДК 517.951.2
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_15

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО ВРЕМЕНИ

Апаков Юсупжон Пулатович, д.ф.-м.н., профессор,
yusupjonapakov@gmail.com
Институт Математика им. В. И. Романовского
АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
Наманганский инженерно-строительный институт,
Наманган, Узбекистан
Мамажонов Санжарбек Мирзаевич, аспирант,
sanjarbekmamajonov@gmail.com
Институт Математика им. В. И. Романовского
АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В работе для неоднородного уравнения четвертого порядка с младшими членами с переменными коэффициентами рассмотрена одна краевая задача в прямоугольной области. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Решение выписано через построенную функцию Грина. При обосновании равномерной сходимости установлена отличность от нуля “малого знаменателя”.*

Ключевые слова: *уравнение четвертого порядка, кратные характеристики, младшие члены, краевая задача, единственность, существование, функция Грина.*

SOLUTION OF A BOUNDARY PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER NON-HOMOGENEOUS EQUATION WITH NON-SYMMETRIC TIME CONDITIONS

Apakov Yusupjon Pulatovich, doctor of
physical and mathematical sciences, professor,
yusupjonapakov@gmail.com
V. I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy

of Sciences, Tashkent, 100174, Uzbekistan,
Namangan Engineering-Construction Institute,
Namangan, 160103, Uzbekistan
Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich, post-graduate student,
sanjarbekmamajonov@gmail.com
V. I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy
of Sciences, Tashkent, 100174, Uzbekistan

Abstract: : *In this paper, for an inhomogeneous fourth-order equation with lower terms with variable coefficients, one boundary value problem in a rectangular domain is considered. The uniqueness of the solution of the stated problem is proved by the method of energy integrals. The solution is written by the constructed Green's function. In substantiating the uniform convergence, the "small denominator" is established to be nonzero.*

Keywords: *fourth-order equation, multiple characteristics, lower terms, boundary value problem, uniqueness, existence, Green's function.*

1. Введение (Introduction). Изучение многих задач газовой динамике, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см. [1]-[4]).

В данной работе в области $\Omega = \{(x, y): 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассматривается уравнение четвертого порядка в виде

$$U_{xxxx} - U_{yy} + A_1(x)U_{xxx} + A_2(x)U_{xx} + A_3(x)U_x + A_4(x)U + A_5U_y = F(x, y),$$

где $p, q, A_5 \in R$, $F(x, y), A_i(x), i = \overline{1,4}$ – заданные достаточно гладкие функции.

Заменой

$$U(x, y) = u(x, y)\exp\left(-\frac{1}{4}\int_0^x A_1(\xi)d\xi + \frac{A_5}{2}y\right)$$

это уравнение можно привести к уравнению

$$L[u] = u_{xxxx} + a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x + a_3(x)u - u_{yy} = f(x, y), \tag{1}$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1,3}$ выражается через $A_j(x)$, $j = \overline{1,4}$ и A_5,

$$f(x, y) = \exp\left[\frac{1}{4}\int_0^x A_1(\xi)d\xi - \frac{A_5}{2}y\right]F(x, y).$$

Уравнение (1), обычно называется уравнением четвертого порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени.

Монография Джураева Т.Д., Сопуева А. [5] посвящена классификаций дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка и решению краевых задач для таких уравнений. Согласно лемме 1.3 из [5], уравнение (1) относится к параболическому типу.

В работах [6]-[11] изучены ряд корректных краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, разработанную в этих работах методику применяем для уравнения четвертого порядка.

Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. в работе [12] рассмотрели задачу с краевыми условиями для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками.

Сабитов К. Б, Фадеева О. В. в работе [13] решили задачу с начальными и граничными условиями для вынужденных колебаний консольной балки.

Иргашев Б. Ю. в статье [14] изучал краевую задачу для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками методом построения функции Грина.

Уринов А.К., Азизов М.С. в работе [15] исследовали задачу для уравнения четвертого порядка с неизвестной правой частью.

Задача, изучаемая в данной статье, во многим отличается от упомянутых выше работ. Во-первых, в уравнение включены младшие члены. Во-вторых, в вышеупомянутых работах собственные функции найдены по переменной x, по y делают остальные выкладки. В нашем работе собственные функции находим по переменной y, а по x решаем задачу при помощи построения функции Грина и получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода, решая это уравнение находим решение поставленной задачи.

Для уравнения (1) в области Ω изучим следующую задачу.

Задача A **.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C_{x,y}^{4,2}(\Omega)\cap C_{x,y}^{3,1}\left(\bar{\Omega}\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и следующим краевым условиям:

$$u(x,0)=u_y(x,q)=0,\quad 0\le x\le p,$$

$$\begin{aligned} &u(0,y)=\psi_1(y), \qquad u(p,y)=\psi_2(y),\\ &u_{xx}(0,y)=\psi_3(y), \quad u_{xx}(p,y)=\psi_4(y),\quad 0\le y\le q, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\psi_i(y)$, $i=\overline{1,4}$ заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работе [12] рассмотрен случай $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, а в работах [13], [15-17] исследованы краевые задачи для модельных уравнений четвертого порядка спектральном методом. В работах [18-19], исследованы краевые задачи для уравнения (1) когда все коэффициенты постоянные. В статье [20] исследовано первая краевая задача для уравнения (1).

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1(x) \le 0$, $a_1''(x) - a_2'(x) + 2a_3(x) \ge 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

В области Ω справедливо тождество

$$uL[u] \equiv 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx} - u_x u_{xx} + a_1(x)uu_x - \frac{1}{2}a_1'(x)u^2 + \frac{1}{2}a_2(x)u^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right) +$$
$$+u_{xx}^2 - a_1(x)u_x^2 + \left(a_3(x) + \frac{1}{2}a_1''(x) - \frac{1}{2}a_2'(x)\right)u^2 + u_y^2 = 0. \qquad (3)$$

Интегрируя тождество (3) по области Ω и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\int_0^p\int_0^q u_{xx}^2(x,y)\,dxdy - \int_0^p\int_0^q a_1(x)u_x^2(x,y)\,dydx + \int_0^p\int_0^q u_y^2(x,y)\,dxdy +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^p\int_0^q \left(a_1''(x) - a_2'(x) + 2a_3(x)\right)u^2(x,y)\,dydx = 0.$$

Из третьего интеграла получим

$$u_y(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = h(x),$$

а из первого интеграла

$$u_{xx}(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = xb_1(y) + b_2(y).$$

Отсюда имеем следующий вывод, что

$$u(x,y)=h(x)=xb_1+b_2, \quad b_1,b_2=const.$$

Учитывая $u(0,y)=0$ и $u(p,y)=0$, имеем

$$u(0,y)=b_2=0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y)=b_1x,$$

$$u(p,y)=b_1p=0 \quad \Rightarrow \quad b_1=0.$$

Тогда имеем

$$u(x,y)=0.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Отметим, что при нарушении условий теоремы 1, однородная задача A для однородного уравнение (1) может иметь нетривиальные решения. Например, легко можно убедится, когда $a_1=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2>0$, $a_2=0$, $a_3=-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}\right)^2<0$, задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2p}\right)^2 u(x,y)-u_{yy}=0, \\ u(x,0)=u_y(x,q)=0, \\ u(0,y)=u(p,y)=u_{xx}(0,y)=u_{xx}(p,y)=0, \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения вида

$$u_{n,k}(x,y)=\sin\left(\frac{\pi k}{p}x\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}y\right), \quad n,k\in N.$$

Отсюда, следует, что если a_3 является параметром разделение, тогда при $a_3\ge 0$ задача корректно поставлена, при $a_3<0$ задача не корректна, т.е. существует спектр.

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

1) $C<\dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+3\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+3\right)}$;

2) $\psi_i(0)=\psi_i'(q)=\psi_i''(0)=0$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$;

3) $f(x,0)=f_y(x,q)=0$, $\int\limits_0^q \left|f_{yy}(x,y)\right|dy<\infty$, $\int\limits_0^q \left|f_{xyy}(x,y)\right|dy<\infty$, $0\le x\le p$,

то решение задачи A существует. Здесь,

$$C = \max_{\xi\in[0,p]}\left\{\left|a_i^{(j)}(\xi)\right|, \left|a_1''(\xi)\right|, i=\overline{1,3},\ j=0,1\right\}, \qquad \mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{4q}}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y'(q) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Известно, что нетривиальное решение задачи (4), существует только при

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}\right)^2, \quad n \in N.$$

Эти числа являются собственными значениями задачи (4), а соответствующие ими собственные функции, которые образуют в $L_2[0,p]$ полную ортонормированную систему, имеют следующий вид:

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}y\right).$$

Решение задачи A ищем в виде

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)\cdot Y_n(y). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (1), учитывая граничные условия (2), получим задачу:

$$\begin{cases} X_n^{(4)}(x) + a_1(x)X_n''(x) + a_2(x)X_n'(x) + a_3(x)X_n(x) + \lambda_n X_n(x) = f_n(x), \\ X_n(0) = \psi_{1n},\ X_n(p) = \psi_{2n},\ X_n''(0) = \psi_{3n},\ X_n''(p) = \psi_{4n}, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\psi_{in} = \int_0^q \psi_i(\eta)Y_n(\eta)d\eta, \quad i=\overline{1,4}, \quad f_n(x) = \int_0^q f(x,\eta)Y_n(\eta)d\eta.$$

Введем обозначение

$$V_n(x) = X_n(x) - \rho_n(x), \tag{7}$$

здесь

$$\rho_n(x) = \frac{p-x}{p}\psi_{1n} + \frac{x}{p}\psi_{2n} + \frac{3x^2p - x^3 - 2xp^2}{6p}\psi_{3n} + \frac{x^3 - xp^2}{6p}\psi_{4n}. \tag{8}$$

Учитывая (8), подставим (7) в (6), получим задачу

$$\begin{cases} V_n^{(4)}(x)+\lambda_n V_n(x)=g_n(x)-a_1(x)V_n''(x)-a_2(x)V_n'(x)-a_3(x)V_n(x), \\ V_n(0)=V_n(p)=V_n''(0)=V_n''(p)=0, \end{cases} \tag{9}$$

здесь

$$g_n(x)=f_n(x)+d_{1n}(x)\psi_{1n}+d_{2n}(x)\psi_{2n}+d_{3n}(x)\psi_{3n}+d_{4n}(x)\psi_{4n},$$

$d_{in}(x)$, $i=\overline{1,4}$ – известные функции.

Ищем решение задачи (9) в следующем виде:

$$\begin{gathered} V_n(x)=\int_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)d\xi- \\ -\int_0^p G_n(x,\xi)\left(a_1(\xi)V_n''(\xi)+a_2(\xi)V_n'(\xi)+a_3(\xi)V_n(\xi)\right)d\xi, \end{gathered} \tag{10}$$

где $G_n(x,\xi)$ функция Грина задачи

$$\begin{cases} V_n^{(4)}(x)+\lambda_n V(x)=0, \\ V_n(0)=V_n(p)=V_n''(0)=V_n''(p)=0, \end{cases}$$

которая обладает следующими свойствами:

$$G_{nxxxx}(x,\xi)+\lambda_n G_n(x,\xi)=0, \quad x\neq\xi,$$

$$G_n(0,\xi)=G_n(p,\xi)=G_{nxx}(0,\xi)=G_{nxx}(p,\xi)=0,$$

$$G_n(x,x-0)-G_n(x,x+0)=0, \quad G_{nx}(x,x-0)-G_{1nx}(x,x+0)=0,$$

$$G_{nxx}(x,x-0)-G_{nxx}(x,x+0)=0, \quad G_{nxxx}(x,x-0)-G_{nxxx}(x,x+0)=1.$$

В равенстве (10) интегрируя второе слагаемое по частям и введя обозначения

$$\beta_n(x)=\int_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)d\xi,$$

$$\bar{G}_n(x,\xi)=\left(a_2'(\xi)-a_1''(\xi)-a_3(\xi)\right)G_n+\left(a_2(\xi)-2a_1'(\xi)\right)G_{n\xi}-a_1(\xi)G_{n\xi\xi},$$

получим

$$V_n(x)=\beta_n(x)+\int_0^p \bar{G}_n(x,\xi)V_n(\xi)d\xi, \tag{11}$$

являющееся интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Запишем решение

(11) с помощью резольвенты

$$V_n(x)=\beta_n(x)+\int_0^p R_n(x,\xi)\beta_n(\xi)d\xi, \tag{12}$$

где

$$R_n(x,\xi)=\bar{G}_{0n}(x,\xi)+\sum_{m=1}^{\infty}\bar{G}_{mn}(x,\xi),$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi)=\int_0^p \bar{G}_n(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds,\ m=1,2,\dots, \qquad \bar{G}_{0n}(x,\xi)=\bar{G}_n(x,\xi).$$

В силу (5), (7), (8) и (12) решение задачи A имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\big(V_n(x)+\rho_n(x)\big)Y_n(y). \tag{13}$$

Проверим (13) на сходимость. В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M .

Для оценки резольвенты мажорирующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{\infty}(Jp)^{m+1}, \tag{14}$$

где

$$J=C\left(\frac{2}{\mu_0}+\frac{3}{\mu_0^2}\left(1+e^{-4\mu_0 p}\right)+\frac{3}{\mu_0^3}\right)\left(1-e^{-2\mu_0 p}\right)^{-2}.$$

Условие 1, теоремы 2 можно записать в виде

$$C\left(\frac{2}{\mu_0}+\frac{3}{\mu_0^2}\left(1+e^{-4\mu_0 p}\right)+\frac{3}{\mu_0^3}\right)\left(1-e^{-2\mu_0 p}\right)^{-2}p<1,$$

отсюда

$$Jp<1,$$

тогда мажорирующий ряд (14) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В этом случае резольвента равномерно сходится, и его оценка имеет вид

$$\left|R_n(x,\xi)\right|\le\frac{J}{1-Jp}\le M. \tag{15}$$

Теперь оценим $\beta_n(x)$. Сначала, учитывая условия 2-3, теоремы 2, интегрируем по частям ψ_{in} три раза, а $f_n(x)$ два раза и находим следующие оценки:

$$|\psi_{in}|\le\frac{M}{n^3}|\Psi_{in}|,\quad i=\overline{1,4},\quad \left|f_n(x)\right|\le\frac{M}{n^2}\left|\Phi_n(x)\right|,\quad n\in N. \tag{16}$$

где $\Psi_{in} = \sqrt{\frac{2}{q}}\int_0^q \psi_i''''(\eta)\sin\left(\frac{\pi n}{q}\eta\right)d\eta$, $i=\overline{1,4}$, $\Phi_n(x) = \int_0^q f_{\eta\eta}(x,\eta)Y_n(\eta)d\eta$.

Интегрируем $\beta_n(x)$ по частям один раз и находим оценку

$$\left|\beta_n(x)\right| \le \frac{M}{n^3}\left(\left|\Psi_{in}\right| + \left|\Psi_{2n}\right| + \left|\Psi_{3n}\right| + \left|\Psi_{4n}\right|\right) + O\left(n^{-4}\right). \tag{17}$$

Согласно (15), (17) имеем

$$\left|V_n(x)\right| = \frac{M}{n^3}\left(\left|\Psi_{in}\right| + \left|\Psi_{2n}\right| + \left|\Psi_{3n}\right| + \left|\Psi_{4n}\right|\right) + O\left(n^{-4}\right). \tag{18}$$

После некоторых вычислений находим оценку

$$\left|\rho_n(x)\right| \le \frac{M}{n^3}\left(\left|\Psi_{in}\right| + \left|\Psi_{2n}\right| + \left|\Psi_{3n}\right| + \left|\Psi_{4n}\right|\right). \tag{19}$$

учитывая (18), (19) получим

$$\left|u(x,y)\right| \le M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\left|\Psi_{in}\right| + \left|\Psi_{2n}\right| + \left|\Psi_{3n}\right| + \left|\Psi_{4n}\right|\right) + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(n^{-4}\right) < \infty.$$

После некоторых вычислений находим оценку

$$\left|u_{xxxx}(x,y)\right| \le M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\left|\Psi_{1n}\right| + \left|\Psi_{2n}\right| + \left|\Psi_{3n}\right| + \left|\Psi_{4n}\right|\right) + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(n^{-2}\right).$$

Используем неравенства Коши-Буняковского и Бесселя и имеем

$$\left|u_{xxxx}(x,y)\right| \le M\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{1n}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{2n}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{3n}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{4n}\right|^2}\right)\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} O\left(n^{-2}\right) \le M\left(\left\|\psi_1''''(y)\right\| + \left\|\psi_2''''(y)\right\| + \left\|\psi_3''''(y)\right\| + \left\|\psi_4''''(y)\right\|\right)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(n^{-2}\right) < \infty,$$

здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{in}\right|^2 \le \left\|\psi_i''''(y)\right\|^2_{L_2(0,q)},\ i=\overline{1,4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая уравнение (1), заключаем, что и u_{yy} тоже сходится. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турбин М.В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершел -Балкли / М.В.Турбин // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. -2013. -№ 2. -С. 246-257.

2. Уизем Дж. Линейние и нелинейные волны: монография / Дж.Уизем. -М.: Мир, 1977. -638 с.

3. Шабров С.А. Об оценках функций влияния одной математической модели четвертого порядка / С.А.Шабров // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. -2015. -№ 2. -С. 168-179.
4. Benney D.J. Interactions of permanent waves of finite amplitude / D.J.Benney, J.C.Luke // J. Math. Phys. 1964. 43. P. 309-313.
5. Джураев Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка / Т.Д.Джураев, А.Сопуев. -Ташкент: Фан, -2000. -144 с.
6. Джураев Т.Д. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени / Т.Д.Джураев, Ю.П.Апаков // Украинский математический журнал. -2010, -том 62. -№1. -С. 40-51.
7. Apakov Yu.P. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics / Yu.P.Apakov, S.Rutkauskas // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. 2011. Vol. 16. №3. P. 255-269.
8. Apakov Yu.P. On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics / Yu.P.Apakov // Ukrainian Mathematical Journal. 2012. Vol. 64. №1. P. 1-11.
9. Apakov Yu.P. Boundary-value problem for a degenerate high-odd-order equation / Yu.P.Apakov, B.Yu.Irgashev // Ukrainian Mathematical Journal. 2015. Vol. 66. №10. -P. 1475-1488.
10. Apakov Yu.P. Third boundary-value problem for a third-order differential equation with multiple characteristics / Yu.P.Apakov, A. Kh. Zhuraev // Ukrainian Mathematical Journal. Vol. 70, № 9. -P. 1467-1476.
11. Apakov Yu.P. On Unique Solvability of Boundary-Value Problem for a Viscous Transonic Equation / Yu.P.Apakov // Lobachevski Journal of Mathematics. 2020 Vol. 41. №9. -P. 1754-1761.
12. Аманов Д. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом / Д.Аманов, М. Б.Мурзамбетова // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. -2013, -выпуск 1, -С. 3-10.
13. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки / К. Б.Сабитов, О. В.Фадеева // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, -2021, -25:1, -С. 51-66.
14. Иргашев Б.Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами / Б.Ю.Иргашев // Бюллетень Института математики, -2019, -№6, -С. 23-30.
15. Urinov A.K. Boundary Value Problems for a Fourth Order Partial Equation with an

Unknown Right-hand Part / A.K.Urinov, M.S.Azizov // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42. №3. P. 632-640.
16. Аманов Д. Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка / Д.Аманов, А.Б.Бекиев, Ж.А.Отарова // УзМЖ. -2015. -№4. -С. 11-18.
17. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий / К.Б.Сабитов // Дифференциальные уравнения, -2020, -том 56, -№6, С. 761-774.
18. Apakov Y.P. A boundary-value problem for the fourth order equation with multiple characteristics in a rectangular domain / Y.P.Apakov, S.M.Mamajonov // Nonlinear Oscillations. Published in vol. 24 (2021), No. 3, P. 291-305.
19. Mamajonov S.M. The third boundary problem for a fourth-order non-homogeneous equation with constant coefficients / S.M.Mamajonov // Bull. Inst. Math., 2022, Vol. 5, No. 6, P. 100-109.
20. Апаков Ю.П. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами / Ю.П.Апаков, С.М.Мамажонов. // Доклады Академии наук Республики Узбекистан (ДАН), -2022, -№4, -С. 7-13.

УДК 512.554.1
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_26

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ НА АЛГЕБРАХ ИСАЕВА-КИСЛИЦИНА

Арзикулов Фарходжон Нематжонович, д.ф.-м. н., доцент,
arzikulovfn@gmail.com
Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Узбекистана, Алмазарский район, улица Университетская 9. Ташкент, Узбекистан,
АГУ, улица Университетская 9, Андижан, Узбекистан
Уринбоев Фуркат Садикджанович, аспирант НамГУ,
furqatjonforever@gmail.com
НамГУ, улица Уйчи 316, Наманган, Узбекистан
Абдумуминов Мурод, Магистр в НамГУ
НамГУ, улица Уйчи 316, Наманган, Узбекистан

Аннотация: *В настоящей работе изучаются простые алгебры, не принадлежащие к известным классам алгебр (ассоциативным алгебрам, альтернативным алгебрам, алгебрам Ли, йордановым алгебрам и т. д.). Такими алгебрами являются простые конечномерные алгебры над полем характеристики 0 без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным. В настоящей работе мы рассматриваем такую алгебру – простую семимерную алгебру* B. *Мы доказываем, что каждое локальное дифференцирование алгебры* B *является дифференцированием и каждое 2-локальное дифференцирование алгебры* B *также является дифференцированием.*

Ключевые слова: *простая алгебра, дифференцирование, локальное дифференцирование, 2-локальное дифференцирование, базис тождеств.*

A CHARACTERIZATION OF DERIVATIONS ON ISAYEV-KISLITSIN ALGEBRAS

Farkhodzhon Arzikulov Nematzhonovich, Ph.D. PhD, Associate Professor,
arzikulovfn@gmail.com
Institute of Mathematics named after Romanovsky Academy

Sciences of Uzbekistan, Olmazor district, University street 9, Tashkent, Uzbekistan,
ASU, University street 129, Andijan, Uzbekistan
Furkat Urinboev Sadikdzhanovich, postgraduate student of NamSU,
furqatjonforever@gmail.com
NamSU, Uychi street 316, Namangan, Uzbekistan
Murod Abdumuminov, Master at NamSU
NamSU, Uychi street 316, Namangan, Uzbekistan

Abstract:: *In the present paper we study simple algebras, which do not belong to the well-known classes of algebras (associative algebras, alternative algebras, Lie algebras, Jordan algebras, etc.). The simple finite-dimensional algebras over a field of characteristic 0 without finite basis of identities, constructed by Isayev and Kislitsin, are such algebras. In the present paper we consider such algebras: the simple seven-dimensional algebra* B. *We prove that every local derivation of the algebra* B *is a derivation, and every 2-local derivation of the algebra* B *is also a derivation. We also prove that every local automorphism of the algebra* B *is an automorphism, and every 2-local automorphism of the algebra* B *is also an automorphism.*

Keywords: *Simple algebra, Derivation, Local derivation, 2-Local derivation, Automorphism, Local automorphism, 2-Local automorphism, Basis of identities.*

1. Введение. В настоящей работе изучаются локальные и 2-локальные дифференцирования простых конечномерных алгебр без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным в [3].

Понятие локальных дифференцирований было введено и исследовано Кадисоном в [2]. Кадисон доказал, что всякое непрерывное локальное дифференцирование алгебры фон Неймана в двойственный банахов бимодуль является дифференцированием. Аналогичное понятие 2-локальных производных было введено Шёмрлем. Шёмрл доказал, что любое 2-локальное дифференцирование алгебры $B(H)$ всех линейных ограниченных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H является дифференцированием [7]. Впоследствии появилось множество новых результатов, связанных с описанием локальных и 2-локальных дифференцирований различных алгебр.

В настоящей статье мы продолжаем изучение дифференцирований простых алгебр. В данной работе изучены дифференцирования простых алгебр, не принадлежащих известным классам алгебр (коммутативным, ассоциативным, альтернативным, лиевым, жордановым и т. д.). Такими алгебрами являются простые конечномерные алгебры без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным (см. [3]). А именно, мы доказываем, что любое локальное дифференцирование простой конечномерной алгебры без конечного базиса тождеств, построенное Исаевым и Кислициным в [3], является дифференцированием, а всякое 2-локальное дифференцирование этой алгебры также является дифференцированием. В [1] изучаются локальные и 2-локальные дифференцирования других таких алгебр, построенных Кислициным в [5], [6]. Отметим, что центральные простые конечномерные алгебры, не имеющие конечного базиса тождеств, рассматривались также в работе [4] Исаева и Кислицина.

2. Простая конечномерная алгебра без конечного базиса тождеств. Пусть $\mathcal{B} = \langle 1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_{\mathbb{F}}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$ характеристики 0, ненулевые произведения базисных элементов из

$$\{1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\} \quad (1)$$

определяются правилами $v_1 e_{11} = v_1, v_1 e_{12} = v_2, v_2 e_{22} = v_2, v_2 p = 1$. Тогда $\mathcal{B}$ – простая алгебра без конечного базиса тождеств [3]. Пусть a – элемент из $\mathcal{B}$. Тогда мы можем написать $a = a_1 1 + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p,$ для некоторых элементов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 в $\mathbb{F}$. На протяжении всей статьи пусть $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$. И наоборот, если $v = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$ – вектор-столбец с a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 в $\mathbb{F}$, то на протяжении всей статьи через $\hat{v}$ будем обозначать элемент $a_1 1 + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p,$ то есть, $\hat{v} = a_1 1 + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p.$

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется дифференцированием, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ для любых двух элементов x, $y \in \mathcal{A}$. Нашим основным инструментом для описания локальных и 2-локальных дифференцирований $\mathcal{B}$ является следующее прдложение.

Предложение 1. *Линейное отображение* $D: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *является дифференцированием* *тогда и только тогда, когда матрица D в стандартном базисе (1) имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{2,2}+a_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Здесь действие D соответствует умножению матрицы на правый столбец.

Доказательство. Доказательство проводится прямой проверкой свойства дифференцирования на алгебре $\mathcal{B}$. □

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $\nabla\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется локальным дифференцированием, если для любого элемента $x \in \mathcal{A}$ существует дифференцирование $D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такое, что $\nabla(x) = D(x)$.

Теорема 2. Каждое локальное дифференцирование на простой алгебре $\mathcal{B}$ является дифференцированием.

Доказательство. Пусть ∇ – локальное дифференцирование на $\mathcal{B}$, и пусть $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{7}$ – матрица ∇. Тогда

$\nabla(v_1) = a_{2,2}^{v_1} v_1 = a_{2,2} v_1, \nabla(v_2) = (a_{2,2}^{v_2} + a_{5,5}^{v_2}) v_2 = a_{3,3} v_2,$

$\nabla(e_{1,2}) = a_{5,5}^{e_{1,2}} e_{1,2} = a_{5,5} e_{1,2}, \nabla(p) = -(a_{2,2}^{p} + a_{5,5}^{p}) p = a_{7,7} p$ а остальные компоненты матрицы A равны нулю. В то же время,

$$\nabla(v_1 + v_2 + e_{1,2} + p) = \nabla(v_1) + \nabla(v_2) + \nabla(e_{1,2}) + \nabla(p), \qquad (2)$$

и

$\nabla(v_1+v_2+e_{1,2}+p)=a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}v_1+(a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p})v_2+$ $a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}e_{1,2}-(a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p})p.$

В силу (2), имеем

$$a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}v_1+(a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p})v_2+$$

$$+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}e_{1,2}-(a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p})p$$

$$=a_{2,2}^{v_1}v_1+(a_{2,2}^{v_2}+a_{5,5}^{v_2})v_2+a_{5,5}^{e_{1,2}}e_{1,2}-(a_{2,2}^{p}+a_{5,5}^{p})p.$$

Отсюда, $a_{2,2}^{v_2}+a_{5,5}^{v_2}=a_{2,2}^{v_1}+a_{5,5}^{e_{1,2}}, a_{2,2}^{p}+a_{5,5}^{p}=a_{2,2}^{v_1}+a_{5,5}^{e_{1,2}}$. Поэтому, в силу предложения 1, ∇ является дифференцированием. Доказательство завершено. □

В следующей теореме мы даем еще одну характеристику дифференцирований на алгебре $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Отображение (не обязательно линейное) $\Delta\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ называется 2-локальным дифференцированием, если для любых элементов x, $y\in\mathcal{A}$ существует дифференцирование $D_{x,y}\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ такое, что $\Delta(x)=D_{x,y}(x)$, $\Delta(y)=D_{x,y}(y)$.

Теорема 3. *Каждое 2-локальное дифференцирование на простой алгебре* $\mathcal{B}$ *является дифференцированием.*

Доказательство. Пусть Δ – 2-локальное дифференцирование на $\mathcal{B}$, и пусть для элементов a, $b\in\mathcal{B}$ $D_{a,b}$ – дифференцирование на $\mathcal{B}$ такое, что $D_{a,b}(a)=\Delta(a)$, $D_{a,b}(b)=\Delta(b)$, и, пусть $A_{a,b}=(a_{i,j}^{a,b})_{i,j=1}^{7}$ – матрица дифференцирования $D_{a,b}$. Пусь $a=\lambda_1 1+\lambda_2 v_1+\lambda_3 v_2+\lambda_4 e_{1,1}+\lambda_5 e_{1,2}+\lambda_6 e_{2,2}+\lambda_7 p$ – произвольный элемент из $\mathcal{B}$. Для каждого $v\in\mathcal{B}$ существует дифференцирование $D_{v,a}$ такое, что $\Delta(v)=D_{v,a}(v)$, $\Delta(a)=D_{v,a}(a)$. Тогда из $D_{v_1,v}(v_1)=D_{v_1,a}(v_1)$, $v\in\mathcal{B}$ следует что $a_{2,2}^{v_1,v} v_1 = a_{2,2}^{v_1,a} v_1$. Отсюда, $a_{2,2}^{v_1,v} = a_{2,2}^{v_1,a}$. Поэтому,

$$\Delta(a) = D_{v_1,a}(a) = a_{2,2}^{v_1,v} \lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{v_1,a} + a_{5,5}^{v_1,a}\right) \lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{v_1,a} \lambda_5 e_{1,2} - (a_{2,2}^{v_1,a} + a_{5,5}^{v_1,a}) \lambda_7 p.$$

Аналогично, из $D_{v_2,v}(v_2) = D_{v_2,a}(v_2),\ v \in \mathcal{D}$ следует что

$$\Delta(a) = D_{v_2,a}(a) = a_{2,2}^{v_2,a} \lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{v_2,v} + a_{5,5}^{v_2,v}\right) \lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{v_2,a} \lambda_5 e_{1,2} - (a_{2,2}^{v_2,a} + a_{5,5}^{v_2,a}) \lambda_7 p.$$

Точно также мы имеем

$$\Delta(a) = D_{e_{1,2},a}(a) = a_{2,2}^{e_{1,2},a} \lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{e_{1,2},a} + a_{5,5}^{e_{1,2},a}\right) \lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{e_{1,2},v} \lambda_5 e_{1,2} - (a_{2,2}^{e_{1,2},a} + a_{5,5}^{e_{1,2},a}) \lambda_7 p,$$

$$\Delta(a) = D_{p,a}(a) = a_{2,2}^{p,a} \lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{p,a} + a_{5,5}^{p,a}\right) \lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{p,a} \lambda_5 e_{1,2} - (a_{2,2}^{p,v} + a_{5,5}^{p,v}) \lambda_7 p.$$

Отсюда,

$$\Delta(a) = D_{v_1,a}(a) = D_{v_2,a}(a) = D_{e_{1,2},a}(a) = D_{p,a}(a) = a_{2,2}^{v_1,v} \lambda_2 v_1 + (a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w}) \lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{e_{1,2},z} \lambda_5 e_{1,2} - (a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t}) \lambda_7 p$$

для любых $v,\ w,\ z,\ t \in \mathcal{B}$. Заметим, что компоненты этой последней суммы не зависят от элемента a. Поэтому отображение Δ линейно и является локальным дифференцированием.

Из $\Delta(v_2 + p) = \Delta(v_2) + \Delta(p)$ мы получим

$\left(a_{2,2}^{a,v_2+p}+a_{5,5}^{a,v_2+p}\right)v_2-\left(a_{2,2}^{a,v_2+p}+a_{5,5}^{a,v_2+p}\right)p=(a_{2,2}^{v_2,w}+a_{5,5}^{v_2,w})v_2-(a_{2,2}^{p,t}+a_{5,5}^{p,t})p.$

Отсюда,

$$a_{2,2}^{a,v_2+p}+a_{5,5}^{a,v_2+p}=a_{2,2}^{v_2,w}+a_{5,5}^{v_2,w}=a_{2,2}^{p,t}+a_{5,5}^{p,t}. \qquad (3)$$

Из $\Delta(v_1+v_2+e_{1,2})=\Delta(v_1)+\Delta(v_2)+\Delta(e_{1,2})$ мы получим $a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{1,2}}=a_{2,2}^{v_1,v}, a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{1,2}}+a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{1,2}}=a_{2,2}^{v_2,w}+a_{5,5}^{v_2,w}$, $a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{1,2}}=a_{5,5}^{e_{1,2},z}$. Поэтому, $a_{2,2}^{v_2,w}+a_{5,5}^{v_2,w}=a_{2,2}^{v_1,v}+a_{5,5}^{e_{1,2},z}$. В силу (3), мы также получим что $a_{2,2}^{p,t}+a_{5,5}^{p,t}=a_{2,2}^{v_1,v}+a_{5,5}^{e_{1,2},z}$. Поэтому, в силу предложения 1, Δ является дифференцированием. Это завершает доказательство. □

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Arzikulov. A characterization of derivations and automorphisms on some simple algebras / F. Arzikulov, F. Urinboyev, Sh. Ergasheva // Ural Mathematical Journal. 2022. Vol. 8. № 2, P. 46–58.

2. R. Kadison. Local derivations / R. Kadison // Journal of Algebra. 1990. Vol. 130. P. 494–509.

3. Исаев И. М. Пример простой конечномерной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств / И. М. Исаев, А. В. Кислицин // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447. № 3. С. 252–252

4. I. M. Isaev. Example of simple finite dimensional algebra with no finite basis of its identities / I. M. Isaev, A. V. Kislitsin // Communications in Algebra. 2013. Vol. 41. № 12. P 4593–4601.

5. A. V. Kislitsin. An example of a central simple commutative finite-dimensional algebra with an infinite basis of identities / A. V. Kislitsin // Algebra and Logic. 2015. Vol. 54. P. 204–210.

6. Кислицин А. В. Простые конечномерные алгебры, не имеющие конечного базиса тождеств / А. В. Кислицин // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 3. С. 591–598.

7. P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. / P. Šemrl // Proceedings of the American Mathematical Society. 1997. Vol. 125. P. 2677–2680.

УДК 512.554.1
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_33

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ И АВТОМОРФИЗМОВ НА АЛГЕБРАХ ИСАЕВА-КИСЛИЦИНА

Арзикулов Фарходжон Нематжонович, д.ф.-м. н., доцент,
arzikulovfn@gmail.com
В.И. Институт математики имени Романовского Академии наук Узбекистана, Алмазарский район, улица Университетская 9. Ташкент, Узбекистан,
АГУ, улица Университетская 9, Андижан, Узбекистан
Уринбоев Фуркат Садикджанович, аспирант НамГУ,
furqatjonforever@gmail.com
НамГУ, улица Уйчи 316, Наманган, Узбекистан
Абдумуминов Мурод, Магистр в НамГУ
НамГУ, улица Уйчи 316, Наманган, Узбекистан

Аннотация: *В настоящей работе изучаются простые алгебры, не принадлежащие к известным классам алгебр (ассоциативным алгебрам, альтернативным алгебрам, алгебрам Ли, йордановым алгебрам и т. д.). Такими алгебрами являются простые конечномерные алгебры над полем характеристики 0 без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным. В настоящей работе мы рассматриваем такую алгебру – простую семимерную алгебру* $\mathcal{B}$*. Мы доказываем, что каждое локальное дифференцирование алгебры* $\mathcal{B}$ *является дифференцированием и каждое 2-локальное дифференцирование алгебры* $\mathcal{B}$ *также является дифференцированием. А также доказываем, что каждый локальный автоморфизм алгебры* $\mathcal{B}$ *является автоморфизмом и каждый 2-локальный автоморфизм алгебры* $\mathcal{B}$ *также является автоморфизмом.*

Ключевые слова: *простая алгебра, дифференцирование, локальное дифференцирование, 2-локальное дифференцирование, автоморфизм, локальный автоморфизм, 2-локальный автоморфизм, базис тождеств.*

A CHARACTERIZATION OF DERIVATIONS ON ISAYEV-KISLITSIN ALGEBRAS

Farhodjon Arzikulov Nematjonovich, D.Sc., Associate Professor,
arzikulovfn@gmail.com
Institute of Mathematics named after Romanovsky Academy Sciences of Uzbekistan, Olmazor district, University street 9, Tashkent, Uzbekistan,
ASU, University street 129, Andijan, Uzbekistan
Furkat Urinboev Sadikdzhanovich, postgraduate student of NamSU,
furqatjonforever@gmail.com
NamSU, Uychi street 316, Namangan, Uzbekistan
Murod Abdumuminov, Master at NamSU
NamSU, Uychi street 316, Namangan, Uzbekistan

Abstract:: *In the present paper we study simple algebras, which do not belong to the well-known classes of algebras (associative algebras, alternative algebras, Lie algebras, Jordan algebras, etc.). The simple finite-dimensional algebras over a field of characteristic 0 without finite basis of identities, constructed by Isayev and Kislitsin, are such algebras. In the present paper we consider such algebras: the simple seven-dimensional algebra* $\mathcal{B}$*. We prove that every local derivation of the algebra* $\mathcal{B}$ *is a derivation, and every 2-local derivation of the algebra* $\mathcal{B}$ *is also a derivation. We also prove that every local automorphism of the algebra* $\mathcal{B}$ *is an automorphism, and every 2-local automorphism of the algebra* $\mathcal{B}$ *is also an automorphism.*

Keywords: *Simple algebra, Derivation, Local derivation, 2-Local derivation, Automorphism, Local automorphism, 2-Local automorphism, Basis of identities.*

1. Введение. В настоящей работе изучаются локальные и 2-локальные дифференцирования простых конечномерных алгебр без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным в [3].

Понятие локальных дифференцирований было введено и исследовано Кадисоном в [2]. Кадисон доказал, что всякое непрерывное локальное дифференцирование алгебры фон Неймана в двойственный банахов бимодуль является дифференцированием. Аналогичное понятие 2-локальных производных было введено Шёмрлем. Шёмрл доказал, что любое 2-локальное дифференцирование алгебры $B(H)$ всех линейных ограниченных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H является дифференцированием [7]. Впоследствии появилось множество новых результатов, связанных с описанием локальных и 2-локальных дифференцирований различных алгебр.

В настоящей статье мы продолжаем изучение дифференцирований и автоморфизмов простых алгебр. В данной работе изучены дифференцирования и автоморфизмы простых алгебр, не принадлежащих известным классам алгебр (коммутативным, ассоциативным, альтернативным, лиевым, жордановым и т. д.). Такими алгебрами являются простые конечномерные алгебры без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным в работе [3]. А именно, мы доказываем, что любое локальное дифференцирование простой конечномерной алгебры без конечного базиса тождеств, построенное Исаевым и Кислициным в [3], является дифференцированием, а всякое 2-локальное дифференцирование этой алгебры также является дифференцированием. Мы также доказываем, что любой локальный автоморфизм простой конечномерной алгебры без конечного базиса тождеств, построенной Исаевым и Кислициным в [3], является автоморфизмом, а всякий 2-локальный автоморфизм этой алгебры также является автоморфизмом. В работе [1] изучены локальные и 2-локальные дифференцирования и автоморфизмы других таких алгебр, построенных Кислициным в [5], [6]. Отметим, что центральные простые конечномерные алгебры, не имеющие конечного базиса тождеств, рассматривались также в работе [4] Исаева и Кислицина.

2. Простая конечномерная алгебра без конечного базиса тождеств. Пусть $\mathcal{B} = \langle 1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_{\mathbb{F}}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$ характеристики 0, ненулевые произведения базисных элементов из

$$\{1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\} \quad (1)$$

определяются правилами $v_1 e_{11} = v_1, v_1 e_{12} = v_2, v_2 e_{22} = v_2, v_2 p = 1$. Тогда $\mathcal{B}$ – простая алгебра без конечного базиса тождеств [3]. Пусть a – элемент из $\mathcal{B}$. Тогда мы можем написать $a = a_1 1 + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p,$ для некоторых элементов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 в $\mathbb{F}$. На протяжении всей статьи пусть $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$. И наоборот, если

$v = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$ – вектор-столбец с a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 в $\mathbb{F}$, то на протяжении всей статьи через $\hat{v}$ будем обозначать элемент $a_1 1 + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p$, то есть, $\hat{v} = a_1 1 + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p$.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется дифференцированием, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ для любых двух элементов x, $y \in \mathcal{A}$. Нашим основным инструментом для описания локальных и 2-локальных дифференцирований $\mathcal{B}$ является следующее предложение.

Предложение 1. *Линейное отображение* $D: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *является дифференцированием тогда и только тогда, когда матрица* D *в стандартном базисе (1) имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{2,2} + a_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Здесь действие D *соответствует умножению матрицы на правый столбец.*

Доказательство. Доказательство проводится прямой проверкой свойства дифференцирования на алгебре $\mathcal{B}$. □

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $\nabla: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется локальным дифференцированием, если для любого элемента $x \in \mathcal{A}$ существует дифференцирование $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такое, что $\nabla(x) = D(x)$.

Теорема 2. Каждое локальное дифференцирование на простой алгебре $\mathcal{B}$ является дифференцированием.

Доказательство. Пусть ∇ – локальное дифференцирование на $\mathcal{B}$, и пусть $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{7}$ – матрица ∇. Тогда

$$\nabla(v_1)=a_{2,2}^{v_1}v_1=a_{2,2}v_1, \nabla(v_2)=(a_{2,2}^{v_2}+a_{5,5}^{v_2})v_2=a_{3,3}v_2,$$

$\nabla(e_{1,2})=a_{5,5}^{e_{12}}e_{1,2}=a_{5,5}e_{12}, \nabla(p)=-(a_{2,2}^{p}+a_{5,5}^{p})p=a_{7,7}p$ а остальные компоненты матрицы A равны нулю. В то же время,

$$\nabla(v_1+v_2+e_{12}+p)=\nabla(v_1)+\nabla(v_2)+\nabla(e_{12})+\nabla(p), \tag{2}$$

и

$$\nabla(v_1+v_2+e_{12}+p)=a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p}v_1+(a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p}+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p})v_2+ a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}e_{12}-(a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p}+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p})p.$$

В силу (2), имеем

$$a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p}v_1+(a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p}+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p})v_2+$$
$$+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}e_{12}-(a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p}+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p})p$$
$$=a_{2,2}^{v_1}v_1+(a_{2,2}^{v_2}+a_{5,5}^{v_2})v_2+a_{5,5}^{e_{12}}e_{12}-(a_{2,2}^{p}+a_{5,5}^{p})p.$$

Отсюда, $a_{2,2}^{v_2}+a_{5,5}^{v_2}=a_{2,2}^{v_1}+a_{5,5}^{e_{12}}, a_{2,2}^{p}+a_{5,5}^{p}=a_{2,2}^{v_1}+a_{5,5}^{e_{12}}$. Поэтому, в силу предложения 1, ∇ является дифференцированием. Доказательство завершено. □

В следующей теореме мы даем еще одну характеристику дифференцирований на алгебре $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Отображение (не обязательно линейное) $\Delta\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ называется 2-локальным дифференцированием, если для любых элементов x, $y\in\mathcal{A}$ существует дифференцирование $D_{x,y}\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ такое, что $\Delta(x)=D_{x,y}(x)$, $\Delta(y)=D_{x,y}(y)$.

Теорема 3. *Каждое 2-локальное дифференцирование на простой алгебре* $\mathcal{B}$ *является дифференцированием.*

Доказательство. Пусть Δ – 2-локальное дифференцирование на $\mathcal{B}$, и пусть для элементов $a,\ b \in \mathcal{B}$ $D_{a,b}$ – дифференцирование на $\mathcal{B}$ такое, что $D_{a,b}(a) = \Delta(a)$, $D_{a,b}(b) = \Delta(b)$, и, пусть $A_{a,b} = (a_{i,j}^{a,b})_{i,j=1}^{7}$ – матрица дифференцирования $D_{a,b}$. Пусь $a = \lambda_1 1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 v_2 + \lambda_4 e_{11} + \lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} + \lambda_7 p$ – произвольный элемент из $\mathcal{B}$. Для каждого $v \in \mathcal{B}$ существует дифференцирование $D_{v,a}$ такое, что $\Delta(v) = D_{v,a}(v)$, $\Delta(a) = D_{v,a}(a)$. Тогда из $D_{v_1,v}(v_1) = D_{v_1,a}(v_1),\ v \in \mathcal{B}$ следует что $a_{2,2}^{v_1,v} v_1 = a_{2,2}^{v_1,a} v_1$. Отсюда, $a_{2,2}^{v_1,v} = a_{2,2}^{v_1,a}$. Поэтому, $\Delta(a) = D_{v_1,a}(a) = a_{2,2}^{v_1,v}\lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{v_1,a} + a_{5,5}^{v_1,a}\right)\lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{v_1,a}\lambda_5 e_{12} - (a_{2,2}^{v_1,a} + a_{5,5}^{v_1,a})\lambda_7 p.$

Аналогично, из $D_{v_2,v}(v_2) = D_{v_2,a}(v_2),\ v \in \mathcal{D}$ следует что $\Delta(a) = D_{v_2,a}(a) = a_{2,2}^{v_2,a}\lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{v_2,v} + a_{5,5}^{v_2,v}\right)\lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{v_2,a}\lambda_5 e_{12} - (a_{2,2}^{v_2,a} + a_{5,5}^{v_2,a})\lambda_7 p.$

Точно также мы имеем

$$\Delta(a) = D_{e_{12},a}(a) = a_{2,2}^{e_{12},a}\lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{e_{12},a} + a_{5,5}^{e_{12},a}\right)\lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{e_{12},v}\lambda_5 e_{12} - (a_{2,2}^{e_{12},a} + a_{5,5}^{e_{12},a})\lambda_7 p,$$

$$\Delta(a) = D_{p,a}(a) = a_{2,2}^{p,a}\lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{p,a} + a_{5,5}^{p,a}\right)\lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{p,a}\lambda_5 e_{12} - (a_{2,2}^{p,v} + a_{5,5}^{p,v})\lambda_7 p.$$

Отсюда,

$\Delta(a) = D_{v_1,a}(a) = D_{v_2,a}(a) = D_{e_{12},a}(a) = D_{p,a}(a) = a_{2,2}^{v_1,v}\lambda_2 v_1 + (a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w})\lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{e_{12},z}\lambda_5 e_{12} - (a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t})\lambda_7 p$

для любых $v, w, z, t \in \mathcal{B}$. Заметим, что компоненты этой последней суммы не зависят от элемента a. Поэтому отображение Δ линейно и является локальным дифференцированием.

Из $\Delta(v_2 + p) = \Delta(v_2) + \Delta(p)$ мы получим $\left(a_{2,2}^{a,v_2+p} + a_{5,5}^{a,v_2+p}\right)v_2 - \left(a_{2,2}^{a,v_2+p} + a_{5,5}^{a,v_2+p}\right)p = (a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w})v_2 - (a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t})p.$

Отсюда,

$$a_{2,2}^{a,v_2+p} + a_{5,5}^{a,v_2+p} = a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w} = a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t}. \qquad (3)$$

Из $\Delta(v_1 + v_2 + e_{12}) = \Delta(v_1) + \Delta(v_2) + \Delta(e_{12})$ мы получим $a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{12}} = a_{2,2}^{v_1,v}, a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{12}} + a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{12}} = a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w}$, $a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{12}} = a_{5,5}^{e_{12},z}$. Поэтому, $a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w} = a_{2,2}^{v_1,v} + a_{5,5}^{e_{12},z}$. В силу (3), мы также получим что $a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t} = a_{2,2}^{v_1,v} + a_{5,5}^{e_{12},z}$. Поэтому, в силу предложения 1, Δ является дифференцированием. Это завершает доказательство. □

Предложение 4. *Линейное отображение* $\Phi: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *является автоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица* Φ *в стандартном базисе (1) имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,2}a_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{2,2}a_{5,5}} \end{pmatrix},$$

где $a_{2,2}$, $a_{5,5}$ *– ненулевые элементы из* $\mathbb{F}$. *Здесь действие* Φ *соответствует умножению матрицы на правый столбец.*

Доказательство. Пусть $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^{7}$ — матрица автоморфизма Φ. Тогда существует дифференцирование D с матрицей $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{7}$ такое, что

$$B = e^{A}.$$

Известно, что

$$e^{A} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots,$$

где E – единичная матрица. Следовательно,

$$B = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots. \qquad (4)$$

В силу (4) и предложения 1 B равно следующей матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{2,2}^{i}}{i!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_{2,2}+a_{5,5})^{i}}{i!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{5,5}^{i}}{i!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i}(a_{2,2}+a_{5,5})^{i}}{i!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{2,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{2,2}+a_{5,5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{a_{5,5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(a_{2,2}+a_{5,5})} \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица является искомой матрицей. Доказательство завершено. □

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $\nabla: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется локальным автоморфизмом, если для любого элемента $x \in \mathcal{A}$ существует автоморфизм $\phi_x: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такой, что $\nabla(x) = \phi_x(x)$.

Теорема 5. *Каждый локальный автоморфизм на простой алгебре $\mathcal{B}$ является автоморфизмом.*

Доказательство. Пусть ∇ – локальный автоморфизм на $\mathcal{B}$, и, пусть $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{\mathrm{i,j}})_{\mathrm{i,j}=1}^{7}$ – матрица ∇. Тогда

$$\nabla(v_1) = a_{2,2}^{v_1} v_1 = a_{2,2} v_1, \nabla(v_2) = a_{2,2}^{v_2} a_{5,5}^{v_2} v_2 = a_{3,3} v_2,$$

$$\nabla(e_{12}) = a_{5,5}^{e_{12}} e_{12} = a_{5,5} e_{12}, \nabla(p) = \frac{1}{a_{2,2}^{p} a_{5,5}^{p}} p = a_{7,7} p$$

а остальные компоненты матрицы A равны нулю. В то же время,

$$\nabla(v_1 + v_2 + e_{12} + p) = \nabla(v_1) + \nabla(v_2) + \nabla(e_{12}) + \nabla(p), \tag{5}$$

и

$$\nabla(v_1 + v_2 + e_{12} + p) = a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} v_1 + a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p} v_2 + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p} e_{12} + \frac{1}{a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}} p.$$

По (5) имеем

$$a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} v_1 + a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}) v_2 +$$

$$a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}e_{12}+\frac{1}{a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p}a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}}p$$

$$=a_{2,2}^{v_1}v_1+a_{2,2}^{v_2}a_{5,5}^{v_2}v_2+a_{5,5}^{e_{12}}e_{12}+\frac{1}{a_{2,2}^{p}a_{5,5}^{p}}p.$$

Следовательно,

$$a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p}=a_{2,2}^{v_1},a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p}a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}=a_{2,2}^{v_2}a_{5,5}^{v_2},$$

$$a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}=a_{5,5}^{e_{12}},a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p}a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}=a_{2,2}^{p}a_{5,5}^{p}.$$

Отсюда следует, что

$$a_{2,2}^{v_2}a_{5,5}^{v_2}=a_{2,2}^{v_1}a_{5,5}^{e_{12}},a_{2,2}^{p}a_{5,5}^{p}=a_{2,2}^{v_1}a_{5,5}^{e_{12}}$$

и

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&a_{2,2}^{v_1}&0&0&0&0&0\\0&0&a_{2,2}^{v_1}a_{5,5}^{e_{12}}&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&a_{5,5}^{e_{12}}&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{a_{2,2}^{v_1}a_{5,5}^{e_{12}}}\end{pmatrix}.$$

Следовательно, по предложению 4 ∇ – автоморфизм. На этом доказательство заканчивается. □

Отображение (не обязательно линейное) $\Delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ называется 2-локальным автоморфизмом, если для любых элементов x, $y\in\mathcal{A}$ существует автоморфизм $\phi_{x,y}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ такой, что $\Delta(x)=\phi_{x,y}(x)$, $\Delta(y)=\phi_{x,y}(y)$.

Теорема 6. *Каждый 2-локальный автоморфизм на простой алгебре $\mathcal{B}$ является автоморфизмом.*

Доказательство. Пусть Δ – 2-локальный автоморфизм на $\mathcal{B}$, и пусть для элементов a, $b\in\mathcal{B}$, $\Phi_{a,b}$ – автоморфизм на $\mathcal{B}$ такой, что $\Phi_{a,b}(a)=\Delta(a)$,

$\Phi_{a,b}(b) = \Delta(b)$, и пусть $A_{a,b} = (a_{i,j}^{a,b})_{i,j=1}^{7}$ – матрица $\Phi_{a,b}$. Тогда для любых v, $z \in \mathcal{B}$ существует автоморфизм $\Phi_{v,z}$ такой, что

$$\Delta(v) = \Phi_{v,z}(v), \Delta(z) = \Phi_{v,z}(z).$$

Пусть $A_{v,z} = (a_{i,j}^{v,z})_{i,j=1}^{n}$ – матрица автоморфизма $\Phi_{v,z}$.

Пусть $a = \lambda_1 1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 v_2 + \lambda_4 e_{11} + \lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} + \lambda_7 p$ – произвольный элемент из $\mathcal{B}$. Для каждого $v \in \mathcal{B}$ существует автоморфизм $\Phi_{v,a}$ такой, что

$$\Delta(v) = \Phi_{v,a}(v), \quad \Delta(a) = \Phi_{v,a}(a).$$

Затем из

$$\Phi_{v_1,v}(v_1) = \Phi_{v_1,a}(v_1), \ v \in \mathcal{B}$$

следует, что

$$a_{2,2}^{v_1,v} v_1 = a_{2,2}^{v_1,a} v_1.$$

Следовательно,

$$a_{2,2}^{v_1,v} = a_{2,2}^{v_1,a}.$$

Поэтому,

$$\Delta(a) = \Phi_{v_1,a}(a) = \lambda_1 1 + a_{2,2}^{v_1,v} \lambda_2 v_1 + a_{2,2}^{v_1,a} a_{5,5}^{v_1,a} \lambda_3 v_2 + \lambda_4 e_{11}$$

$$+ a_{5,5}^{v_1,a} \lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} + \frac{1}{a_{2,2}^{v_1,a} a_{5,5}^{v_1,a}} \lambda_7 p.$$

Точно так же из

$$\Phi_{v_2,v}(v_2) = \Phi_{v_2,a}(v_2), \ v \in \mathcal{B}$$

следует, что

$$\Delta(a) = \Phi_{v_2,a}(a) = \lambda_1 1 + a_{2,2}^{v_2,a} \lambda_2 v_1 + a_{2,2}^{v_2,v} a_{5,5}^{v_2,v} \lambda_3 v_2 + \lambda_4 e_{11}$$

$$+ a_{5,5}^{v_2,a} \lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} + \frac{1}{a_{2,2}^{v_2,a} a_{5,5}^{v_2,a}} \lambda_7 p.$$

Точно так же у нас есть

$$\Delta(a)=\Phi_{e_{12},a}(a)=+\lambda_1 1+a_{2,2}^{e_{12},a}\lambda_2 v_1+a_{2,2}^{e_{12},a}a_{5,5}^{e_{12},a}\lambda_3 v_2$$

$$+\lambda_4 e_{11}+a_{5,5}^{e_{12},v}\lambda_5 e_{12}+\lambda_6 e_{22}+\frac{1}{a_{2,2}^{e_{12},a}a_{5,5}^{e_{12},a}}\lambda_7 p,$$

$$\Delta(a)=\Phi_{p,a}(a)=\lambda_1 1+a_{2,2}^{p,a}\lambda_2 v_1+a_{2,2}^{p,a}a_{5,5}^{p,a}\lambda_3 v_2$$

$$+\lambda_4 e_{11}+a_{5,5}^{p,a}\lambda_5 e_{12}+\lambda_6 e_{22}+\frac{1}{a_{2,2}^{p,v}a_{5,5}^{p,v}}\lambda_7 p.$$

Следовательно,

$$\Delta(a)=\Phi_{v_1,a}(a)=\Phi_{v_2,a}(a)=\Phi_{e_{12},a}(a)=\Phi_{p,a}(a)=$$

$$\lambda_1 1+a_{2,2}^{v_1,v}\lambda_2 v_1+a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w}\lambda_3 v_2+\lambda_4 e_{11}+a_{5,5}^{e_{12},z}\lambda_5 e_{12}+\lambda_6 e_{22}+\frac{1}{a_{2,2}^{p,t}a_{5,5}^{p,t}}\lambda_7 p.$$

для любых $v,\ w,\ z,\ t\in\mathcal{B}$. Заметим, что компоненты этой последней суммы не зависят от элемента a. Поэтому отображение Δ линейно и является локальным автоморфизмом. Линейный оператор Δ имеет следующую матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{2,2}^{v_1,v} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5}^{e_{12},z} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{2,2}^{p,t}a_{5,5}^{p,t}} \end{pmatrix}.$$

Из $\Delta(v_2+p)=\Delta(v_2)+\Delta(p)$ мы получаем

$$a_{2,2}^{a,v_2+p}a_{5,5}^{a,v_2+p}v_2+\frac{1}{a_{2,2}^{a,v_2+p}a_{5,5}^{a,v_2+p}}p=a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w}v_2+\frac{1}{a_{2,2}^{p,t}a_{5,5}^{p,t}}p.$$

Следовательно,

$$a_{2,2}^{a,v_2+p}a_{5,5}^{a,v_2+p}=a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w}=a_{2,2}^{p,t}a_{5,5}^{p,t}. \qquad (6)$$

Из $\Delta(v_1+v_2+e_{12})=\Delta(v_1)+\Delta(v_2)+\Delta(e_{12})$ мы получаем

$$a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{12}}=a_{2,2}^{v_1,v},\ a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{12}}a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{12}}=a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w},$$

$$a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{12}}=a_{5,5}^{e_{12},z}.$$

Следовательно,

$$a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w}=a_{2,2}^{v_1,v}a_{5,5}^{e_{12},z}.$$

В силу (6) также имеем

$$a_{2,2}^{p,t}a_{5,5}^{p,t}=a_{2,2}^{v_1,v}a_{5,5}^{e_{12},z}.$$

Таким образом,

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&a_{2,2}^{v_1,v}&0&0&0&0&0\\0&0&a_{2,2}^{v_1,v}a_{5,5}^{e_{12},z}&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&a_{5,5}^{e_{12},z}&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{a_{2,2}^{v_1,v}a_{5,5}^{e_{12},z}}\end{pmatrix}.$$

Следовательно, по предложению 4 Δ – автоморфизм. Доказательство завершено. □

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Arzikulov. A characterization of derivations and automorphisms on some simple algebras / F. Arzikulov, F. Urinboyev, Sh. Ergasheva // Ural Mathematical Journal. 2022. Vol. 8. № 2, P. 46–58.

2. R. Kadison. Local derivations / R. Kadison // Journal of Algebra. 1990. Vol. 130. P. 494–509.

3. Исаев И. М. Пример простой конечномерной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств / И. М. Исаев, А. В. Кислицин // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447. № 3. С. 252–252

4. I. M. Isaev. Example of simple finite dimensional algebra with no finite basis of its identities / I. M. Isaev, A. V. Kislitsin // Communications in Algebra. 2013. Vol. 41. № 12. P 4593–4601.

5. A. V. Kislitsin. An example of a central simple commutative finite-dimensional algebra with an infinite basis of identities / A. V. Kislitsin // Algebra and Logic. 2015. Vol. 54. P. 204–210.

6. Кислицин А. В. Простые конечномерные алгебры, не имеющие конечного базиса тождеств / А. В. Кислицин // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 3. С. 591–598.

7. P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. / P. Šemrl // Proceedings of the American Mathematical Society. 1997. Vol. 125. P. 2677–2680.

УДК 517.928.2
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_47

ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЫРЬЯ МЕЖДУ ПОТРЕБИТЕЛЯМИ С УЧЕТОМ ДОГОВОРНЫХ УСЛОВИЙ

Асанкулова Майрамкан, д.ф.-м.н.
may_as@mail.ru
Эшенкулов Паяз, к.ф.-м.н.
pajazbek@mail.ru
Искандарова Гульсунай Самандаровна
iskandarrova@gmail.com
Институт математики НАН КР

Аннотация. Исследована задача распределения добываемого сырья между перерабатывающими предприятиями и потребителями с учетом договорных условий. Рассматриваемая задача относится к классу задач математического программирования с линейными целевыми функциями. Приводится, что для данной задачи имеет место условие разрешимости задачи. Приближенным методом в предположении, что имеет место, условие разрешимости задачи получено оптимальное распределение добываемого сырья между предприятиями. Получен максимальный доход перерабатывающими предприятиями при реализации ее после переработки.

Ключевые слова. Сырье, пункт добычи, перерабатывающие предприятия, потребители, целевые функции, распределение, доход, условие разрешимости.

КЕЛИШИМ ШАРТТАРЫ БАР КЕРЕКТӨӨЧҮЛӨРДҮН ОРТОСУНДАГЫ ЧИЙКИ ЗАТТЫ БӨЛҮШТҮРҮҮ МАСЕЛЕСИ

Асанкулова Майрамкан, ф.-м.и.д.
may_as@mail.ru
Эшенкулов Паяз, ф.-м.и.к.
pajazbek@mail.ru
Искандарова Гульсунай Самандаровна
iskandarrova@gmail.com
Институт математики НАН КР

Аннотация. Алынган чийки затты кайра иштетуучу ишканалар менен керектөөчүлөрдүн ортосунда бөлүштүрүү маселеси келишимдик шарттарды эске алуу менен изилденип жатат. Каралып жаткан маселе сызыктуу максаттуу функциялар менен математикалык программалоо маселелери классына кирет. Бул маселе үчүн маселенин чечилүү шарты орун алганы көрсөтүлгөн. Болжолдуу ыкманы колдонуу менен маселенин чечилиши шарты орун алган деп эсептеп, казылып алынган чийки затты ишканалардын ортосунда оптималдуу бөлүштүрүлүшү алынат. Эң көп кирешени кайра иштетүү ишканалары кайра иштеткенден кийин сатканда алган.

Урунттуу сөздөр. Чийки зат, казып алуу пункту, кайра иштетүүчү ишканалар, керектөөчүлөр, максаттуу функциялар, бөлүштүрүү, киреше, чечилүү шарты.

THE PROBLEM OF ALLOCATION OF RAW MATERIALS BETWEEN CONTRACTUAL CUSTOMERS

Asankulova Mayramkan, Dr Sc
may_as@mail.ru
Eshenkulov Payaz, ф.-м.и.к.
pajazbek@mail.ru
Iskandarova Gulzynai Samandarovna
iskandarrova@gmail.com
Institute mathematic NAS KR
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract:. *The problem of distribution of extracted raw materials between processing enterprises and consumers is studied, taking into account contractual conditions. The problem under consideration belongs to the class of mathematical programming problems with linear objective functions. It is shown that for this problem the condition of solvability of the problem takes place. By an approximate method, assuming that the condition for the solvability of the problem takes place, the optimal distribution of the extracted raw materials between enterprises is obtained. The maximum income was received by processing enterprises when it is sold after processing.*

Keywords. *Raw materials, extraction point, processing enterprises, consumers, objective functions, distribution, income, solvability condition.*

Введение. В недрах Кыргызстана имеются разнообразные виды рудного и нерудного сырья, которые используются в естественном или переработанном состоянии в бытовой сфере и в различных отраслях промышленности. Для цементной промышленности сырьевой базой являются запасы карбонатных и глинистых пород, а запасы высокодекоративных гранитов и гранодиоритов являются сырьевой базой камнеобрабатывающей промышленности. Большое количество месторождений песчано-гравийной смеси, месторождений гипса, месторождений глин и суглинков, месторождения строительного камня являются сырьевой базой для нужды строительной индустрии. Для пищевой и химической промышленности, а также в животноводстве используются месторождения каменной соли и др.

Добыча этих видов сырья и доставка их перерабатывающим предприятиям, а также потребителям при минимальных суммарных затратах имеет важное значение для добывающих компаний и может существенно улучшить работу добывающих компаний..

В работах [1,2] авторами разработаны экономико-математические модели добычи сырья, определения технологического способа добычи сырья в соответствии с затратами.

В этой работе сформулируем экономико-математическую модель задачи определения оптимального объема добычи и перевозки сырья с минимальными затратами и с учетом выполнения договорного условия.

Постановка задачи. Пусть крупная компания региона, состоящая из m пунктов добычи сырья A_i, $i \in I = \{1,2,\ldots,m\}$ составил договор о поставке сырья с предприятиями ассоциации $П_k$, k=1,2,…,p. Объем добываемого сырья за планируемый период на каждом пункте добычи предполагается неизвестным x_i^t, но ограниченным сверху величиной a_i^t, $i \in I$, t=1,2,…,T.

В каждом периоде добытое сырье на основе договора должно перевозится перерабатывающим предприятиям ассоциации $П_k$, $k=1,2,\ldots,p$ в объеме не более чем d_k^t, $k=1,2,\ldots,p$, $t=1,2,\ldots,T$, а за весь планируемый период должно быть перевезено в объеме Q_0.

Также компания за весь планируемый период должен перевезти сырья в объеме b_0 потребителям G_r, $r=1,2,\ldots R$ этого региона, а в каждом периоде t, $t=1,2,\ldots,T$ -объем сырья не более чем b_r^t, $r=1,2,\ldots,R$, $t=1,2,\ldots,T$.

Сырье, доставляемое предприятиям ассоциации, перерабатывается в продукцию и реализуется в том же периоде t, $t = 1,2,\ldots,T$.

Предполагаются, что затраты на добычу единицы объема сырья и ее транспортировка, на переработку сырья в продукцию и цена реализации единицы объема продукции зависит от периода добычи сырья и его переработки.

Требуется определить объем добычи сырья для пунктов компании

$x_i^t \geq 0$, $i \in I$, $t=1,2,\ldots,T$, план распределения сырья между предприятиями ассоциации и потребителями региона так, чтобы суммарные затраты на добычу, перевозку сырья были бы минимальными, а для предприятий ассоциации определить объем перерабатываемого сырья, доставляющий максимум дохода при реализации готовой продукции.

Для формулировки математической модели задачи введем следующие обозначения: i -индекс пунктов добычи сырья компании, $i \in I;$

I-множество индексов пунктов добычи сырья;

r-индекс потребителей сырья региона, $r=1,2,...,R;$

k-индекс перерабатывающих предприятий ассоциации, $k=1,2,...,p;$

t-индекс периода добычи сырья компании, где сырье доставляется пред-приятиям ассоциации и потребителям региона, $t=1,2,...,T$.

Известные параметры и функции:

a_i^t – максимальный объем добычи сырья i-го пункта компании в t-ом периоде, $t=1,2,...,T,\ i \in I;$

d_k^t – максимально возможный объем сырья, перевозимый компанией k-му предприятию ассоциации за t-ый период по договору, $k=1,2,...,p,\ t=1,2,...,T;$ Q_0 – объем сырья, поставляемый компанией предприятиям ассоциации за планируемый период;

b_0 – объем сырья, поставляемый потребителям региона за планируемый период;

b_r^t – максимальный объем сырья, поставляемый компанией r-му потребителю региона за t-ый период, $r=1,2,...,R,\ t=1,2,...,T;$

c_i^t – стоимость единицы объема добываемого сырья в i-ом пункте в t-ом периоде, $i \in I,\ t=1,2,...,T;$

c_{ik}^t, c_{ir}^t – транспортные расходы на перевозку единицы объема сырья из i-го пункта добычи в k-ое предприятие ассоциации и r-му потребителю региона в t-ом периоде соответственно, $i \in I,\ k=1,2,...,p,\ r=1,2,...,R,\ t=1,2,...,T;$

c^t – оптовая_цена реализации готовой продукции в t-ом периоде, $t=1,2,...,T;$ λ_k^t – норма расхода сырья на единицу объема готовой продукции в k-ом предприятии ассоциации в t-ом периоде, $k=1,2,...,p,\ t=1,2,...,T;$

Искомые переменные:

x_{ik}^t – объем сырья, перевозимый компанией из i-го пункта добычи k-му перерабатывающему предприятию ассоциации в t-ом периоде, $i \in I,\ k=1,2,...,p,\ t=1,2,...,T;$

x_{ir}^t – объем сырья, перевозимый компанией из i-го пункта добычи r-му потребителю региона в t-ом периоде, $i \in I,\ r=1,2,...,R,\ t=1,2,...,T;$

x_i^t – объем сырья, добываемый *i*-ым пунктом компании в *t*-ом периоде, $i \in I$, $t=1,2,\dots,T$;

x_k^t – объем сырья, перерабатываемый *k*-ым предприятием ассоциации в *t*-ом периоде, $k=1,2,\dots,p$, $t=1,2,\dots,T$;

y_k^t – объем готовой продукции *k*-го предприятии ассоциации в *t*-ом периоде, $k=1,2,\dots,p$, $t=1,2,\dots,T$.

Заметим, что поставленная проблема может быть найдена из решения следующих двух последовательно решаемых задач.

В соответствии с принятыми обозначениями математическая модель определения оптимального объема добычи сырья компанией и ее распределение между потребителями по критерию минимума суммарных затрат на добычу сырья и перевозку запишется в виде.

Найти минимум

$$L(x) = \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{T} \{ (\sum_{k=1}^{p} c_{ik}^t x_{ik}^t + \sum_{r=1}^{R} c_{ir}^t x_{ir}^t) + c_i^t x_i^t \} \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{r=1}^{R} x_{ir}^t + \sum_{k=1}^{p} x_{ik}^t = x_i^t, \quad i \in I,\ t=1,2,\dots,T, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ik}^t \le d_k^t, \quad k=1,2,\dots,p,\ t=1,2,\dots,T, \tag{3}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{p} \sum_{t=1}^{T} x_{ik}^t = Q_0, \tag{4}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ir}^t \le b_r^t \quad r=1,2,\dots,R,\ t=1,2,\dots,T, \tag{5}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{r=1}^{R} \sum_{t=1}^{T} x_{ir}^t = b_0, \tag{6}$$

$$0 \le x_i^t \le a_i^t, \quad i \in I,\ t=1,2,\dots,T, \tag{7}$$

$$x_{ik}^t \ge 0, \quad x_{ir}^t \ge 0, \quad i \in I,\ k=1,2,\dots,p,\ r=1,2,\dots,R,\ t=1,2,\dots,T, \tag{8}$$

где $x = \left\| \left| x_{ik}^t \right|_{|I|,p}, \quad \left| x_{ir}^t \right|_{|I|,R}, \ t = 1,2,\dots,T \right\|$.

Предполагается, что имеет место условие

$$b_0 + Q_0 \le \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in I} a_i^t, \quad Q_0 \le \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{p} d_k^t, \quad b_0 \le \sum_{t=1}^{T} \sum_{r=1}^{R} b_r^t. \tag{9}$$

Согласно принятым обозначениям математическая модель задачи определения оптимального объема готовой продукции предприятиями ассоциации, доставляющий максимум дохода могут быть записана в виде.

Найти максимум

$$L(y) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{p} c^t y_k^t \tag{10}$$

при условиях

$$\lambda_k^t y_k^t = x_k^t, \quad k=1,2,\ldots, p,\ t=1,2,\ldots,T, \tag{11}$$

$$y_k^t \geq 0, \quad k=1,2,\ldots, p,\ t=1,2,\ldots,T, \tag{12}$$

где $x_k^t = \sum_{i\in I} x_{ik}^t, \quad k=1,2,\ldots, p,\ t=1,2,\ldots,T.$

Из постановки задачи легко заметить, что задача (1)-(8) и (10)-(12) может быть решена последовательно.

<u>Решение задачи</u>. Методом, приведенным в [3] определяем оптимальный объем сырья перевозимого от каждого пункта добычи в каждое предприятие ассоциации и каждому потребителю и объемы добычи сырья каждого пункта в t-ом периоде, $t=1,2,\ldots,T$.

Далее, используя решения задачи (1)-(8), т.е. x_{ik}^t, $i\in I$, $k=1,2,\ldots, p$, $t=1,2,\ldots,T$, где $x_k^t = \sum_{i\in I} x_{ik}^t$, $k=1,2,\ldots, p$, $t=1,2,\ldots,T$, решаем задачу (10)-(12).

Решив задачу (10)-(12), получим оптимальный план $\bar{y}_k^t \geq 0$, $k=1,2,\ldots, p$, $t=1,2,\ldots,T$ выпуска готовой продукции каждого предприятия ассоциации на каждом периоде, доставляющий максимальный доход при реализации готовой продукции.

Для демонстрации метода и алгоритма решения задачи сформулируем и решим числовой пример.

<u>Пример</u>. Пусть крупная компания региона, состоящая из двух пунктов добычи сырья A_i, $i=\{1,2\}$ составил договор о поставке сырья с тремя предприятиями ассоциации $П_k$, $k=1,2,3$. Объем добываемого сырья за планируемый период на каждом пункте добычи предполагается неизвестным x_i^t, но ограниченным сверху величиной a_i^t, $i=1,2$, $t=1,2$, т.е.

$$\left|a_i^t\right|_{2,2} = \begin{pmatrix} 23000 & 15000 \\ 20000 & 15000 \end{pmatrix}.$$

На основе договора, за весь планируемый период сырье должно доставляться ассоциации в объеме Q_0 =50000, в том числе каждому перерабатывающему предприятию

$П_k$, $k=1,2,3$ ассоциации за период t , $t=1,2$ -в объеме не более чем $\left|d_k^t\right|$, $k=1,2,3$, $t=1,2$, т.е.

$$\left|d_k^t\right|_{3,2} = \begin{pmatrix} 11000 & 9000 \\ 9000 & 10000 \\ 7000 & 8000 \end{pmatrix}.$$

А также компания за весь планируемый период должен доставлять сырье в объеме b_0 =10000 потребителям G_r, $r=1,2$ этого региона, а в каждом периоде t , $t=1,2$, -объем сырья не более чем b_r^t, $r=1,2$, $t=1,2$, т.е.

$$\left|b_r^t\right|_{2,2} = \begin{pmatrix} 5000 & 4000 \\ 4000 & 3000 \end{pmatrix}.$$

Сырье, доставляемое предприятиям ассоциации, перерабатывается в продукцию и реализуется в том же периоде t, $t = 1,2,\ldots,T$.

Известны затраты на единицу объема добываемого сырья в i-ом пункте в t-ом периоде, $i=1,2$, $t=1$, , т.е. $\left|c_i^t\right|_{2,2} = \begin{pmatrix} 100 & 150 \\ 150 & 150 \end{pmatrix}$. Также известны затраты на транспортировку единицы объема сырья от каждого пункта добычи до перерабатывающих предприятий и до потребителей региона, т.е.

$$\left|c_{ik}^{t=1}\right|_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \left|c_{ik}^{t=2}\right|_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \left|c_{ir}^{t=1}\right|_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left|c_{ir}^{t=2}\right|_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{и}$$

цена реализации единицы объема продукции зависит от периода добычи сырья и его переработки в перерабатывающих предприятиях c_k^t , $k=1,2,3$,

$$t=1,2, \text{ т.е. } \left|c_k^t\right|_{3,2} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 10 & 8 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить объем добычи сырья для пунктов компании

$x_i^t \geq 0$, $i=1,2$, $t=1,2$, план распределения сырья между предприятиями ассоциации и потребителями региона так, чтобы суммарные затраты на добычу, перевозку сырья были бы минимальными, а для предприятий ассоциации определить объем перерабатываемого сырья, доставляющий максимум дохода при реализации готовой продукции.

На основе выше приведенных данных сформулируем числовую модель задачи.

Найти минимум

$$L(x)=2x_{11}^1+3x_{12}^1+2x_{13}^1+3x_{21}^1+2x_{22}^1+3x_{23}^1+2x_{11}^2+3x_{12}^2+2x_{13}^2+3x_{21}^2+2x_{22}^2+3x_{23}^2+$$

$$+ x_{11}^1 + 2\, x_{12}^1 + 2\, x_{21}^1 + 2\, x_{22}^1 + x_{11}^2 + 2\, x_{12}^2 + 2\, x_{21}^2 + 2\, x_{22}^2 + 100\, x_1^1 \quad + 150\, x_1^2 + 120\, x_2^1 + 130\, x_2^2 \qquad (13)$$

при условиях

$$x_{11}^1 + x_{12}^1 + x_{13}^1 + x_{11}^1 + x_{12}^1 = x_1^1\,,$$

$$x_{21}^1 + x_{22}^1 + x_{23}^1 + x_{21}^1 + x_{22}^1 = x_2^1\,,$$

$$x_{11}^2 + x_{12}^2 \quad + x_{13}^2 + \quad x_{11}^2 + x_{12}^2 = x_1^2\,,$$

$$x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 = x_2^2\,, \qquad (14)$$

$$0 \le x_1^1 \le 21000, \quad 0 \le x_2^1 \le 20000, \quad 0 \le x_1^2 \le 15000, \quad 0 \le x_2^2 \le 15000, \qquad (15)$$

$$x_{11}^1 + x_{21}^1 \le 8000, \quad x_{12}^1 + x_{22}^1 \le 6000, \quad x_{13}^1 + x_{23}^1 \le 7000, \quad x_{11}^2 + x_{21}^2 \le 9000,$$

$$x_{12}^2 + x_{22}^2 \le 8000, \quad x_{13}^2 + x_{23}^2 \le 6000,$$

(16)

$$x_{11}^1 + x_{12}^1 + x_{13}^1 + x_{21}^1 + x_{22}^1 + x_{23}^1 + x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2 = 50000,$$

(17)

$$x_{11}^1 + x_{21}^1 \le 5000, \quad x_{12}^1 + x_{22}^1 \le 4000, \quad x_{11}^2 + x_{21}^2 \le 4000, \quad x_{12}^2 + x_{22}^2 \le 3000, \qquad (18)$$

$$x_{11}^1 + x_{21}^1 + x_{21}^1 + x_{22}^1 + x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 = 6000, \qquad (19)$$

$$x_{ik}^t \ge 0, \quad i=1,2,\ k=1,2,3,\ t=1,2. \qquad (20)$$

Задачу решим способом, изложенным в [3]. Получен оптимальный план добычи сырья в пунктах добычи компании, т.е.

X={ x_{12}^1 =9000; x_{13}^1 =7000; x_{21}^1 =11000; x_{11}^2=1000; x_{12}^2 =10000; x_{13}^2 =4000;

x_{21}^2 =8000}, при этом целевая функция приняла значение $L(x)$ =7333000.

Далее используем решение задачи (13)-(19) , т.е. x_{ik}^t , $i=1,2,$ $k=1,2,3,$ $t=1,2,$ сформулируем задачу вида (10)-(12). Так как известна и оптовая цена реализации единицы объема готовой продукции в t-ом периоде c^t, $t=1,2,$ т.е. $c^t=(c^1,c^2\ )=\ (10,\ 12)$ и норма расхода сырья на единицу объема готовой продукции в k-ом предприятии ассоциации в

t-ом периоде λ_k^t, $k=1,2,3$, $t=1,2$, т.е.

$$\left|\lambda_k^t\right|_{3,2} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Используя приведенные данные, сформулируем числовую модель.

Найти максимум

$$L(y)=10\, y_1^1 + 10\, y_2^1 + 10\, y_3^1 + 12\, y_1^2 + 12\, y_2^2 + 12\, y_3^2 + 12\, y_1^2 \qquad (21)$$

при условиях

$$12\, y_1^1 = 11000,\ 10\, y_2^1 = 9000,\ 11\, y_3^1 = 7000,\ 8\, y_1^2 = 1000,\ 10\, y_2^2 = 10000,\ 12\, y_3^2 = 4000,$$

$$8 y_1^2 = 8000, \qquad (22)$$

$$y_k^t \geq 0,\quad k=1,2,\ t=1,2. \qquad (23)$$

Решив задачу (21)-(23) получим оптимальный план y_k^t, k=1,2,3, t= 1,2, выпуска готовой продукции каждого предприятия ассоциации в каждом периоде, т. е. Y={ y_1^1 =916,7; y_2^1 =900,0; y_3^1 = 636, 4, y_1^2 =125,0; y_2^2 =1000,0; y_3^2 =333,3; y_4^2 =1000,0}, и суммарный доход при договорных условиях работы $L(y)$ = 54030,3 усл. ед.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асанкулова М. Оптимизация добычи и распределения сырья между потребителями в зависимости от периода [Текст] / М. Асанкулова, А. Жусупбаев // Проблемы современной науки и образования. – Иваново, 2016, № 4(46). – С.7-12.
2. Жусупбаев А. Задача определения технологического способа добычи, переработки и транспортировки угля [Текст] / А. Жусупбаев, М. Асанкулова, Султанкул кызы Айнура // Наука, техника и образование. – Иваново, 2016, № 7(25). – С.10-14.
3. Жусупбаев А. Задача оптимизации производства напитков компании и распределения их между потребителями [Текст] / А. Жусупбаев, Ж. Барганлиева, М. Асанкулова // Известия вузов Кыргызстана. – Бишкек: – 2017, №5, часть 1. – С.61-63.

УДК 512.643
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_56

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Байзаков Асан Байзакович, д.ф.-м.н., профессор
asan_baizakov@mail.ru
Шаршенбеков Мирлан Маликович, научный сотрудник
Айтбаев Кубат Асаналиевич, к.ф.-м.н.
Момбеков Алымбек Джаманкулович, Академик Академии народной медицины Республики Коми РФ
Институт математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *Выявлено, что основным математическим аппаратом построения магических квадратов (М-матриц) высокого порядка, является арифметическая прогрессия. В силу свойств констант квадратов как члена арифметическая прогрессия получаем возможность построения матриц все более высокого порядка. Возможность получения многообразий М-матриц, например вращением подблоков, дает отличное условие применение магических квадратов высокого порядка к информационной безопасности, в частности в криптографии.*

Ключевые слова: *Магический квадрат, квадратные блочные матрицы, константа квадрата, арифметическая прогрессия, члены арифметической прогрессии как идентификаторы.*

ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ МАГИЯЛЫК КВАДРАТТАРДЫН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДЕШТИРИЛИШИ ЖАНА АЛАРДЫН МААЛЫМАТ КООПСУЗДУГУНДА КОЛДОНУЛУШУ

Байзаков Асан Байзакович, ф.-м.и.д., профессор
asan_baizakov@mail.ru
Шаршенбеков Мирлан Маликович, илимий кызматкер
Айтбаев Кубат Асаналиевич, ф.-м.и.к.,

Момбеков Алымбек Джаманкулович, Академик Академии народной медицины Республики Коми РФ
Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер Академиясы математика Институту
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *Жогорку тартиптеги магиялык квадраттарды (М-матрицаларды) куруунун негизги математикалык аппараты арифметикалык прогрессия экени аныкталган. Арифметикалык прогрессиянын мүчөсү катары квадраттардын константаларынын касиеттеринин аркасында биз барган сайын жогору даражадагы матрицаларды куруу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз. М-матрицалардын ар башка түрлөрүн алуу мүмкүнчүлүгү, мисалы, ички блокторду айлантуу жолу менен, маалыматтын коопсуздугуна, атап айтканда криптографияга жогорку тартиптеги магиялык квадраттарды колдонуу үчүн эң сонун шарт түзөт.*

Урунттуу сөздөр: *Магиялык квадрат, квадраттык блок матрицалары, квадраттык константа, арифметикалык прогрессия, идентификатор катары арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү.*

MATHEMATICAL MODELING OF HIGH ORDER MAGIC SQUARES AND THEIR APPLICATIONS TO INFORMATION SECURITY

Baizakov Asan Baizakovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
asan_baizakov@mail.ru
Sharshenbekov Mirlan Malikovich, researcher
Aitbaev Kubat Asanalievich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Mombekov Alymbek Dzhamankulovich, Academician of the Academy of Traditional Medicine of the Komi Republic of the Russian Federation
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic

Abstract:: *It is revealed that the main mathematical apparatus for constructing magic squares (M-matrices) of high order is an arithmetic progression. By virtue of the properties of the constants of squares as a member of an arithmetic progression, we obtain the possibility of constructing matrices of ever higher order. The possibility of obtaining varieties of M-matrices, for example, by rotating sub-blocks, provides an excellent condition for applying high-order magic squares to information security, in particular in cryptography.*

Keywords: *Magic square, square block matrices, square constant, arithmetic progression, members of an arithmetic progression as identifiers.*

Постановка задачи

Метод декомпозиции широко применяется в науке и практике. Он приводит к достижению цели, если целью удается расчленить на независимые друг от друга части, поскольку в этом случае их отдельное рассмотрение позволяет правильное представление об их вкладе в общий эффект. Французский математик Р. Декарт писал: «Расчлените каждую изучаемую вами задачу на столько частей, сколько потребуется, чтобы их было легко решить».

Наша цель построить M матрицу высокого порядка, например, матрицу 48го порядка применяя вышеуказанный метод, т.е. разместить натуральные числа от 1 до 2304 ($48^2 = 2304$) в M матрицу 48 порядка, так, чтобы S константа квадрата (магическое число) был 55320:

$$S = \frac{n^2+1}{2} \cdot n = \frac{48^2+1}{2} \cdot 48 = 55320 .$$

Будем использовать обозначение: N -множество натуральных чисел; R -множество действительных чисел; C -комплексное поле.

Определение 1. Квадратная матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ называется M матрицей, если $a_{ij} \in N,\ i,j = \overline{1,\ n}$ причем выполнены следующие условия:

1) Все n^2 числа $a_{ij} \in N,\ i,j = \overline{1,\ n}$ различны и являются элементом подмножества $N_m \subset N$, последовательно расположенных n^2 чисел от $m+1$, до $m+n^2$ в множестве N;

2) $\sum\limits_{i=1} a_{ij} = S,\ \forall j = \overline{1,n},\ \sum\limits_{j=1} a_{ij} = S,\ \forall i = \overline{1,n}, \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = S,\ \sum\limits_{i+j=n+1} a_{ij} = S$.

Определение 2. Матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ называется M_1 матрицей, если $a_{ij} \in R,\ i,j = \overline{1,\ n}$, причем выполнены следующие условия:

1) Все n^2 числа $a_{ij},\ i,j = \overline{1,\ n}$ различны и является элементом подмножества $R_m \in R$ (множество действительных чисел);

2) $\sum\limits_{i=1} a_{ij} = S,\ \forall j = \overline{1,n},\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = S,\ \forall i = \overline{1,n},\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = S, \sum\limits_{i+j=n+1} a_{ij} = S$.

По определению ясно, что M матрицы являются подмножеством M_1 матриц.

Будем исходить из того, что M матрицы 3 и 4го порядка нами построены, например,

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ (а)} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 2 & 12 & 7 \\ 16 & 3 & 9 & 6 \\ 1 & 14 & 8 & 11 \\ 4 & 15 & 5 & 10 \end{pmatrix}. \text{ (б)} \qquad (1)$$

Можно будет использовать и другие виды M матриц 3 и 4го порядка. Как известно, количество M матриц 3го порядка -8, а M -матриц 4го порядка -880, а M -матриц 5го порядка -более 1 000 000.

Свойства констант квадратов в M матрицах

Теорема 1. Пусть A - M матрица с константой квадрата S. Тогда число S является собственным значением M матрицы A, с соответствующим собственным вектором

$$\vec{x} = c \cdot colon(1, 1, 1),$$

где c -произвольная константа.

Доказательство.

Для определенности будем считать, что $c = 1$. Тогда равенство

$$A\vec{x} = S\vec{x}$$

будет выполняться в силу определения 1 M матрицы. Что и требовалась доказать.

Например, для M матрицы (1) (или (2)) число 15 (соответственно число 34) является собственным числом, а собственный вектор $\vec{x} = c \cdot colon(1, 1, 1)$ (соответственно $\vec{x} = c \cdot colon(1, 1, 1, 1)$).

Теорема 2. Пусть последовательность, $\{a_i, i \in N\}$ некоторая арифметическая прогрессия, где $a_i \in R$. Выделим из этой арифметической прогрессии подмножество R_m последовательна расположенных n^2 членов: от a_{m+1} до a_{m+n^2}. Тогда из этих членов можно построить M_1 матрицу n го порядка.

Доказательство. Для ясности пусть $m = 0$. Так как $a_j,\ j = \overline{1,\ n^2}$ член арифметической прогрессии то в M матрице n го порядка натуральных чисел от 1 до n^2 вместе натурального числа j расположим член a_j. Тогда константа квадрата полученной M_1 матрица вычисляется по формуле

$$S = \left[\frac{a_1 + a_{n^2}}{2} \cdot n^2\right]\frac{1}{n}$$

или

$$S=\frac{2a_1+d(n^2-1)}{2}\cdot n\,. \qquad (2)$$

Что и требовалась доказать.

Например, M матрица вида

$$\begin{pmatrix} 32 & 37 & 12 \\ 7 & 27 & 47 \\ 42 & 17 & 22 \end{pmatrix}$$

по формуле (2), где $a_1=7,\ d=5,\ n=3$ имеет константу квадрата $S=81$.

Теорема 3. Если A - M матрица, $D_m=(m)_{ij=1}^{n}$ постоянная матрица, то $A\pm D_m$ так же будет M матрицей. В этом случае константа квадрата определяется формулой:

$$S=S_A\pm mn\,, \qquad (3)$$

S_A-константа квадрат матрицы A.

Доказательство данной теоремы проводится с использованием формулы суммы арифметической прогрессии.

Так же следует отметить, что в M_1 матрице элементами могут быть и вещественные (комплексные) числа, являющиеся членами арифметической прогрессии.

Например, матрицы вида

$$\begin{pmatrix} -9 & -16 & -6 & -3 \\ -5 & -4 & -10 & -15 \\ -12 & -13 & -7 & -2 \\ -8 & -1 & -6 & -14 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1,6 & 1,9 & 0,4 \\ 0,1 & 1,3 & 2,5 \\ 2,2 & 0,7 & 1,0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 6+12i & 7+14i & 2+4i \\ 1+2i & 5+10i & 9+18i \\ 2+16i & 3+6i & 4+8i \end{pmatrix},$$

имеют соответственно константы квадрата равные:

$$S=-34;$$
$$S=3,9;$$
$$S=15+30i,\quad i=\sqrt{-1}.$$

Построение M матриц высокого порядка

При построении M матриц высокого порядка будет использовать M матрицу низкого порядка и свойства арифметической прогрессии констант квадрата.

Пример 1. Согласно методу декомпозиции определим дерево целей следующим образом

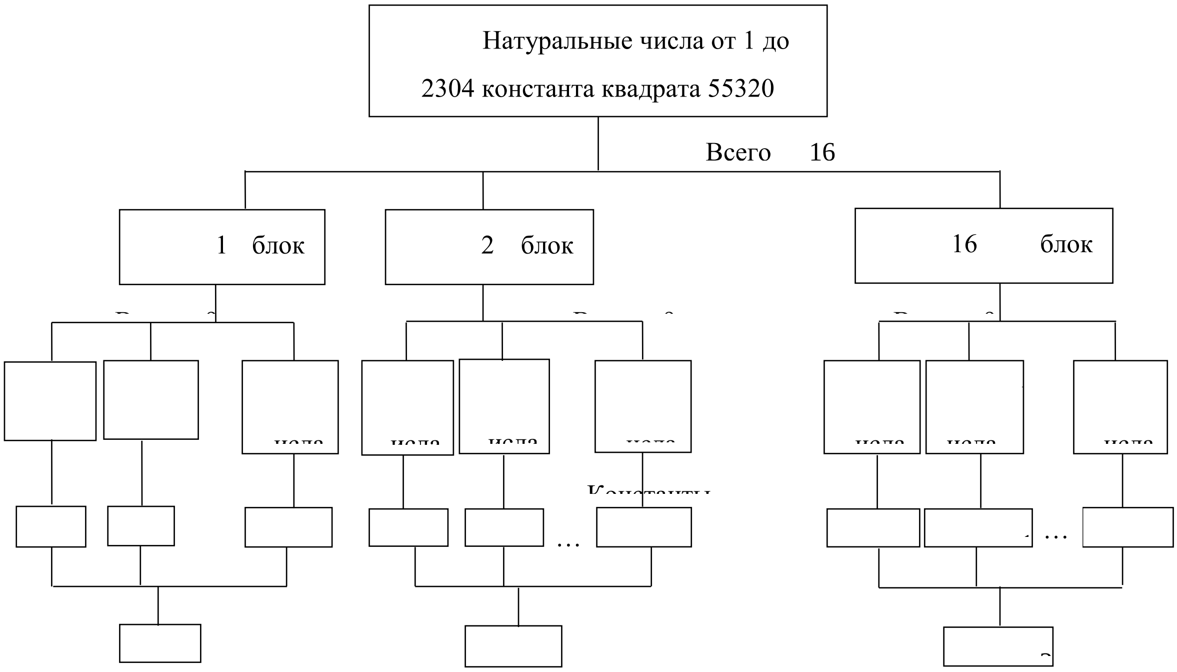


Рис. 1. Блок-схема построения M матрицы 48 порядка

Теперь начинаем с 1го подблока 1го блока. В нем находятся числа от 1 до 16. Из них можно построить M матрицу 4 порядка в частности как (2), с константой квадрата $S=34$. Далее из 2го подблока 1го блока построим M матрицу в силу теоремы 3 $m=16$, с константой квадрата

$$S = S_A + 16 \cdot 4 = 34 + 64 = 98,$$

и т.д.

9 подблок 1 блока имеет константу квадрата $S = 34 + 128 \cdot 4 = 546$ и самый последний подблок 9 блока имеет константу квадрата $S = 34 + 2288 \cdot 4 = 9186$. Отметим, что константы квадратов подблоков 1го блока сами образуют арифметическую прогрессию $\{a_i,\ a_1 = 34,\ i = \overline{1,9},\ A = 64\}$: 34, 98, … , 546. В силу магичности каждая константа квадрата выступает как от имени подблока. Тогда по теореме 2 мы можем построить M матрицу 3го порядка по образцу (1) с константой квадрата равной 870 ($n=3$): $S = \dfrac{2 \cdot 34 + 64 \cdot 8}{2} \cdot 3 = 870$ (см. рис 1).

Итак, 1 блок есть M блок матрица 12го порядка с общей константой квадрата 870, т.е. 1 блок можно рассмотреть как одно число 870.

Аналогично, константы квадратов подблоков 2го блока так же образуют арифметическую прогрессию $\{a_i,\ a_1 = 610,\ i = \overline{1,\ 9},\ A = 64\}$. Для констант квадратов подблоков 2го блока можем построить по образцу (1) M матрицу 3го порядка, с константой квадрата

$$S = \frac{2 \cdot 610 + 64 \cdot 8}{2} \cdot 3 = 2598,$$

или по формуле (3)

$$S = S_A \pm mn = 870 + 144 \cdot 12 = 2598.$$

Повторяя точно такие же алгоритмы с константами квадратов во всех остальных 14 M блоков, окончательно получим 16 членов арифметической прогрессии 870, 2598, … , 26790, т.е. $a_n = a_1 + d(n-1)$, где $a_1 = 870,\ d = 1728,\ n = \overline{1,\ 16}$.

Теперь эти 16 чисел констант квадратов мы расположим, в частности, на M матрицу по образцу (1) (можно их построить в другом виде).

Далее вместо каждой константы квадрата рассматриваем как идентификаторы и выпишем соответствующие M блоки матриц с M_1 матрицами (подблоки) и получим искомую M матрицу 48 порядка.

Так же отметим, что множество значений констант квадратов моделируется разностным уравнением второго порядка вида

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 1 \tag{4}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} &а) \quad u_1 = 34, \quad u_2 = 98; \\ &б) \quad u_1 = 870, \quad u_2 = 2598. \end{aligned} \tag{5}$$

Согласно методу Эйлера общее решение уравнения (4) имеет вид

$$u(n) = c_1 + c_2 n$$

так как корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$совпадают.

Тогда, решение задачи Коши (4), (5), а), б) имеет вид

$$\begin{aligned} &а) \quad u(n) = -30 + 64n; \\ &б) \quad u(n) = -858 + 1728n. \end{aligned} \tag{6}$$

В силу (6) а) получаем значения (5)

$u(1) = 34,\ u(2) = 98,\ \ldots,\ u(143) = 9122,\ u(144) = 9186,$

и в силу (6) б) имеем

$u(1) = 870,\ u(2) = 2598,\ \ldots,\ u(15) = 25062,\ u(16) = 26790$.

Топологическая структура и свойства M матриц

Пусть нами построена M матрица n-го порядка A. Для ясности в дальнейшем матрицу A представим в виде магического квадрата и обозначим опять через A.

Произведем гомеоморфное отображение $f: A \to B$, где B кольцо и верхняя сторона квадрата взаимно однозначно и непрерывно отображается в границу окружность внешнего круга, а нижняя сторона квадрата отображается в окружность внутреннего круга. Ясно, что при этом строки M матрицы однозначно и непрерывно преобразуется в параллели, а столбцы в меридианы. И поэтому константа квадрата сохраняется для каждой параллели, и для каждой меридианы. Далее, в этом случае обнаруживается новое свойство кольца. В кольце появляются спирали, для которых так же сохраняется константа квадрата. Причем половина из них вращаются по часовой стрелке, остальные против часовой стрелке (см. рис. 2).

Эти дополнительные сверх свойства M матриц можно обнаружить следующим образом. Если к нему приставить справа такую же M матрицу, то при суммировании по всем диагональным направлениям получаем константу квадрата, а их оказывается всего 4 два из них сверху вниз, и 2 снизу вверх.

$$\begin{array}{l}
\searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
13 & 2 & 12 & 7 & 13 & 2 & 12 & 7 \\
16 & 3 & 9 & 6 & 16 & 3 & 9 & 6 \\
1 & 14 & 8 & 11 & 1 & 14 & 8 & 11 \\
4 & 15 & 5 & 10 & 4 & 15 & 5 & 10
\end{array}\right) \\
\nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow
\end{array}$$

Проверим для M матриц 5го порядка.

$$\begin{array}{l}
\searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
16 & 5 & 14 & 23 & 7 & 16 & 5 & 14 & 23 & 7 \\
24 & 8 & 17 & 1 & 15 & 24 & 8 & 17 & 1 & 15 \\
2 & 11 & 25 & 9 & 18 & 2 & 11 & 25 & 9 & 18 \\
10 & 19 & 3 & 12 & 21 & 10 & 19 & 3 & 12 & 21 \\
13 & 22 & 6 & 20 & 4 & 13 & 22 & 6 & 20 & 4
\end{array}\right) \\
\nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow
\end{array}$$

В этом случае число констант квадратов по диагональным направлениям равно $2 \cdot 5 = 10$, 5 из них сверху вниз и 5 снизу вверх.

Очевидно, что при топологическом преобразовании M матриц в кольцо, эти диагональные направления и дают спирали, вращающиеся как по часовой стрелке, так и против часовой стрелке.

Приложения

Рис.1. Фрагмент M матрицы 48 порядка с константой 870

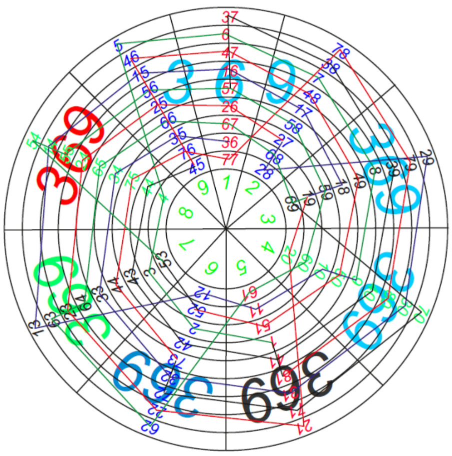


Рис.2. Топологическая структура M матрицы 9-го порядка.

Актуальностью построения M матриц высокого порядка обусловливается ее применением в информационной безопасности, а именно в криптографии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байзаков А.Б., Момбеков А.Д., Айтбаев К.А. О разнообразии констант квадратов в подблоках при декомпозиции матриц // Доклады НАН КР, Бищкек, 2017. №2. – С.19-24.
2. Байзаков А.Б., Момбеков А.Д. О некоторых свойствах квадратных матриц, сохраняющих симметрию // Известия НАН КР, Бишкек, 2018. – С.1-14
3. Байзаков А.Б., Момбеков А.Д. О принципе сохранения симметрий во вложенных М матрицах // II Борубаевкие чтения, Бищкек, 1 март, 2018, с.21.
4. Байзаков А.Б., Момбеков А.Д. О некоторых свойствах квадратных матриц, сохраняющих симметрию // Известия НАН КР, Бишкек, 2018. №3. – С19-30.

5. Baizakov A.B., Mombekov F.D., Sharshenbekov M.M. On the properties of the squared constants in block M matrices // Abstract:s of international conference Matematicial analysis, differential equations. – Issyk-Kul, Kyrgyz Repuplik. 2018. – P.37.
6. Борубаев А.А., Байзаков А.Б. Математические модели построения и выявления свойств магических матриц высокого порядка // Авторское свидетельство №3754 Кыргызпатента об авторском праве. – 28.11.2019.
7. Baizakov A.B., Sharshenbekov M.M., Aitbaev K.A. Magic square: Terms of arithmetic progression – identifiers // Вестник Института математики НАН КР, 2022, №1, – С.77-81.
8. Baizakov A.B., Mombekov A.J., Sharshenbekov M.M. Creation of the database of low-order M-matrices is on important step of the decomposition method // Вестник Института математики НАН КР, 2022. №2. – С.65-68.
9. Байзаков А.Б., Айтбаев К.А., Шаршенбеков М.М. Компьютерное моделирование магических квадратов нечетного порядка методом террас и ее применение в криптографии // Известия НАН КР. – Бишкек, – 2020, №4, – С51-58.
10. Байзаков А.Б., Момбеков А.Дж., Шаршенбиев Б. Сантоку. Логикалык тапшырмалар Бищкек, «Кыргыз Жер», 2020, – 192 б. (с грифом МНО КР)
11. Байзаков А.Б., Айтбаев К.А., Шаршенбеков М.М. Magic square: Terms of arithmetic progression – identifiers // Авторское свидетельство №5075 Кыргызпатента об авторском праве. – 21.12.2022..
12. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М.: ГИТТЛ, 1959. – 576 с.
13. Гантмахер Ф.Т. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552с.
14. Ланкастер П. Теория матриц. -пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
16. Ю. В. Чебраков. Теория магических матриц. Выпуск ТММ-1. – С. –Петербург, 2008
17. Heinz H. Magic Squares, Magic Stars & Other Patterns. – Last updated Nov 2009. – http: // www.magic-squares.net/

УДК 517.9
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_66

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Бердимуратов Амангельди Мухтарович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Лысьвенский филиал
Пермский национальный исследовательский
политехнический университет
Россия, 618902, Лысьва, ул. Ленина, 2,
aman2460@mail.ru

Аннотация. *В этой статье доказывается теорема существования обобщенных решений дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, определенное в некоторой окрестности объединения трех граней параллелепипеда.*

В классических граничных задачах Дарбу-Гурса-Бодо значения решения и его производных задаются на трех пересекающихся характеристических гиперплоскостях и ищется нужное число производных заданных на этих гиперплоскостях которые из-за характеристичности гиперплоскостях обобщенные решения дифференциального уравнения могут не иметь ограничений на гиперплоскостях. Автором рассматривается несколько иная форма постановки задачи т.е. продолжения обобщенное решение рассматриваемых системы определенное в окрестности трех граней параллелепипеда в окрестность большего параллелепипеда. Единственность ниже рассматриваемой задачи обобщенных решений дифференциальных уравнений доказано в предыдущих работах автора.

Ключевые слова: *несобственная точка, преобразование Фурье, выпуклый компакт, финитные функции, целые аналитические функции, характеристическая функция, алгебраическое множество.*

ТУРУКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЖАЛПЫЛАНГАН ЧЕЧИМДЕРИ

Бердимуратов Амангелди Мухтарович
физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент,
Лысьва филиалы

Пермь улуттук илим-изилдөө
политехникалык университети
Россия, 618902, Лысва, ул. Ленин, 2,
aman2460@mail.ru

Аннотация: *Бул макалада параллелепипеддин үч бетинин биригүүсүнүн кээ бир аймагында аныкталган туруктуу коэффициенттери бар дифференциалдык теңдемелердин жалпыланган чечимдеринин бар болуу теоремасы далилденет.*

Классикалык Дарбу-Гурса-Бодо чек ара маселелеринде чечимдин маанилери жана анын туундулары кесилишкен үч мүнөздүү гипертегиздикте берилген жана бул гипертегизтерде берилген туундулардын керектүү саны, мүнөздүү табиятынан улам изделген гипертегиздиктер, дифференциалдык теңдеменин жалпыланган чечимдери гипертегиздиктер үчүн чектөөлөр болбошу мүмкүн.Автор проблеманы билдирүүнүн бир аз башкача формасын карайт, б.а. чоңураак параллелепипедтин жанында параллелепипеддин үч гранынын аймагында аныкталган каралып жаткан системалардын жалпыланган чечиминин кеңейтилиши. Төмөндө каралып жаткан дифференциалдык теңдемелердин жалпыланган чечимдеринин маселесинин уникалдуулугу автордун мурунку эмгектеринде далилденген.

Урунттуу сөздөр*: туура эмес чекит, Фурье трансформациясы, томпок компакт, финит функциялар, бүтүндөй аналитикалык функциялар, мүнөздөмө функция, алгебралык көптүк.*

GENERALIZED SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Berdimuratov Amangeldi Mukhtarovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Lysvensky branch
Perm National Research
Polytechnic University
Russia, 618902, Lysva, Lenin str., 2,
aman2460@mail.

Abstract:: *In this article, we prove the theorem of the existence of generalized solutions of differential equations with constant coefficients, defined in some neighborhood of the union of three faces of a parallelepiped.*

In classical Darboux-Goursat-Bodot boundary value problems, the values of the solution and its derivatives are given on three intersecting characteristic hyperplanes and the desired number of derivatives given on these hyperplanes is sought, which, due to the characteristic hyperplanes, generalized solutions of the differential equation may not have restrictions on the hyperplanes. The author considers a slightly different form of problem statement, i.e., the continuation of a generalized solution of the system under consideration defined in the neighborhood of three faces of a parallelepiped in the neighborhood of a larger parallelepiped. The uniqueness of the problem under consideration of generalized solutions of differential equations is proved in the author's previous works.

Keywords: *improper point, Fourier transform, convex compact, finite functions, integer analytic functions, characteristic function, algebraic set.*

Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{array}{l}
P_{11}(D)u_1+\ldots+P_{1s}(D)u_s=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_{t1}(D)u_1+\ldots+P_{ts}(D)u_s=0
\end{array}
\qquad (1)
$$

где $\mathrm{P}_{\mathrm{ij}}(\mathrm{D})\, i=\overline{1,t}\quad j=\overline{1,s}$ линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, а числа t и s произвольны

и где $\mathrm{u}=(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2\ldots,\mathrm{u}_\mathrm{S})$-неизвестная вектор-функция.

Обозначим через N характеристическое множество оператора $P(D)$,то множество $N=\{z\in C^n; rangp(z)<s\}$ где $p(z)$ -характеристическая матрица оператора $P(D)$, а через $N^{'}$-конус в C^n,образованный комплексными прямыми, отвечающими несобственным точкам алгебраическому многообразия N. Под символом $\left[\mathcal{D}_F^\beta\right]^s$ мы будем понимать прямую сумму экземпляров этого пространства, а элементы $\left[\mathcal{D}_F^\beta\right]^s$ интерпретировать как столбцы высоты s,образованные функциями из $\mathcal{D}_F^\beta$. Под нормой вектора $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_s)\in[\cdot]^s$ мы будем понимать наибольшую из норм его компонент $\vartheta_s\in[\cdot]^s, i=\overline{1,s}$.

Постановка задачи

Пусть π -параллелепипед в R^n , n -граней которого лежат в координатных подпространствах $\xi_i=0$, $i=1,2,...,n$.

Обозначим через π_i его $(n-1)$-мерную грань, лежащую в подпространстве

$$\xi_i=0\ ,\ i=1,2,3.$$

В этой статье исследуется следующая задача: при каких условиях всякое обобщенное решения уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами определенное в окрестности трех соседних граней параллелепипеда в R^n ,может быть продолжен в некоторую его окрестность.

Докажем ряд лемм ,для использования в дальнейшем для доказательство сформулируемую теорему ниже.

Лемма 1. Существуют константы $c>0$ и $h<1$ такие, что $\rho\left(z,N^{'}\right)\le c\left(\left|z\right|^{h}+1\right)$ для любого $z\in N$.

Доказательство см.в [1].

Лемма 2.

$$\mathcal{D}^{\beta}_{\left(\bigcup_{k=1}^{3}\pi_k\right)^{\alpha}}\subset\sum_{k=1}^{3}\mathcal{D}^{\beta}_{\pi_k^{\alpha+1}}.$$

Доказательство: введем обозначения $G^1=\left(\pi_1^{\alpha}\right)_{\varepsilon}$, $G^2=\left(\pi_2^{\alpha}\right)_{\varepsilon}\setminus\left(\pi_1^{\alpha}\right)_{\varepsilon}$, $G^3=\left(\pi_3^{\alpha}\right)_{\varepsilon}\setminus\left(\pi_1^{\alpha}\right)_{\varepsilon}\cup\left(\pi_2^{\alpha}\right)_{\varepsilon}$, где $\varepsilon=2^{\alpha-1}$ а $\left(\pi_k^{\alpha}\right)_{\varepsilon}$ - ε окрестность множества π_k^{α}.

Рассмотрим функции $g_k=\chi_{G^k}*\varphi$ где $\varphi\in\mathcal{D}^{\beta}(R^n)$, $Supp\varphi\subset\left\{\xi\in R^n;\left|\xi\right|<\varepsilon\right\}$, и $\int\limits_{R^n}\varphi(\xi)d\xi=1$.Докажем ,что на множестве $\bigcup_{k=1}^{3}\pi_k^{\alpha}$ выполняется равенство

$$g_1+g_2+g_3=1 \tag{3}$$

Очевидно, что $1-g_1-g_2-g_3=1-\chi_G*\varphi$, где $G=\bigcup_{k=1}^{3}G^k$.

Так как $1*\varphi=1$,то имеем $1-g_1-g_2-g_3=(1-\chi_G)*\varphi.$ Функция $1-\chi_G$ обращается в нуль на множестве $\bigcup_{k=1}^{3}(\pi_k^{\alpha})_{\varepsilon}$, а носитель φ принадлежит ε -окрестности нуля, поэтому $(1-\chi_G)*\varphi$ обращается в нуль на множестве $\bigcup_{k=1}^{3}\pi_k^{\alpha}$,что доказывает утверждение (3). Из свойств свертки следует, что $Suppg_k\subset\left(G^k\right)_{\varepsilon}\subset\left(\pi_k^{\alpha}\right)_{2\varepsilon}=\pi_k^{\alpha+1}$.

Пусть ψ произвольная функция из $\mathcal{D}^{\beta}_{\left(\bigcup_{k=1}^{3}\pi_k\right)^{\alpha}}$. Обозначая $\psi_k=g_k\cdot\psi$, будем иметь $Supp\psi_k\subset Suppg_k\subset\pi_k^{\alpha+1}$. Очевидно ψ_k -бесконечно дифференцируемая функция. Поэтому $\psi_k\in\mathcal{D}^{\beta}_{\pi_k^{\alpha+1}}$. Из (3) следует, что $\psi=\psi_1+\psi_2+\psi_3$.

Лемма доказана.

Лемма 3.Для любых неравных индексов i, j, k принимающих значения 1, 2, 3 оператор умножения на h_i непрерывно действует:

а) из $\mathcal{S}_{\pi^\alpha}^{\beta,D+c\cdot a_i}$ в $\mathcal{S}_{\pi_i^D}^{\beta,D}$

б) из $\mathcal{S}_{\pi_j^\alpha}^{\beta,D+c\cdot a_i}$ в $\mathcal{S}_{(\pi_i\cap\pi_j)^\alpha}^{\beta,D}$

в) из $\mathcal{S}_{(\pi_j\cap\pi_k)^\alpha}^{\beta,D+c\cdot a_i}$ в $\mathcal{S}_{(\pi_i\cap\pi_j\cap\pi_k)^\alpha}^{\beta,D}$

Доказательство см. в [3].

Лемма 4. $\forall f\in\left(\mathcal{S}_F^{\beta,D}\right)_P^{'}$ и $\forall\psi\in\left[\mathcal{S}_F^{\beta,D+2\varepsilon}\right]^s$ где $\varepsilon>0$ -произвольное малое число$\left(f,h_0\psi\right)=0$. Доказательство. (см.Бердимуратов [2])

Лемма 5. Для любого компакта $F\subset R^n$ и при любом $B>0$, $\left(\mathcal{D}_F^{\beta,B}\right)^*\subset\mathcal{S}_{F_\varepsilon}^{\beta,D^{'}}$, причем $\forall\varphi\in\mathcal{D}_F^{\beta,B}$ выполняется неравенство $\left\|\varphi^*\right\|_{m,F_\varepsilon}^{\beta,D^{'}}\le c\cdot\left\|\varphi\right\|^{\beta,B}$,где $D^{'}=\frac{\beta}{e}\left(2^{\nu+1}\cdot B\right)^{-\frac{1}{\beta}}$.

Доказательство. В силу предложение 5.см.[1](глава.V,§3,предл5,стр.279) вытекает прямое преобразование Фурье определяет оператор

*F: $\mathcal{D}_F^{\beta,B}\to\mathcal{S}_{R_D}^{\mathcal{J}_{F_\varepsilon}}$,где $D=\frac{\beta}{e}\left(2^{\nu}\cdot B\right)^{-\frac{1}{\beta}}$.

Покажем , что $\mathcal{S}_{R_D}^{\mathcal{J}_F}\subset\mathcal{S}_F^{\beta,D^{'}}$, где $D^{'}=2^{-\frac{1}{\beta}}\cdot D$.

$\forall f(z)\in\mathcal{S}_{R_D}^{\mathcal{J}_F}$ в силу неравенства Коши $\left|D^j f(z)\right|\le c_j\max\limits_{\substack{|w_i-z_i|\le1\\ i=\overline{1,n}}}\left|f(w)\right|$.

имеем $\left|D^j f(z)\right|\le c_j\max\limits_{\substack{|w_i-z_i|\le1\\ i=\overline{1,n}}}\left\|f\right\|_{R_D}^{\mathcal{J}_F}\cdot R_D(w)\mathcal{J}_F(y^{'})$ где $y^{'}=JmW$.

При $\left|y_i^{'}-y_i\right|\le1$, $i=\overline{i,n}$ будем иметь

$$\mathcal{J}_F(y^{'})=\sup_{\xi\in F}\exp(\xi,y^{'})\le\sup_{\xi\in F}\exp(\xi,y)\exp(\xi,(y^{'}-y))\le c\cdot\mathcal{J}_F(y).$$

Далее имеем $|z|^{\frac{1}{\beta}}\le(|w|+|z-w|^{\frac{1}{\beta}})\le2^{\frac{1}{\beta}}(|w|^{\frac{1}{\beta}}+|z-w|^{\frac{1}{\beta}})$, откуда

$$-|w|^{\frac{1}{\beta}}\le-2^{-\frac{1}{\beta}}|z|^{\frac{1}{\beta}}+|z-w|^{\frac{1}{\beta}}$$

и, следовательно, при$\left|w_i-z_i\right|\le1$, $i=\overline{i,n}$,

$\exp(-D|w|^{\frac{1}{\beta}}) \le c\cdot\exp\left(-D\cdot 2^{-\frac{1}{\beta}}|z|^{\frac{1}{\beta}}\right)$ то есть $R_D(w) \le c\cdot R_{D'}(z)$. Для любого j и при любом z получим $\left|D^j f(z)\right| \le c\cdot c_j \,\|f\|_{R_D}^{\mathcal{J}_F}\cdot R_{D'}(z)\mathcal{J}_F(y)$ откуда $\sup\limits_{z}\frac{\left|D^j f(z)\right|}{R_{D'}(z)\mathcal{J}_F(y)} \le c_j' \,\|f\|_{R_D}^{\mathcal{J}_F}$ и

следовательно, $\|f\|_{m,F}^{\beta,D'} \le \max\limits_{|j|\le m}\sup\limits_{z}\frac{\left|D^j f(z)\right|}{R_{D'}(z)\mathcal{J}_F(y)} \le c_m \,\|f\|_{R_D}^{\mathcal{J}_F}$, то есть $\mathcal{S}_{R_D}^{\mathcal{J}_F} \subset \mathcal{S}_F^{\beta,D'}$.

Из выше изложенного следует непрерывность операторов вложения $\left(\mathcal{D}_F^{\beta,B}\right)^* \to \mathcal{S}_{R_D}^{\mathcal{J}_{F_\varepsilon}} \to \mathcal{S}_{F_\varepsilon}^{\beta,D'}$ и ,следовательно, $\left\|\varphi^*\right\|_{m,F_\varepsilon}^{\beta,D'} \le c\cdot\|\varphi\|^{\beta,B}$.

Следствие. $\left(\mathcal{D}_F^{\beta}\right)^* \subset \mathcal{S}_{F_\varepsilon}^{\beta}$, где $\mathcal{S}_{F_\varepsilon}^{\beta} = \bigcap\limits_{D>0}\mathcal{S}_{F_\varepsilon}^{\beta,D'}$.

Доказательство. Следствие вытекает из того ,что, когда $B>0$, то $D' \to \infty$.

Теорема.Пусть $N' = \bigcup\limits_{k=1}^{3}\left\{z\in C^n; z_k = 0\right\}$, тогда существует число $h<1$, зависящее лишь от оператора P, такое, что для любого β, удовлетворяющего условию $\beta>1$ при $h\le 0$ и $1<\beta\le\frac{1}{h}$ при $h>0$ и любого $B>0$ и для любой окрестности L компакта $\bigcup\limits_{k=1}^{3}\pi_k$ существует окрестность L' параллелепипеда π такая, что всякую обобщенную функцию $u\in\left[\mathcal{U}_L^{\beta}\right]^s$,являющуюся решением (1) на L, можно продолжить функцией $\vartheta\in\left[\mathcal{U}_{L'}^{\beta}\right]^s$, являющуюся (1) на L', и $\|\vartheta\|_{L'}^{\beta,B'} \le c\cdot\|u\|_L^{\beta,B}$

где константы B' и c не зависят от u. Число h,участвующее в формулировке теоремы, зависит лишь от оператора P и находится с помощью вышеприведенной леммы1.

Доказательство. Пусть F и $F'\supseteq F$ компакты в R^n, $h<1$ -число, определяемое леммой 1.

Пусть произвольная обобщенная функция $u\in\left[\mathcal{U}_L^{\beta}\right]^s$ при некотором целом α является решением системы (1) в классе $\mathcal{U}^{\beta}_{\left(\bigcup\limits_{k=1}^{3}\pi_k\right)^{\alpha}}$ тогда в силу вышеизложенного, обобщенная функция u принадлежит пространству $\left[\left(\mathcal{D}^{\beta,B}_{\left(\bigcup\limits_{k=1}^{3}\pi_k\right)^{\alpha}}\right)'\right]^s$ при некотором положительном В. Применяя теоремы Паламодова, см.[1],(гл.VI, § 4,теор.2) к функционалу

u и к каждому из выпуклых компактов π_i^α по отдельности, мы получим три представления

$\left(\overline{u,\varphi}\right)=\sum_{\lambda=0}^{\ell} d^{\lambda}\left(z,D_z\right)\varphi^{*}\mu^{\lambda,i},\forall\varphi\in\left[\mathcal{D}_{\pi_i^{\alpha-1}}^{\beta,B_1}\right]^s$, $i=1,2,3$, причем векторные меры $\mu^{\lambda,i}=(\mu_1^{\lambda,i},...,\mu_{e_\lambda}^{\lambda,i})$ таковы, что

$$\sum_{\lambda=0}^{\ell}\int_{N^\lambda}\exp(-\tfrac{\beta}{e}(\tfrac{|z|}{B_1})^{\frac{1}{\beta}})\cdot\mathcal{J}_{\pi_i^{\alpha-1}}\left(y\right)\left|\mu^{\lambda,i}\right|\le c_1^{'}\|u\|_{\pi_i^\alpha}^{\beta,B}\ ,\ i=1,2,3\ \text{ где } B_1 \text{ не зависит от } u \text{ и } \alpha .$$

Введем обобщенные функции $\overset{i}{\mu}=\mu^i-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_s}}\right)^{*}\lambda_s^i$.

Очевидно, что $\overset{i}{\mu}\in\left(\mathcal{S}_{\pi_i^{\alpha-4}}^{\beta,D_2}\right)_p^{'}$. Учитывая определения функционалов $\chi^{1,2}$ и то, что $\chi_{t,s}=-\chi_{s,t}$ покажем, на функциях пространства $\left[\mathcal{S}_{(\pi_1\cap\pi_2)^{\alpha-4}}^{\beta,D_2+2\varepsilon}\right]^s$, $\overset{1}{\mu}=\overset{2}{\mu}$. Действительно:

$$\overset{1}{\mu}-\overset{2}{\mu}=\left(\mu^1-\mu^2\right)-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_s}}\right)^{*}\left(\lambda_s^1-\lambda_s^2\right)=\chi^{1,2}-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_s}}\right)^{*}\chi_s^{1,2}=$$

$$=\chi^{1,2}-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_s}}\right)^{*}\left(\chi_s^{1,2}-\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_t}}\right)^{*}\overline{h_3}\chi_{s,t}\right)=\chi^{1,2}-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_s}}\right)^{*}\chi_s^{1,2}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_s}}\right)^{*}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{zt}}\right)^{*}\overline{h_3}\chi_{s,t}=0$$

Аналогично показывается , что $\overset{i}{\mu}=\overset{j}{\mu}$ на пространстве $\left[\mathcal{S}_{\left(\pi_i\cap\pi_j\right)^{\alpha-4}}^{\beta,D_2+2\varepsilon}\right]^s$.

В силу следствия леммы 5. $\left(\mathcal{D}_{\pi^{\alpha-5}}^{\beta}\right)^{*}\subset\mathcal{S}_{\pi^{\alpha-4}}^{\beta}$ поэтому при любом $\varphi\in\left[\mathcal{D}_{\pi^{\alpha-5}}^{\beta}\right]^s$ функция $\varphi^{*}\in\left[\mathcal{S}_{\pi^{\alpha-5}}^{\beta}\right]^s$.Учитывая ,что $\forall\varphi\in\left[\mathcal{D}_{\pi^{\alpha-5}}^{\beta}\right]^s$ построим функционал $\left(\overline{\vartheta,\varphi}\right)=\left(\mu,\varphi^{*}\right)$.

Далее ,учитывая также ,что $\mu\in\left(\mathcal{S}_{\pi^{\alpha-4}}^{\beta,D_3}\right)_p^{'}$ покажем, что $\vartheta\in\left[\mathcal{U}_{\pi^{\alpha-5}}^{\beta}\right]^s$.

В силу неравенства леммы 5. $\forall\varphi\in\left[\mathcal{D}_{\pi^{\alpha-5}}^{\beta}\right]^s$ имеем $\left|\left(\overline{\vartheta,\varphi}\right)\right|=\left|\left(\mu,\varphi^{*}\right)\right|\le\left\|\left|\mu\right|\right\|_{m_3,\pi^{\alpha-4}}^{\beta,D_3}\left\|\varphi^{*}\right\|_{m_3,\pi^{\alpha-4}}^{\beta,D_3}\le c_{14}\|u\|_{\left(\bigcup_{k=1}^{3}\pi_k\right)}^{\beta,B}\|\varphi\|^{\beta,B^{'}}$ где $B^{'}=\left(\frac{\beta}{eD_3}\right)^{\beta}2^{-(\nu+1)}$.

Отсюда вытекает, что $\vartheta\in\left[\left(\mathcal{D}_{\pi^{\alpha-5}}^{\beta,B^{'}}\right)\right]^s$ и $\|\boldsymbol{\vartheta}\|_{\pi^{\alpha-5}}^{\beta,B^{'}}\le c_{14}\|\boldsymbol{u}\|_{\left(\bigcup_{k=1}^{3}\pi_k\right)}^{\beta,B}$

где константы $B^{'}$ и c_{14} не зависят от функционала u.

Докажем, что функция ϑ является решением системы (1) в окрестности параллелепипеда π. Так как $\mu \in \left(\mathcal{S}^{\beta,D_3}_{\pi^{\alpha-4}}\right)^{'}_{p}$, то $\forall\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta}_{\pi^{\alpha-5}}\right]^{t}$ имеем: $\left(\overline{P(D)\vartheta,\varphi}\right) = \left(\overline{\vartheta, P^{*}(D)\varphi}\right) = \left(\mu,(P^{*}(D)\varphi)^{*}\right) = \left(\mu,p^{'}\varphi^{*}\right) = 0$.

Покажем, что $\forall\psi \in \left[\mathcal{S}^{\beta,D_3+2\varepsilon}_{\pi_i^{\alpha-4}}\right]^{s}$ имеет место равенство $\left(\mu,\psi\right) = \left(\mu^{i},\psi\right)$, $i = 1,2,3$. На основании леммы4. на функциях указанного пространства $\left(\mu^{i}, h_0\psi\right) = 0$. Учитывая это, и лемму 3. и то , что $\mu^{i} = \mu^{j}$ на функциях пространства $\left[\mathcal{S}^{\beta,D_2+2\varepsilon}_{\left(\pi_i\cap\pi_j\right)^{\alpha-4}}\right]^{s}, \forall\psi \in \left[\mathcal{S}^{\beta,D_3+2\varepsilon}_{\pi_i^{\alpha-4}}\right]^{s}$,

$\left(\mu,\psi\right) = \sum\limits_{j=1}^{3}(\mu^{j}, h_j\psi) = \left(\mu^{i}, \sum\limits_{j=1}^{3} h_i\psi\right) = \left(\mu^{i},(h_0+h_1+h_2+h_3)\psi\right) = \left(\mu^{i},\psi\right) = 0$, $i = 1,2,3$. Теперь покажем, что обобщенные функции совпадают на компакте $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{3}\pi_k\right)^{\alpha-6}$. Для любого $\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta}_{\pi_i^{\alpha-5}}\right]^{s}$ будем иметь

$$\left(\overline{\vartheta,\varphi}\right) = \left(\mu,\varphi^{*}\right) = \left(\mu^{i},\varphi^{*}\right) = \left(\mu^{i},\varphi^{*}\right) - \left(\sum_{s=1}^{n}\left(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z_s}}\right)^{*}\lambda_s^{i},\varphi^{*}\right) = \left(\mu^{i},\varphi^{*}\right) - \sum_{s=1}^{n}\left(\lambda_s^{i}, \tfrac{\partial}{\partial \overline{z_s}}\cdot\varphi^{*}\right) =$$
$$= \left(\mu^{i},\varphi^{*}\right) = \left(\overline{u,\varphi}\right).$$

На основании леммы 2. $\forall\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta}_{\left(\bigcup\limits_{k=1}^{3}\pi_k\right)^{\alpha-6}}\right]^{s}$ имеем : $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ где $\forall\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta}_{\pi_i^{\alpha-5}}\right]^{s}, i = 1,2,3$.

Поэтому $\forall\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta}_{\left(\bigcup\limits_{k=1}^{3}\pi_k\right)^{\alpha-6}}\right]^{s}$ имеем: $\left(\overline{\vartheta,\varphi}\right) = \sum\limits_{i=1}^{3}\left(\overline{\vartheta,\varphi_i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{3}\left(\overline{u,\varphi_i}\right) = \left(\overline{u,\varphi}\right)$.

Теорема доказана.

Заключение

Получено условие на характеристическое множество дифференциального оператора обеспечивающее продолжаемости обобщенных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паламодов В.П, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, -М,физматгиз,1967.488с.

2. Бердимуратов А.М, Метод экспоненциального представления Паламодова и его приложение к некоторым аналогам классических задач в пространствах обобщенных функций. Бишкек ,2017г,134с.

3. Бердимуратов А.М.О единственности обобщенных решений систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика.2021. №1.С.24-33.DOI: 10.18101/2304-5728-2021-1-24-33.

4. Бердимуратов А.М, Теория разрешимости задачи Коши-Паламодова в пространствах обобщенных функций // Тезисы докладов традиционная международная апрельская конференция , г.Алматы,5-8 апреля 2021.стр20.

5. Теорема существования продолжения решений для систем
дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. // Тезисы докладов традиционная международная апрельская конференция. (г.Алматы,6-8 апреля 2022.стр69-70)

6. Бердимуратов А.М. Разрешимость задачи Коши-Паламодова в классе обобщенных функций бесконечного порядка // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1.Естественные науки. 2021.№ 4.
С.61-67. DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-61–67.

7. О единственности задачи Коши-Паламодова в классах обобщенных функций бесконечного порядка. // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1.Естественные науки, №1,2022.DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-1-46–50

8. Хермандер Л.,Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.,том1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.462с.

9. Хермандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными,том2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.М.: Мир, 1986. -456 с.

10. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции.вып.2. Пространства основных и обобщенных функций. М.:Физматгиз, 1958.309с.

УДК 517.956.6
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_75

БАЗИСНОСТЬ ПО РИССУ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ГЕРАСИМОВА-КАПУТО

Исломов Бозор Исломович, д.ф.-м.н., профессор,
islomovbozor@yandex.com
Ахмадов Илхом Али угли, аспирант,
ahmadov.ilhom@mail.ru
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека,
г. Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В данной работе изучается краевой задаче со смещением для смешанного параболо-гиперболического уравнения с оператором дробного порядка в смысле Герасимова-Капуто. Доказана теорема существования и единственности сильного решения поставленной задачи. Получена оценка решения. Кроме того, доказаны полнота и базисность по Риссу системы корневых функций краевой задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения смешанного типа дробного порядка.*

Ключевые слова: *задача со смещением, базисности корневых функций, базисность по Риссу, параболо-гиперболического уравнения, уравнения с оператором Герасимова-Капуто, собственных и присоединенных функций, классическое решение, сильное решение.*

THE RIESZ BASIS PROPERTY OF THE SYSTEM OF ROOT FUNCTIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A SHIFT FOR A PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH THE GERASIMOV-CAPUTO OPERATOR

Islomov Bozor Islomovich, Dr Sc, professor,

islomovbozor@yandex.com

Akhmadov Ilkhom Ali ugli, post-graduate

student, ahmadov.ilhom@mail.ru

National University of Uzbekistan named

after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan

***Abstract**: In this paper, we study a boundary value problem with a shift for a mixed parabolic-hyperbolic equation with a fractional order operator in the sense of Gerasimov-Caputo. The theorem of existence and uniqueness of a strong solution of the formulated problem is proved. An estimate of the solution is obtained. In addition, the completeness and Riesz basis property of a system of root functions of a boundary value problem with a shift for a parabolic-hyperbolic equation of mixed type of fractional order is proved.*

***Keywords**: problem with shift, basis property of root functions, Riesz basis property, parabolic-hyperbolic equation, equation with Gerasimov-Caputo operator, eigenfunctions and associated functions, classical solution, strong solution.*

1. Введение

Впервые 1962 году краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с граничным условием, связывающим значения искомой функции на двух независимых характеристиках в гиперболической части области, была сформулирована и исследована в работе [1].

В работах [2]-[3] А.М. Нахушев исследовал нелокальные краевые задачи (задачи со смещением) для вырождающегося уравнения гиперболического и смешанного типов.

Спектральным вопросам дифференциальных операторов и базисности корневых функций краевых задач посвящены работы [4-6]. А.С. Бердышев [7] доказал базисность по Риссу системы корневых функций краевой задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения смешанного типа второго порядка.

Спектральные вопросы краевых задач для параболо-гиперболического уравнения с оператором Герасимова-Капуто не изучены.

В настоящей работе изучается краевой задаче со смещением для смешанного параболо-гиперболического уравнения с оператором дробного порядка в смысле Герасимова-Капуто. Доказывается базисности системы корневых (собственных и присоединенных) функций поставленной задачи.

2. Постановка и разрешимость задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками прямых $AA_1: x = 0,\ A_1B_1:\ y = 1,\ BB_1:\ x = 1$, а при $y < 0$ характеристиками $AC: x + y = 0$ и $BC: x - y = -1.$

Рассмотрим уравнение

$$Lz(x,y)=g(x;y), \tag{1}$$

где

$$Lz(x,y)=\begin{cases} {}_cD_{0x}^{\alpha}z(x,y)-z_{yy}(x,y), & (x,y)\in\Omega_0, \\ z_{xx}(x,y)-z_{yy}(x,y), & (x,y)\in\Omega_1, \end{cases} \tag{2}$$

а ${}_cD_{0x}^{\alpha}[\bullet]-$ интегральный оператор дробного порядка α в смысле Герасимова-Капуто [8] и имеет вид:

$$ {}_cD_{0x}^{\alpha}h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha}h'(t)dt, & 0<\alpha<1, \\ h'(x), & \alpha=1. \end{cases} \tag{3}$$

Задача S_{α}. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$z(x,y)\big|_{y=0}=0, \quad 0\le x\le 1, \tag{4}$$

$$z_y(x,y)\big|_{y=1}=\beta^2\, z(x,y)\big|_{y=1}, \quad 0\le x\le 1, \tag{5}$$

$$\frac{dz\left[\theta_0(t)\right]}{dt}=\beta\frac{dz\left[\theta_1(t)\right]}{dt}, \quad 0<t<1\,. \tag{6}$$

и на линии измененного типа удовлетворяет условию сопряжения

$$\begin{aligned} &\lim_{y\to+0} z(x,y)=\lim_{y\to-0} z(x,y), \quad (0,y)\in\bar{J}, \\ &\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}z_y(x,y)=\lim_{y\to-0} z_y(x,y), \quad (0,y)\in J. \end{aligned} \tag{7}$$

где $\theta_0(t)=\left(\dfrac{t}{2},-\dfrac{t}{2}\right)$; $\theta_1(t)=\left(\dfrac{t-1}{2},\dfrac{t+1}{2}\right)$ точки пересечения AC и AB с характеристиками $x-y=t$ и $x+y=t$ соответственно; β- произвольное комплексное число.

Введем обозначения

$$\Omega_0=\Omega\cap\{x>0,\ y>0\}, \quad \Omega_1=\Omega\cap\{x>0,\ y<0\}, \quad J=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\}.$$

Через $W_2^l(\Omega)$ обозначим пространство С.Л. Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega)\equiv L_2(\Omega)-$пространство квадратично суммируемых функций.

Определение 1. Классическим решением задачи S_{α} назовем функцию

из класса

$$\mathrm{P}_1 = \left\{ z(x,y):\ z(x,y) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C_y^2(\Omega_0) \cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_1) \right\},$$

удовлетворяющую краевым условиям (4), (5) и (6) задачи S_α и обращающую уравнение (1) в тождество.

Заметим, что из класса $z(x,y) \in C^1(\bar{\Omega})$ с учетом (3) следует ${}_c D_{0x}^{\alpha} z \in C(\bar{\Omega}_1)$.

Определение 2. Функцию $z(x,y) \in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением задачи* S_α, если существует последовательность функций $z_n(x,y) \in P_1$, удовлетворяющую краевым условиям (4), (5), (6) задачи S_α, такая, что последовательности $z_n(x,y)$ и $Lz_n(x,y)$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к функциям $z(x,y)$ и $g(x,y)$ соответственно, т.е.

$$\left\| z_n(x,y) - z(x,y) \right\|_0 \to 0, \quad \left\| Lz_n(x,y) - g(x,y) \right\|_0 \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 1. *Пусть* $\beta \neq 0$ *и при всех* $k \in Z$ *выполнено условие*

$$\lambda_k (1-\beta) \Gamma(\alpha) + \lambda_k^{\ 2} \neq 0, \tag{9}$$

где λ_n *- собственные значения* $\mathrm{ctg}\lambda = \beta^2 \lambda$ *уравнением.*

Тогда для любой функции $g(x,y) \in L_2(\Omega)$ сильное решение задачи S_α существует, единственно, удовлетворяет неравенству

$$\left\| z(x,y) \right\|_0 \leq c \left\| g(x,y) \right\|_0. \tag{10}$$

и представимо в виде

$$z(x,y) = \iint\limits_{\Omega} K(x,y,x_1,y_1) g(x_1,y_1) dx_1 dy_1, \tag{11}$$

где $K(x,y,x_1,y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Теорема 2. *Пусть* $\beta \neq 0$ *и выполнены условия (9). Тогда система корневых функций задачи* S_α *полна и образует базис Рисса в* $L_2(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии. // "Учен. зап. Казан. ун-та".1962. Т. 122. № 3. С. 3–16.

2. Нахушев А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения. // "Докл. АН СССР". 1969. Т. 187. № 4. С. 736–739.

3. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. // "Дифференциальные уравнения". 1969. Т.5. № 1. С. 44–59.
4. Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М., 1991.
5. Моисеев В. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
6. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной. // "Дифференц. уравнения". 1994. **30**(1). С.128–143
7. Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанного-составного типов. Алматы. 2015. 224 с.
8. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.

УДК 517.97
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_80

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ПРИ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ

Керимбеков Акылбек, д.ф.-м.н., профессор,
akl7@rambler.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина,
Бишкек, Кыргызстан
Баетов Авалкан Куканович к.ф.-м.н., доцент,
carterbek@mail.ru
Институт новых информационных технологий,
Кыргызского Государственного университета имени И. Арабаева
Доулбекова Салтанат Байызбековна, к.ф.-м.н., доцент,
doulbekova25@mail.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *В статье исследованы вопросы разрешимости задачи оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма, при минимизации интеграла энергии управляющей силы. Исследование проводилось с использованием понятия обобщенного решения краевой задачи управляемого колебательного процесса. В задаче оптимизации требуется найти управление, которое переводит колебательный процесс из одного состояния в другое заданное состояние. В процессе исследования установлено, что искомое оптимальное управление определяется, как решение бесконечномерной системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода и найдены достаточные условия существования решения этой некорректной задачи.*

Ключевые слова: *краевая задача, обобщенное решение, интеграл энергии, функционал, граничное управление, оптимальное управление.*

ТЕРМЕЛҮҮ ПРОЦЕССИН ЧЕКТИК БАШКАРУУДА ЭНЕРГИЯНЫ МИНИМАЛДАШТЫРУУ МЕНЕН ОПТИМАЛДАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИЛИШИ ЖӨНҮНДӨ

Керимбеков Акылбек, ф.-м.и.д., профессор,
akl7@ rambler.ru
Россия Федерациясынын биринчи президенти
Б. Н. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян университети
Бишкек, Кыргызстан
Баетов Авалкан Куканович ф.-м.и.к., доцент,
carterbek@mail.ru
И. Арабаев атындагы Кыргыз Мамлекеттик университети,
Жаны маалымат технологиялар институту
Доулбекова Салтанат Байызбековна, ф.-м.и.к., доцент,
doulbekova25@mail.ru
Россия Федерациясынын биринчи президенти
Б. Н. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян университети,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *Макалада башкаруу күчүнүн энергия интегралын минималдаштырууда Фредголмдун интегралдык операторун кармаган жекече туундулуу интегро-дифференциалык теңдемелер менен сүрөттөлгөн термелүү процессинин оптимизациялоо маселесинин чечилиши тууралуу суроолор изилденген. Изилдөө термелүү процессинин оптимизациялоо чектик маселесинин жалпыланган түшүнүгүн колдонуу менен жүргүзүлгөн. Оптималдаштыруу маселесинде термелүү процессин бир абалдан экинчи абалга өткөрүүчү башкарууну табуу талап кылынат. Изилдөөнүн жүрүшүндө изделген оптималдык башкарууну биринчи түрдөгү Фредгольмдун интегралдык теңдемелеринин чексиз өлчөмдүү системаларынын чыгарылышы катары табылды жана бул начар коюлган маселенин чыгарылышынын жашашы үчүн жетиштүү шарттар аныкталды.*

Урунттуу сөздөр: *чектик маселе, жалпыланган чыгарылыш, энергия интегралы, функционал, чектик башкаруу, оптималдуу башкаруу.*

ON THE SOLVABILITY OF THE OPTIMIZATION PROBLEM WITH MINIMUM ENERGY UNDER BOUNDARY CONTROL OF THE OSCILLATIONAL PROCESS

Kerimbekov Akylbek, Dr Sc, professor,
akl7@rambler.ru
Kyrgyz-Russian Slavic University
named after the first President of the Russian Federation B.N. Yeltsin

Baetov Avalkan Kukanovich,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor carterbek@mail.ru
Institute of New Information Technologies,
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Doulbekova Saltanat Bayzbekovna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor
doulbekova25@mail.ru
Kyrgyz-Russian Slavic University
named after the first President of the Russian Federation B.N. Yeltsin,
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract:: *The paper studies the solvability of the optimization problem for oscillatory processes described by partial integro-differential equations with an integral Fredholm operator while minimizing the energy integral of the control force. The study was carried out using the concept of a generalized solution of the boundary value problem of a controlled oscillatory process. In the optimization problem, it is required to find a control that transfers the oscillatory process from one state to another given state. In the course of the study, it was established that the desired optimal control is defined as a solution to an infinite-dimensional system of Fredholm integral equations of the first kind, and sufficient conditions for the existence of a solution to this ill-posed problem were found.*

Keywords: *boundary value problem, generalized solution, energy integral, functional, boundary control, optimal control.*

Постановка задачи оптимизации и ее разрешимость. Рассмотрим задачу граничного управления колебательными процессами, где требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)] = \int_0^T u^2(t)dt, \tag{1}$$

энергии управления (управляющих сил) при переводе управляемого процесса, описываемого краевой задачей

$$V_{tt} = V_{xx} + \lambda \int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T \tag{2}$$

$$V(0,x) = \psi_1(x), \quad V_t(0,x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$V_x(t,0) = 0, \quad V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = u(t) \tag{4}$$

из начального состояния $V(0,x) = \varphi_1(x)$ в заданное другое положение

$$V(T,x) = \xi(x) \tag{5}$$

за заданное время T . $K(t,\tau)$ –заданная функция, определенная в области $D = \{0 \le t \le T, 0 \le \tau \le T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau dt = K_0 < \infty,$$

т.е. $K(t,\tau)\in H(D)$, ; $\xi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ заданные функции из пространства $H(0,1)$, причем функция $\psi_1(x)$ имеет обобщенную производную первого порядка; λ-параметр, T -фиксированный момент времени, постоянная $\alpha>0$, $H(Y)$ -гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

Обобщенное решение краевой задачи. Известно [1,2], что краевая задача (2)-(4) при заданных условиях имеет единственное обобщенное решение

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x) \tag{6}$$

где система функций $z_n(x)=\sqrt{\dfrac{2(\lambda_n^2+\alpha^2)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots,$ опеделяется как решение краевой задачи

$$z''_n(x)+\lambda_n^2 z_n(x)=0,\quad z'_n(0)=0,\quad z'_n(1)+\alpha z_n(1)=0,$$

и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$, а соответствующие собственные значения λ_n определяются как решения трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и удовлетворяют следующим условиям

$$\lambda_n\le\lambda_{n+1},\forall n=1,2,3,\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.\quad (n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1),\quad n=1,2,3,\ldots;$$

А коэффициенты Фурье $V_n(t)$ определяются соотношениями

$$V_n(t)=\psi_n(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T D_n(t,\tau,\lambda)z_n(1)u(\tau)d\tau, \tag{7}$$

$$\psi_n(t,\lambda)=\psi_n\left[\cos\lambda_n s+\lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)cos\lambda_n sds\right]+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\left[\sin\lambda_n t+\lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n sds\right], \tag{8}$$

$$D_n(t,s,\lambda)=\begin{cases}\sin\lambda_n(t-\tau)+\lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds, & 0\le\tau\le t,\\ \int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds, & t\le\tau\le T,\end{cases} \tag{9}$$

$$B_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n=1,2,3,\ldots \tag{10}$$

-резольвента ядра

$$K_n(t,s)=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau, \quad K_n(0,s)=0,$$

а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,\ldots$, определяются по формулам

$$\begin{aligned}&K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\tau)K_{n,i}(\tau,s)d\tau, \quad i=1,2,3,...,\\ &K_{n,1}(t,s)\equiv K_n(t,s).\end{aligned} \tag{11}$$

Согласно равенствам (10) -(11) имеет место следующая оценка

$$\left|B_n(t,s,\lambda)\right|\le\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}}\cdot\sqrt{\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau}, \tag{12}$$

которая выполняется для значений λ удовлетворяющих следующего неравенства

$$|\lambda|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0}<1, \quad n=1,2,3,.... \tag{13}$$

Используя неравенства (12) получаем оценку:

$$\int_0^T\left|B_n(t,s,\lambda)\right|^2 ds\le\frac{K_0T}{\left(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}, \tag{14}$$

Ряд Неймана (10) абсолютно сходится при каждом фиксированном $n=1,2,3,...$ для значений параметра λ удовлетворяющих условию

$$\lambda<\frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}. \tag{15}$$

Заметим. что радиус сходимости $|\lambda|<\frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}.$ ряда Неймана увеличивается с ростом n и резольвента $B_n(t,s,\lambda)$ является непрерывной функцией, как сумма абсолютно сходящегося ряда. Отметим, что при значениях параметра $|\lambda|<\frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}.$ ряд Неймана абсолютно сходится к непрерывной функции для любого (!) $n=1,2,3,...$.

Доказано, что построенная функция $V(t,x)$ является элементом пространства $H(Q)$ и обобщенным решением краевой задачи (2) -(4).

Решение задачи оптимизации. Обобщенное решение (6) подставляем в (5) после не сложных вычислений получим уравнение

$$\int_0^T a_n(\eta)u(\eta)d\eta = h_n, \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

где

$$a_n(\eta) = \frac{1}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(T-\eta) + \lambda\int_\eta^T B_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds \right) z_n(1); \qquad (16)$$

$$h_n = \xi_n - \varphi_{1n}\left[\cos\lambda_n T + \lambda\int_0^T B_n(T,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds \right] - \frac{\varphi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n T + \lambda\int_0^T B_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds \right]. \qquad (17)$$

Таким образом, искомое управление следует находить как решение системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эту систему, введя обозначения

$$a(t) = (a_1(t), ..., a_n(t) ...),$$
$$h = (h_1, \dots, h_n, \dots)$$

перепишем в матричной форме

$$\int_0^T a(t)u(t)dt = h. \qquad (18)$$

Теперь исследуем разрешимость интегрального уравнения (18).

Решение ищем в виде:

$$u(t) = a^*(t)\cdot\alpha + \beta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\alpha_k + \beta; \qquad (19)$$

где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ \dots \end{pmatrix}$ -неизвестный вектор, а β -произвольне постоянное , символ * -знак транспонирования.

Подставляя (19) в (18) получим бесконечномерную систему линейных неоднородных алгебраических уравнений вида :

$$\int_0^T \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \dots \end{pmatrix} \cdot (a_1(t) \dots a_n(t) \dots) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ \dots \end{pmatrix} dt + \int_0^T \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \beta dt = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_2 \\ \dots \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Введем бесконечномерную квадратную матрицу

$$A=\int_0^T a(t)\cdot a^*(t)dt=\int_0^T \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \ldots \end{pmatrix} \cdot (a_1(t)\ldots a_n(t)\ldots)dt=$$

$$=\begin{pmatrix} \int_0^T (a_1(t)\cdot a_1(t))dt & \ldots & \int_0^T (a_1(t)\cdot a_n(t))dt & \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \int_0^T (a_n(t)\cdot a_1(t))dt & \ldots & \int_0^T (a_n(t)\cdot a_n(t))dt & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad (21)$$

и

$$q=\int_0^T a(t)dt=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_n \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Систему линейных неоднородных алгебраических уравнений (20) перепишем в матричной форме

$$A\alpha=H, \quad H(\beta)=h-\beta q, \qquad (22)$$

Поскольку в системе (22) матрица A бесконечномерная, то при исследовании разрешимости системы (22) будем пользоваться вариационными методами, т.к. в этом случае методы решения конечномерных систем не пригодны. В этой связи ниже будем доказывать несколько утверждений:

Лемма 1. Вектор H является элементом пространства l_2.

Лемма 2. При любом $\alpha\in l_2$ вектор $A\alpha$ является элементом пространства l_2.

Доказательства лемм проводится непосредственно вычислением и не представляет труда.

Лемма 3. Бесконечномерная матрица A является положительно определенной.

Доказательство. Пусть $\gamma\in l_2$ -произвольный элемент. Тогда для скалярного произведения в l_2 имеет место неравенство

$$\langle A\gamma,\gamma\rangle=\gamma^*A\gamma=\gamma^*\int_0^T a(t)dt\cdot\gamma \;=\int_0^T \gamma^*a(t)a^*(t)\gamma dt=\int_0^T \left\|a^*(t)\gamma\right\|^2 dt\geq 0,$$

Откуда следует положительность матрицы A. Далее из равенства

$$\left\|a^*(t)\gamma\right\|^2 = 0, \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(t)\gamma_k\right)^2 = 0,$$

С учетом того, что функции $a_n(t), \quad n = 1,2,3,...$ являются линейно независимыми на отрезке $[0,T]$, равенства $a_k(t)\gamma_k = 0,$ выполняются тогда и только тогда когда все $\gamma_k = 0, \quad k = 1,2,3,...$. Следовательно, матрица A -является положительно определенной.

Теорема. Алгебраическая система (22) при каждом фиксированном β имеет единственное решение в простанстве l_2.

Доказательство. В пространстве l_2 определим оператор $D[\alpha] = A\alpha, \quad D: l_2 \to l_2$. Тогда оператор $D[\alpha]$ является положительно -определенным, что следует из Леммы 3, т.е.

$$\left\langle \alpha, D(\alpha)\right\rangle_{l_2} = \left\langle \alpha, A\alpha\right\rangle = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\alpha_i\alpha_k \geq 0.$$

Оператор $D[\cdot]$ является линейным, т.е. для любых произвольных поятоянных C_1 и C_2 и произвольных векторов $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ пространства l_2 имеет равенства

$$D\left[C_1\alpha^{(1)} + C_2\alpha^{(2)}\right] = C_1 D[\alpha^{(1)}] + C_2 D[\alpha^{(2)}].$$

Из линейности следует, что оператор $D[\alpha]$ является взаимно -однозначным оператором. Следовательно, существует обратный оператор $D^{-1}[\alpha]$, который согласно теороеме из функционального анадлиза [3] является ограниченным оператором, т.е. оценка

$$\left\|D^{-1}[\alpha]\right\|_{l_2} \leq D_0\left\|\alpha\right\|_{l_2}, \quad D_0 > 0 \text{ -постоянная} \qquad (23)$$

имеет место для любого вектора $\alpha \in l_2$.

Таким образом, решение уравнения (22) определяется по формуле

$$\alpha = D^{-1}[H] = D^{-1}[h + \beta q]$$

Это решение подставляя в (19) получим решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (18) в виде

$$u(t) = a^*(t)\cdot\alpha + \beta = a^*(t)D^{-1}[h + \beta q] + \beta, \qquad (24)$$

где β -произвольная постоянная.

Таким образом, установлено, что интегральное уравнение (18) имеет бесконечно много решений вида (24), среди которых может быть искомое управление $u^0(t)$, минимизирующее функционал (1).

Далее, для определения управления $u^0(t)$ рассмотрим функционал

$$J[u(t,\beta)] = \int_0^T u^2(t,\beta)dt = \int_0^T \left(a^*(t)D^{-1}[h+\beta q]+\beta\right)^2 dt, \tag{25}$$

и параметр β находим как решение экстремальной задачи вида

$$\Phi\left(\beta\right) = J[u(t,\beta)] \to \min, \quad \beta \in R, \tag{26}$$

Поскольку решается задача на безусловный экстремум, то для функции

$$\Phi\left(\beta\right) = \int_0^T u^2(t,\beta)dt = \int_0^T \left[a^*(t)D^{-1}\left[h\right] + \beta(1+a^*(t)D^{-1}[q])\right]^2 dt;$$

применяя классический метод решения, находим сначала критическую точку из условия

$$\Phi'\left(\beta\right) = 2\int_0^T \left[a^*(t)D^{-1}\left[h\right] + \beta(1+a^*(t)D^{-1}\left[q\right])\right]\left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)dt =$$

$$= 2\int_0^T a^*(t)D^{-1}\left[h\right]\left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)dt + 2\beta\int_0^T \left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)^2 dt = 0;$$

т.е. критической точкой является

$$\beta^0 = -\frac{\int_0^T a^*(t)D^{-1}\left[h\right]\left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)dt}{\int_0^T \left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)^2 dt} \tag{27}$$

Далее, из неравенства

$$\Phi''\left(\beta\right) = 2\int_0^T \left[a^*(t)D^{-1}\left[h\right] + \beta(1+a^*(t)D^{-1}\left[q\right])\right]\left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)dt =$$

$$= 2\int_0^T \left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)^2 dt > 0;$$

Следует, что значение β^0 является точкой минимума функции $\Phi\left(\beta\right)$,

тогда для любого управления имеет место неравенство

$$J[u(t,\beta^0)] \le J[u(t,\beta)].$$

Причем, равенсто имеет место лишь при $\beta = \beta^0$. Таким образом, искомое управление $u^0(t)$ на котором функционал (1) принимает наименьшее возможное значение определяется по формуле

$$u^0(t) = a^*(t)D^{-1}\left[h\right] + \beta^0(1+a^*(t)D^{-1}\left[q\right]). \tag{28}$$

Теперь проверим, что найденное оптимальное управление $u^0(t)$ является элементом гильбертового пространства $H(0,T)$ квадратично суммируемых функций, т.е. является допустимум управлением. Это следует из неавенства

$$\left\|u^0(t)\right\|^2_{H[0,T]} = \int_0^T \left(u^0(t)\right)^2 dt = \int_0^T \left(a^*(t)D^{-1}\left[h\right] + \beta^0(1 + a^*(t)D^{-1}\left[q\right])\right)^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \left(\left|\left\langle a(t), D^{-1}\left[h\right]\right\rangle\right|^2 + 2\beta^{02}\left(1 + \left|\left\langle a(t), D^{-1}\left[q\right]\right\rangle\right|^2\right)\right) dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \left(\left\|a(t)\right\|^2_{l_2}, D_0^2 \left\|h\right\|^2_{l_2} + 2\beta^{02}\left(1 + \left\|a(t)\right\|^2_{l_2} D_0^2 \left\|q\right\|^2_{l_2}\right)\right) dt < \infty,$$

которое имеет место в силу следующих соотношений:

Заключение.

В заключение отметим, что полученные результаты может быть использованы на производстве, а также при разработке новых методов решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Рассматриваемая задача оптимизации является не корректной, что следует из системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода, поэтому полученные результаты в частности разработанный алгоритм построения решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода представляет практический и теоретический интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами -М.: Наука, 1978.-500с.

2. Керимбеков А., Доулбекова С.Б. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при появлении особых управлений // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика, -2020, Т.132, №3. –С. 6-16.

3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.-М.: Наука, 1965.-520с.

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_90

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Керимбеков Акылбек, д.ф.-м.н., профессор,
akl7@rambler.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет,
Бишкек, Кыргызстан
Момбекова Гулназ Береновна, ст. преподаватель,
gmombekova78@mail.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза оптимального граничного управления при оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма в случае, когда функция граничного воздействия нелинейно зависит от функции управления. Исследование проведено на основе обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса. Установлен граница изменения значения параметра интегрального оператора, при которых существует обобщенное решение. В задаче оптимизации требуется минимизировать кусочно-линейный функционал и требуется найти управление в зависимости от состояния управляемого процесса. Установлено, что наличие интегрального оператора в уравнении существенно влияет на разрешимость задачи нелинейной оптимизации, в частности, сильно усложняется структура уравнения типа Беллмана. Разработан алгоритм построения синтезирующего оптимального управления.*

Ключевые слова: *Краевая задача, обобщенное решение, функционал, схема Беллмана-Егорова, интегро-дифференциальное уравнение типа Беллмана, синтез граничного управления.*

БӨЛҮКЧӨ-СЫЗЫКТУУ ФУНКЦИОНАЛДЫ МИНИМАЛДАШТЫРУУДАГЫ ОПТИМАЛДУУ ЧЕКТИК БАШКАРУУНУ СИНТЕЗДӨӨ

Керимбеков Акылбек, ф.-м.и.д., профессор,
akl7@rambler.ru
Кыргыз-Орус Славян университети,

Бишкек, Кыргызстан
Момбекова Гулназ Береновна, улук окутуучу,
gmombekova78@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Фредгольмдун интегралдык операторун кармаган жекече туундулуу интегралдык-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин оптималдаштырууда чек аралык оптималдуу башкаруунун синтез маселесинин чечимге ээ болушу жөнүндөгү суроолор изилденген. Чек аралык таасир берүүчү функциясы башкаруу функциясына салыштырмалуу сызыктуу эмес болгон учур каралган. Изилдөө башкарылуучу процесстин чек аралык маселесинин жалпыланган чечиминин негизинде жүргүзүлгөн. Интегралдык оператордун параметринин өзгөрүү чек арасы аныкталган. Оптималдаштыруу маселесинде төмөнкүлөрдү табуу талап кылынат: бөлүкчө-сызыктуу функционалды минималдаштыруу жана башкарылуучу процесстин абалынан көз каранды түрдө башкарууну табуу. Теңдемедеги интегралдык оператордун бар болушу сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чыгарылышына таасир берээри аныкталган. Жекече учурда Беллман тибиндеги теңдеменин түзүлүшү абдан татаалданат. Синтездөөдө оптималдуу башкарууну тургузуунун алгоритми иштелип чыккан.*

Урунттуу сөздөр: *чек аралык маселе, жалпыланган чечим, функционал, Беллман-Егоровдун схемасы, Беллман тибиндеги интегралдык-дифференциалдык теңдеме, чек аралык башкаруунун синтези.*

SYNTHESIS OF THE OPTIMAL BOUNDARY CONTROL IN MINIMIZING THE PIECEWISE -LINEAR FUNCTIONAL

Kerimbekov Akylbek, Dr., profeccor,
akl7@rambler.ru
Kyrgyz Russian Slavic University,
Bishkek, Kyrgyzstan
Mombekova Gulnaz Berenovna, Senior Lecturer,
gmombekova78@mail.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract:: *In the paper solvability of the optimal boundary control synthesis problem was investigated in the optimization of thermal processes described by partial integro-differential equations with Fredholm integral operator when the boundary influence function nonlinearly depends on control function. The research was carried out on basis of generalized solution of the boundary value problem for controlled process. Boundary is established of change in parameter values of the integral operator, in which generalized solution exists. In the optimization problem, it is required to minimize the piecewise -linear functional and to find control depended on state of the* *controlled process. It has been established that the presence of integral operator in the equation significantly affects the solvability of the nonlinear optimization problem, in particular, complicated the structure of the Bellman-type equation. An algorithm has been developed for constructing a synthesizing optimal control.*

Keywords: *Boundary value problem, generalized solution, functional, Bellman-Egorov scheme, Bellman-type integro-differential equation, boundary control synthesis.*

Введение

Решение задачи синтеза и проводить научные исследования в этом направлении стало возможным после появления работы А. И. Егорова[1]. Появились небольшое количество работ посвященных исследованиям задач синтеза при оптимизации колебательных и тепловых процессов, описываемых уравнениями в частных производных. В данной статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза оптимального граничного управления при оптимизации тепловых процессов в случае, когда процесс описывается интегро-дифференциальным уравнением и функция граничного источника нелинейна относительно функции управления. Разработан алгоритм построения синтезирующего оптимального управления.

Постановка задачи синтеза.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[u(t)] = \int_0^T \int_0^1 \left[V(t,x) - \xi(t,x)\right]^2 dxdt + \beta \int_0^T |u(t)|\, dt,\ \beta > 0 \tag{1}$$

на множестве обобщенных решений краевой задачи

$$\begin{aligned} &V_t = V_{xx} + \gamma \int_0^T K(t,\tau) V(t,x) d\tau, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T \\ &V(0,x) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1 \\ &V_x(t,0) = f[t,u(t)],\ V_x(t,1) = 0,\ 0 < t < T \end{aligned} \tag{2}$$

где

$\xi(t,x) \in H(Q), Q = (0,1)\times(0,T),\ \psi(x) \in H_1(0,1),$
$f[t,u(t)] \in H(0,T), K(t,\tau) \in H(D), D = (0,T)\times(0,T)$ - заданные функции, являющиеся элементами соответствующих гильбертовых пространств квадратично суммируемых функций H, $u(t)] \in H(0,T)$ - функция управления, причем функция граничного источника $f[t,u(t)]$ удовлетворяют условию монотонности по функциональной переменной $u(t)$, т.е.

$$f[t,u(t)] \neq 0, \forall t \in (0,T) \tag{3}$$

В задаче синтеза требуется найти искомое управления $u^0(t)$ в зависимости от состояния управляемого процесса $V(t,x)$, в виде функции (или функционала)

$$u^0(t)=\varphi[t,V(t,x)] \tag{4}$$

Под обобщенным решением краевой задачи (2) понимается функция $V(t,x)\in H(Q)$, имеющая обобщенную производную $V_x(t,x)\in H(Q)$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\int_0^1 \left(V(t,x)\Phi(t,x)\right)_{t_1}^{t_2} dx=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[V(t,x)\Phi_t(t,x)-V_x(t,x)\Phi_x(t,x)\right]dxdt+\\ +\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1\left(\gamma\int_0^t K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)\Phi(t,x)dxdt-\int_{t_1}^{t_2}\Phi(t,0)f[t,u(t)]dt\end{gathered} \tag{5}$$

при любых $t\in[t_1,t_2]$ и для любой функции $\Phi(t,x)\in H_1(Q)$, а также начальному условию в слабом смысле, т.е.

$$\lim_{t\to 0}\int_0^1 [V(t,x)-\Phi(x)]\Phi_0(x)dx=0 \quad \forall\,\Phi_0(x)\in H(0,1). \tag{6}$$

Обобщенное решение краевой задачи (2) строим в виде ряда Фурье

$$V(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t)z_n(x),\ \ V_n(t)=\int_0^1 V(t,x)z_n(x)dx, \tag{7}$$

где а $z_n(x)$ является решением краевой задачи вида

$$z_n''(x)+\lambda_n^2 z_n(x),\ z_n'(0)=0, z_n'(1)=0 \tag{8}$$

и имеет вид

$$z_n(x)=\begin{cases}1, n=0\\ \sqrt{2}\cos\lambda_n x, n\neq 1,2,3,...,\lambda_n=n\pi\end{cases} \tag{9}$$

Коэффициенты Фурье $v_n(t)$ определяется как решения интегрального уравнения Фредгольма 2-рода вида

$$V_n(t)=\gamma\int_0^T K_n(t,s)V_n(s)ds+a_n(t) \tag{10}$$

где ядро

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau\,, \tag{11}$$

а свободный член

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} - \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(0) f(\tau, u(\tau)) d\tau \tag{12}$$

Согласно [4] коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$V_n(t) = \gamma \int_0^T R_n(t,s,\gamma) a_n(s) ds + a_n(t), \tag{13}$$

где резольвента

$$R_n(t,s,\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^{i-1} K_{n,i}(t,s),$$

интегрированные ядра

$$K_{n,i+1}(t,s) = \int_0^t K_n(t,\eta) K_{n,i}(\eta,s) d\eta,\ K_{n,1}(t,s) \equiv K_n(t,s)$$

являются известными функциями.

Доказаны следующие оценки

$$\left|K_{n,i}(t,s)\right|^2 \le \frac{\left(K_0 T\right)^{i-1}}{\left(2\lambda_n^2\right)^i} \int_0^T K^2(\tau,s) d\tau,\ n = 0,1,2,...$$

$$\left|R_n(t,s,\gamma)\right| \le \left(\frac{\int_0^T K^2(\tau,s) d\tau}{\sqrt{2\lambda_n^2} - |\gamma| \sqrt{K_0 T}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^T R_n^2(t,s,\gamma) ds \le \frac{\int_0^0 \int_0^T K^2(\tau,s) d\tau ds}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\gamma|\sqrt{K_0 T}\right)^2} = \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\gamma|\sqrt{K_0 T}\right)^2},$$

на основе которых установлено, что ряд Неймана (14) сходится к непрерывной функции при выполнении условия

$$|\gamma| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_n^2}} < 1, \left(|\gamma| < \frac{\sqrt{2\lambda_n^2}}{\sqrt{K_0 T}} \xrightarrow{n \to \infty} \infty \right) \tag{14}$$

Далее доказано, что функция $V(t,x)$, определяемая по формуле (7), является квадратично суммируемой функцией, т.е. $V(t,x) \in H(Q)$.

Разрешимость задачи синтеза

Разрешимость задачи синтеза исследуем согласно схеме Беллмана-Егорова. Функционал Беллмана определяем по формуле

$$S[t,V(t,x)] = \min_{\substack{u\in \mathrm{P} \\ t\le\tau\le T}} \left\{ \beta\int_t^T P^2[\tau,u(\tau)]d\tau + \int_0^T\int_0^1 \left[V(\tau,x)-\xi(t,x)\right]^2 dxdt \right\} \qquad (15)$$

Вывод уравнения типа Беллмана. Непосредственным вычислением получим интегро-дифференциальное уравнение типа Беллмана следующего вида

$$-\frac{\partial S[t,V(t,x)]}{\partial t} =$$
$$= \min_{u\in P}\left\{ \beta\left|u(t)\right| - m(t,0)f[t,u(t)] + \int_0^1 \left[-m_x(t,x)V_x(t,x) + \left(\gamma\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)m(t,x)\right]dx \right\} \qquad (16)$$

где $m(t,x)$ -градиент функционала $S[t,V(t,x)]$.

Это уравнение следует рассматривать вместе с условия

$$S[t,V(t,x)] = \int_0^T\int_0^1 \left[V(t,x)-\xi(t,x)\right]^2 dx\,, \qquad (17)$$

которое получено согласно определению функционала Беллмана по формуле (15).

Задача (16)-(17) называется задачей Коши-Беллмана. Она решается в два этапа. На первом этапе решаем задачу min. Поскольку множество допустимых значений открытое множество, то задача минимизации функции

$$\Pi(\cdot,u) = \beta\left|u(t)\right| - m(t,0)f[t,u(t)]$$

решается классическими методом. Условие оптимальности первого порядка получим в виде равенства

$$\Pi_u(\cdot,u) = \beta sign\, u(t) - m(t,0)f_u[t,u(t)] = 0\,, \qquad (18)$$

а условие второго порядка получим в виде дифференциального неравенства

$$\Pi_{uu}(\cdot,u) = -m(t,0)f_{uu}[t,u(t)] > 0\,,$$

Которое в силу (18) можно переписать в виде

$$\Pi_{uu}(\cdot,u) = \beta f_u(t,u(t))\left(f_u^{-1}(t,u(t)\right)_u sign\, u(t) > 0\,. \qquad (19)$$

Данная задача имеет специфические особенности.

В области $u(t) \succ 0$ условие (18) примет вид

$$\beta - m(t,0)f_u[t,u(t)] = 0 \qquad (20)$$

а условия (19) заменяется неравенством

$$\beta f_u(t,u(t))\left(f_u^{-1}(t,u(t)\right)_u > 0\,. \qquad (21)$$

В области $u(t) \prec 0$ условие (18) принимает следующий вид

$$\beta + m(t,0)f_u[t,u(t)] = 0 \qquad (22)$$

а условия (19) заменяется неравенством

$$\beta f_u(t,u(t))\left(f_u^{-1}(t,u(t)\right)_u < 0\,. \qquad (23)$$

Далее в задаче (20)-(21) в силу (21) существует однозначная функция $\varphi(\cdot)$ такая, что

$$u^0(t) = \varphi_t[t, m(t,0), \beta]\,. \qquad (24)$$

Поскольку

$$m(t,0) = gradS[t, V(t,x)]$$

то по формуле (24) осуществляется синтез граничного управления $u(t)$.

Аналогичным образом устанавливается, что в области $u(t) \prec 0$ синтез граничного управления осуществляется по формуле

$$u_-^0(t) = \varphi_-[t, m(t,0), \beta] \qquad (25)$$

где $\varphi_-[t]$ -однозначная известная функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. Egorov A.I. Optimal stabilization of systems with distributed parameters // Optimization Techniques IFIP Technical Conference (1974) / ed. G.I. Marchuk. Novosibirsk, 1974. Berlin; Heidelberg: Springer, 1975. P. 167–172. (Lecture Notes in Computer Science; vol 27). doi: 10.1007/3-540-07165-2_22.

2. Керимбеков А.О. Разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при оптимизации колебательных процессов // Труды института математики и механики. Уральское Отделение Российской Академии Наук 2021 С-128-140

3. Керимбеков А. Синтез распределенного оптимального управления в задаче слежения при оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 183 (2020). DOL:10/36535/0233-6723-2020-283-85-97. С. 85-97

4. Kerimbekov A., Abdyldaeva E**.** On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal -2016, Vol. 10, No. I, P. 215-223.

УДК: 517.97
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_97

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Мамадалиев Нуманжон А., д. ф.-м. н., профессор
e-mail: m_numana59@mail.ru
Бекниязов Асан Есбосинович, преподаватель
e-mail: bekniyazov.asan@mail.ru
Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В настоящей работе основное внимание уделяется исследованию задачи преследования описываемой системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при интегральных ограничениях на управления игроков. При исследовании этой задачи получено новое достаточное условие для завершения игры за определенное конечное время. Настоящая работа примыкает к публикациям [1]- [3].*

Ключевые слова: *Дифференциальная игра, игра преследования, интегральное ограничение, разрешающая функция, конфликтно-управляемый процесс, многозначное отображение, управление, преследователь, убегающий.*

Постановка задачи. А. Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве R^n описывается системой линейных дифференциально – разностных уравнений нейтрального типа, содержащей неизвестную функцию и ее производные в различные моменты времени

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i \dot{z}(t-h_i) + \sum_{i=0}^{m} B_i z(t-h_i) - Cu(t) + Dv(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in R^n,\ n \geq 1;\ A_i\ (i = 1, 2, ..., m),\ B_i\ (i = 0, 1, 2, ..., m) -$ постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n),\ (n \times n);\ C, D -$ постоянные матрицы порядка $(n \times p)$ и

$(n\times q)$, соответственно; $0=h_0<h_1<\ldots<h_m-$ действительные числа; $u-$ управляющий параметр преследования, $v-$ управляющий параметр убегания. Они $u(t),\ v(t)$ выбираются в классе измеримых векторных функций удов-летворяющих интегральным ограничениям

$$\int_0^{+\infty}|u(t)|^2\,dt\le\rho^2,\qquad \int_0^{+\infty}|v(t)|^2\,dt\le\sigma^2, \tag{2}$$

где ρ и σ - неотрицательные константы.

Измеримые функции $u=u(t),\ v=v(t),\ 0\le t\le+\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве R^n выделено непустое цилиндрическое терминальное множество $M=M_0+M_1$, где M_0- линейное подпространство пространства R^n, M_1- компактное подмножество подпространства L, где $L-$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в R^n (т.е. $M_0\oplus L=R^n$).

Начальным положением для преследования (1) является $n-$ мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h_m,0]$. Отрезок $-h_m\le t\le 0,$ на котором задано начальное положение (функция), назовем начальным множеством и обозначим через X, т.е.

$$X=\{\varphi(\cdot):\varphi(t)-\text{абсолютно непрерывная функция},$$

$$\text{определенная на отрезке } [-h,0],\ z(0)=\varphi(0)\in R^n\setminus M\}. \tag{3}$$

Определение 1. *Пусть* $K(t),\ 0<t\le\tau,-$ *единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами* [3]: $a)$ $K(t)=\tilde{0},\ t<0,\ \tilde{0}-$ *нулевая матрица порядка* n ; $b)$ $K(0)=E_n$, где E_n- *единичная матрица порядка* n; $c)$ *функция* $\sum_{i=0}^{m}C_iK(t-h_i)$ *непрерывна на* $[0,+\infty)$; $d)$ *матричная функция* $K(t)$ *удовлетворяет* *матричному дифференциальному уравнению*

$$\dot{K}(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i\dot{K}(t-h_i)+\sum_{i=0}^{m}B_iK(t-h_i). \qquad (4)$$

при $t>-h,\ t\notin S^0=S\bigcup(-h,+\infty),$ где $S=\left\{t:t=\sum_{i=0}^{m}j_ih_i,\ j_i-\text{целые числа}\right\}.$

Существование и единственность матричной функции $K(t),-\infty<t\le\tau,$ удовлетворяющей условиям a) - b), могут быть доказаны обычном методом последовательного интегрирования уравнения (4).

Матричная функция $K(t)$ принадлежит классу C_1 при $t>0,\ t\notin S^0,$ но в общем случае имеет разрывы первого рода в точках множества S^0.

Пусть допустимые управления $u=u(s),\ v=v(s)$ выбраны на отрезке $[0,t],\ t>0.$ Тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) при начальном условии $\varphi(\cdot)\in X,$ $(z(s)=\varphi(s),\ -h\le s\le 0),$ в силу формулы Коши имеет место следующее представление

$$z(t)=-\sum_{i=0}^{m}K(t-h_i)A_i\varphi(0)+\sum_{i=0}^{m}\int_{-h_i}^{0}K(t-s-h_i)\left[A_i\dot{\varphi}(s)+B_i\varphi(s)\right]ds-$$

$$-\int_{0}^{t}K(t-s)\left[Cu(s)-Dv(s)\right]ds, \qquad (5)$$

где $A_0=-E_n,\ \ E_n-$ единичная матрица порядка n.

Определение 2. *Будем говорить, что в игре (1),(2) можно завершить преследования из начального положения* $\varphi(\cdot)\in X$ *за время* $T(\varphi(\cdot))>0,$ *если существует функция* $u=u(t),\ 0\le t<\infty,\ \ v\in R^q,\ u(t,v)\in R^p,$ *что для произвольной суммируемой с квадратом функции* $v(t),\ 0\le t<\infty,\ v(t)\in R^q,$ *удовлетворяющей неравенству* $\|v(\cdot)\|\le\sigma,$ *функция* $u(t)=u(t,v(t)),\ 0\le t<\infty,$ *является функцией суммируемым с квадратом, удовлетворяет неравенству* $\|u(\cdot)\|\le\rho,$ *и решение* $z(t),\ 0\le t<\infty,$ *уравнения (1) с учетом начального условия (3) до момента времени* $T(\varphi(\cdot))$ *попадает на терминальное* *множество* M : *т.е.* $z(t)\in M$ *при некотором* $t=t^*\in\left[0,T\left(\varphi(\cdot)\right)\right]$.

Число $T\left(\varphi(\cdot)\right)>0,$ называется *гарантированным временем преследования* из точки $\varphi(\cdot)\in X,$ а функция $u(t,v),\,0\le t<\infty,\ v\in R^q,\ u(t,v)\in R^p,$ - функцией преследования, такие называется стробоскопической стратегией.

Обозначим через $\pi-$ матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на $L,$ через $\underline{*}-$ обозначим геометрическую разность [1].

Пусть $\tau-$ произвольное число.

Теперь сформулируем достаточное условие для возможности завершения преследования в игре (1). Завершение преследования понимается в смысле определение 2.

Предположение 1. 1) *Для всех* $t\in[0,\tau]$ *имеет место включение*

$$\pi K(t)CR^p\supset\pi K(t)DR^q.$$

2) *Существуют число* $T>0$ *и матричная функция* $F(t):R^q\to R^p,$ $0\le t\le\tau,$ *с суммируемыми с квадратом элементами такие, что:*

a) *при каждом* $t\in[0,\tau]$ *и* $w\in R^q$ *имеет место равенство*

$$\pi K(t)Dw=\pi K(t)CF(t)w; \tag{6}$$

b) *справедливо неравенство* $\rho>\chi$ *где*

$$\chi=\sup\left\{\left\|(Fv)(\cdot)\right\|:\left\|(Fv)(\cdot)\right\|=\sqrt{\int_0^\tau\left\|F(t)v(t)\right\|^2dt}:\left\|v(\cdot)\right\|\le\sigma\right\}. \tag{7}$$

Пусть п.2) предположения 1 выполнено. Введем в рассмотрение множество $G(\tau)$ состоящее из векторов вида $\int_0^\pi \pi K(t)Cw(t)dt,$ где $w(t),$ $0\le t\le\tau,-$ произвольная суммируемыми с квадратом функция, удовлетворяющее условию

$$\left\|w(\cdot)\right\|^2=\int_0^\tau\left\|w(t)\right\|^2dt\le(\rho-\chi)^2, \tag{8}$$

при всех $t\in[0,T]$.

Далее, введем следующее множество

$$W_1(\tau)=M_1+G(\tau). \tag{9}$$

Согласно первому прямому методу Л.С.Понтрягина для конфликтно – управляемого процесса (1), введем гарантированный момент времени поимки преследователем убегающего игрока [3]:

$$T(\varphi(\cdot))=\inf\left\{t\geq 0:\Omega(t)\varphi(\cdot)\in W_1(\tau)\right\}, \tag{10}$$

где $\Omega(t)\varphi(\cdot)=-\sum_{i=0}^{m}\pi K(t-h_i)A_i\varphi(0)+\sum_{i=0}^{m}\int_{-h_i}^{0}\pi K(t-s-h_i)\left[A_i\dot{\varphi}(s)+B_i\varphi(s)\right]ds.$

Предположение 2. *Существует число существуют число* $\tau_1\in(0,T],$ *что для начального положения* $\varphi(\cdot)\in M$ *имеет место включение*

$$\Omega(\tau_1)\varphi(\cdot)\in W_1(\tau_1). \tag{11}$$

Теорема. Если выполнены сформулированные выше предположения 1, 2, то в игре (1) при ограничениях (2) можно завершить преследования из начальной положении $\varphi(\cdot)\in X$ за некоторое конечное время $T(\varphi(\cdot))=\tau_1$.

Доказательство. А. В соответствии с определением операции “+” и формулой (9), (11), существуют $m_1\in M_1$ и $g\in G(\tau_1)$ такие, что

$$\Omega(\tau_1)\varphi(\cdot)=m_1+g. \tag{12}$$

В соответствии с (8) существует суммируемая с квадратом функция $w(r),\ 0\leq r\leq\tau_1,$ для которой

$$\int_0^{\tau_1}\pi K(t)Cw(t)\,dt=g,\quad \|w(\cdot)\|\leq\rho-\lambda. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$u(t,v)=\begin{cases}F(\tau_1-t)v+w(\tau_1-t), & 0\leq t\leq\tau_1,\\ 0, & \tau_1<t<\infty,\end{cases} \tag{14}$$

$0\leq t<\infty,\quad v\in R^q.$

Теперь покажем, что если $v(t),\ 0 \le t < \infty -$ произвольная суммируемая с квадратом функция, $v(t) \in R^q$ и удовлетворяет неравенству $\|v(\cdot)\| \le \sigma,$ то функция $u(t) = u(t, v(t)),\ 0 \le t < \infty,$ ((11), см. (14)), суммируема с квадратом, $u(t) \in R^p,\ \|u(\cdot)\| \le \rho$ и решение $z(t), 0 \le t < \infty,$ уравнения (1) с учетом началь-ного условии (3), в момент времени $T(\varphi(\cdot)) = \tau_1$ попадет на терминальное множество M.

Действительно, то, что функция $u(t),\ 0 \le t < \infty,$ суммируема с квадратом и $u(t) \in R^p,$ следует из ее явного вида (14). Далее, так как

$$\|[Fv + w](\cdot)\| \le \|(Fv)(\cdot)\| + \|w(\cdot)\| \le \lambda + \rho - \lambda = \rho,$$

то $\|u(\cdot)\| \le \rho.$ Наконец, имеет место свойство (см.(6),(12)-(14))

$$\pi z(\tau_1) = -\sum_{i=0}^{m} \pi K(\tau_1 - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=0}^{m} \int_{-h_i}^{0} \pi K(\tau_1 - t - h_i)\left[A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)\right] dt -$$

$$-\int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)\left[Cu(t) - Dv(t)\right] dt =$$

$$= \Omega(\tau_1)\varphi(\cdot) - \int_0^{\tau_1} \left\{\pi K(\tau_1 - t) C\left[F(\tau_1 - t) v(t) + w(\tau_1 - t)\right] - \pi K(\tau_1 - t) Dv(t)\right\} dt =$$

$$= \Omega(\tau_1)\varphi(\cdot) - \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) C\left[F(\tau_1 - t) v(t) + w(\tau_1 - t)\right] dt + \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) Dv(t) dt =$$

$$= \Omega(\tau_1)\varphi(\cdot) - \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) CF(\tau_1 - t) v(t) dt - \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) Cw(\tau_1 - t) +$$

$$+\int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) Dv(t) dt = \Omega(\tau_1)\varphi(\cdot) - \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) Cw(\tau_1 - t) dt = m_1 = m_1.$$

Следовательно, в силу (15), это означает, что $z(\tau_1) \in M.$ Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды, Наука, М., Т.2, 1988.

2. Беллман Р.,Кук К., Дифференциально-разностные уравнения, Наука, М.,1967.

3. Мамадалиев Н., Ибайдуллаев Т.Т. Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа// Изв.вузов. Матем., 2021. № 11, 21-33.

УДК 517.95
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_104

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ В ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Матанова Калыскан Базарбаевна, к.ф.-м.н., доцент,
kalys.matanova@manas.edu.kg.
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *В данной статье исследована обратная задача для одного класса псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами с неизвестной правой частью, представляющей собой сумму нескольких пространственно-локализованных источников, интенсивности которых меняются со временем и неизвестны. В качестве дополнительной информации задаются значения температуры в некоторых точках, как функции времени. С помощью функции Грина смешанной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, а также методом резольвент и методом функции Грина найдены условия существования и единственности решения обратной задачи.*

Ключевые слова: *обратная задача, псевдопараболическое уравнение третьего порядка, резольвента, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, функция Грина.*

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕДЕ БУЛАКТАРДЫ АНЫКТОО МАСЕЛЕСИ

Матанова Калыскан Базарбаевна, ф.-м.и.к., доцент,
kalys.matanova@manas.edu.kg.
Кыргыз-Түрк «Манас» университети,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада үчүнчү тартиптеги өзгөрмөлүү коэффициенттүү псевдопараболалык теңдемелердин бир классы үчүн булактарды аныктоо тескери маселеси изилденген. Оң жагы убакыттын өтүшү менен өзгөрүп турган жана белгисиз болгон бир нече мейкиндик-локалдашкан булактардын суммасы түрүндө берилген. Кошумча маалымат катары кээ бир чекиттердеги убакыттын функциясы болгон температуранын маанилери берилет. Экинчи тартиптеги өзгөрмөлүү коэффициенттүү кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн аралаш чектик маселенин Грин функциясынын жардамы менен, ошондой эле резольвента жана Грин функциясы ыкмаларын колдонуп, тескери маселенин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды.*

Ачкыч сөздөр: *тескери маселе, үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме, резольвента, Вольтерранын 2-түрдөгү интегралдык теңдемеси, Грин функциясы.*

DETERMINING SOURCES PROBLEM IN A PSEUDOPARABOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

Matanova Kalyskan Bazarbaevna, Cand.Sc., Associate Professor,

kalys.matanova@manas.edu.kg.

Kyrgyz-Turkish Manas University,

Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract: *In this paper, the inverse source problem for a class of third-order pseudo-parabolic equations with variable coefficients is investigated. The right part is the sum of several spatially localized sources whose intensities change over time and are unknown. As additional information, the temperature values at some points are set as a function of time. Using the Green function of a mixed boundary value problem for second-order ordinary differential equations with variable coefficients, as well as the resolvent method and the Green function method, the conditions for the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem are found.*

Keywords: *inverse problem, pseudoparabolic equation of the third order, resolvent, Volterra integral equation of the second kind, Green's function.*

В теории уравнений с частными производными важное место занимают исследования, посвященные обратным задачам. Обратные задачи возникают в ситуациях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, нужно ставить задачи определения параметров самой математической модели. К таким задачам относятся задачи определения различных коэффициентов уравнений, либо внешнего воздействия, либо граничных или начальных условий и пр. [1].

Особый, достаточно широкий класс представляют обратные задачи для уравнений в частных производных, поскольку такими уравнениями описываются математические модели самых разнообразных процессов во многих областях физики и техники. Например, при изучении движения дисперсионной волны, плазменной волны, волн в упругой среде [2], импульсивного движения плоской пластины [3], при изучении задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах и процесса влагопереноса в почве [4] возникают уравнения в частных производных третьего порядка. Вопросы разрешимости обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными изучены многими авторами [5-8].

Как правило, в задачах по определению неизвестного источника предполагается, что он определяется произведением двух функций, одна из которых неизвестна, а другая задана. Вместе с тем, возможны случаи, когда источник определяется несколькими неизвестными функциями.

В данной работе исследуется обратная задача для уравнения третьего порядка с частными производными и переменными коэффициентами с неизвестной правой частью, представляющей собой сумму нескольких пространственно-локализованных источников, интенсивности которых меняются со временем и неизвестны. В качестве дополнительной информации необходимой для определения неизвестных интенсивностей задаются значения температуры в некоторых точках как функции времени [9].

Постановка задачи. Требуется найти функции $u(x,t)$ и $\varphi_i(t)$ ($i=\overline{1,n}$) в области $G=\{(x,t)$: $a\le x\le b,\ 0\le t\le T\}$, удовлетворяющие уравнению

$$u_t(x,t)=\alpha\big(Au(x,t)\big)_t+\beta\big(Au(x,t)\big)+b_0(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+b_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+ \\ +b_2(x,t)u(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(x,t)+F(x,t), \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0)=\mu_0(x),\quad x\in[a,b], \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u_x(a,t)=0,\quad u(b,t)=0,\quad t\in[0,T] \tag{3}$$

по известным следам решения искомой функции $u(x, t)$ в точках x_i, $i=1, 2,\dots n$,

$$u(x_i,t)=g_i(t), \qquad 0<x_1<x_2<\ldots<x_n<1, \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

где

$$Au(x,t)=u_{xx}(x,t)+p(x)u_x(x,t)+\left(q(x)+\frac{1}{\alpha}\right)u(x,t),$$

α, β - заданные числа, $\alpha\neq 0$, $b_0(x,t)$, $b_1(x,t)$, $b_2(x,t)$, $f_i(x,t)$, $g_i(t)\left(i=\overline{1,n}\right)$, $F(x,t)$, $u_0(x)$, $p(x)$, $q(x)$ - заданные непрерывные функции, коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ представимы в следующем виде [10]:

$$q(x)=K^2(x)+\beta^2(x)+K'(x)-\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}K(x),$$

$$K(x)=\frac{1}{2}\left[p(x)+\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}\right],$$

здесь $K'(x)$, $\beta'(x)$ - производные функций $K(x)$ и $\beta(x)$, $\beta(x)\neq 0$ для всех $x\in[a,b]$. Пусть также выполняются условия согласования

$$u_0(a)=u_0(b)=0, \quad u_0(x_i)=g_i(0), \quad i=\overline{1,n}.$$

Для решения обратной задачи введем обозначение

$$v(x,t)=u_t(x,t)$$

Тогда

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,s)ds+u_0(x) \tag{5}$$

и уравнение (1), граничные условия (3) относительно $v(x,t)$ запишутся в виде:

$$\begin{aligned} v(x,t)&=\alpha\left(Av(x,t)\right)+\beta\int_0^t Av(x,s)ds+\beta\left(Au_0(x)\right)+b_0(x,t)\left(\int_0^t\frac{\partial^2 v(x,s)}{\partial x^2}ds+u_0''(x)\right)+\\ &+b_1(x,t)\left(\int_0^t\frac{\partial v(x,s)}{\partial x}ds+u_0'(x)\right)+b_2(x,t)\left(\int_0^t v(x,s)ds+u_0(x)\right)+\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)f_i(x,t)+F(x,t), \end{aligned} \tag{6}$$

$$v_x(a,t)=v(b,t)=0. \tag{7}$$

Уравнение (6) выразим через Av:

$$
\begin{gathered}
Av(x,t) = -\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t Av(x,s)ds + \frac{1}{\alpha}v(x,t) - \frac{\beta}{\alpha}Au_0(x) - \\
-\frac{1}{\alpha}\int_0^t \left[\frac{\partial^2 v(x,s)}{\partial x^2}b_0(x,t) + \frac{\partial v(x,s)}{\partial x}b_1(x,t) + v(x,s)b_2(x,t)\right]ds - \\
-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)f_i(x,t) - \frac{1}{\alpha}\left[b_0(x,t)u_0''(x) + b_1(x,t)u_0'(x) + b_2(x,t)u_0(x)\right] - \frac{1}{\alpha}F(x,t).
\end{gathered} \tag{8}
$$

(8) относительно $Av(x, t)$ является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с ядром-константой $-\frac{\beta}{\alpha}$. Применяя его резольвенту $R(t,s) = -\frac{\beta}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-s)}$, найдем

$$
\begin{gathered}
Av(x,t) = \frac{1}{\alpha}v(x,t) - \frac{1}{\alpha}\int_0^t \left[\frac{\partial^2 v(x,s)}{\partial x^2}b_0(x,t) + \frac{\partial v(x,s)}{\partial x}b_1(x,t) + v(x,s)b_2(x,t)\right]ds - \\
-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)f_i(x,t) + \frac{1}{\alpha}\int_0^t R(t,s)v(x,s)ds - \\
-\frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^s R(t,s)\left[\frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2}b_0(x,s) + \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x}b_1(x,s) + v(x,\tau)b_2(x,s)\right]d\tau ds - \\
-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n\int_0^t R(t,s)\varphi_i(s)f_i(x,s)ds + F_1(x,t),
\end{gathered} \tag{9}
$$

где

$$
\begin{gathered}
F_1(x,t) = -\frac{1}{\alpha}\left[\beta Au_0(x) + b_0(x,t)u_0''(x) + b_1(x,t)u_0'(x) + b_2(x,t)u_0(x) + F(x,t)\right] - \\
-\frac{1}{\alpha}\int_0^t R(t,s)\left[\beta Au_0(x) + b_0(x,s)u_0''(x) + b_1(s,t)u_0'(x) + b_2(x,s)u_0(x) + F(x,s)\right]ds.
\end{gathered}
$$

Применяя к двойному интегралу формулу Дирихле изменения порядка интегрирования, уравнение (9) преобразуем к виду

$$
\begin{gathered}
Av(x,t) - \frac{1}{\alpha}v(x,t) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^t \left\{\left[b_0(x,t) + \int_s^t R(t,\tau)b_0(x,\tau)d\tau\right]\frac{\partial^2 v(x,s)}{\partial x^2} + \right. \\
\left. + \left[b_1(x,t) + \int_s^t R(t,\tau)b_1(x,\tau)d\tau\right]\frac{\partial v(x,s)}{\partial x} + \left[b_2(x,t) - R(t,s) + \int_s^t R(t,\tau)b_2(x,\tau)d\tau\right]v(x,s)\right\}ds - \\
-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n \phi_i(t)f_i(x,t) - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n\int_0^t R(t,s)\phi_i(s)f_i(x,s)ds + F_1(x,t)
\end{gathered}
$$

и введем обозначения

$$
r_0(x,t,s) = -\frac{1}{\alpha}\left[b_0(x,t) + \int_s^t R(t,\tau)b_0(x,\tau)d\tau\right]
$$

$$r_1(x,t,s) = -\frac{1}{\alpha}\left[b_1(x,t) + \int_s^t R(t,\tau) b_1(x,\tau) d\tau \right]$$

$$r_2(x,t,s) = -\frac{1}{\alpha}\left[b_2(x,t) - R(t,s) + \int_s^t R(t,\tau) b_2(x,\tau) d\tau \right].$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$\begin{gathered} Av(x,t) - \frac{1}{\alpha} v(x,t) = \int_0^t \left\{ r_0(x,t,s) \frac{\partial^2 v(x,s)}{\partial x^2} + r_1(x,t,s) \frac{\partial v(x,s)}{\partial x} + r_2(x,t,s) v(x,s) \right\} ds - \\ -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \phi_i(t) f_i(x,t) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \int_0^t R(t,s) \phi_i(s) f_i(x,s) ds + F_1(x,t) \end{gathered} \tag{10}$$

Если рассматривать правую часть как известную функцию, то (10) вместе с условиями (7) представляет собой краевую задачу для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка относительно $v(x,t)$ по переменной x и его решение с помощью функции Грина [11] запишется в виде

$$\begin{gathered} v(x,t) = \int_0^t \int_a^b G(x,\xi) \left\{ r_0(\xi,t,s) \frac{\partial^2 v(\xi,s)}{\partial \xi^2} + r_1(\xi,t,s) \frac{\partial v(\xi,s)}{\partial \xi} + r_3(\xi,t,s) v(\xi,s) \right\} d\xi ds \\ -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \phi_i(t) \int_a^b G(x,\xi) f_i(\xi,t) d\xi - \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n \int_0^t \phi_i(s) \int_a^b G(x,\xi) R(t,s) f_i(\xi,s) d\xi ds + \int_a^b G(x,\xi) F_1(\xi,t) d\xi, \end{gathered} \tag{11}$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина, которая определяется из следующей формулы [12]:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{-e^{-\int_\xi^x K(s)ds} \sin\left(\int_\xi^b \beta(s)ds\right) \left[\beta(a) \cos\left(\int_a^x \beta(s)ds\right) + K(a) \sin\left(\int_a^x \beta(s)ds\right) \right]}{\beta(\xi) \left[K(a) \sin\left(\int_a^b \beta(s)ds\right) + \beta(a) \cos\left(\int_a^b \beta(s)ds\right) \right]}, & a \le x \le \xi \le b, \\ \dfrac{-e^{-\int_\xi^x K(s)ds} \sin\left(\int_x^b \beta(s)ds\right) \left[\beta(a) \cos\left(\int_a^\xi \beta(s)ds\right) + K(a) \sin\left(\int_a^\xi \beta(s)ds\right) \right]}{\beta(\xi) \left[K(a) \sin\left(\int_a^b \beta(s)ds\right) + \beta(a) \cos\left(\int_a^b \beta(s)ds\right) \right]}, & a \le \xi \le x \le b. \end{cases}$$

Для упрощения записи введем обозначения

$$K_i(x,t,s) = -\frac{1}{\alpha} \int_a^b G(x,\xi) R(t,s) f_i(\xi,s) d\xi\,,$$

$$P_i(x,t) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b G(x,\xi) f_i(\xi,t) d\xi \;\; F_2(x,t) = \int_a^b G(x,\xi) F_1(\xi,t) d\xi\,,$$

$$v_1(x,t)=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x},\quad v_2(x,t)=\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}.$$

Тогда выражение (11) примет вид:

$$\begin{gathered}v(x,t)+\sum_{i=1}^{n}P_i(x,t)\varphi_i(t)=\int_0^t\int_a^b G(x,\xi)\{r_2(\xi,t,s)v(\xi,s)+r_1(\xi,t,s)v_1(\xi,s)+\\+r_0(\xi,t,s)v_2(\xi,s)\}\,d\xi ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_i(x,t,s)\varphi_i(s)\,ds+F_2(x,t).\end{gathered}\tag{12}$$

Продифференцируем (11) по x два раза, учитывая при этом, что производная функции Грина в точке $x=\xi$ испытывает скачок, равный единице:

$$\begin{gathered}v_1(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i(x,t)}{\partial x}\varphi_i(t)=\int_0^t\int_a^b\frac{\partial G(x,\xi;t)}{\partial x}\{r_2(\xi,t,s)v(\xi,s)+\\+r_1(\xi,t,s)v_1(\xi,s)+r_0(\xi,t,s)v_2(\xi,s)\}\,d\xi ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\frac{\partial K_i(x,t,s)}{\partial x}\varphi_i(s)\,ds+\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x},\end{gathered}\tag{13}$$

$$\begin{gathered}v_2(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P_i(x,t)}{\partial x^2}\varphi_i(t)=\int_0^t\int_a^b\left.\frac{\partial^2 G(x,\xi;t)}{\partial x^2}\right|_{\xi\neq x}\{r_2(\xi,t,s)v(\xi,s)+\\+r_1(\xi,t,s)v_1(\xi,s)+r_0(\xi,t,s)v_2(\xi,s)\}\,d\xi ds+\\+\int_0^t\{r_2(x,t,s)v(x,s)+r_1(x,t,s)v_1(x,s)+r_0(x,t,s)v_2(x,s)\}ds+\\+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\frac{\partial^2 K_i(x,t,s)}{\partial x^2}\varphi_i(s)\,ds+\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial x^2}.\end{gathered}\tag{14}$$

В силу переопределения при $x=x_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ из (12) имеем

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}P_i(x_j,t)\varphi_i(t)=\int_0^t\int_a^b G(x_j,\xi)\{r_2(\xi,t,s)v(\xi,s)+r_1(\xi,t,s)v_1(\xi,s)+\\+r_0(\xi,t,s)v_2(\xi,s)\}\,d\xi ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_i(x_j,t,s)\varphi_i(s)\,ds+F_2(x_j,t)-g_j'(t).\end{gathered}\tag{15}$$

Таким образом, обратная задача (1)–(4) эквивалентна следующей системе из n+3 уравнений (12)-(15) с n+3 неизвестными, которая в матричной форме имеет вид:

$$P(x,t)\,y(x,t)=\int_0^t\int_a^b B(x,\xi,t,s)y(\xi,s)d\xi ds+\int_0^t C(x,t,s)\,y(x,s)\,ds+D(x,t),\tag{16}$$

где $y(x,t)=colon\left(v(x,t),v_1(x,t),v_2(x,t),\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)\right)$,

$$P\left(x,t\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & P_1(x,t) & \cdots & P_n(x,t) \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial P_n(x,t)}{\partial x} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\partial^2 P_1(x,t)}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 P_n(x,t)}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & P_1(x_1,t) & \cdots & P_n(x_1,t) \\ 0 & 0 & 0 & P_1(x_2,t) & \cdots & P_n(x_2,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & P_1(x_n,t) & \cdots & P_n(x_n,t) \end{pmatrix},$$

$$B\left(x,\xi,t,s\right)=\begin{pmatrix} G(x,\xi)r_2(\xi,t,s) & G(x,\xi)r_1(\xi,t,s) & G(x,\xi)r_0(\xi,t,s) & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}r_2(\xi,t,s) & \dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}r_1(\xi,t,s) & \dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}r_0(\xi,t,s) & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2}r_2(\xi,t,s) & \dfrac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2}r_1(\xi,t,s) & \dfrac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2}r_0(\xi,t,s) & 0 & \cdots & 0 \\ G(x_1,\xi)r_2(\xi,t,s) & G(x_1,\xi)r_1(\xi,t,s) & G(x_1,\xi)r_0(\xi,t,s) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & \cdots & 0 \\ G(x_n,\xi)r_2(\xi,t,s) & G(x_n,\xi)r_1(\xi,t,s) & G(x_n,\xi)r_0(\xi,t,s) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C\left(x,t,s\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & K_1(x,t,s) & \cdots & K_n(x,t,s) \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial K_1(x,t,s)}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial K_n(x,t,s)}{\partial x} \\ r_2(x,t,s) & r_1(x,t,s) & r_0(x,t,s) & \dfrac{\partial^2 K_1(x,t,s)}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 K_n(x,t,s)}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & K_1(x_1,t,s) & \cdots & K_n(x_1,t,s) \\ 0 & 0 & 0 & K_1(x_2,t,s) & \cdots & K_n(x_2,t,s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & K_1(x_n,t,s) & \cdots & K_n(x_n,t,s) \end{pmatrix},$$

$$D\left(x,t\right)=colon\left(F_2(x,t),\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x},\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial x^2},F_2(x_1,t),\ldots,F_2(x_n,t)\right).$$

Предполагаем, что

$$det\, P(x,\, t)\neq 0 \tag{17}$$

при всех $(x,\, t)\in G$. Тогда существует обратная матрица $P^{-1}(x,\, t)$, умножив на которую обе части (16) слева, получим систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода с двумя независимыми переменными

$$y\left(x,t\right)=\int\limits_0^t\int\limits_a^b P^{-1}\left(x,t\right)B\left(x,\xi,t,s\right)y(\xi,s)d\xi ds+\int\limits_0^t P^{-1}\left(x,t\right)C(x,t,s)y\left(x,s\right)ds+P^{-1}\left(x,t\right)D(x,t)\,,$$

которая имеет единственное непрерывное решение. В силу обозначения (5) находим искомую функцию $u(x,t)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если заданные функции принадлежат пространствам $p(x), q(x) \in C[a,b]$,

$b_0(x,t),\ \ b_1(x,t),\ \ b_2(x,t),\ \ b_3(x,t),\ \ f_i(x,t),\ \ F(x,t) \in C(G),\qquad u_0(x) \in C^2[a,b]$,

$g_i(t) \in C^1[0,T], i = \overline{0,n}$ и выполняется условие (17), то обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение $\{u(x,t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$, принадлежащее пространству $C^{2,1}(G) \times C_n[0,T]$.

Пример. Доказать существование и единственность решения в пространстве $C^{2,1}(G) \times C[0,T], G = \{(x,t) : 1 \le x \le 4, 0 \le t \le T, \}$ следующей обратной задачи:

$$u_t(x,t) = \left(Au(x,t)\right)'_t + \left(Au(x,t)\right) + 2\varphi(t) + 8, \tag{18}$$

$$u'(1,t) = u(4,t) = 0, \tag{19}$$

$$u(x,0) = \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} - 1,$$

$$u(2,t) = t^2 - 1, \tag{21}$$

$$Au(x,t) = u''_{xx}(x,t) + \frac{1}{2x}u'_x(x,t) + \left(\frac{1}{x} + 1\right)u(x,t).$$

Решение. Здесь $\alpha = 1,\ \ \beta = 1,\ \ b(x,t) = 0,\ \ f(x,t) = 2,\ \ p(x) = \frac{1}{2x},\ \ q(x) = \frac{1}{x}$, $F(x,t) = 8,\ \ u_0(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} - 1,\ \ x_0 = 2,\ \ g(t) = t^2 - 1.$ Все заданные функции удовлетворяют условиям теоремы и имеют место условия согласования:

$$u_0'(1) = u(4) = 0, \quad u_0(2) = g(0) = -1.$$

Необходимо проверить выполнение условия (17). Функция Грина имеет вид

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{\xi}\sin\left(4 - 2\sqrt{\xi}\right)\cos\left(2\sqrt{x} - 2\right)}{\cos 2}, & 1 \le x \le \xi \le 4, \\ -\dfrac{\sqrt{\xi}\cos\left(2\sqrt{\xi} - 2\right)\sin\left(4 - 2\sqrt{x}\right)}{\cos 2}, & 1 \le \xi \le x \le 4. \end{cases}$$

Найдем функцию $P(x,t)$

$$P(x,t)=2\int_1^4 G(x,\xi)\,d\xi=-\frac{2\sin\left(4-2\sqrt{x}\right)}{\cos 2}\int_1^x \sqrt{\xi}\cos\left(2\sqrt{\xi}-2\right)d\xi-$$

$$-\frac{2\cos\left(2\sqrt{x}-2\right)}{\cos 2}\int_x^4 \sqrt{\xi}\sin\left(4-2\sqrt{\xi}\right)d\xi=2x-1+\frac{2\sin\left(4-2\sqrt{x}\right)-7\cos\left(2\sqrt{x}-2\right)}{\cos 2},$$

и ее значение при $x_0=2$:

$$P(x_0,t)=\frac{3\cos 2+2\sin\left(4-2\sqrt{2}\right)-7\cos\left(2\sqrt{2}-2\right)}{\cos 2}\approx 9{,}94\neq 0.$$

Таким образом $P(x_0,t)\neq 0$ при всех $t\in[0,T]$ и для обратной задачи (18)-(21) выполняются все условия теоремы и в заданном пространстве существует ее единственное решение.

Литература

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи: учеб. пособие / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сиб.науч. изд., 2009. - 457 с.
2. Robert A. Meyers. Mathematics of Complexity and Dynamical Systems / Robert A. Meyers, Springer-Verlag New York, 2011. – 1858 p.
3. Robert A. Van Gorder Third-order partial differential equations arising in the impulsive motion of a flat plate / Robert A. Van Gorder, Vajravelu K. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009.Vol. 14, Issue 6. P. 2629–2636.
4. Баренблатт Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5. С. 852-866.
5. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка / Т.К.Юлдашев // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. 2014, выпуск 1(34). - с. 56-65. DOI: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1299
6. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations / V.Isakov. - Springer, New York, 2006, 284 pages;
7. Kozhanov A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems / Kozhanov A. I.- VSP, Utrecht, Netherlands, 1999
8. Shitao Liu, An inverse problem for a third order PDE arising in high-intensity ultrasound: Global uniqueness and stability by one boundary measurement / Liu Shitao, Triggiani

Roberto // Journal of Inverse and I11-Posed Problems. Volume 21, Issue 6, DOI: 10.1515/jip-2012-0096, 2013.- P 825-869.

9. Denisov A.M. Determining the Intensity Variation of Heat Sources in the Heat Equation/ A.M. Denisov, S.I. Solov’eva //Comput Math Model 33, 1–8 (2022). https://doi.org/10.1007/s10598-022-09551-4.

10. . – Volume 8, №3, 2012.- P. 321-328.

11. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения /Л. Коллатц. – М.: Наука, 1968. – 504 с.

12. Матанова К. Б., Ашырбекова А.Н. Үчүнчү тартиптеги өзгөрмөлүү коэффициенттүү жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн тескери маселе / К. Б. Матанова, А.Н. Ашырбекова // КМКТАУнун Жарчысы №4 (78), 2022. – Б.1603-1611.

УДК 517.956.6
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_115

ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рузиев Менглибай Холтожибаевич, д.ф.-м.н,
mruziev@mail.ru
Юлдашева Наргиза Тахиржоновна,
nyuldasheva87@gmail.com
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз,
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области исследована нелокальная задача с обобщенными операторами дробного дифференцирования, ядра которых содержат гипергеометрические функции Гаусса. Применив метод интегральных уравнений, рассматриваемая задача эквивалентным образом сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Регуляризовав его методом Карлемана–Векуа находится решение в явном виде.*

***Ключевые слова**: краевая задача, сингулярный коэффициент, сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, уравнение смешанного типа, индекс уравнения.*

THE BITSADZE–SAMARSKY TYPE PROBLEM FOR A MIXED-TYPE EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Ruziev Menglibay Kholtojibaevich, DSc,
mruziev@mail.ru
Yuldasheva Nargiza Taxirjonovna,
nyuldasheva87@gmail.com
Institute of Mathematics Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Tashkent, Uzbekistan

***Abstract:* .** *For an equation of mixed elliptic-hyperbolic type with singular coefficients in an unbounded domain, a nonlocal problem with generalized fractional differentiation operators whose kernels generalized Gaussian hypergeometric functions is studied. Applying the method of integral equations, the consideration problem is equivalently reduced to solving a singular integral equation with the Cauchy kernel. Regularizing it by the Carleman–Vekua method, we find the solution in an explicit form.*

Keywords: *boundary value problem, singular coefficient, singular integral equation with Cauchy kernel, mixed type equation, index of equation.*

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексной области $z = x + iy,$ где $D^+ -$ полуплоскость $y > 0$, $D^- -$ конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками ОС и ВС уравнения исходящими из точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$ и отрезком ОВ прямой $y = 0$, $I = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$.

В уравнение (1) $m,\ \alpha_0,\ \beta_0 -$ некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0,\ |\alpha_0| < \dfrac{m+2}{2},\ -\dfrac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Введем следующие обозначения:

$$I_1 = \{(x, y) : -\infty < x < 0, y = 0\},\ I_2 = \{(x, y) : 1 < x < \infty, y = 0\}.$$

Свойства решений уравнения (1) существенно зависят от коэффициентов α_0 и β_0 при младших членах уравнения (1). На плоскости параметров $\alpha_0 O \beta_0$ рассматривается треугольник $A_0 B_0 C_0,$ ограниченный прямыми $B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2$, $A_0C_0 : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2$, $A_0B_0 : \beta_0 = 1$, и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются краевые задачи для уравнения (1).

Пусть $P(\alpha_0,\beta_0)\in A_0B_0C_0$.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^2(D)$, где $\bar{D}=D^+\cup\overline{D^-}\cup\overline{I_1}\cup\overline{I_2}$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в области $D^+\cup D^-$;

3) выполняются равенства

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0, R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}, y\geq 0; \tag{2}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0}=\varphi_i(x),\ \forall x\in\overline{I_i}, \tag{3}$$

$$A_1(I_{0+}^{-\alpha,0,\alpha+\beta-1}u[\Theta(t)])(x)+A_2u(x,0)=g(x), \tag{4}$$

а также условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I, \tag{5}$$

причем эти пределы при $x=-1$, $x=1$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=\dfrac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}$, $\beta=\dfrac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$, $g(x)$, $\varphi_i(x)$ – заданные функции, функции $\varphi_i(x)$, $i=1,2$ удовлетворяют условию Гельдера на любых отрезках $[-N,-1],\ [1,N],\quad N>1$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $\varphi_i(x)\leq M\,|x|^{-\delta}$, где δ, M -положительные постоянные, $\Theta_0(x)$ - точка пересечения характеристик уравнения (1) выходящих из точки $(x,0)\in I$, с характеристикой ОС, $A_1, A_2 -$ постоянные числа.

$(I_{0+}^{\mu,\rho,\eta}f)(x)$ –оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b,c;z)$, введенный М.Сайго [1, С.326] и имеющий при действительных μ,ρ,η и $x>0$ вид

$$(I_{0+}^{\mu,\rho,\eta} f)(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{-\mu-\rho}}{\Gamma(\mu)}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{\mu-1}F\left(\mu+\rho,-\eta;\mu;1-\dfrac{t}{x}\right)f(t)dt, \mu>0,\\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\mu-n,\rho-n,\eta-n} f)(x),\ \mu\le 0, n=[-\mu]+1.\end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что если $\mu>0$, то справедливы формулы

$$(I_{0+}^{\mu,-\mu,\eta} f)(x)=(I_{0+}^{\mu} f)(x),(I_{0+}^{-\mu,\mu,\eta} f)(x)=(D_{0+}^{\mu} f)(x), \tag{7}$$

в частности

$$(I_{0+}^{0,0,\eta} f)(x)=f(x),(I_{1-}^{0,0,\eta} f)(x)=f(x), \tag{8}$$

где $(I_{0+}^{\mu} f)(x)$ и $(D_{0+}^{\mu} f)(x)$ – операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана–Лиувилля порядка $\mu>0$ [1, С.85];

$$(I_{0+}^{\mu} f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t)dt,\ \ \mu>0,\ \ x>0,$$

$$(D_{0+}^{\mu} f)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\int_0^x (x-t)^{n-\mu-1} f(t)dt,\quad \mu>0,\quad n=[\mu]+1.$$

Решение видоизмененной задачи Коши, в области D^{-} имеет вид [2]

$$\begin{aligned} u(x,y)=\gamma_1\int_0^1 \tau_2\left(x+\frac{2}{m+2}(2t-1)(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt+\\ +\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_0^1 \nu_2\left(x+\frac{2}{m+2}(2t-1)(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt,\end{aligned} \tag{9}$$

где $\gamma_1=\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},\ \gamma_2=-\dfrac{2\Gamma(1-\alpha-\beta)}{(m+2)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}.$

Используя формулу (9) и соотношение (6) имеем

$$u[\Theta_0(x)]=\gamma_1\Gamma(\alpha)(I_{0+}^{\alpha,0,\beta-1}\tau)(x)+\gamma_2\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\beta)(I_{0+}^{1-\beta,\alpha+\beta-1,\beta-1}\nu)(x).$$

Подставляя $u[\Theta_0(x)]$ в краевое условие (4), в силу (7) и (8), получим

$$(A_1\gamma_1\Gamma(\alpha)+A_2)\tau(x)+A_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-\alpha-\beta}(I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\nu(t))(x)=g(x). \quad (10)$$

Применив к обеим частям равенства оператор $D_{0+}^{1-\alpha-\beta}$, с учетом

$$\left(D_{0+}^{\alpha}(I_{0+}^{\alpha}f)(t)\right)(x)=f(x),\quad \alpha>0$$

имеем

$$(A_1\gamma_1\Gamma(\alpha)+A_2)(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(t))(x)+A_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-\alpha-\beta}\nu(x)=(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}g)(x).$$

Выразим из последнего выражения $\nu(x)$, тогда имеем

$$\nu(x)=\lambda_1\left(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(t)\right)(x)+F(x), \quad (11)$$

где

$$\lambda_1=-\frac{A_1\gamma_1\Gamma(\alpha)+A_2}{A_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-\alpha-\beta}},\quad F(x)=\frac{(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}g)(x)}{A_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-\alpha-\beta}}.$$

Решение задачи Дирихле в области D^+, удовлетворяющее условиям (2), (3) и условию $u(x,0)=\tau(x)$, $x\in\overline{I}$, представимо в виде [3]

$$u(x,y)=k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0}\int_0^1\tau(t)(r_0^2)^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt+F_1(x,y), \quad (12)$$

где

$$r_0^2=(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2},$$

$$F_1(x,y)=k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0}\left(\int_{-\infty}^0\varphi_1(t)(r_0^2)^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt+\right.$$

$$\left.+\int_1^\infty\varphi_2(t)(r_0^2)^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt\right),$$

$$k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2a}\frac{\Gamma(1-l)\Gamma(1-\overline{l})}{\Gamma(2-l-\overline{l})},\quad 2a=\alpha+\beta,\quad l=a+bi,\quad b=-\frac{\alpha_0}{m+2}.$$

Дифференцируя (12) по y и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y} y^{1-\beta_0}\left(\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right)=$$

$$=\frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left((x-t)\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right),$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial y}=k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\int_0^1\tau(t)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial t}\left((x-t)\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right)dt+\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}. \tag{13}$$

Выполнив операцию интегрирования по частям в правой части равенства (13) с учетом $\tau(0)=0$, $\tau(1)=0$, и после несложных вычислений имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\int_0^1\tau'(t)(x-t)\times$$

$$\times\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt+\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y). \tag{14}$$

Умножая обе части равенства (14) на y^{β_0}, затем переходя к пределу при $y\to+0$, получим

$$\nu(x)=-k_2\frac{m+2}{2}\int_0^1\tau'(t)(x-t)\,|\,x-t\,|^{2a-2}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{|\,t-x\,|}\right)dt+\Phi(x), \quad x\in(-1,1), \tag{15}$$

где

$$\Phi(x)=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y)=k_2(1-\beta_0)^2\times$$

$$\times\left(e^{b\pi}\int_{-\infty}^0\varphi_1(t)(x-t)^{2a-2}dt+e^{-b\pi}\int_1^\infty\varphi_2(t)(t-x)^{2a-2}\right)dt.$$

Равенство (15) есть функциональное соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на I из эллиптической части D^{+} смешанной области D.

В силу (5) исключая функцию $\nu(x)$ из (11) и (15), получим

$$\lambda_1(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(t))(x)=$$

$$=-k_2\frac{m+2}{2}\int_0^1\tau'(t)(x-t)|x-t|^{2a-2}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)dt+\Phi_1(x), \tag{16}$$

$$x\in(-1,1),$$

где $\Phi_1(x)=\Phi(x)-F(x).$ Применив оператор $\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}$ к обеим частям равенства (16) и учитывая что, $\left(D_{0+}^{\alpha+\beta-1}(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau)(t)\right)(x)=\tau(x),$ имеем

$$\lambda_1\Gamma(1-\alpha-\beta)\tau(x)=$$

$$=-k_2\frac{m+2}{2}\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\int_0^1\tau'(t)(x-t)|x-t|^{2a-2}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)dt+$$

(17)

$$+\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\Phi_1(x),\quad x\in(-1,1).$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\int_0^x\tau'(t)(x-t)^{2a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)dt=$$

$$=\frac{\pi e^{b\pi}\tau(x)}{\sin((\alpha+\beta)\pi)}, \tag{18}$$

$$\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\int_x^1\tau'(t)(t-x)^{2a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)dt=$$

$$=\pi e^{-b\pi}ctg((\alpha+\beta)\pi)\tau(x)-e^{-b\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}. \tag{19}$$

Подставляя (18)-(19) в (17), имеем

$$\lambda_1\Gamma(1-\alpha-\beta)\tau(x) = -k_2\frac{m+2}{2}\times$$

$$\times\left[\frac{\pi e^{b\pi}\tau(x)}{\sin((\alpha+\beta)\pi)} - \pi e^{-b\pi}ctg((\alpha+\beta)\pi)\tau(x) + e^{-b\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}\right]+ \quad (20)$$

$$+\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\Phi_1(x),\ \ x\in(-1,1)$$

Равенство (20) запишем в виде

$$\tau(x) - \lambda\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x} = g_0(x),\ \ x\in[0,1], \quad (21)$$

где

$$\lambda = \frac{e^{-b\pi}}{\frac{2\lambda_1\Gamma(1-\alpha-\beta)}{k_2(m+2)} + \frac{\pi}{\sin((\alpha+\beta)\pi)}\left(e^{b\pi} - e^{-b\pi}\cos(\alpha+\beta)\pi\right)},$$

$$g_0(x) = \lambda e^{b\pi}\left(\frac{2}{k_2(m+2)}\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\Phi_1(x)\right).$$

Полагая $x^{\alpha+\beta-1}\tau(x) = \rho(x)$, $x^{\alpha+\beta-1}g_0(x) = g_1(x)$, уравнение (21) перепишем в виде

$$\rho(x) - \lambda\int_0^1\frac{\rho(t)dt}{t-x} = g_1(x), x\in[0,1]. \quad (22)$$

Решение уравнения (22) будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера на $(0,1)$ и ограниченных при $x\to 1$, а при $x\to 0$ возможно обращающихся в бесконечность порядка меньше $1-\alpha-\beta$. В этом классе индекс уравнения (22) равен нулю, а его решение методом Карлемана - Векуа ([4], с.320) находится в явном виде

$$\rho(x) = \frac{g_1(x)}{1+\lambda^2\pi^2} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\theta}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\theta}\frac{g_1(t)dt}{t-x},$$

где

$$\theta = \frac{arctg(\lambda\pi)}{\pi},\ \ 0<\theta<1/2.$$

Отсюда, возвращаясь к прежним функциям, получим

$$\tau(x) = \frac{g_0(x)}{1+\lambda^2\pi^2} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\theta}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\theta}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{g_0(t)dt}{t-x}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения: монография / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Салахитдинов М.С. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами: монография / М.С. Салахитдинов, М. Мирсабуров. – Ташкент: Университет, 2005.

3. Ruziev M. Tricomi type equations with terms of lower order. / M. Ruziev, M. Reissig // Journal of Dynamical Systems and Differential Equations. 2016. Vol. 6. № 1. P. 14.

4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения: Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике: монография / Мусхелишвили Н.И. – Москва: Наука, 1968. - 511 с.

УДК 532.546
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_124

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИЯ И ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ДВУХЗОННОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Сулаймонов Фозил Уралович, PhD, ст. преподаватель
fozil.sulaymonov@mail.ru
Абдукодирова Мохира Исмоил кизи, магистр,
mokhiraburkhonova99@gmail.com
Джизакский государственный педагогический университет,
130100, Джизак, Узбекистан

Аннотация: *В статье рассматривается задача переноса и фильтрации в двухзонной цилиндрической пористой среде с неоднородным полем скоростей. На основе уравнения пьезопроводности анализируются различные параметры коэффициентов проницаемости линии уровня давления, скорости фильтрации и линии уровня относительной концентрации. Исследовано влияние изменения коэффициентов проницаемости и диффузии на растворенное вещество и фильтрацию флюида.*

Ключевые слова: *пористая среда, вещества, неоднородная жидкость, макропора, микропора, поля давления, поля скорости, фильтрация*.

MODELING FILTRATION AND SOLUTE TRANSPORT IN A CYLINDRICAL TWO-ZONE MEDIUM WITH ALLOWANCE FOR THE INHOMOGENEITY OF THE FIELD OF FILTRATION RATES

Sulaymonov Fozil Uralovich, PhD, senior teacher
fozil.sulaymonov@mail.ru
Abdukodirova Mohira Ismoil kizi, master,
mokhiraburkhonova99@gmail.com
Jizzakh State Pedagogical University,
130100, Jizzakh, Uzbekistan

Abstract: *In the paper deals with the problem of transport and filtration in a two-zone cylindrical porous* *medium with an inhomogeneous velocity field. On the basis of the equation of piezoconductivity analyzed by various parameters of the permeability coefficients of the pressure level line, the filtration rate and the line of the level of relative concentration. The influence of changes in the permeability and diffusion coefficients on the solute and filtration of the fluid was studied.*

Keywords: *porous medium, substances, inhomogeneous liquid, macropore, micropore, pressure fields, velocity fields, filtration.*

1. ВВЕДЕНИЕ

При переносе вещества в неоднородных пористых средах образуется неоднородное поле скоростей фильтрации, что существенно влияет на конвективные и диффузионные составляющие общего переноса [1,2,3,4]. Неоднородность среды при моделировании процесса может быть учтена различными способами. Одним из возможных путей являются конкретизация зон среды с различными фильтрационно-ёмкостными характеристиками. При этом учитывается геометрия этих зон. В частности, могут быть рассмотрены среды в виде коаксиальных цилиндров с различными характеристиками [5,6,7]. В данной работе рассматривается перенос вещества в такой среде с учетом неоднородного распределения поля скоростей.

2. ОБЪЕКТ И МЕТОДЫ

Рассматривается цилиндрическая пористая среда с радиусом b с цилиндрической “макропорой” (пористая среда с высокой проницаемостью) в центре с радиусом a (Рис.1). Таким образом, область исследования задачи состоит из двух частей, $\Omega_1\{(r,x);\, 0 \le x < \infty,\, 0 \le r \le a\}$ и $\Omega_2\{(r,x);\, 0 \le x < \infty,\, a \le r \le b\}$, которые отличаются друг от друга фильтрационно-емкостными свойствами. С точки $(0,0)$ подается жидкость с постоянным давлением $p_c =$ const. При этом в среде образуется неоднородное двухмерное распределение скоростей фильтрации и давления. Первоначально в среде было постоянное давления p_0, $p_0 < p_c$.

Предположим, что внешняя цилиндрическая область Ω_2 имеет проницаемость k_2, а внутренняя Ω_1 - k_1, где $k_2 << k_1$. Внешняя боковая поверхность цилиндрической пористой среды Ω_2 не проницаема. Необходимо определить распределение давления, поле скоростей фильтрации, концентрацию вещества в цилиндрических областях в различные моменты времени. В отличие от двухзонного подхода [8,9] здесь в малопроницаемой зоне Ω_2 жидкость считается подвижной, но с малыми скоростями фильтрации.

Компоненты скорости фильтрации в Ω_1 и Ω_2 определяются как

$$v_{1x} = -\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}, \; v_{1r} = -\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial r}, \quad (r,x) \in \Omega_1, \tag{1}$$

$$v_{2x} = -\frac{k_2}{\mu}\frac{\partial p_2}{\partial x}, \; v_{2r} = -\frac{k_2}{\mu}\frac{\partial p_2}{\partial r}, \; (r,x) \in \Omega_2, \tag{2}$$

где p_1, p_2 – давления в областях Ω_1, Ω_2, μ – коэффициент вязкости вещества.

Для определения давления в областях Ω_1, Ω_2 используем уравнение пьезопроводности [1,11]

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \chi_1 \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} \right\}, \; (r,x) \in \Omega_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = \chi_2 \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} \right\}, \; (r,x) \in \Omega_2, \tag{4}$$

$$\chi_1 = \frac{k_1}{\mu\beta_1^*}, \quad \chi_2 = \frac{k_2}{\mu\beta_2^*},$$

χ_1, χ_2 – коэффициенты пьезопроводности, β_1^*, β_2^* – коэффициенты упругоемкости среды ($\beta_1^* = \theta_1\beta_ж + \beta_{c_1}$, $\beta_2^* = \theta_2\beta_ж + \beta_{c_2}$), $\beta_ж$ – коэффициент объемной упругости жидкости, θ_1 , θ_2 -пористости среды Ω_1 и Ω_2 , β_{c_1} , β_{c_2} -коэффициенты объемной упругости сред Ω_1 и Ω_2.

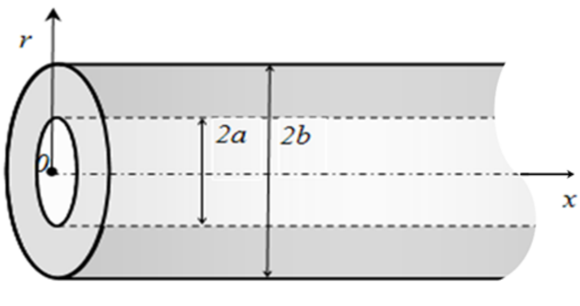


Рис.1 Схема области фильтрации

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$p_1(0,r,x) = p_2(0,r,x) = p_0, \; p_0 = \text{const} \tag{5}$$

$$p_1(t,0,0) = p_c, \; p_c = \text{const}, \; p_c > p_0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}(t,r,0) = 0, \;\; 0 < r \le a \tag{7}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}(t,r,\infty) = 0, \;\; 0 < r \le a \tag{8}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r}(t,0,x)=0,\ 0<x<\infty \quad (9) \qquad \frac{\partial p_2}{\partial x}(t,r,0)=0,\quad a<r\le b \quad (10)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x}(t,r,\infty)=0,\ a<r\le b \quad (11) \qquad \frac{\partial p_2}{\partial r}(t,b,x)=0,\quad 0<x<\infty \quad (12)$$

$$k_1\frac{\partial p_1}{\partial r}(t,a,x)=k_2\frac{\partial p_2}{\partial r}(t,a,x), 0\le x<\infty \quad (13) \qquad p_1(t,a,x)=p_2(t,a,x),\ 0\le x<\infty \quad (14)$$

Система уравнений (1) – (4) с начальными и граничными условиями (5) – (14) позволяют определить поле давлений, скоростей фильтрации.

Для решения задачи (1) – (14) применим метод конечных разностей [10].

В области $\Omega_1\bigcup\Omega_2$ введем конечно – разностную сетку

$$\Omega_{\tau h_1 h_2}=\Big\{(t_k,x_i,r_j),\ t_k=\tau k,\ \tau=\frac{T}{K},\ k=\overline{0,K},\ x_i=ih_1,\ h_1=\frac{L}{I},\quad i=\overline{1,I},$$

$$r_j=jh_2,\ h_2=\frac{a}{S},\quad j=\overline{1,S},\quad r_j=jh_2,\ h_2=\frac{b-a}{J-S},\ j=\overline{S+1,J}\Big\}, \qquad (15)$$

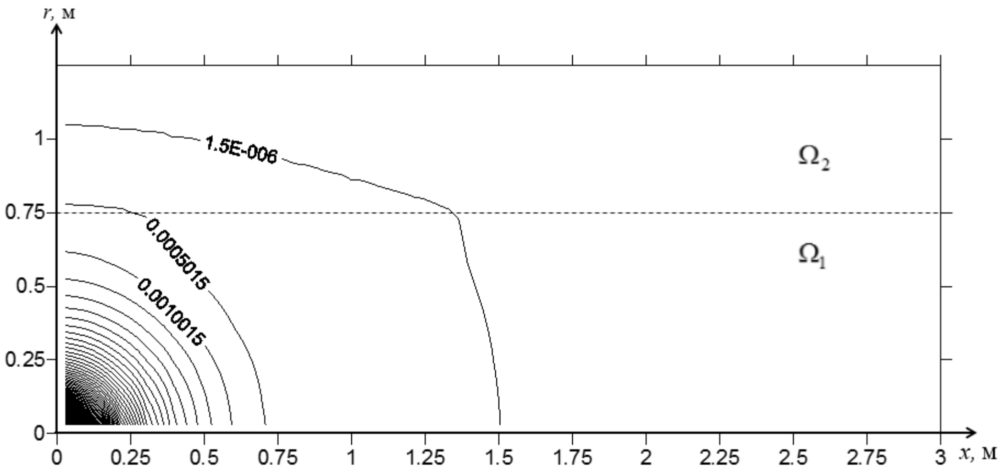
где τ - шаг сетки по времени, h_1 - шаг сетки по направлению x, h_2- шаг сетки по направлению r, T - максимальное время, в течении которого исследуются процесс, S - количество интервалов по радиусу в макропоре, *R* – радиус окружающей среды, *L* – длина цилиндра, *K* – количество интервалов сетки по времени, *I* – количество интервалов по длине, *J* – общее количество интервалов по радиусу для среды.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

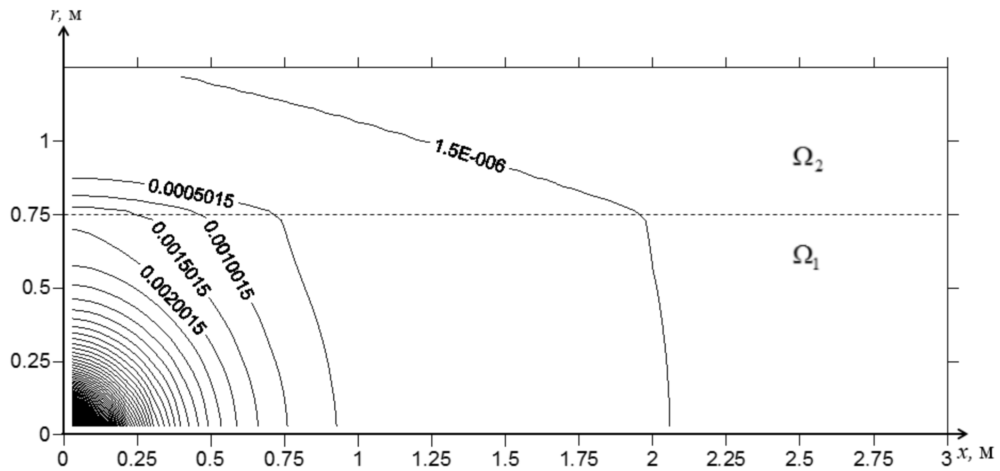
На основе численного решения задачи проведена серия вычислительных экспериментов при следующих значениях исходных параметров: $\mu=10^{-1}$ Па·с, $\beta^*=10^{-9}$ Па$^{-1}$, $k_1=10^{-14}\div 2{,}5\cdot 10^{-14}$ м^2, $k_2=10^{-15}\div 2{,}5\cdot 10^{-15}$ м^2, $p_c=1{,}5\cdot 10^5$ Па, $p_0=0$ Па, $T=2700$ с, $h_1=0{,}1$ м, $h_2=0{,}05$ м, $\tau=1$ с, $a=0{,}75$ м, $b=1{,}25$ м.

На рис.2 отражены изобары при временах $t=900$ (*а*), 1800 (*б*) и 2700 (*в*) с . Как видно из рисунка, в области Ω_1 давление растет заметно быстрее чем в Ω_2. Изгиб линий показывает, что в окружающий среде Ω_2 процесс идет медленнее, чем в макропоре. Такая же картина наблюдается и для распределения скоростей.

а)



б)



в)

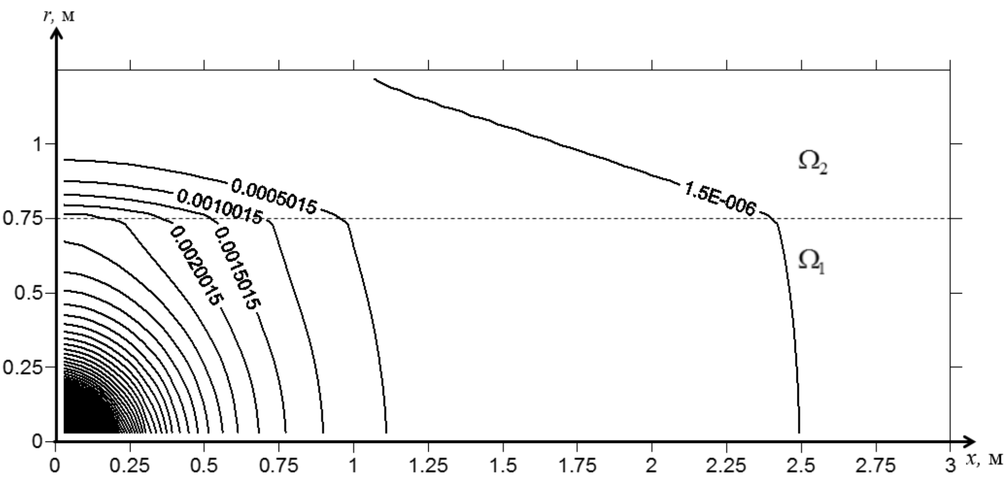


Рис.2. Изобары (МПа) при $t = 900$ (*а*), 1800 (*б*), 2700 (*в*) с, $k_1 = 10^{-14}$ м^2, $k_2 = 10^{-15}$ м^2, (Верхняя половина вертикального сечения области Ω).

На рис.3 представлены линии уровня давления при увеличении значений коэффициента проницаемости в 2,5 раза для одного значения времены, $t = 900$ с. Сравнивая результаты, представленные на рис.2(*а*) и 3 можно заметить, что увеличение значений коэффициентов проницаемости k_1 и k_2 приводит к ускорению продвижения фронта давления. На рис.4 представлены линии уровня скоростей фильтрации для двух пар значений k_1 и k_2. Сравнивая рис.4(а) с рис.4(б) можно заметить, что увеличение проницаемости приводит к увеличении скорости фильтрации. Исходя, из этого можно сделать вывод о значительности влияния проницаемости на распределение давления и скорости вещества в пористой среде.

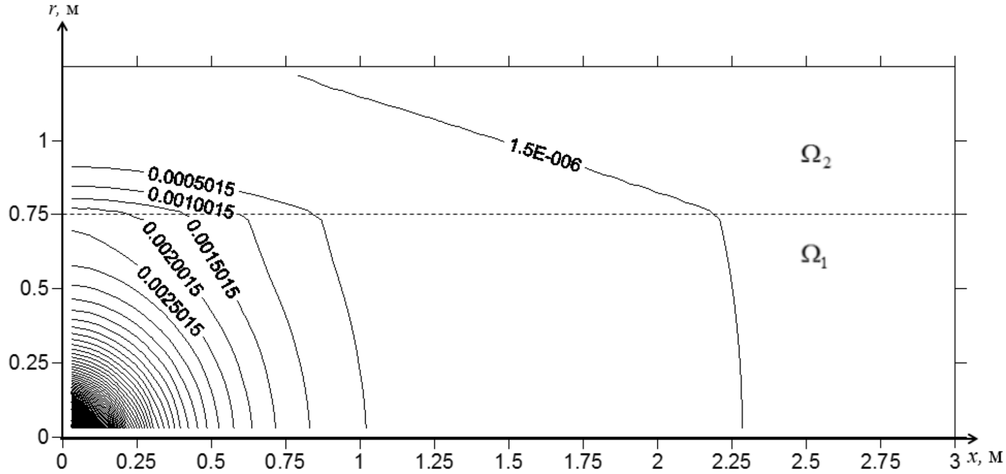
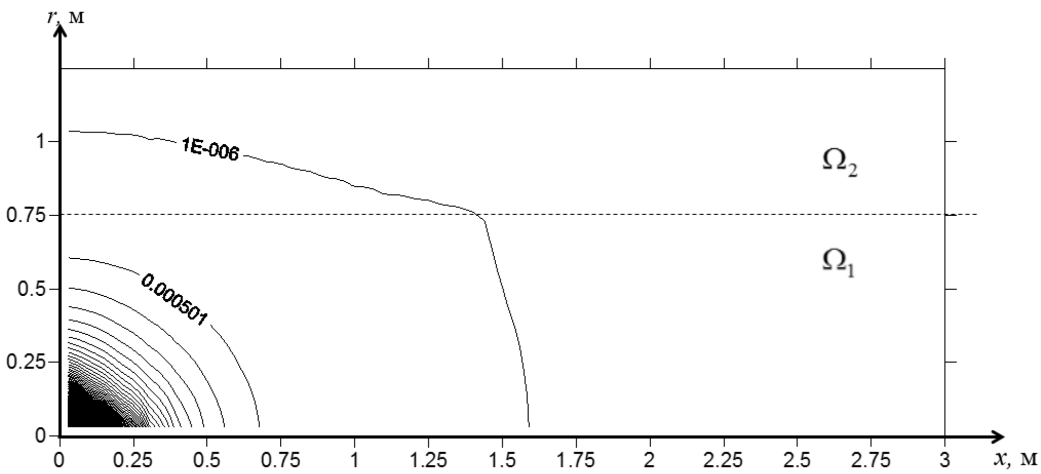


Рис.3. Изобары (МПа), $t = 900\,\text{с}$, $k_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-14}\,\text{м}^2$, $k_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-15}\,\text{м}^2$.

(Верхняя половина вертикального сечения области Ω).

а)



б)

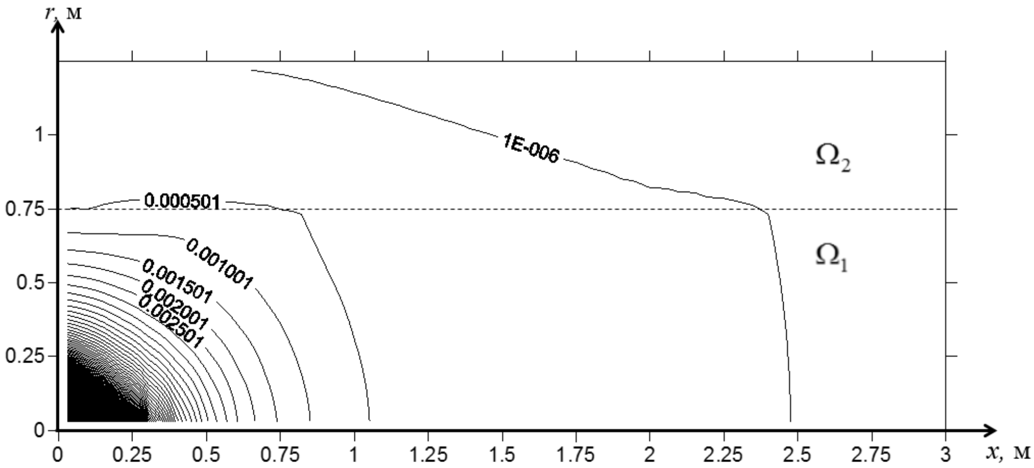


Рис.4. Линии уровня скорости фильтрации $v{\cdot}10^6$ (м/с), $t = 900$ с,
$k_1 = 10^{-14}$ м^2, $k_2 = 10^{-15}$ м^2 (*а*), $k_1 = 2{,}5\cdot10^{-14}$ м^2, $k_2 = 2{,}5\cdot10^{-15}$ м^2 (*б*).
(Верхняя половина вертикального сечения области Ω).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bear J., Dynamics of fluids in porous media, 1972, NY: Elsevier.

2. Хужаёров Б.Х. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. Издательство «ФАН». Ташкент 2012. - 280 с.

3. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М. Математические модели фильтрации неоднородных жидкостей в пористых средах. Издательство «ФАН». Ташкент 2014. - 280 с.

4. Clark M. M. Transport Modelling for Environmental Engineers and Scientists, John Wiley, New York, 1996.

5. Van Genuchten M.Th., Tang D.H., Guennelon R., Some exact solutions for solute transport through soils containing large cylindrical macropores // Water Recourses Research. 1984. Vol. 20, № 3. Pp. 335-346.

6. Haws N. W., M. R. Paraskewich Jr., M. Hilpert, W. P. Ball, Effect of fluid velocity on model-estimated rates of radial solute diffusion in a cylindrical macropore column, Water Resour. Res., Amer. J. 2007. 43, W10409

7. M. M.Rahman, R. Liedl, P. Grathwohl, Sorption kinetics during macropore transport of organic contaminants in soils: Laboratory experiments and analytical modeling, Water Resour. Res., 40, Amer. J. 2004. W01503

8. Coats K.H., Smith B.D., Dead-end volume and dispersion in porous media, Society of Petroleum Engineering Journal, 1964, 4(1), 73-84.

9. Gaudet J.P., Jégat H., Vachaud G., Wierenga P.J., Solute transfer, with exchange between mobile and stagnant water, through unsaturated sand, Soil Sci. Soc. Amer. J., 1977, 41(4), 665-671.

10. Alexcander A.Samarskii, 2001, The teory of difference schemes, // Pure and applied mathemathics // Marcel Dekker Inc, New York. 2001. 788 p.
11. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. Kluwer Academic Publisher, 1990. – 395 pp.

УДК 517.962.22
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_132

ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ

Урдалетова Анаркуль Бурганаковна, к.ф.-м.н., профессор,
anarkul.urdaletova@manas.edu.kg
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»,
Кыдыралиев Сыргак Капарович, д.э.н., профессор,
kydyraliev_s@auca.kg
Бурова Елена Сергеевна, старший преподаватель
burova_e@auca.kg
Американский университет в Центральной Азии,
Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *Разностные уравнения являются замечательным инструментом исследования окружающей человека действительности. Они в полной мере иллюстрируют высказывание великого математика Жюля Анри Пуанкаре: «Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем». Несмотря на это, к сожаленю, они не занимают достойного места в программах обучения физиков, экономистов, политологов и других ученых. Возможно, дело в том, что нет достаточного количества понятно и интересно написанных материалов по соответствующей теме. Надеемся, что представленный материал в какой-то мере поможет преодолеть этот недостаток.*

Ключевые слова: линейные разностные уравнения, уравнения первого порядка, формула для решения, решение уравнений с правой частью в общем виде, новый подход к решению разностных уравнений.

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ АЙЫРМА ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫ КОЛДОНУУ

Урдалетова Анаркүл Бурганаковна, физика-математика илимдеринин кандидаты, профессор, anarkul.urdaletova@manas.edu.kg
Кыргыз-Түрк «Манас» университети,
Кыдыралиев Сыргак Капарович, экономика илимдеринин доктору, профессор,
kydyraliev_s@auca.kg

Бурова Елена Сергеевна, ага окутуучу
burova_e@auca.kg
Борбордук Азиядагы Америка университети,
Бишкек, Кыргыз Республикасы

Аннотация: *Айырма теңдемелери адамды курчап турган чөйрөнү изилдөө үчүн эң сонун курал. Алар улуу математик Жюль Анри Пуанкаренин: «Математика – ар кандай нерселерди бир эле ат менен атай билүү өнөрү» деген сөзүн толук чагылдырат. Буга карабастан, тилекке каршы, алар физиктерди, экономисттерди, саясат таануучуларды жана башка окумуштууларды даярдоо программаларында татыктуу орунду ээлебей жатышат. Балким, бул факт тиешелүү тема боюнча так жана кызыктуу жазылган материалдардын жетишсиздигинен. Берилген материал бул кемчиликти кандайдыр бир деңгээлде жоюуга жардам берет деп ишенебиз.*

Урунттуу сөздөр: сызыктуу айырма теңдемелери, биринчи даражадагы теңдемелер, чечүү формуласы, оң тарабы жалпы түрдө берилген теңдемелердин чечими, айырма теңдемелерин чыгаруудагы жаңы ыкма.

FIRST ORDER LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS WITH APPLICATIONS

Urdaletova Anarkul Burganakovna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
anarkul.urdaletova@manas.edu.kg
Kyrgyz-Turkish University "Manas",
Kydyraliev Syrgak Kaparovich, Doctor of Economics, Professor,
kydyraliev_s@auca.kg
Burova Elena Sergeevna, Senior Lecturer
burova_e@auca.kg
American University of Central Asia,
Bishkek, Kyrgyz Republic

Abstract*: Difference equations are a wonderful tool for studying the reality surrounding a person. They fully illustrate the statement of the great mathematician Jules Henri Poincaré: "Mathematics is the art of calling different things by the same name." Despite this, unfortunately, they do not occupy a worthy place in the training programs of physicists, economists, political scientists and other scientists. Perhaps the fact is that there is not enough clear and interestingly written materials on the relevant topic. We hope that the presented material will help to overcome this shortcoming to some extent.*

Keywords*: linear difference equations, first-order equations, solution formula, solution of equations with general right-hand side, new approach to solving difference equations.*

Введение

К сожалению, подавляющее большинство людей считают, что математика является очень сложным предметом и стараются избежать ситуаций, в которых требуется использование математических методов.

В результате они оказываются в двойном проигрыше. Во-первых, природа и общество устроены так, что обойтись без математики невозможно.

Во-вторых, многие проблемы решаются проще, а результаты решения приносят большую выгоду, если при этом используется математика. [1-3]. Конечно, необходим относительно простой, удобный в использовании математический аппарат. По нашему мнению, заметное место в арсенале научных работников должны занимать разностные уравнения. В данной статье мы показываем, что даже ограничиваясь только линейными уравнениями первого порядка можно смоделировать большое количество разнообразных явлений.

1. Рассматриваются линейные разностные уравнения

$$x_n = ax_{n-1} + b(n), \tag{1}$$

где a — некоторое число, $b(n)$ — заданная функция.

Обычно [4 - 6], в работах, нацеленных на применение линейных разностных уравнений, изучаются уравнения вида $x_n = ax_{n-1} + b$ и

$x_n = px_{n-1} + qr^{n-1}$. В данной работе изучаются и другие уравнения семейства (1).

Ключевую роль в нашем исследовании будет играть довольно простое утверждение, которое мы назовем

ЛЕММА

Если имеет место разностное уравнение

$$u_n - u_{n-1} = f(n),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

то справедливо равенство $u_N - u_0 = \sum\limits_{n=1}^{N} f(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Расставив скобки в тождестве

$u_N - u_0 = u_N - u_{N-1} + u_{N-1} - u_{N-2} + u_{N-2} - u_{N-3} + u_{N-3} - \ldots + u_2 - u_1 + u_1 - u_0$, получим

$$u_N - u_0 = (u_N - u_{N-1}) + (u_{N-1} - u_{N-2}) + (u_{N-2} - u_{N-3}) + \ldots + (u_2 - u_1) + (u_1 - u_0).$$

Далее, заменив каждую скобку ее значением из уравнения (2), получим требуемое:

$$u_N - u_0 = f(N) + f(N-1) + ... + f(2) + f(1).$$

2. Начнем с элементарного примера использования ЛЕММЫ. Оказывается с ее помощью можно довольно легко справиться с некоторыми задачами на суммирование, которые часто предлагают на различных математических олимпиадах и конкурсах.

Задача 1.

Вычислить сумму $S_n = \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 15} + ... \frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$.

Решение.

Преобразуем числители:

$$S_n = \frac{(7-3)/4}{3\cdot 7} + \frac{(11-7)/4}{7\cdot 11} + \frac{(15-11)/4}{11\cdot 15} + ... + \frac{((4n+3)-(4n-1))/4}{(4n-1)\cdot(4n+3)}.$$

Теперь, достаточно разбить каждую дробь на две:

$$S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15}\right) + ... + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right).$$

В итоге, $S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3}\right)$.

3. Настало время воспользоваться ЛЕММОЙ для получения решения уравнения (1) - уравнения $x_n = ax_{n-1} + b(n)$. Для этого, разделим уравнение (1) на a^n, и введем обозначения $\frac{x_k}{a^k} = u_k$; $\frac{b(k)}{a^k} = f(k)$. Тогда, $u_n - u_{n-1} = f(n)$ и, согласно ЛЕММЕ,

$u_n - u_0 = \sum_{k=1}^{n} f(k)$. Вернемся к исходным обозначениям: $\frac{x_n}{a^n} - x_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{b(k)}{a^k}$. Таким образом,

получаем, что решением уравнения (1) является функция

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b(k). \tag{3}$$

Задача 2.

Используем формулу (3) для того, чтобы получить формулу для решения уравнения $x_n = ax_{n-1} + qr^{n-1}$.

Решение. Итак, в данном случае $b(n) = qr^{n-1}$. Поэтому, согласно (3),

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} q r^{k-1} <=> x_n = a^n x_0 + q\left(a^{n-1} + a^{n-2}r + a^{n-3}r^2 + ... + ar^{n-2} + r^{n-1}\right) <=>$$

$$x_n = a^n x_0 + qa^{n-1}\left(1 + \frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^3}{a^3} + ... + \frac{r^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{r^{n-1}}{a^{n-1}}\right).$$

Так как внутри скобок стоит сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем r/a, получаем $x_n = a^n x_0 + qa^{n-1}\frac{1-(r/a)^n}{1-(r/a)}$. Осталось переписать полученную формулу в виде

$$x_n = a^n x_0 + q\frac{a^n - r^n}{a - r} \qquad (3G)$$

(G – от слова Geometric, так как в данном случае $b(n) = qr^{n-1}$ являются членами геометрической прогрессии. *)*

Задача 3.

В 150 тысячном городе естественный прирост имеет отрицательный знак: (-4%). Из других мест в этот город в первый год переехало на 10 000 человек больше, чем уехало. Предполагая, что в каждый последующий год это число будет расти на 2%, определите каким будет население через 8 лет.

Решение.

Обозначим количество жителей города в конце года с номером *n* через x_n, получим уравнение $x_n = (1 – 0{,}04)x_{n-1} + 10000(1 + 0{,}02)^{n-1}$ с начальным условием $x_0 = 150000$.

Поэтому, $x_8 = (0{,}96)^8 \cdot 150000 + 10000\frac{(1{,}02)^8 - (0{,}96)^8}{1{,}02 - 0{,}96}$.

Итак, если предположения оправдаются, через 8 лет в этом городе будут проживать 183253 человек.

4. Для того чтобы разобраться в следующей ситуации, используем самый простой и популярный вариант уравнения (1) — уравнение

$x_n = ax_{n-1} + f$. Понятно, что ее решение есть функция $x_n = a^n x_0 + f\frac{a^n - 1}{a - 1}$, являющаяся частным случаем (3G) при $q = f;\ r = 1$.

Задача 4.

Рассказывают, что некоторое время Ходжа Насреддин работал учителем в школе. В один из дней, он задал своим ученикам на дом следующую задачу.

Волка наняли пасти овец. В итоге, через месяц отара уменьшилась на 40% и еще 6,4 овцы. То же происходило в последующие месяцы. Сколько овец было в начале, если через 5 месяцев осталось 227 овец?

На следующий день в школу пришла группа возмущенных родителей. Они говорили: «Конечно, мы понимаем, что это математическая задача. Но даже в них должен быть какой-то смысл. Как это отара овец может уменьшиться на 6,4 овцы?» В ответ, Насреддин сказал, что все с этой задачей в порядке. И предложил этим родителям следующую сделку: если в задаче ошибка, то он целый год будет работать без оплаты, а если все в порядке, то каждый из них приведет ему по овце.

Как Вы думаете, чем закончилась эта история?

Решение.

На первый взгляд Ходжа не прав: количество овец в отаре всегда целое число – поэтому, числа 6,4 овцы быть не может. Но не будем торопиться, и проведем математический анализ ситуации. Обозначив через x_n количество овец в конце месяца с номером n, получим разностное уравнение $x_n = 0{,}6x_{n-1} - 6{,}4$ и условие $x_5 = 227$.

Далее, разделим уравнение на $(0{,}6)^n$, и введем обозначения

$\frac{x_k}{(0{,}6)^k} = u_k; \ \frac{6{,}4}{(0{,}6)^k} = a(k)$.Тогда, воспользовавшись ЛЕММОЙ, получим:

$$u_5 - u_0 = 6{,}4\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{0{,}6}\right)^k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_5}{(0{,}6)^5} - x_0 = \frac{6{,}4}{0{,}6}\cdot\frac{(1/0{,}6)^5 - 1}{(1/0{,}6) - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x_5 = x_0(0{,}6)^5 + 6{,}4\frac{1-(0{,}6)^5}{1-0{,}6}$$

$$\Leftrightarrow 227 = x_0(0{,}6)^5 + 16(1-(0{,}6)^5 \Leftrightarrow x_0 = 241{,}75584 / 0{,}07776 = 3109 .$$

Итак, из наших вычислений следует, что первоначально в отаре было 3109 овец. Последовательно подставляя значения в уравнение (2), приходим к неожиданному выводу: задача Ходжи Насреддина очень даже правдоподобна, так как в отаре было после

1-го месяца: $x_1 = 0{,}6 \cdot 3109 - 6{,}4 = 1859$ овец

2-го месяца: $x_2 = 0{,}6 \cdot 1859 - 6{,}4 = 1109$ овец,

3-го месяца: $x_3 = 0{,}6 \cdot 1109 - 6{,}4 = 659$ овец,

4-го месяца: $x_4 = 0{,}6 \cdot 659 - 6{,}4 = 389$ овец,

5-го месяца: $x_5 = 0{,}6 \cdot 389 - 6{,}4 = 227$ овец.

5. Продолжим изучать уравнение $x_n = ax_{n-1} + b(n)$.

Задача 5

Темир в конце каждого года добавляет на счет $500, Айдана в конце

1-го года снимает со счета $1000, в каждый последующий год на 5% больше, чем в предыдущий. Сколько денег будет на их совместном счете через 12 лет, если ставка интереса 10%, а в начальный момент времени на счете $5000?

Решение

Обозначим через x_n количество денег на счете в конце года с номером n и переведем задачу на язык математики:

$$x_n = (1 + 0,10)x_{n-1} + 500 – 1000(1 + 0,05)^{n-1};\ x_0 = 5000;\ x_{12} = ?$$

Конечно, можно сказать, что мы не умеем решать такие уравнения. Но это только на первый взгляд. В данном случае, в уравнении $x_n = ax_{n-1} + b(n)$ слагаемое $b(n)$ имеет вид $b_1(n) + b_2(n)$. Повторив выкладки, которые привели к формуле (3), получим, что решение имеет вид

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_1(k) + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_2(k). \tag{3S}$$

Следовательно, решение задачи:

$$x_{12} = (1,1)^{12} 5500 + 500 \frac{(1,1)^{12} - 1}{0,1} - 1000 \frac{(1,1)^{12} - (1,05)^{12}}{1,1 - 1,05} =$$
$$= 17261,36 + 10692,14 - 26851,44 = 1102,06.$$

Следствие

Если в уравнении $x_n = ax_{n-1} + b(n)$ слагаемое $b(n)$ имеет вид

$b_1(n) + b_2(n) + ... + b_m(n)$, решение запишется в виде

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_1(k) + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_2(k) + ... + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_m(k).$$

Итак, решение будет иметь общую часть $a^n x_0$ и слагаемые, определяемые конкретным видом функций $b_j(n)$, составляющих функцию $b(n)$.

6. Рассмотрим более общий вариант задачи из предыдущего раздела.

Задача 6

Настя предлагает модель, согласно которой ВВП страны на 70% определяется ВВП прошлого года. К этому значению добавляются величины инвестиций и экспорта, и вычитается величина импорта. Каким будет ВВП через 5 лет, если исходное ВВП равно 500, по итогам первого года инвестиции равнялись 135, экспорт 45, импорт 42? Предполагается, что ежегодно инвестиции будут расти на 5%, экспорт — на 3%, а величина импорта будет неизменной.

Решение.

Обозначим через Y_n величину валового внутреннего продукта в год с номером n. Тогда,

$$Y_n = 0,70Y_{n-1} + 135(1 + 0,05)^{n-1} + 45(1 + 0,03)^{n-1} - 42;\ Y_0 = 500;\ Y_5 = ?$$

Поэтому, решение задачи:

$$Y_5 = (0,7)^5 500 + 135 \frac{(1,05)^5 - (0,7)^5}{0,35} + 45 \frac{(1,03)^5 - (0,7)^5}{0,33} - 42 \frac{1 - (0,7)^5}{0,3} =$$
$$= 84,035 + 427,453 + 135,164 - 116,47 = 530,2.$$

Заключение

Разностные уравнения являются замечательным инструментом моделирования явлений природы и общественной жизни [4-6]. Их ценность повышается относительной простотой и удобством в использовании. В данной работе рассмотрен ряд задач, при решении которых используются разностные уравнения. Среди них есть, как чисто математические, о вычислении суммы элементов числовой последовательности, так и задачи на применение математики в демографии, экономической теории, … . Надеемся, что особый интерес вызовет история, главным героем которой мы выбрали литературного героя всех тюркских народов Ходжу Насреддина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bailey, D. Mathematics in Economics [Текст] / D. Bailey — McGraw-Hill, Inc, Bercshire, England, 1998. — 485 p.

2. Guterman, M.M., Nitecki, Z.H., Differential Equations. A Fist Course. [Текст]/ M.M. Guterman, Z.H. Nitecki - Philadelphia: Saunders College Publishing, 1988. — 689 p.

3. Томас, Р. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности [Текст] / Р. Томас — М.: ДиС, 1999. — 432с.

4. Sydsaeter K., Hammond P.J. Mathematics for economic analysis. Pearson Education India, 2002. — 800 p.

5. Камчыбеков Т.К., Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б. Основы финансовых и инвестиционных расчетов. – Бишкек: Аркус, 2017. —176 с.

6. Kydyraliev S.K., Urdaletova A.B., Doolotova A.A. Introduction to linear difference equations. Chapter in book Advances in Mathematics Research. Nova Science Publishers. V. 32. USA. 2022. 111-128 pp.

УДК 519.6
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_140

РАСЧЕТ ИЗГИБА МЕМБРАНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Ушаков Андрей Леонидович к.ф.-м.н., доцент,
ushakoval@susu.ru
Еремчук Максим Павлович
et2222emp32@susu.ru
Южно-Уральский государственный университет
Челябинск, Российская Федерация

Аннотация: *Описана задача для экранированного уравнения Пуассона в L-образной области, когда на двух больших сторонах выполняется однородное условие Неймана, а на остальных сторонах области задано однородное условие Дирихле. Предлагается метод итерационных расширений для нахождения приближенного решения задачи. Реализована программа на ЭВМ, вычисляющая массив поля перемещений точек мембраны. Исходными данными являются заданные длины сторон области, значения массива выбираемой правой части экранированного уравнения Пуассона в узлах заданной квадратной сетки и выбираемая точность решения разностного аналога решаемой задачи. В программе реализованы: графическое представление массива поля перемещений точек мембраны и запись результатов в отдельный файл.*

Ключевые слова: *задача Неймана, задача Дирихле, экранированное уравнение Пуассона, метод фиктивных компонент, метод итерационных расширений.*

CALCULATION OF MEMBRANE'S BENDING ON ELASTIC BASE

Ushakov Andrey Leonidovich, Cand. Sc., Associate Professor,
ushakoval@susu.ru
Eremchuk Maksim Pavlovich
et2222emp32@susu.ru
South Ural State University
Chelyabinsk, Russian Federation

Abstract: *Problem for screened Poisson equation in L-shaped domain with homogeneous Neumann boundary condition on larger sides and homogeneous Dirichlet boundary condition on the rest of sides described. Method of iterative extensions for finding an approximate solution proposed. Computer program for calculating an array field of membrane point's movement implemented. Input data are lengths of domain sides, array of right-hand* *values of screened Poisson equation in grid nodes of predetermined size, and accuracy of solution of difference analogue of the problem. Program implements visualization of array field of membrane point's movement and writing this array into file.*

Keywords: *Neumann boundary condition, Dirichlet boundary condition, screened Poisson equation, method of fictitious components, method of iterative extensions.*

1. **Введение (Introduction)** Рассматривается смешанная краевая задача для экранированного уравнения Пуассона в ограниченной области с краевыми условиями Дирихле и Неймана. Проблемы в решении эллиптических уравнений обычно возникают из-за сложной геометрии области, присутствия краевого условия Дирихле и высокого порядка дифференциальных уравнений [1-3]. Для решения поставленной задачи применим метод итерационных расширений, являющийся обобщением метода фиктивных компонент [4-5] и легко реализуемый на ЭВМ. Данный метод является логарифмически оптимальным или оптимальным по количеству арифметических операций, необходимых для достижения заданной относительной погрешности [6-7].

2. **Постановка задачи (Problem formulation)** Пусть задана первая ограниченная плоская область и выбирается вторая ограниченная плоская область.

$$\Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2,\ \omega \in \{1,\ \mathrm{II}\}.$$

Требуется, чтобы пересечение этих областей было пусто, а объединение их замыканий было замыканием прямоугольной области.

$$\Omega_1 \cap \Omega_{\mathrm{II}} = \varnothing,\ \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} = \bar{\Pi}.$$

Граница каждой из трех областей состоит из замыкания объединения двух открытых непересекающихся частей.

$$\partial\Pi = \bar{s},\ s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing.$$

$$\partial\Omega_\omega = \bar{s}_\omega,\ s_\omega = \Gamma_{\omega,1} \cup \Gamma_{\omega,2},\ \Gamma_{\omega,1} \cap \Gamma_{\omega,2} = \varnothing.$$

Полагаем, что пересечение границ первой и второй области является замыканием непустого пересечения первой части границы первой области со второй частью границы второй области.

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{\mathrm{II}} = \bar{S},\ S = \Gamma_{1,1} \cap \Gamma_{\mathrm{II},2} \neq \varnothing.$$

Все рассматриваемые части границ у всех областей являются объединением конечного числа непересекающихся открытых дуг достаточно гладких кривых. Рассматриваются области, границы которых не имеют самопересечений и самокасаний.

Рассмотрим следующие области в прямоугольной системе координат.

$$\Omega_{\text{I}} = (0;b)\times(0;b)\setminus[a;b)\times[a;b),\ \Omega_{\text{II}} = (a;b)\times(a;b),\ \Pi = (0;b)\times(0;b).$$

Первая область по форме является L-образной областью, а вторая область является квадратом.

$$\Gamma_1 = \{b\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{b\},\ \Gamma_2 = \{0\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{0\},$$

$$\Gamma_{\text{I},1} = \{b\}\times(0;a)\cup(0;a)\times\{b\}\cup\{a\}\times(a;b)\cup(a;b)\times\{a\},$$

$$\Gamma_{\text{I},2} = \{0\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{0\},\ \Gamma_{\text{II},1} = \{b\}\times(a;b)\cup(a;b)\times\{b\},$$

$$\Gamma_{\text{II},2} = \{a\}\times(a;b)\cup(a;b)\times\{a\}.$$

В первой области рассматриваем смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона. Во второй области вводим смешанную краевую задачу для однородного экранированного уравнения Пуассона. На первых частях границ областей задаем однородное условие Дирихле. На вторых частях границ областей рассматриваем однородное условие Неймана. Задача на первой области является решаемой задачей. Задачу на второй области рассматриваем в качестве нулевого фиктивного продолжения решаемой задачи. Сформулируем нашу задачу на ранее заданных областях:

$$-\Delta\breve{u}_{\text{I}} + \breve{u}_{\text{I}} = \breve{f}_{\text{I}} \ \text{ в } \ (0;b)\times(0;b)\setminus[a;b)\times[a;b),$$

$$\breve{u}_{\text{I}} = 0 \ \text{ на } \ \{b\}\times(0;a)\cup(0;a)\times\{b\}\cup\{a\}\times(a;b)\cup(a;b)\times\{b\}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\breve{u}_{\text{I}}}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ \{0\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{0\}.$$

Решение задачи – функция перемещения точек L-образной мембраны, расположенной в горизонтальном положении под действием нагрузки определяемой правой частью уравнения.

Необходимо разработать программу для ЭВМ, вычисляющую приближенное решение описанной задачи. Входными данными для программы являются длины сторон областей, размер квадратной сетки, значения массива выбираемой правой части экранированного уравнения Пуассона в узлах сетки и точность решения. Результатом выполнения программы должен быть массив поля перемещений точек мембраны. Должно быть реализовано графическое представление массива решения и возможность записи результатов в отдельный файл.

3. **Метод итерационных расширений (Method of iterative extensions)** Рассмотрим решаемую задачу (1) в матричной форме. Аппроксимируя задачу в конечномерном

подпространстве, получим систему алгебраических уравнений.

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N : B\bar{u} = \bar{f},\ \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Для решения задачи (2) применим метод итерационных расширений как обобщение метода фиктивных компонент в матричной форме.

$$\langle A_I\bar{u},\bar{v}\rangle = A_I(\tilde{u},\tilde{v}),\ \langle A_{II}\bar{u},\bar{v}\rangle = A_{II}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Введённые матрицы имеют определённую структуру.

$$A_I = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Определим расширенную матрицу, как сумму первой матрицы и второй матрицы, умноженной на положительный параметр.

$$C = A_I + \gamma A_{I,} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \gamma \in (0;+\infty).$$

Тогда итеративный процесс будем иметь вид:

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C\left(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}\right) = -\tau_{k-1}\left(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}\right), k \in \mathbb{N},$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1, \tau_0 = 1, \tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle / \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{3}$$

Для нахождения итерационных параметров необходимо найти невязку, поправку и эквивалентную невязку.

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ \eta^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Для метода итерационных расширений (3) выполняется неравенство:

$$\left\|\bar{u}^1 - \bar{u}\right\|_{C^2} \le 2\left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{C^2}.$$

Подробнее распишем алгоритм решения задачи (2). В нашей квадратной области и на опоясывающей полосе введем сетку с узлами и будем представлять правую часть уравнения (2) в виде сеточной функции.

$$(x_i; y_j) = \left((i-1,5)h; (j-1,5)h\right),\ h = 2,5/(n-1,5),\ n = 5m-1,\ m \in \mathbb{N},$$

$$\bar{f}_{i,j} = \bar{f}(x_i; y_j) \in \mathbb{R},\ i = 1,2...,n,\ j = 1,2...,n.$$

1) Вычисляем величину квадрата нормы начальной абсолютной ошибки, которая

сохраняется в течение всех вычислений.

$$\mathrm{E}_0 = (\overline{f}, \overline{f})h^2.$$

2) Находим первое приближение.

$$\overline{u}^1 \in \mathbb{R}^N : A\overline{u}^1 = \overline{f}.$$

3) Вычисляем невязку.

$$\overline{r}^{k-1} = B\overline{u}^{k-1} - \overline{f} = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{u}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

4) Вычисляем очередную величину квадрата нормы абсолютной ошибки.

$$\mathrm{E}_{k-1} = (\overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1})h^2,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

5) Находим поправку.

$$\overline{w}^{k-1} \in \mathbb{R}^N : A\overline{w}^{k-1} = \overline{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

6) Вычисляем эквивалентную невязку.

$$\overline{\eta}^{k-1} = B\overline{w}^{k-1} = A_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

7) Вычисляем итерационный параметр.

$$\tau_{k-1} = (\overline{r}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1}) \big/ (\overline{\eta}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

8) Находим новое приближение.

$$\overline{u}^k = \overline{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\overline{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

9) Проверяем условие остановки итераций.

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}^2\mathrm{E}_0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \mathrm{E} \in (0;\, 1).$$

Если условие остановки итераций не достигается, то все повторяем с пункта 3.

4. **Пример применения запрограммированного метода итерационных расширений (Example of applying of programmed method of iterative extensions)** Приводится пример решения задачи (1) для следующей области:

$$\Gamma_1 = \{2{,}5\} \times (0; 2{,}5) \cup (0; 2{,}5) \times \{2{,}5\},\ \Gamma_2 = \{0\} \times (0; 2{,}5) \cup (0; 2{,}5) \times \{0\},$$

$$\Gamma_{1,1} = \{2{,}5\} \times (0; 1{,}5) \cup (0; 1{,}5) \times \{2{,}5\} \cup \{1{,}5\} \times (1{,}5; 2{,}5) \cup (1{,}5; 2{,}5) \times \{1{,}5\},$$

$$\Gamma_{1,2} = \{0\} \times (0; 2{,}5) \cup (0; 2{,}5) \times \{0\},\ \Gamma_{\mathrm{II},1} = \{2{,}5\} \times (1{,}5; 2{,}5) \cup (1{,}5; 2{,}5) \times \{2{,}5\},$$

$$\Gamma_{\text{II},2} = \{1,5\} \times (1,5;2,5) \cup (1,5;2,5) \times \{1,5\}.$$

Вводится функция, определяющая нагрузку на мембрану, и функция, являющаяся искомым решением, которую мы будем использовать для подтверждения применимости предложенного метода.

$$\breve{f}_1 = ((392-384x)(64y^3-196y^2+225)+(64x^3-196x^2+225)(392-384y))/184^2 +$$

$$+(64x^3-196x^2+225)(64y^3-196y^2+225)/184^2,$$

$$\breve{u}_1 = (64x^3-196x^2+225)(64y^3-196y^2+225)/184^2.$$

Найденное последнее приближение к решению при $n=254$ отобразим на графике вместе с решением (см. рис. 1).

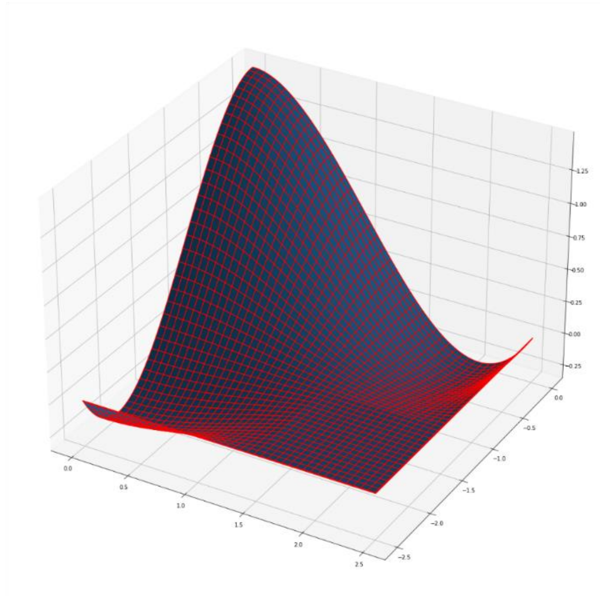


Рис. 1. График решения и последнего приближения

Теперь вычислим величину максимальной ошибки на самой мелкой сетке при $n=502$

$$\varepsilon = \frac{\max\limits_{2\le i,j\le n-1}\left|u_{i,j}^k - \breve{u}_{i,j}\right|}{\max\limits_{2\le i,j\le n-1}\left|\breve{u}_{i,j}\right|} = 0,00021.$$

Построим график функции количества итераций в итерационном процессе в зависимости от числа узлов по направлениям осей (см. рис. 2).

$$k = k(n),\ n = 4,\ 54,\ 104,\ 154,\ 204,\ 254.$$

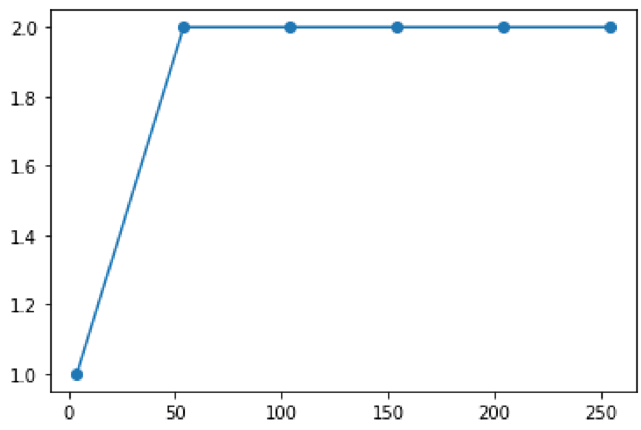


Рис. 2. Зависимость количества итераций от количества узлов

5. **Заключение (Conclusion)** Реализованную программу на ЭВМ для приближенного решения экранированного уравнения Пуассона с заданной точностью на L-образной области можно применять для расчета изгиба мембраны на упругом основании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aubin J.-P. Approximation of elliptic boundary-value problems / J.-P. Aubin // New York: Wiley-Interscience, 1972. – 360 p.

2. Ushakov A.L. Investigation of a mixed boundary value problem for Poisson equation / A.L. Ushakov // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia. – 2020. – P. 273-278.

3. Ушаков А.Л. Анализ смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2021. – Т. 13, №1. – С. 29-40.

4. Мацокин А.М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 1993. – Т. 33, № 1. – С. 52-68.

5. Marchuk G.I. Fictitiois Domain and Domain Decomposition Methods / G.I. Marchuk, Yu.A. Kuznetsov, A.M. Matsokin // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. – 1986. – Vol. 1, Iss. 1. – P. 3-35.

6. Ушаков А.Л. О моделировании деформаций пластин / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 138-142.

7. Ушаков А.Л. Асимптотически оптимальное решение модельной задачи для экранированного уравнения Пауссона / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2019. – Т. 11, №2. – С. 25-35.

УДК 517.956
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_147

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Хасанов А.Х, д.ф.-м.н., профессор,
anvarhasanov@yahoo.com,
Рашидов С.Г, аспирант,
sardorrashidov1995@mail.ru
Институт математики, Ташкент, Узбекистан

Автомодельные решения дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка играют важную роль при исследовании краевых задач, а автомодельное решения сингулярных уравнений выражаются через специальные функции [1-7].

В этом докладе рассматривается вырождающиеся параболическое уравнение

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+\frac{1}{x}u_x(x,t)-\frac{\nu^2}{x^2}u(x,t),\ \nu=const, \tag{1}$$

в области $\Omega=\{(x,t):-\infty<x<+\infty, t>0\}$.

Для уравнения (1) построены следующие автомодельное решения.

$$u_1(x,t)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\upsilon} t^{-\left(1+\frac{\upsilon}{2}\right)}\,{}_1F_1\left(\upsilon+1;1+\frac{\upsilon}{2};-\frac{x^2}{4t}\right), \tag{2}$$

$$u_2(x,t)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\upsilon} t^{-\left(1+\frac{\upsilon}{2}\right)}\left(-\frac{x^2}{4t}\right)^{-\upsilon}\,{}_1F_1\left(-\frac{\upsilon}{2};1-\upsilon;-\frac{x^2}{4t}\right), \tag{3}$$

где $I_\nu(z)$ - функция Бесселя мнимого аргумента [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Баренблатт. Подобие, Автомодельность, Промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1982, 255 стр.

2. О.А. Фроловская. Автомодельные решения нестационарных пограничных слоев. Прикладная механика и теоретическая физика. 2002. т.43,N 1, 65-70.
3. Ю.Ю. Тарасевич.Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple. Методические рекомендации. Астрахань, 2010. 23 стр.
4. А.Д.Полянин, В.Ф.Зайцев. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М: Физматлит, 2002, 432 с.
5. A. Hasanov and N. Djuraev. Exact Solutions of the Thin Beam with Degrading Hysteresis Behavior. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 3, pp. 577–584.
6. A. Hasanov and M. Ruzhansky. Hypergeometric Expansions of Solutions of the Degenerating Model Parabolic Equations of the Third Order. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 1, pp. 27–31.
7. M. Ruzhansky and A. Hasanov. Self-similar Solutions of Some Model Degenerate Partial Differential Equations of the Second, Third and Fourth Order. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 6, pp. 1103–1114.
8. A. Erd´elyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Vol. 2, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London, 1953.

УДК 517.588
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_149

ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Эргашев Тухтасин Гуламжанович, д.ф.-м.н., профессор,
ergashev.tukhtasin@gmail.com
Национальный исследовательский университет «ТИИИМСХ»,
Ташкент, Узбекистан
Арзикулов Зафаржон Одилович, ст.преподаватель,
zafarbekarziqulov1984@mail.ru
Ферганский политехнический институт,
Фергана, Узбекистан
Холмирзаев Мамиржон Ахунжанович, ст.преподаватель,
mamirjonkholmirzayev@gmail.com
Al Fraganus University (негосударственное ВУЗ),
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *Как известно, гипергеометрическая функция Гаусса одного переменного досконально подробно исследована во всех отношениях. Поэтому при изучении свойств гипергеометрических функций многих переменных большое значение имеют формулы разложения, позволяющие представить функцию многих переменных в виде бесконечной суммы произведений нескольких гипергеометрических функций Гаусса, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных. В литературе известны 34 гипергеометрические функции двух переменных 2-го порядка (список Горна) и для 11 из них в 1940-1941 гг. Берчнелл и Ченди получили более 15 пар разложений с помощью символического метода. Известная формула Пула сыграла важную роль в исследованиях Берчналла и Ченди, но одной этой формулы было недостаточно для разложения всех функций из списка Горна. Поэтому до недавнего времени другие гипергеометрические функции Горна от двух переменных оставались неразложенными. В статье вводятся новые символические операторы типа Берчналла-Ченди, изучаются их свойства и устанавливаются разложения для 5-ти гипергеометрических функций из списка Горна. Показано приложение одной из формул разложения к теории построения фундаментальных решений сингулярных эллиптических уравнений.*

Ключевые слова: гипергеометрические функции двух переменных, список Горна, конфлюэнтная

гипергеометрическая функция, формула разложения, символические операторы типа Берчнелла-Ченди.

EXPANSION FORMULAS FOR DOUBLE HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND ITS APPLICATION TO THE THEORY OF SINGULAR ELLIPTIC EQUATIONS

Ergashev Tuhtasin, Dr Sc, professor,
ergashev.tukhtasin@gmail.com
National Research University "TIIAME",
Tashkent, Uzbekistan
Arzikulov Zafarjon, teacher,
zafarbekarziqulov1984@mail.ru
Fergana Polytechnic Institute,
Tashkent, Uzbekistan
Khalmirzayev Mamirjan, teacher,
mamirjonkholmirzayev@gmail.com
Al-Fraganus University, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *It is known that the Gaussian hypergeometric function of one variable has been thoroughly investigated in all respects. Therefore, when studying the properties of hypergeometric functions of many variables, expansion formulas are very important, which make it possible to represent a function of many variables in the form of an infinite sum of products of several hypergeometric Gauss functions, and this, in turn, facilitates the process of studying the properties of functions of many variables. In the literature, 34 hypergeometric functions of two variables of order 2 (Horn List) are known, and for 11 of them in 1940-1941. Burchnall and Chaundy obtained more than 15 pairs of expansions using the symbolic method. The well-known Poole formula played an important role in the studies of Burchnall and Chaundy, but this one formula was not enough for the expansion of all functions from the Horn list. Therefore, until recently, other Horn hypergeometric functions of two variables remained undecomposed. In this paper, new symbolic operators of Burchnall-Chaundy type are introduced, their properties are studied, and an expansion for 5 Horn hypergeometric functions is established. An application of the new expansion formula to the theory of constructing fundamental solutions for singular elliptic equations is shown.*

Keywords*: double hypergeometric functions, Horn list, confluent hypergeometric function, expansion formula, symbolic operators of Burchnall-Chaundy type.*

1. Введение

Теория специальных функций, как область математического анализа, посвященная исследованию и применению высших трансцендентных функций, имеет давнюю историю и богатое содержание, обусловленное проникновением и взаимосвязями с самыми разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и других разделов математики.

Гипергеометрическая функция Гаусса представима следующим рядом [1, стр.69]

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1,$$

где a, b, c не зависят от z и они могут быть любыми комплексными числами, причем $c\neq 0,-1,-2,...$. Здесь $(\nu)_n$ – символ Похгаммера:

$$(\nu)_0:=1,\ (\nu)_n:=\nu(\nu+1)...(\nu+n-1)=\frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)}$$

а $\Gamma(z)$ – известная гамма-функция.

Большие успехи, достигнутые в теории гипергеометрической функции одного переменного, стимулировали развитие соответствующих теорий для функций от двух или многих переменных. В 1889 г. Горн[2] установил, что существуют 34 существенно различных сходящихся ряда двух переменных порядка 2, и выделил их на полные *(complete)* и конфлюэнтные *(confluent)* ряды.

Для исследования гипергеометрической функции двух переменных очень важны формулы разложения, которые позволяют представить гипергеометрическую функцию двух переменных через бесконечную сумму произведений двух гипергеометрических функций одного переменного, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций двух переменных.

С целью нахождения формул разложения для гипергеометрических функций двух переменных, впервые Берчнелл и Ченди ввели операторы [3]

$$\nabla(h)=\frac{\Gamma(h)\Gamma(h+\delta+\sigma)}{\Gamma(h+\delta)\Gamma(h+\sigma)},\tag{1}$$

$$\Delta(h)=\frac{\Gamma(\delta+h)\Gamma(\sigma+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\delta+\sigma+h)},\tag{2}$$

где

$$\delta\equiv x\frac{\partial}{\partial x},\quad \sigma\equiv y\frac{\partial}{\partial y},\tag{3}$$

а $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

С помощью символических операторов (1) и (2) Берчнелл и Ченди получили значительное число разложений [3,4], содержащих гипергеометрические функции из списка Горна.

Отметим, что в работе [5], благодаря, именно, одной из формул разложения Берчнелла-Ченди, удалось выписать в явном виде решение задачи Хольмгрена для одного многомерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами. Кроме того, формулы разложения Берчнелла-Ченди применяются в теории потенциала [6–9] и решении краевых задач [10] для сингулярных эллиптических уравнений.

В исследованиях Берчнелла и Ченди важную роль играла известная формула Пула (Poole) [11, стр.26]

$$(-\delta)_n f(x) = (-x)^n f^{(n)}(x), \quad n = 0,1,2,..., \tag{4}$$

однако для разложения всех функций из списка Горна этой одной формулы было недостаточно. Поэтому до недавнего времени остались не разложенными многие гипергеометрические функции двух переменных из списка Горна.

В настоящей работе введем в рассмотрение символические операторы типа Берчнелла-Ченди, с помощью которых удаётся найти формулы разложения для одной конфлюэнтной гипергеометрической функции двух переменных, а также покажем применение полученной формулы разложения.

2. Обобщенные операторы Берчнелла-Ченди и их применения

Введем в рассмотрение следующие обобщенные операторы Берчнелла-Ченди:

$$\tilde{\nabla}_{\alpha x;\beta y}(h) := \frac{\Gamma(h)\Gamma(h+\alpha\delta+\beta\sigma)}{\Gamma(h+\alpha\delta)\Gamma(h+\beta\sigma)}, \tag{5}$$

$$\tilde{\Delta}_{\alpha x;\beta y}(h) := \frac{\Gamma(\alpha\delta+h)\Gamma(\beta\sigma+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\alpha\delta+\beta\sigma+h)}, \tag{6}$$

где α и β – целые числа, отличные от нуля, т.е. $\alpha, \beta = \pm1, \pm2, ...$, а δ и σ – выражения, определенные в (3).

Нетрудно заметить, что в случае $\alpha = \beta = 1$ операторы, определенные равенствами (5) и (6), совпадают с операторами Берчнелла-Ченди (1) и (2), соответственно.

Чтобы показать применение обобщенных операторов (5) и (6), возьмем следующую конфлюэнтную гипергеометрическую функцию [1, стр.221]

$$\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m-n}(b)_m}{(d)_m\, m!n!} x^m y^n, \ |x|<1. \tag{9}$$

Действительно, подействовав оператором (5), получим

$$\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right)=\tilde{\nabla}_{x,-y}\left(a\right)F\left(a,b;d;x\right){}_0F_1(1-a;-y), \tag{10}$$

где ${}_pF_q$ – обобщенная гипергеометрия функция, определяемая равенством [1, стр.183]

$${}_pF_q\begin{bmatrix} a_1,...,a_p;z \\ b_1,...,b_q \end{bmatrix}={}_pF_q(a_r;b_t;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n...\left(b_q\right)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

Подействовав оператором (6), из отношений (12) – (16) получим, так называемые, обратные операторные формы

$$F\left(a,b;d;x\right)\ {}_0F_1(1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{x,-y}\left(a\right)\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right), \tag{11}$$

Операторные формы (12) – (21) используются для нахождения разложений гипергеометрических функций двух переменных по произведениям обычных гипергеометрических функций и обратно.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Если* $f(x)$ *– произвольная бесконечно раз дифференцируемая функция, то при любых неотрицательных целых* m *и* n *справедливы следующие равенства:*

$$\left(-\delta\right)_m\left(-\delta\right)_n f(x)=\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}(-n)_{m-p}\left(-x\right)^{n+p} f^{(n+p)}(x), \tag{12}$$

$$\left(\delta\right)_m\left(-\delta\right)_n f(x)=\left(-1\right)^n\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}(n+p)_{m-p}x^{n+p}f^{(n+p)}(x), \tag{13}$$

где $\binom{k}{m}=\dfrac{k!}{m!(k-m)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Доказательство. Справедливость равенств (22) и (23) доказывается методом математической индукции по m.

Заметим, что при $m=0$ равенства (22) и (23) совпадают с известной формулой Пула (4).

Применим лемму 1 к нахождению формул разложения для гипергеометрических функций двух переменных. Рассмотрим более подробно операторную форму (12). По определению (5), имеем

$$\tilde{\nabla}_{x;-y}\left(a\right):=\frac{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(a+\delta-\sigma\right)}{\Gamma\left(a+\delta\right)\Gamma\left(a-\sigma\right)}, \tag{14}$$

$$\tilde{\nabla}_{x;y}\left(b\right):=\frac{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(b+\delta+\sigma\right)}{\Gamma\left(b+\delta\right)\Gamma\left(b+\sigma\right)}. \tag{15}$$

В силу известной формулы Гаусса [1, стр.73]

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\quad \left[Re(c-a-b)>0,\quad c\neq 0,-1,...\right], \tag{16}$$

правые части равенств (24) и (25) можно представить в виде бесконечных сумм:

$$\tilde{\nabla}_{x;-y}\left(a\right):=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\delta)_m(\sigma)_m}{m!(a)_m}, \tag{17}$$

$$\tilde{\nabla}_{x;y}\left(b\right):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\delta)_n(-\sigma)_n}{n!(b)_n}. \tag{18}$$

С учетом равенств (27) и (28) операторная форма (12) принимает вид

$$\mathrm{H}_1\left(a,b;d;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-\delta)_m(\sigma)_m(-\delta)_n(-\sigma)_n}{m!n!(a)_m(b)_n}F\left(a,b;d;x\right){}_1F_1\left(b;1-a;-y\right). \tag{19}$$

Теперь подставив готовые формулы (22) и (23) из леммы 1 в (29) и используя легко проверяюмую формулу (см. формулу Пула (4))

$$(-\delta)_n F(a,b;c;x)=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\left(-x\right)^n F(a+n,b+n;c+n;x),$$

окончательно получим разложение для $\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right)$ в виде

$$\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}\left(b\right)_m}{m!\left(d\right)_m}(-x)^m F\left(a+m,b+m;d+m;x\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\left(1-a\right)_k}(-y)^k{}_0F_1(1-a+k;-y), \tag{20}$$

Используя обратные операторные формы (17) – (21), наряду с (30) – (34), получаем формулы обратного разложения:

$$F\left(a,b;d;x\right){}_0F_1(1-a;y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}(a)_{k-m}(b)_k}{m!(1-a)_m(d)_k}\times$$

$$\times x^k y^m \mathrm{H}_3\left(a-m+k,b+k;d+k;x,-y\right), \tag{21}$$

Разложения от (30) до (39) могут быть доказаны без использования символических методов, путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x и y в обеих частях.

3. Применение формулы разложения для $\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right)$.

Формула разложения (32) имеет важные приложения. Например, в работе [12] формула разложения (32) дала возможность выписать решение поставленной задачи в явном виде. Более подробно остановимся в другом приложении формулы (32).

Рассмотрим сингулярное уравнение Гельмгольца

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_{x_k x_k} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y - \lambda^2 u = 0 \qquad (22)$$

в полупространстве $y > 0$, где $n \geq 2$ – размерность пространства, β – действительное число, причем $0 < 2\beta < 1$, а λ – действительное или чисто мнимое постоянное.

Фундаментальные решения уравнения (40) найдены в [13]:

$$q_1(x, y; \xi, \eta) = \gamma_1 r^{2-n-2\beta} \mathrm{H}_3\left(\frac{n-2}{2} + \beta,\ \beta;\ 2\beta; \theta, \mu\right), \qquad (23)$$

$$q_2(x, y; \xi, \eta) = \gamma_2 r^{-n+2\beta} y^{1-2\beta} \eta^{1-2\beta} \mathrm{H}_3\left(\frac{n}{2} - \beta, 1-\beta; 2-2\beta; \theta, \mu\right), \qquad (24)$$

где

$$\gamma_1 = 2^{2\beta-2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2} + \beta\right)\Gamma(\beta)}{\pi^{n/2}\Gamma(2\beta)}, \quad \gamma_2 = 2^{-2\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \beta\right)\Gamma(1-\beta)}{\pi^{n/2}\Gamma(2-2\beta)},$$

$$x := (x_1, ..., x_{n-1}),\ \xi := (\xi_1, ..., \xi_{n-1});\quad \theta = 1 - \frac{r_1^2}{r^2} = -\frac{4y\eta}{r^2},\quad \mu = -\frac{\lambda^2}{4} r^2,$$

$$r^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - \xi_k)^2 + (y-\eta)^2,\ r_1^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - \xi_k)^2 + (y+\eta)^2;\quad n \geq 2.$$

Определим порядок особенности фундаментального решения $q_1(x, y; \xi, \eta)$ при $r \to 0$. Для определенности положим $n > 2$ (в случае $n = 2$ фундаментальные решения $q_1(x, y; \xi, \eta)$ и $q_2(x, y; \xi, \eta)$ при $r \to 0$ имеют логарифмическую особенность [14, стр.41]). Последовательно воспользовавшись формулой разложения (32) и известной формулой Больца [1, стр.113]

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right),$$

получим

$$q_1(x, y; \xi, \eta) = r^{2-n} \tilde{q}_1(x, y; \xi, \eta), \qquad (25)$$

где

$$\tilde{q}_1(x, y; \xi, \eta) = \gamma_1 r_1^{-2\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^m (k)_{m-k} (\beta)_m}{m!(2\beta)_m (2-\beta-n)_k} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right)^m \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2k} \times$$

$$\times F\left(1 + \beta - \frac{n}{2}, \beta + m; 2\beta + m; 1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right) {}_0F_1\left(2 - \beta - \frac{n}{2} + k; \frac{\lambda^2}{4} r^2\right).$$

Покажем, что функция $\tilde{q}_1(x,y;\xi,\eta)$ есть ограниченная величина при $r \to 0$. Действительно, переходя к пределу при $r \to 0$ в $\tilde{q}_1(x,y;\xi,\eta)$, с учетом выражения для коэффициента γ_1 и формулы Гаусса (26), получим

$$\lim_{r\to 0}\tilde{q}_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)y^{-\beta},\ \ n>2,\ \ y>0.$$

Таким образом, в силу равенства (43) заключаем, что фундаментальное решение $q_1(x,y;\xi,\eta)$ уравнения (40), определенное формулой (41), имеет особенность порядка r^{2-n} $(n>2)$ при $r \to 0$.

Аналогично доказывается, что второе фундаментальное решение $q_2(x,y;\xi,\eta)$ уравнения (40), определенное равенством (42), также имеет особенность порядка r^{2-n} $(n>2)$ при $r \to 0$.

Отметим, что в работе [13] авторы другим путем [15] установили порядок особенности фундаментальных решений уравнения (40). Нам кажется интересным определить порядок особенности данных фундаментальных решений, используя новую формулу разложения (32) для конфлюэнтной гипергеометрической функции $\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y)$.

4. Заключение

В заключении отметим, что в 1940-41 гг. Берчнелл и Ченди, в пределах действия известного соотношения Пула, нашли формулы разложения для некоторого класса гипергеометрических функций двух переменных из списка Горна. В настоящей работе доказаны обобщенные формулы Пула, которые позволили разложить конфлюэнтные гипергеометрические функции H_1 - H_5 в виде бесконечной суммы произведений двух гипергеометрических функций одного переменного. Кроме того, приведены приложения формулы разложения, доказанной для конфлюэнтной гипергеометрической функции двух переменных $\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. /Г.Бейтмен, А.Эрдейи. – М.: Наука, 1973. 296 с.

2. Horn J. Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen

// Math.Ann. 1889. No.34. P. 544 – 600.

3. Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell’s double hypergeometric functions // The Quarterly Journal of Mathematics (Oxford). 1940. Ser.11. P. 249–270.

4. Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell’s double hypergeometric functions(II) // The Quarterly J. of Mathematics, Oxford. 1941. Ser.12. P. 112 - 128.

5. Эргашев Т.Г., Комилова Н.Д. Задача Хольмгрена для многомерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. №63. С. 47–59. DOI: 10.17223/19988621/63/5.

6. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Sohag J.Math. 2015. V.2(1). P.1–10.

7. Berdyshev A.S, Hasanov A., Ergashev T.G. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation.II // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. V. 65(2). P.316–332.

8. Эргашев Т.Г. Третий потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметричес-кого уравнения Гельмгольца // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10. Вып. 4. С.111–122.

9. Эргашев Т.Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двуосе-симметрического уравнения Гельмгольца // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. №50. С.45–56.

10. Karimov E.T., Nieto J.J. The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients // Computers and Mathematics with Applications. 2011. 62. P. 214–224. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.04.068.

11. Poole E. G. Introduction to the Theory of Linear Differential Equations./E.G.Poole. – Oxford, Clarendon (Oxford University) Press, 1936.

12. Эргашев Т.Г., Сафарбаева Н.М.. Задача Хольмгрена для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. 62. С. 55–67.

13. Mavlyaviev R.M., Garipov I.B. Fundamental solution of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation // Complex variables and elliptic equations. 2016. No.62. P.287–296.

14. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения: /М.М.Смирнов. – М.: Наука, 1966. 292 с.

15. Киприянов И.А., Кононенко В.И. Фундаментальные уравнения B-эллиптических уравнений. Дифференциальные уравнения. 1967, Т.3, №1. С.114 –129.

УДК 517.957
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_158

ON THE BLOWING-UP OF SOLUTIONS OF ONE DEGENERATE CROSS-WISE SYSTEM WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

Aripov Mersaid Mirsiddikovich, Dr., Professor
mirsaidaripov@mail.ru
National University of Uzbekistan
Tashkent, Uzbekistan
Atabaev Odiljon Xusniddin o‘g‘li, PhD Student
odiljonatabaev@gmail.com
Andijan State University
Andijan, Uzbekistan

Abstract: *This paper is devoted to the cross-wise system of nonlinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions. Standard equation’s method used in order to obtain critical global existence curve for the problem. Self-similar subsolutions constructed to show the blowing-up of solutions in finite time.*

Keywords: *cross-wise system, blow-up solution, nonlinear boundary condition, global existence, critical exponent.*

О НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ КРЕСТ-НАКРЕСТ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Арипов Мерсаид Мирсиддикович, д.ф.-м.н., профессор
mirsaidaripov@mail.ru
Национальный Университет Узбекистана
Ташкент, Узбекистан
Атабаев Одилжон Хусниддин угли, базовый докторант
odiljonatabaev@gmail.com
Андижанский Государственный Университет
Андижан, Узбекистан

Аннотация: *Данная работа посвящена крест-накрест системе нелинейных параболических уравнений с нелинейными граничными условиями. Использовано метод стандартного уравнения для получения критического кривого глобального существования решения. Построены автомодельные субрешения для демонстрации неограниченных решений за конечное время.*

Ключевые слова: *крестообразная система, решение с разрушением, нелинейное граничное условие, глобальное существование, критический показатель.*

Consider the following cross-wise system

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = v^{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{m_1-1}\left|\frac{\partial u^{k_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial v}{\partial t} = u^{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v^{m_2-1}\left|\frac{\partial v^{k_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{gathered} \tag{1}$$

with nonlinear boundary

$$\begin{gathered}-u^{m_1-1}\left|\frac{\partial u^{k_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = v^{q_1}(0,t)\\ -v^{m_2-1}\left|\frac{\partial v^{k_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=0} = u^{q_2}(0,t)\end{gathered} \tag{2}$$

and initial conditions

$$\begin{gathered}u(x,0)=u_0(x)\\ v(x,0)=v_0(x)\end{gathered} \tag{3}$$

where parameters $0<\alpha_i<1$, $m_i>1$, $k_i>1$, $p_i>2$, $q_i>0$ $(i=1,2)$ and u_0, v_0 are nonnegative continuous functions with compact support in R_+.

This system has been proposed as a mathematical model for a variety of physical problems, for example, this system can be used to describe the development of multiple groups in the dynamics of biological groups, where u and v are the densities of different groups [1],[6]-[8].

In some cases, this system is closer to real-world conditions that the classical divergent form of the system. For instance, for biological species, divergent distribution means that the species can move to all locations within its environment with equal probability. However, if we consider this problem with objective conditions, population density will affect the propagation rate. Therefore, a kind of diffusion equation will be more realistic. For this type of diffusion, propagation rate is governed by population density, which increases for large populations and decreases for small populations equation [9]-[10].

Aripov and Rakhmonov [5] considered the problem

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\right),\quad (x,t)\in R_+\times(0,+\infty)$$

$$-\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}(0,t)=u^q(0,t),\quad t\in(0,+\infty)$$

$$u(0,x)=u_0(x),\quad x\in R_+$$

where $\rho(x)=(1+x)^n$, $m>0$, $1<p<1+1/m$, $q>0$, $n\in R$. For the critical case critical exponents of the global existence and Fujita type of solutions are obtained as $q_0=\dfrac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n}$, $q_c=m(p-1)+\dfrac{p-1}{n+1}$ by application of the self-similar solution of the form

$$u(x,t)=e^{Lt}g(\xi),\quad g(\xi)=\left(K+e^{-M\xi^{\frac{p+n}{p-1}}}\right)^{\frac{1}{m}},\quad \xi=(1+x)e^{Jt}.$$

The leading term of the asymptotic behaviour of self-similar solutions of the problem is obtained. On the basis of the asymptotic of solutions, suitable initial approximations are offered for the iterative process in the case of fast diffusion, depending on the values of the numeric parameters.

Positive solutions of degenerate and strongly coupled quasilinear parabolic system

$$\begin{aligned} u_t&=v^{\alpha}\Delta u+u\left(a_1-b_1u^l+c_1v^s\right)\\ v_t&=u^{\beta}\Delta v+v\left(a_2-b_2v^p+c_2v^q\right)\end{aligned}$$

with null Dirichlet boundary condition describing a cooperating model with crosswise diffusion, where the constants $a_i,b_i,c_i>0$ ($i=1,2$), $\alpha,\beta\geq 0$ and $l,s,p,q\geq 1$ studied in [3]. Local existence of positive classical solution is proved. Moreover, it will be proved that the solution is global if intra-specific competitions of the species are strong, whereas the solution may be non-global if the inter-specific cooperation is strong and $0<\alpha\leq s$, $0<\beta\leq p$ with $\alpha,\beta\leq 2$.

In [2] following non-linear degenerate parabolic system with Dirichlet boundary condition is studied

$$u_t = v^{\alpha_1}\left(u_{xx} + au\right)$$
$$v_t = u^{\alpha_2}\left(v_{xx} + bv\right)$$

The regularization method and the upper and lower solution technique are used to show the local existence of a solution for a non-linear degenerate parabolic system. The existence of a global solution is discussed, the blow-up property of the solution is set.

The work of the authors Chen Botao, Mi Yongsheng, Mu Chunlai [4] is devoted to the study of conditions for global solvability and nonsolvability in time of solutions to the following problem

$$u_t = \left(|u_x|^{p_1}\left(u^{m_1}\right)_x\right)_x, \quad v_t = \left(|v_x|^{p_2}\left(v^{m_2}\right)_x\right)_x, \quad x > 0,\ 0 < t < T,$$
$$-|u_x|^{p_1}\left(u^{m_1}\right)_x(0,t) = u^{\alpha_1}(0,t)v^{\beta_2}(0,t), \quad 0 < t < T,$$
$$-|v_x|^{p_2}\left(v^{m_2}\right)_x(0,t) = u^{\alpha_2}(0,t)v^{\beta_1}(0,t), \quad 0 < t < T,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x > 0$$

where $m_i \geq 1$, $p_i > 0$, $q_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$. Critical exponents were obtained for problem.

Motivated by the above mentioned works, the aim of this paper is to construct the self-similar subsolutions to show the blow-up in finite time solutions of the problem (1)-(3).

We need the following notation

$$s_1 = m_1 + k_1(p_1 - 2), \ \ s_2 = m_2 + k_2(p_2 - 2),$$

$$\gamma_1 = \frac{(p_2 - 1)(p_1 q_1 + \alpha_1(p_1 - 1)) + (p_1 - 1)(s_2 + p_2 - 1)}{(p_1 q_1 + \alpha_1(p_1 - 1))(p_2 q_2 + \alpha_2(p_2 - 1)) - (s_1 + p_1 - 1)(s_2 + p_2 - 1)},$$

$$\gamma_2 = \frac{(p_1 - 1)(p_2 q_2 + \alpha_2(p_2 - 1)) + (p_2 - 1)(s_1 + p_1 - 1)}{(p_1 q_1 + \alpha_1(p_1 - 1))(p_2 q_2 + \alpha_2(p_2 - 1)) - (s_1 + p_1 - 1)(s_2 + p_2 - 1)},$$

$$\sigma_1 = \frac{\gamma_2 q_1 - \gamma_1 s_1}{p_1 - 1}, \ \ \sigma_2 = \frac{\gamma_1 q_2 - \gamma_2 s_2}{p_2 - 1}.$$

Theorem. *Let*

$$\min\left\{\frac{\alpha_1(p_2 - 1) - (p_1 - 1)(s_2 - 1)}{\alpha_1\alpha_2 - (s_1 - 1)(s_2 - 1)}, \frac{\alpha_2(p_1 - 1) - (p_2 - 1)(s_1 - 1)}{\alpha_1\alpha_2 - (s_1 - 1)(s_2 - 1)}\right\} > 0.$$

If $\left(p_1q_1+\alpha_1\left(p_1-1\right)\right)\left(p_2q_2+\alpha_2\left(p_2-1\right)\right)>\left(s_1+p_1-1\right)\left(s_2+p_2-1\right)$ *then the system (1)-(3) has a solution that blows-up in finite time.*

Proof. To prove the nonexistence of global solutions, we construct a blow-up self-similar solution of the system. Construct

$$\begin{aligned}\underline{u}(x,t)&=(T-t)^{-\gamma_1}\, f_1(\xi_1), \quad \xi_1=x(T-t)^{-\sigma_1}\\ \underline{v}(x,t)&=(T-t)^{-\gamma_2}\, f_2(\xi_2), \quad \xi_2=x(T-t)^{-\sigma_2}\end{aligned}, \tag{4}$$

where T is a positive constant and f_1, f_2 are two compactly supported functions to be determined.

After some computations, we have

$$\underline{u}_t=(T-t)^{-(\gamma_1+1)}\left(\gamma_1 f_1+\sigma_1\xi_1\frac{df_1}{d\xi_1}\right)$$

$$\left(\underline{u}^{m_1-1}\left|\frac{\partial \underline{u}^{k_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial \underline{u}}{\partial x}\right)=(T-t)^{-\gamma_1(m_1-1)-(\gamma_1k_1+\sigma_1)(p_1-2)-\gamma_1-\sigma_1}\, f_1^{\,m_1-1}\left|\frac{df_1^{k_1}}{d\xi_1}\right|^{p_1-2}\frac{df_1}{d\xi_1}$$

$$v^{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\underline{u}^{m_1-1}\left|\frac{\partial \underline{u}^{k_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial \underline{u}}{\partial x}\right)=(T-t)^{-\gamma_1(m_1-1)-(\gamma_1k_1+\sigma_1)(p_1-2)-\gamma_1-2\sigma_1-\alpha_1\gamma_2}\, f_1^{q_1}\cdot$$

$$\cdot\frac{d}{d\xi_1}\left(f_1^{\,m_1-1}\left|\frac{df_1^{k_1}}{d\xi_1}\right|^{p_1-2}\frac{df_1}{d\xi_1}\right)$$

$$\underline{v}_t=(T-t)^{-(\gamma_2+1)}\left(\gamma_2 f_2+\sigma_2\xi_2\frac{df_2}{d\xi_2}\right)$$

$$\left(\underline{v}^{m_2-1}\left|\frac{\partial \underline{v}^{k_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \underline{v}}{\partial x}\right)=(T-t)^{-\gamma_2(m_2-1)-(\gamma_2k_2+\sigma_2)(p_2-2)-\gamma_2-\sigma_2}\, f_2^{\,m_2-1}\left|\frac{df_2^{k_2}}{d\xi_2}\right|^{p_2-2}\frac{df_2}{d\xi_2}$$

$$\underline{u}^{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\underline{v}^{m_2-1}\left|\frac{\partial \underline{v}^{k_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \underline{v}}{\partial x}\right)=(T-t)^{-\gamma_2(m_2-1)-(\gamma_2k_2+\sigma_2)(p_2-2)-\gamma_2-2\sigma_2-\gamma_1\alpha_2}\, f_1^{q_2}\cdot$$

$$\cdot\frac{d}{d\xi_2}\left(f_2^{\,m_2-1}\left|\frac{df_2^{k_2}}{d\xi_2}\right|^{p_2-2}\frac{df_2}{d\xi_2}\right)$$

and for the boundary

$$\underline{u}^{m_1-1}\left|\frac{\partial \underline{u}^{k_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\left.\frac{\partial \underline{u}}{\partial x}\right|_{x=0}=(T-t)^{-\gamma_1(m_1-1)-(\gamma_1k_1+\sigma_1)(p_1-2)-\gamma_1-\sigma_1}\ f_1^{m_1-1}\left|\frac{df_1^{k_1}}{d\xi_1}\right|^{p_1-2}\frac{df_1}{d\xi_1}(0)$$

$$\underline{v}^{q_1}(0,t)=(T-t)^{-\gamma_2q_1}\ f_2^{q_1}(0)$$

$$\underline{v}^{m_2-1}\left|\frac{\partial \underline{v}^{k_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\left.\frac{\partial \underline{v}}{\partial x}\right|_{x=0}=(T-t)^{-\gamma_2(m_2-1)-(\gamma_2k_2+\sigma_2)(p_2-2)-\gamma_2-\sigma_2}\ f_2^{m_2-1}\left|\frac{df_2^{k_2}}{d\xi_2}\right|^{p_2-2}\frac{df_2}{d\xi_2}(0)$$

$$\underline{u}^{q_2}(0,t)=(T-t)^{-\gamma_1q_2}\ f_1^{q_2}(0)$$

Notice that

$$\begin{aligned}\gamma_1+1&=\gamma_1(m_1-1)+(\gamma_1k_1+\sigma_1)(p_1-2)+\gamma_1+2\sigma_1+\alpha_1\gamma_2\\ \gamma_2+1&=\gamma_2(m_2-1)+(\gamma_2k_2+\sigma_2)(p_2-2)+\gamma_2+2\sigma_2+\gamma_1\alpha_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(m_1-1)+(\gamma_1k_1+\sigma_1)(p_1-2)+\gamma_1+\sigma_1&=\gamma_2q_1\\ \gamma_2(m_2-1)+(\gamma_2k_2+\sigma_2)(p_2-2)+\gamma_2+\sigma_2&=\gamma_1q_2\end{aligned}$$

Thus, $(\underline{u},\underline{v})$ is subsolution of (1)-(3) provided that

$$\begin{aligned}&f_2^{\alpha_1}\frac{d}{d\xi_1}\left(f_1^{m_1-1}\left|\frac{df_1^{k_1}}{d\xi_1}\right|^{p_1-2}\frac{df_1}{d\xi_1}\right)\geq\gamma_1f_1+\sigma_1\xi_1\frac{df_1}{d\xi_1}\\ &f_1^{\alpha_2}\frac{d}{d\xi_2}\left(f_2^{m_2-1}\left|\frac{df_2^{k_2}}{d\xi_2}\right|^{p_2-2}\frac{df_2}{d\xi_2}\right)\geq\gamma_2f_2+\sigma_2\xi_2\frac{df_2}{d\xi_2}\end{aligned},\qquad(5)$$

$$\begin{aligned}&-f_1^{m_1-1}\left|\frac{df_1^{k_1}}{d\xi_1}\right|^{p_1-2}\frac{df_1}{d\xi_1}(0)\leq f_2^{q_1}(0)\\ &-f_2^{m_2-1}\left|\frac{df_2^{k_2}}{d\xi_2}\right|^{p_2-2}\frac{df_2}{d\xi_2}(0)\leq f_1^{q_2}(0)\end{aligned},\qquad(6)$$

Set

$$\begin{aligned}f_1(\xi_1)&=A_1(a-\xi)^{c_1}\\ f_2(\xi_2)&=A_2(a-\xi)^{c_2}\end{aligned},\qquad(7)$$

where

$$c_1=\frac{\alpha_1(p_2-1)-(p_1-1)(s_2-1)}{\alpha_1\alpha_2-(s_1-1)(s_2-1)},\ c_2=\frac{\alpha_2(p_1-1)-(p_2-1)(s_1-1)}{\alpha_1\alpha_2-(s_1-1)(s_2-1)},$$

A and a are constants that should be determined. With transformation (7) inequalities (5) become

$$A_1^{s_1}A_2^{\alpha_1}c_1^{p_1-2}k_1^{p_1-2}c_1(c_1-c_2\alpha_1)(a-\xi)^{c_1-1}+A_1c_1\sigma_1\xi_1(a-\xi)^{c_1-1}-\gamma_1A_1(a-\xi)^{c_1}\geq 0$$
$$A_1^{\alpha_2}A_2^{s_2}c_2^{p_2-2}k_2^{p_2-2}c_2(c_2-c_1\alpha_2)(a-\xi)^{c_2-1}+A_2c_2\sigma_2\xi_2(a-\xi)^{c_2-1}-\gamma_2A_2(a-\xi)^{c_2}\geq 0$$

Now we consider the case

$$A_1^{s_1-\alpha_2-1}k_1^{p_1-2}c_1^{p_1-1}(c_1-c_2\alpha_1)(\gamma_2-c_2\sigma_2)=A_2^{s_2-\alpha_1-1}k_2^{p_2-2}c_2^{p_2-1}(c_2-c_1\alpha_2)(\gamma_1-c_1\sigma_1)$$

and choose

$$a=A_1^{s_1-1}A_2^{\alpha_1}w, \tag{8}$$

where

$$w=c_1^{p_1-1}k_1^{p_1-2}\frac{c_1-c_2\alpha_1}{\gamma_1-c_1\sigma_1}.$$

Here we remark that the assumption

$$(p_1q_1+\alpha_1(p_1-1))(p_2q_2+\alpha_2(p_2-1))>(s_1+p_1-1)(s_2+p_2-1)$$

imply $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$, then the inequalities (5) hold.

On the other hand, the boundary conditions in (6) are satisfied if we have

$$\begin{aligned} A_1^{s_1}\rho_1a^{c_1-c_2\alpha_1} &\leq A_2^{q_1}a^{c_2q_1} \\ A_2^{s_2}\rho_2a^{c_2-c_1\alpha_2} &\leq A_1^{q_2}a^{c_1q_2}, \end{aligned} \tag{9}$$

where $\rho_1=c_1^{p_1-1}k_1^{p_1-2}$, $\rho_2=c_2^{p_2-1}k_2^{p_2-2}$

The condition ensures that we can take A_1 and A_2 large enough such that the inequalities (9) are valid

$$(p_1q_1+\alpha_1(p_1-1))(p_2q_2+\alpha_2(p_2-1))>(s_1+p_1-1)(s_2+p_2-1)$$

Therefore, if the initial data u_0, v_0 is a subsolution to (1)-(3). By the comparison principle, it implies that the solution of (1)-(3) with large initial data blow up in a finite time. The proof is complete.

REFERENCE

1. Samarskii A. A. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations / Samarskii A. A. , Galaktionov V. A. , Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. - Berlin: Walter de Grueter, 1995. - 560 p.
2. Duan Z. Global and Blow-Up Solutions for Nonlinear Degenerate Parabolic Systems with Crosswise-Diffusion / Duan Z., Li Z. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. Vol. 244, Issue 2, p 263-278.
3. Han Y. A degenerate and strongly coupled quasilinear parabolic system with crosswise diffusion for a mutualistic model / Han Y., Gao W. // Nonlinear Analysis Real World Applications. 2010. Vol. 11, Issue 5, p 3421-3430.
4. Chen B. Global existence and nonexistence for a doubly degenerate parabolic system coupled via nonlinear boundary flux / Chen B., Mi Y., Mu C. // Acta Mathematica Scientia. 2011. Vol. 31, Issue 2, p 681-693.
5. Aripov M. Estimates and Asymptotic of Self-similar Solutions to a Nonlinear Filtration Problem with Variable Density and Nonlocal Boundary Conditions / Aripov M., Rakhmonov Z. // Universal Journal of Computational Mathematics. 2011. Vol. 4, Issue 1, p 1-5.
6. Rakhmonov Z. On the Properties of Solutions of Multidimensional Nonlinear Filtration Problem with Variable Density and Nonlocal Boundary Condition in the Case of Fast Diffusion / Rakhmonov Z. // Journal of Siberian Federal University [Mathematics & Physics]. 2016. Vol. 9, Issue 2, p 225-234.
7. Aripov M. The critical curves of a doubly nonlinear parabolic equation in non-divergent form with a source and nonlinear boundary flux / Aripov M., Raimbekov J. // Journal of Siberian Federal University [Mathematics & Physics]. 2019. Vol. 12, Issue 1, p 112-124.
8. Rakhmonov Z. On a problem of cross-diffusion with Nonlocal boundary conditions / Rakhmonov Z., Urunbayev J. // Journal of Siberian Federal University[Mathematics & Physics]. 2019. Vol. 12, Issue 5, p 614-620.
9. Aripov M. Computer simulation of nonlinear diffusion processes / Aripov M., Sadullaeva Sh. - Tashkent: National University of Uzbekistan Press, 2020. - p 800.
10. Aripov M. Mathematical modeling of heat conduction processes in a medium with double nonlinearity / Aripov M., Rakhmonov Z. – Tashkent: Kaleon Press, 2021. - p 300.

УДК 517.957
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_166

STABILITY OF THE TIME-DEPENDENT IDENTIFICATION PROBLEM FOR A FRACTIONAL TELEGRAPH EQUATION WITH THE CAPUTO DERIVATIVE

Ashurov Ravshan Radjabovich, f.m.f.d, proffesor,
ashurovr@gmail.com
Saparbayev Rajapboy Alisherovich.
rajapboy1202@gmail.com
Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky,
Tashkent, Uzbekistan

Abstract:. *The telegraph equation* $(D_t^\rho)^2u(t)+2\alpha D_t^\rho u(t)+Au(t)=p(t)q+f(t)$ $(0<t\le T, 0<\rho<1)$*, in a Hilbert space* H *is investigated. Here* A *is a self-adjoint, positive operator,* D_t *is the Caputo derivative. An inverse problem is considered in which, along with* $u(t)$*, also a time varying factor* $p(t)$ *of the source function is unknown. To solve this inverse problem, we take the additional condition* $B[u(t)]=\psi(t)$ *with an arbitrary bounded linear functional* B*.Existence and uniqueness theorem for the solution to the problem under consideration is proved. Inequalities of stability are obtained.*

Let H be a separable Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)$ and the norm $\|\cdot\|$. Let $A: H\to H$ be an arbitrary unbounded positive selfadjoint operator in H.

At the same time, A is the operator let the inverse exist and be a compact operator. Suppose that A has a complete in H system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues λ_k.It is convenient to assume that the eigenvalues do not decrease as their number increases, i.e.

$$0<\lambda_1\le\lambda_2\cdots\to+\infty.$$

Let τ be an arbitrary real number. We introduce the power of operator A, acting in H according to the rule

$$A^{\tau}h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\tau} h_k v_k .$$

Obviously, the domain of definition of this operator has the form

$$D(A^{\tau}) = \{h \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} \mid h_k \mid^2 < \infty\}.$$

The fractional integration of order $\sigma < 0$ of the function $h(t)$ defined on $[0,\infty)$ has the form (see, [1]):

$$J_t^{\sigma} h(t) = \frac{1}{\Gamma(-\sigma)} \int_0^t \frac{h(\xi)}{(t-\xi)^{\sigma+1}} d\xi, \quad t > 0,$$

provided the right-hand side exists. Here $\Gamma(\sigma)$ is Euler's gamma function. Using this definition one can define the Caputo fractional derivative of order ρ,

$$D_t^{\rho} h(t) = J_t^{\rho-1} \frac{d}{dt} h(t).$$

Let $\rho \in (0,1)$ be a fixed number. Consider the following Cauchy problem

$$\begin{cases} (D_t^{\rho})^2 u(t) + 2\alpha D_t^{\rho} u(t) + Au(t) = p(t)q + f(t), \qquad 0 < t \le T; \\ \lim\limits_{t\to 0} D_t^{\rho} u(t) = \varphi_0, \\ u(0) = \varphi_1, \end{cases} \tag{1.1}$$

where a part of the source function $p(t)$ is a scalar function, $f(t) \in C(H)$ and φ, q are known elements of H.

The purpose of this paper is not only to find the solution $u(t)$, but also to determine

the time-dependent part $p(t)$ of the source function. To solve this time-dependent source identification problem one needs an extra condition. Following the paper of A. Ashyralyev et al. see, [2] we consider the additional condition in a rather general form:

$$B[u(t)] = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

where $B : H \to R$ is a given bounded linear functional, and $\psi(t)$ is the given scalar function. We call the Cauchy problem (1.1) together with additional condition (1.2) the inverse problem.

When solving the inverse problem, we will investigate the Cauchy problem for various differential equations. In this case, by the solution of the problem we mean the classical solution, i.e. we will assume that all derivatives and functions involved in the equation are continuous with respect to the variable t. As an example, let us give the definition of the solution to the inverse problem.

Definition. A pair of functions $\{u(t), p(t)\}$ with the propertie $(D_t^{\rho})^2 u(t), Au(t) \in C((0,T];H)$, $u(t) \in C(H)$, $p(t) \in C[0,T]$ and satisfying conditions (1.1), (1.2) is called the solution of the inverse problem.

Theorem 1. Let $\alpha > 0$, $Bq \neq 0$, $\varphi_0 \in H$, $\varphi_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ and $(D_t^\rho)^2\psi(t) \in C[0,T]$. Further, let $\epsilon > 0$ be any fixed number and $q \in D(A^{1+\epsilon})$ and $f(t) \in C([0,T]; D(A^\epsilon))$. Then the inverse problem has a unique solution $\{u(t), p(t)\}$.

If we additionally require that the initial function φ_0, φ_1 belong to the domain of definition of operator A, then we can establish the following result on the stability of the solution to the inverse problem.

Theorem 2. Let assumptions of Theorem 1 be satisfied and let $\varphi_0 \in D(A^{\frac{1}{2}}), \varphi_1 \in D(A)$ Then the solution to the invest problem obeys the stability estimate

$$\|(D_t^\rho)^2 u\|_{C(H)} + \|D_t^\rho u\|_{C(H)} + \|Au\|_{C(H)} + \|p\|_{C[0,T]} \leq C_{\rho,q,B,\epsilon}\Big[\|\varphi_0\|_{\frac{1}{2}} ++ \|\varphi_1\|_1 + \|\psi\|_{C[0,T]} +|$$

$$+\|D_t^\rho\psi\|_{C[0,T]} + \|(D_t^\rho)^2\psi\|_{C[0,T]} + \max_{0\leq t\leq T}\|f(t)\|_\epsilon\Big],$$

where $C_{\rho,q,B,\epsilon}$ is a constant, depending only on ρ, q, B and ϵ.

REFERENCE

1. Pskhu A.V. Fractional Differential Equations. Moscow: NAUKA. 2005 [in Russian].

2. Ashyralyev.A., Al-Hazaimeh.M. Stability of the time-dependent identication problem for the Telegraph equation with involution, International Journal of Applied Mathematics, 35, 3, 447--459 ,(2022).

3. Cascaval. R., Eckstein.E., Frota.C., Goldstein.A., Fractional telegraph equations, J. Math. Anal. Appl. 276, 145-159 (2002).

УДК 517.97 ББК 22.18

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_169

OPTIMAL NUMBER OF PURSUERS IN THE GAME ON THE 1-SKELETON OF TESSERACT

Ibragimov Gafurjan Ismailovich, DSc, professor,
ibragimov.math@gmail.com
Muminov Zahriddin Eshkobilovich, DSc, professor,
zimuminov@gmail.com
Tashkent State University of Economics,
100066, Tashkent, Uzbekistan

Abstract: *In the paper, we study pursuit and evasion differential games within a four-dimensional cube, where all the players move along the edges. The problem is to find the optimal number of pursuers in the game, to construct strategies for the pursuers in pursuit game, and evasion strategy in evasion game.*

Keywords: *tesseract, differential game, pursuer, evader, strategy.*

ОПТИМАЛЬНОЕ КОЛИЧЕСТВО ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ В ИГРЕ НА РЕБЕРНОМ ОСТОВЕ ТЕССЕРАКТА

Ибрагимов Гафуржан Исмаилович, д.ф.-м.н., профессор,
ibragimov.math@gmail.com
Муминов Захриддин Эшкобилович, д.ф.-м.н., профессор,
zimuminov@gmail.com
Ташкентский государственный экономический университет,
100066, Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В статье изучаются дифференциальные игры преследования и уклонения внутри четырехмерного куба т.е. тессеракта, где все игроки перемещаются по ребрам. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальное количество преследователей в игре, построить стратегии преследователей в игре преследования и стратегию уклонения в игре уклонения.*

Ключевые слова: *тессеракт, дифференциальная игра, преследователь, убегающий, стратегия.*

1. Introduction

The notion of differential game was introduced by Isaacs [1]. Pontryagin [2] and Krasovskii [3] gave fundamental contribution to the theory of differential games creating the formalizations to the theory. The theory was further developed by many researchers such as Azamov [4], Berkovitz [5], Elliott and Kalton [6], Fleming [7], Friedman [8], Hajek [9], Mishchenko [10], Petrosyan [11], Satimov [12] and others.

One of the most significant current discussions in differential games is multi player differential games. In the last three decades of the past century there had seen the rapid development of differential games of many players such as [13, 14].

In recent years, there has been an increasing interest in differential games of several players (see for example [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22])

However, if exhaustable resources such as energy, fuel, resources etc. are restricted for the modeling control processes, then control functions are restricted by integral constraints. The method of resolving functions for the games with integral constraints was developed by Belousov [23], to obtain a sufficient condition in solving a pursuit differential game. The solution was then extended to the case of convex integral constraints [24]. Other works in differential game in $\mathbb{R}^n$ of integral constraints include [19, 20, 21, 25].

Some games with either geometric or integral constraint, restrict the movement of players to some specific state constraints. For examples, differential games in a convex subset of $\mathbb{R}^n$ were studied by [26, 27, 28, 29] and [30]. Furthermore, differential games within a geometrical structure in the form of abstract graphs as its state constraint, are of increasing interest.

These types of games have minimax forms of which, each being a model for the search problem of a moving object, as mentioned in [31, 32]. It could be called multi-move games as in the work of [33, 34]. In this type of games, players move from one vertex to its adjacent vertex by jumping constitute one type. Another type of game on abstract graphs is where players move along the edges of a given graph embedded in a Euclidean space, as studied in [16, 32, 35, 36, 37, 38].

One of the most recent work involved a study in a differential game of many pursuers and one evader within 1-skeleton graph of an orthoplex of dimension $d+1$, as discussed in [39]. Both pursuit and evasion games were considered on the edge graph K_{d+1} of the orthoplex $\Sigma^{2(d+1)}$ in the Euclidean space $\mathbb{R}^{d+1}$. It was shown that pursuit can be completed in the case of $n=k=d+1$, or when $n \neq k$ and $n+k \geq 2d$. Otherwise, it was proven that evasion is possible.

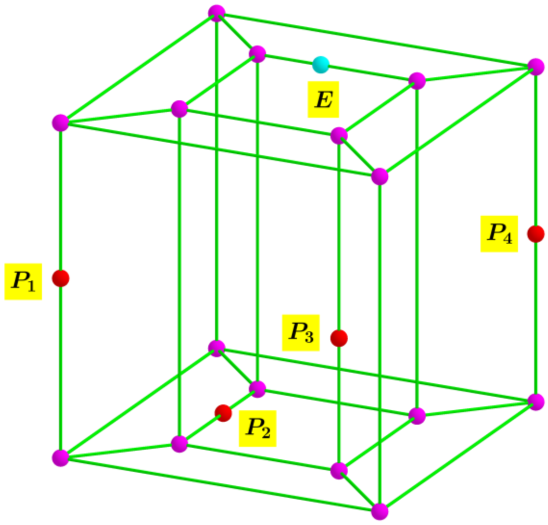


Figure 1: The graph of four dimensional cube K.

The current paper intends to study both pursuit and evasion differential games within a four-dimensional cube. All the players move along the edges of the cube and the search for the optimal number of pursuers to ensure pursuit can be completed, are also done.

2. Statement of problem

We consider a differential game of n pursuers x_1, x_2,..., x_n, $n \geq 2$, and one evader y whose dynamics are given by the following equations

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_{i0}, \ i = 1,...,n, \\ &\dot{y} = v, \qquad y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $x_{i0}, y_0 \in K$, $x_{i0} \neq y_0$, $i = 1,...,n$; u_i is the control parameter of i-th pursuer, and v is the control parameter of the evader. All the players move along the edges of four-dimensional cube K. The maximal speeds of the pursuers x_1, x_2,..., x_n are ρ_1, ρ_2,..., ρ_n, respectively, and that of evader y is 1, i.e., $|u_i| \leq \rho_i$, $i = 1,...,n$, $|v| \leq 1$. It is assumed that $1/3 \leq \rho_i < 1$.

We let $B(r)$ denote the ball of radius r and centered at the origin of the Euclidean space $\mathbb{R}^{d+1}$.

Definition 1. *A measurable function* $u_i(\cdot)$, $u_i : [0, \infty) \to B(\rho_i)$ *is called admissible control of the* i*-th pursuer,* $i \in \{1,...,n\}$*, if for the solution* $x_i(\cdot)$ *of the equation*

$$\dot{x}_i = u_i, \, x_i(0) = x_{i0},$$

we have $x_i(t) \in K$, $t \geq 0$.

Definition 2. *A measurable function* $v(\cdot)$, $v : [0, \infty) \to B(\sigma)$ *is called admissible control of the evader, if for the solution* $y(\cdot)$ *of the equation*

$$\dot{y} = v,\ y(0) = y_0,$$

we have $y(t) \in K$, $t \geq 0$.

We consider pursuit and evasion differential games. In the pursuit differential game pursuers apply some strategies and evader uses an arbitrary admissible control. Let us define strategies of pursuers.

Definition 3. *The functions* $(t, x_1, ..., x_n, y, v) \to U_i(t, x_1, ..., x_n, y, v)$, $i = 1, 2, ..., n$, *are called strategies of pursuers* x_i, $i = 1, 2, ..., n$, *if the initial value problem (1) has a unique solution* $x_1(t), ..., x_n(t)$, $y(t) \in K$, $t \geq 0$, *for* $u_i = U_i(t, x_1, ..., x_n, y, v)$, $i = 1, 2, ..., n$, *and for any admissible control* $v = v(t)$ *of the evader.*

Definition 4. *If, for some number* $T > 0$, *there exist strategies of pursuers such that* $x_i(\tau) = y(\tau)$ *at some* τ, $0 < \tau \leq T$ *and* $i \in \{1, ..., n\}$, *then pursuit is said to be completed. The pursuers are interested in completing the pursuit as earlier as possible.*

Definition 5. *A function* $(t, x_1, ..., x_n, y) \to V(t, x_1, ..., x_n, y)$ *is called a strategy of the evader* y *if the initial value problem (1) has a unique solution* $x_1(t), ..., x_n(t)$, $y(t) \in K$, $t \geq 0$, *for* $v = V(t, x_1, ..., x_n, y)$ *and for any admissible controls of pursuers* $u_i = u_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Definition 6. *If, for some initial states of players* $x_{10}, ..., x_{n0}, y_0 \in K$, *there exists a strategy of evader such that* $x_i(t) \neq y(t)$ *for all* $t \geq 0$, *and* $i = 1, 2, ..., n$, *then we say that evasion is possible in the game in* K.

The evader is interested in maintaining the inequality $x_i(t) \neq y(t)$ as long as possible. Since for some initial states the evader may be trapped by pursuers and pursuit can be completed by pursuers easily, therefore this definition contains the phrase "for some initial states of players $x_{10}, ..., x_{n0}, y_0 \in K$".

The number $N = N(K)$ is called the optimal number of pursuers for the game on the cube K if, for any initial states of players, pursuit can be completed in the game with N pursuers and evasion is possible in the game with $N-1$ pursuers.

The problem is to find the optimal number of pursuers N in the game, to construct strategies for the pursuers in pursuit game, and evasion strategy in evasion game.

3. Main Result

Without any loss of generality we assume that the lengths of edges of the cube K is equal to 1.

3.1 Pursuit differential game. In this subsection, we prove the following statement.

Theorem 1. *Four pursuers* x_1, x_2, x_3, x_4 *can complete the pursuit in the differential game on 1-skeleton of the four dimensional cube* K.

Proof.

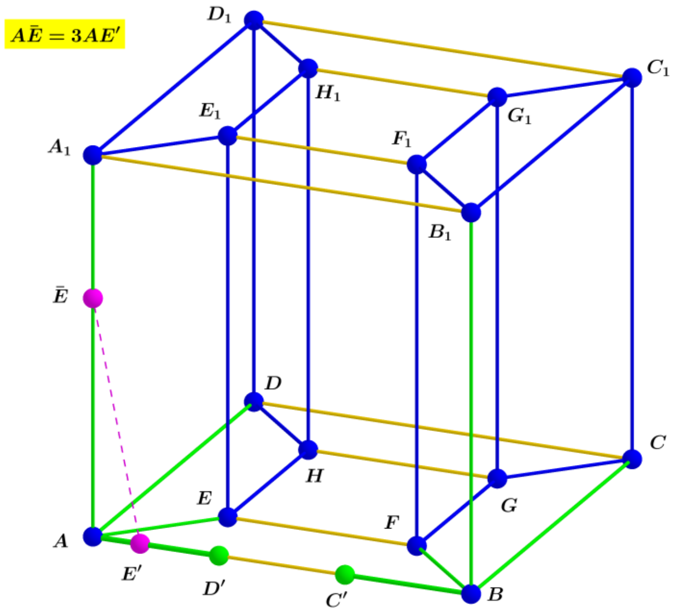


Figure 2: The shadow E' of the point $\bar{E} \in AA_1$: $A\bar{E} = 3AE'$.

Let the points D' and C' divide the edge AB into three equal segments: $AD' = D'C' = C'B$ (Figure 2). To construct strategies of pursuers, we define the shadow $E' \in AB$ of the evader $\bar{E} \notin AB$ on the edge AB as follows.

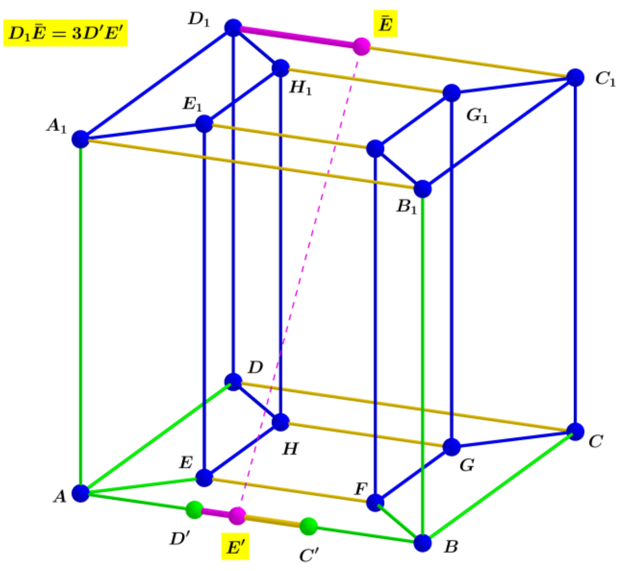


Figure 3: The shadow E' of the point $\bar{E}$: $D_1\bar{E} = 3D'E'$.

1. If $\bar{E} \in AE$ or AD or AA_1 (these edges are highlighted in green in Figure 2), then $A\bar{E} = 3AE'$.

2. If $\bar{E} \in BC$ or BF or BB_1 (these edges are highlighted in green), then $B\bar{E} = 3BE'$.

3. If $\bar{E} \in HE$ or HD or HH_1 or DD_1 or EE_1 or A_1D_1 or D_1H_1 or H_1E_1 or A_1E_1 (these edges are highlighted in blue), then $E' = D'$.

4. If $\bar{E} \in GF$ or GC or GG_1 or FF_1 or CC_1 or B_1C_1 or C_1G_1 or G_1F_1 or F_1B_1 (these edges are highlighted in blue), then $E' = C'$.

5. If $\bar{E}$ is on the edge parallel to AB, that is, $\bar{E} \in EF$ or HG or DC or A_1B_1 or E_1F_1 or H_1G_1 or D_1C_1 (these edges are highlighted in gold), then $E' \in C'D'$ is defined from the condition that the distance of $\bar{E}$ from the left end point of the edge that contains $\bar{E}$ is equal to $3D'E'$ (Figure 3).

Since the maximum speed of the evader is 1, the speed of the point E' doesn't exceed 1/3. If the pursuer P_1 moves from the vertex A to the vertex B along the edge AB, then P_1 coincides with either the real evader $\bar{E}$ or its shadow E'. If P_1 coincides with the real evader $\bar{E}$, then pursuit is completed. If P_1 coincides with the shadow of evader E', then P_1 can further move on the point E' holding this point. Then, as the evader $\bar{E}$ reaches one of the vertices A and B at some time, we have $P_1 = E' = \bar{E}$ at that time, that is, the evader is captured at that time. Thus, starting from the time when $P_1 = E'$ pursuer P_1 can guard the edge AB from the evader.

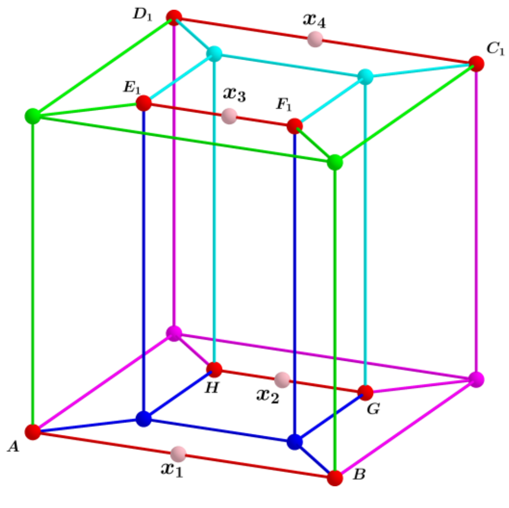


Figure 4: The edges controlled by the pursuers of the 4D cube

We construct now strategies for the pursuers. Let pursuers x_1, x_2, x_3, and x_4 come to the vertices A, H, E_1, and D_1, respectively. Next, the pursuers x_1, x_2, x_3, and x_4 move along the edges AB, HG, E_1F_1, and D_1C_1, respectively, and catch the shadows of the evader on these edges, respectively. Each pursuer starting from the time when he catches the shadow of the evader moves holding the shadow of the evader on that edge.

Let all the pursuers x_1, x_2, x_3, x_4 catch the shadows of the evader on the edges AB, HG, E_1F_1, D_1C_1, respectively, by the time T (Figure 4).

Then at the time T the evader is on one of the edges colored in Green or Blue or Cyan or Magenta (Figure 4). In each case, the evader is trapped by three pursuers and cannot walk from one edge to another edge of distinct colors.

Without any loss of generality, we assume that the evader is on a green edge. Then it is trapped by the pursuers x_1, x_3, x_4. Then, we let the pursuers x_1, x_3, x_4 control the edges AB, E_1F_1, D_1C_1, respectively, holding the evader's shadow and let the pursuer x_2 move towards the evader. Since the green edges form a tree, therefore the pursuer x_2 catches the evader or forces it to reach one of the edges AB, E_1F_1, D_1C_1. In the latter case, the evader will be caught by one of the pursuers x_1, x_3, x_4. The proof of the theorem is complete.

3.2 Evasion differential game. We prove now the following evasion possible statement.

Theorem 2. *Evasion from three pursuers x_1, x_2, x_3 is possible in the differential game on 1-skeleton of the four dimensional cube K.*

Proof. To prove this theorem, we show that, for some initial states of players, there exist a strategy of the evader such that evasion is possible.

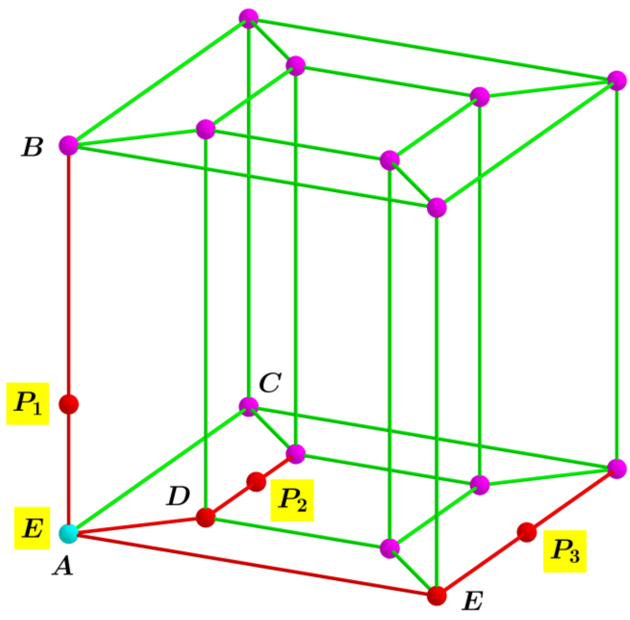


Figure 5: The shadow E' of the point $\bar{E}$: $D_1\bar{E} = 3D'E'$.

Let the evader is at some vertex of the cube say at the vertex A and any pursuer is not at the vertex A. We show that from such initial positions of players evasion is possible. We construct a strategy for the evader as follows. The evader stays at the point A until the distance between the point A and closest to this point pursuer becomes less than or equal to 1/3 at some time t_1. Note that it is possible that $t_1 = 0$. For example, if the distance of a pursuer from the point A is less than or equal to 1/3 at the initial time, then, clearly, $t_1 = 0$.

For the definiteness, we assume that the neighboring to A vertices of the cube are B, C, D, E, and $AP_1 = 1/3$ at some time $t_1 \geq 0$ and that the pursuer P_1 is on the edge AB (Figure 5). Since the distance between any two of the points C, D, E along the 1-skeleton of the cube is greater or equal to 2, and the speeds of pursuers P_2 and P_3 are less than or equal to 1, therefore these pursuers can reach only one of the vertices C, D, E for the unit time. Clearly, the pursuer P_1 cannot reach these vertices for the unit time. Hence, the evader can reach one of these vertices, say the vertex C for the unit time not being captured by the pursuers. Thus, the evader is at the vertex C at the time $t_1 + 1$. We repeatedly use this reasoning, to conclude that evasion is possible on the infinite time interval $[0, \infty)$. The proof of the theorem is complete.

4. Conclusion

We have studied pursuit and evasion differential games on the edge graph of four dimensional cube. We have established that in the differential game of four pursuers and one evader pursuit can be completed. Here, one of the central results of the paper is the construction of strategies for the pursuers. Next, we proved that in the differential game of three pursuers and one evader evasion is possible. Also, we have proposed a strategy for the evader that ensures evasion in the differential game.

Based on the two theorems proved for the pursuit and evasion differential games we can conclude that the optimal number of pursuers N in the game is $N = 4$.

REFERENCES

1. Isaacs, R.: Differential games. John Wiley & Sons, New York, NY, USA. (1965)

2. Pontryagin, L.S.: Selected works. Nauka, Moscow. (1988)

3. Krasovskii, N.N. and Subbotin, A.I.: Game-Theoretical Control Problems. Springer, New York. (1988)

4. Azamov, A.A.: On Pontryagin's second method in linear differential games of pursuit. Math. USSR-Sb., 46(3), 429–437 (1983)

5. Berkovitz, L.D.: Differential game of generalized pursuit and evasion. SIAM J. Contr. 24(3): 361–373 (1986)

6. Elliot, R.J., Kalton, N.J.: The Existence of Value for Differential Games. American Mathematical Soc.: Providence, RI, USA. (1972)

7. Fleming, W.H.: The convergence problem for differential games. J. Math. Anal. Appl. 3, 102–116 (1961)

8. Friedman, A.: Differential Games. John Wiley and Sons, New York (1971)

9. Hajek, O.: Pursuit Games. Math. Sci. Engrg.. Academic Press, New York (1975)

10. Pontryagin, L.S., Mishchenko, E.F.: The problem of evading the encounter in linear differential games, Differencial'nye Uravnenija, 7, 436–445 (1971)

11. Petrosyan, L.A.: Differential Games of Pursuit. World Scientific, Singapore, London (1993)

12. Satimov, N.Y., Rikhsiev, B.B.: Methods of Solving of Evasion Problems in Mathematical Control Theory. Fan, Tashkent, Uzbekistan (2000)

13. Grigorenko, N.L.: Mathematical methods of control of several dynamic processes. Moscow: MSU Press (1990) (in Russian).

14. Ibragimov, G.I.: A game of optimal pursuit of one object by several. J. Appl. Maths Mechs, 62(2), 187–192 (1998)

15. Blagodatskikh, A.I., Petrov, N.N.: Simultaneous Multiple Capture of Rigidly CoordinatedEvaders. Dynamic Games and Applications 9, 594–613, (2019). doi:10.1007/s13235-019-00300-8

16. Azamov, A.A., Kuchkarov, A.Sh. Holboyev, A.G.: The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of the regular polyhedron. III. Mat. Teor. Igr Pril., 11(4), 5–23 (2019)

17. Scott, W.L., Leonard, N.E.: Optimal evasive strategies for multiple interacting agents with motion constraints. Automatica J. IFAC, 94, 26–34 (2018)

18. Yan, R., Shi, Z., Zhong, Y.: Cooperative strategies for two-evader-one-pursuer reach-avoid differential games. International Journal of Systems Science. 52(9), 1894–1912, (2021). doi:10.1080/00207721.2021.1872116.

19. Alias I.A., Ibragimov G.I., Rakhmanov A.T.: Evasion Differential Game of Infinitely Many Evaders from Infinitely Many Pursuers in Hilbert Space. Dynamic Games and Applications. 6(2): 1–13 (2016). doi:10.1007/s13235-016-0196-0,

20. Ibragimov, G.I., Ferrara, M., Ruziboev M., Pansera B.A.: Linear evasion differential game of one evader and several pursuers with integral constraints. International Journal of Game Theory. 50, 729–750.(2021). doi:10.1007/s00182-021-00760-6

21. Ibragimov, G.I., Salleh, Y.: Simple motion evasion differential game of many pursuers and one evader with integral constraints on control functions of players. Journal of Applied Mathematics, Article ID 748096, (2012). doi:10.1155/2012/748096

22. Kumkov, S.S., Le Ménec, S., Patsko, V.P.: Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: Survey of publications. Dynamic games and applications. 7, 609–633, (2017). doi:10.1007/s13235-016-0209-z

23. Belousov A. A.: O lineinykh differentsialnykh igrakh presledovaniya s integralnymi ogranicheniyami. In-t matematiki im. V. A. Steklova RAN, MGU im. M. V. Lomonosova, M., 321–322 (2008)

24. Chikrii, A. A., Belousov, A. A.: On linear differential games with convex integral constraints. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 19(4), 308–319 (2013)

25. Ibragimov, G.I., Ferrara, M., Kuchkarov, A.Sh., and Pansera, B.A.: Simple motion evasion differential game of many pursuers and evaders with integral constraints. Dynamic Games and Applications. 8, 352–378 (2018). doi:10.1007/s13235-017-0226-6

26. Satimov, N.Yu., Ibragimov, G.I.: One class of simultaneous pursuit games, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 5, 46–-55 (2012)

27. Ibragimov, G.I., Salimi, M., Amini, M.: Evasion from many pursuers in simple motion differential game with integral constraints, European Journal of Operational Research 218(2), 505–511 (2012)

28. Ibragimov, G., Alias, I.A., Tukhtasinov, M, Hasim, R.M.: A pursuit problem described by infinite system of differential equations with coordinate-wise integral constraints on control functions, Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 9(1), 67–76, (2015)

29. Ferrara, M., Ibragimov, G.I., Salimi, M.: Pursuit-evasion game of many players with coordinate-wise integral constraints on a convex set in the plane. Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti-Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 95(2), 1–6, (2017)

30. Alias, I.A., Jaman, K., Ibragimov, G.: Pursuit differential game of many pursuers and one

evader in a convex hyperspace, Mathematical Modeling and Computing, 9(1), 9–17 (2022)
31. Azamov, A.A.: Lower bound for the advantage coefficient in the graph search problem. Differential equations, 44(12) 1764–1767 (2008)
32. Fomin, F.V., Thilikos, D.M.: An annotated bibliography on guaranteed graph searching, Theoret. Comput. Sci., 399, 236–245 (2008)
33. Ibragimov, G.I., Luckraz, Sh.: On a Characterization of Evasion Strategies for Pursuit-Evasion Games on Graphs. Journal of Optimization Theory and Applications. 175, 590–596, (2017). doi:10.1007/s10957-017-1155-7
34. Bonato, A., Golovach, P., Hahn, G., Kratochvil, J.: The capture time of a graph. Discrete Mathematics, 309(18), 5588–5595 (2009)
35. Azamov, A., Ibaydullaev, T.: A pursuit-evasion differential game with slow pursuers on the edge graph of simplexes I. Mathematical Game Theory and Applications. 12(4), 7–23 (2020). doi:10.17076/mgta_2020_4_23
36. Andreae, T.; Hartenstein, F.; Wolter, A.: A two-person game on graphs where each player tries to encircle his opponent’s men. Theoret. Comput. Sci. (Math Games), 215, 305–323 (1999)
37. Azamov, A.A., Kuchkarov, A.Sh., Holboyev, A.G.: The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of the regular polyhedron. II. Mat. Teor. Igr Pril. 8(4), 3–13 (2016)
38. Azamov, A.A., Kuchkarov, A.Sh., Holboyev, A.G.: The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of the regular polyhedron. I. Mat. Teor. Igr Pril., 7(3), 3–15 (2015)
39. Azamov, A.A., Ibaydullaev, T., Ibragimov, G.I., Alias, I.A.: Optimal number of pursuers in the differential games on the 1-skeleton of orthoplex. Symmetry (Game Theoretical Symmetry Dynamic Processes), 13(11), 2170 (2021). doi:10.3390/sym13112170

УДК 517.51, 517.98

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_180

GROUND STATES FOR THE SOS MODEL WITH COMPETING BINARY INTERACTIONS ON A CAYLEY TREE OF ORDER THREE

Rahmatullaev Muzaffar Muhammadjonovich., DSc, professor,

mrahmatullaev@rambler.ru

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky

of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,

Tashkent, Uzbekistan

Abraev Bunyod Urinboevich, PhD student

abrayev89@mail.ru

Chirchik state pedagogical university,

Chirchik, Uzbekistan.

Abstract**:** *We consider a SOS (solid-on-solid) model with nearest-neighbor interaction J_1, prolonged next-nearest-neighbor interaction J_2 and one level next-nearest-neighbor interaction J_3, where the spin takes values in the set $\Phi = \{0,1,2\}$ on a Cayley tree of order three. In the paper, we study translation-invariant and periodic ground states of the model SOS.*

Keywords: *Cayley tree, configuration, competing next-nearest-neighbor interactions, translation-invariant and periodic ground state.*

ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ SOS С КОНКУРИРУЮЩИМИ БИНАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ТРИ

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович, д.ф.-м.н., профессор, mrahmatullaev@rambler.ru

Институт Математики имени В.И. Романовского

Академии Наук Республики Узбекистан,

Наманган, Узбекистан

Абраев Бунёд Уринбоевич, PhD докторант,

Чирчикский государственный педагогический университет,

Чирчик, Узбекистан.

abrayev89@mail.ru

***Аннотация**: Мы рассматриваем модель SOS (solid-on-solid) с взаимодействием ближайших соседей* J_1, *длительным взаимодействием следующих ближайших соседей* J_2 *и одноуровневым взаимодействием следующих ближайших соседей* J_3, *где спин принимает значения в множестве* $\Phi = \{0,1,2\}$ *на дереве Кэли порядка три. В статье исследуются трансляционно-инвариантные и периодические основные состояния модели SOS.*

***Ключевые слова**: Дерево Кэли, конфигурация, конкурирующие взаимодействия ближайших соседей, трансляционно-инвариантное и периодическое основное состояние.*

It is known that a phase diagram of Gibbs measures for a Hamiltonian is close to the phase diagram of isolated (stable) ground states of this Hamiltonian. At low temperatures, a periodic ground state corresponds to a periodic Gibbs measure (see, e.g., [1]). It leads us to investigate the problem of description of periodic and weakly periodic ground states. In this paper, we study periodic ground states for the SOS model with nearest-neighbor and competing binary interactions on a Cayley tree of order three.

Let $\Gamma^k = (V, L)$ be the Cayley tree of order $k \geq 1$, i.e., an infinite tree such that exactly $k+1$ edges are incident to each vertex. Here V is the set of vertices and L is the set of edges of Γ^k. It is known (see [2]) that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$, $i = 1, \ldots, k+1$ of the second order (i.e. $a_i^2 = e$, $a_i^{-1} = a_i$) with generators

$a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$.

For an arbitrary vertex $x^0 \in V$, we put

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \le n\},$$

where $d(x, y)$ is a natural distance, being the number of nearest-neighbor pairs of the minimal path between the vertices x and y. L_n denotes the set of edges in V_n. The fixed vertex x^0 is called the 0-th level and the vertices in W_n are called the n-th level. For the sake of simplicity, we put $|x| = d(x, x^0)$, $x \in V$.

Two vertices $x, y \in V$ are called the next-nearest-neighbour neighbors if $d(x, y) = 2$. The next-nearest-neighbour vertices x and y are called prolonged next-nearest-neighbours if $|x| \ne |y|$ and is denoted by $\rangle x, y \langle$. The next-nearest-neighbour vertices $x, y \in V$ that are not prolonged are called one-level next-nearest-neighbours since $|x| = |y|$ and are denoted by $\rangle x, y \langle$.

For each $x \in G_k$, let $S(x)$ denote the set of direct successors of x, i.e., if $x \in W_n$ then $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. For each $x \in G_k$, let $S_1(x)$ denote the set of all neighbors of x, i.e., $S_1(x) = \{y \in G_k : \ \langle x, y \rangle \in L\}$. The set $S_1(x) \setminus S(x)$ is a singleton. Let $x_{\downarrow}$ denote the (unique) element of this set.

Let us assume that the spin values belong to the set $\Phi = \{0, 1, 2, ..., m\}$. A function σ: $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$ is called configuration on V. The set of all configurations coincides with the set $\Omega = \Phi^V$.

Consider the quotient group $G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, ..., H_r\}$, where G_k^* is a normal subgroup of index r with $r \ge 1$.

Definition 1. *A configuration $\sigma(x)$, $x \in V$ is said to be G_k^*-periodic, if $\sigma(x) = \sigma_i$ for all $x \in H_i$. A G_k-periodic configuration is called translation invariant.*

The period of a periodic configuration is the index of the corresponding normal subgroup.

The Hamiltonian of the SOS model with competing nearest-neighbour and next-nearest-neighbour binary interactions has the form:

$$H(\sigma)=-J_1\sum_{\langle x,y\rangle\in L}|\sigma(x)-\sigma(y)|-J_3\sum_{\substack{\rangle x,y\langle:\\ x,y\in V}}|\sigma(x)-\sigma(y)|,$$

$$-J_2\sum_{\substack{\rangle x,y\langle:\\ x,y\in V}}|\sigma(x)-\sigma(y)| \tag{1}$$

where $(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3$.

We define the energy of the configuration σ_b on b by the following formula

$$U(\sigma_b,J_1,J_2,J_3)=-\frac{1}{2}J_1\sum_{\substack{\langle x,y\rangle:\\ x,y\in b}}|\sigma(x)-\sigma(y)|-J_2\sum_{\substack{\rangle x,y\langle:\\ x,y\in b}}|\sigma(x)-\sigma(y)|$$

$$-J_3\sum_{\substack{\rangle x,y\langle:\\ x,y\in b}}(|\sigma(x)-\sigma(y)|), \tag{2}$$

where $(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3$.

In [4] we studied ground state for SOS model with competing nearest-neighbour and next-nearest-neighbour binary interactions on a Cayley tree of order two.

We consider the case $k=3$.

Let $m=2$. By (2) for any σ_b we have $U(\sigma_b)\in\{U_1,U_2,U_3,...,U_{24}\}$, where

$$U_1=0, U_2=-\frac{1}{2}J_1-3J_2, U_3=-\frac{1}{2}J_1-J_2-2J_3, U_4=-J_1-2J_2-2J_3,$$

$$U_5=-J_1-6J_2, U_6=-J_1-2J_2-4J_3, U_7=-\frac{3}{2}J_1-3J_2,\ U_8=-\frac{3}{2}J_1-J_2-2J_3,$$

$$U_9=-2J_1-4J_2-4J_3, U_{10}=-3J_1-6J_2,\ U_{11}=-3J_1-2J_2-4J_3,$$

$$U_{12}=-2J_1-4J_2-2J_3, U_{13}=-2J_1-2J_2-4J_3,\ U_{14}=-\frac{5}{2}J_1-5J_2-2J_3,$$

$$U_{15}=-\frac{5}{2}J_1-3J_2-4J_3, U_{16}=-\frac{3}{2}J_1-5J_2-2J_3,\ U_{17}=-\frac{3}{2}J_1-3J_2-4J_3,$$

$$U_{18}=-2J_1, U_{19}=-4J_1, U_{20}=-\frac{7}{2}J_1-3J_2,\ U_{21}=-\frac{7}{2}J_1-J_2-2J_3,$$

$$U_{22}=-\frac{5}{2}J_1-3J_2, U_{23}=-\frac{5}{2}J_1-J_2-2J_3,\ U_{24}=-3J_1-2J_2-2J_3.$$

Definition 2. A configuration φ is called a ground state for the Hamiltonian (1), if $U(\varphi_b)=\min\{U_1,U_2,U_3,...,U_{24}\}$ for $\forall b\in M$.

For $i=\overline{1,24}$ we put

$$C_i=\{\sigma_b : U(\sigma_b)=U_i\} \text{ and } A_m=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid U_m=\min_{1\le k\le 24}\{U_k\}\}.$$

Quite cumbersome, but not difficult calculations show that:

$$A_1=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\le 0; J_2\le -\frac{1}{6}J_1; J_3\le -\frac{1}{4}J_1-\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_2=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\le 0; J_2= -\frac{1}{6}J_1; J_3\le J_2\},$$

$$A_3=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\le 0; J_2\le -\frac{1}{6}J_1; J_3= -\frac{1}{4}J_1-\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_4=A_{12}=A_{24}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1=0; J_2=0; J_3=0\},$$

$$A_5=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\le 0; J_2\ge -\frac{1}{6}J_1; J_3\le -\frac{1}{4}J_1+\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_6=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\le 0; J_2\le -\frac{1}{2}J_1; J_3\ge -\frac{1}{4}J_1-\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_7=A_{22}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1=0; J_2=0; J_3\le 0\},$$

$$A_8=A_{23}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1=0; J_2\le 0; J_3=-\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_9=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1=0; J_2\ge 0; J_3\ge \frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_{10}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\ge 0; J_2\ge \frac{1}{6}J_1; J_3\le \frac{1}{4}J_1+\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_{11}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\ge 0; J_2\le \frac{1}{2}J_1; J_3\ge \frac{1}{4}J_1-\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_{13}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1=0; J_2\le 0; J_3\ge -\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_{14}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\ge 0; J_2\ge 0; J_3= \frac{1}{4}J_1+\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_{15}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\ge 0; J_2= \frac{1}{2}J_1; J_3\ge J_2\},$$

$$A_{16}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\le 0; J_2\ge 0; J_3= -\frac{1}{4}J_1+\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_{17}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1\le 0; J_2= -\frac{1}{2}J_1; J_3\ge J_2\},$$

$$A_{18}=\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3 \mid J_1=0; J_2\le 0; J_3\le -\frac{1}{2}J_2\},$$

$$A_{19} = \{(J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 | \ J_1 \geq 0; J_2 \leq \frac{1}{6} J_1; J_3 \leq \frac{1}{4} J_1 - \frac{1}{2} J_2\},$$

$$A_{20} = \{(J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 | \ J_1 \geq 0; J_2 = \frac{1}{6} J_1; J_3 \leq J_2\},$$

$$A_{21} = \{(J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 | \ J_1 \geq 0; J_2 \leq \frac{1}{6} J_1; J_3 = \frac{1}{4} J_1 - \frac{1}{2} J_2\},$$

and $\bigcup_{i=1}^{24} A_i = \mathbb{R}^3.$

Let $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{even}\}$, where $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, k+1\}$ and $\omega_x(a_i)$ is the number of a_i in the word x. If $|A| = k+1$, then $H_A \equiv G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{even}\}$, where $|x|$ is length of the word x.

Note that H_A is a normal subgroup of index two (see [2]). Let $G_k / H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ be the quotient group. Denote $H_0 = H_A, H_1 = G_k \setminus H_A$.

Now, we shall study H_0 -periodic ground states. We note that each H_0 -periodic configuration has the following form:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, \text{if } \ x \in H_0, \\ \sigma_2, \text{if } \ x \in H_1, \end{cases} \tag{3}$$

where $\sigma_i \in \Phi, \ i = 1, 2.$

Theorem 1. a) Let $k = 3$ and $|A| = 1.$ Then for the model (1) the following statements hold:

i) If $(J_1, J_2, J_3) \in A_1$ then each translation invariant configuration is a ground state.

ii) If $(J_1, J_2, J_3) \in A_2 \cap A_3$ then each H_0-periodic configuration of the form (3) with $\sigma_1 = \sigma_2 \pm 1 \ \sigma_1, \sigma_2 \in \Phi,$ is a ground state.

iii) If $(J_1, J_2, J_3) \in A_5 \cap A_6$ then each H_0-periodic configuration of the form (3) with $\sigma_1 = \sigma_2 \pm 2 \ \sigma_1, \sigma_2 \in \Phi,$ is a ground state.

b) Let $k = 3$ and $|A| = 2.$ If $(J_1, J_2, J_3) \in A_9$ then each H_0-periodic configuration of the form (3) with $\sigma_1 = \sigma_2 \pm 2 \ \sigma_1, \sigma_2 \in \Phi,$ is a ground state.

c) Let $k=3$ and $|A|=3.$ If $(J_1,J_2,J_3)\in A_{10}\cap A_{11}$ then each H_0 -periodic configuration of the form (3) with $\sigma_1=\sigma_2\pm 2\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi,$ is a ground state.

d) Let $k=3$ and $|A|=4.$

i) If $(J_1,J_2,J_3)\in A_{18}$ then each $G_k^{(2)}$ -periodic configuration of the form (3) with $\sigma_1=\sigma_2\pm 1\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi,$ is a ground state.

ii) If $(J_1,J_2,J_3)\in A_{19}$ then each $G_k^{(2)}$ -periodic configuration of the form (3) with $\sigma_1=\sigma_2\pm 2\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi,$ is a ground state.

Remark 1.

1) Note that applying the methods of [3], one can construct some periodic ground states which are different from the ground states mentioned in Theorem 1.

2) Let $k=3$ and $|A|=l, l=2,3.$ If $\sigma_1=\sigma_2\pm 1,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$ then the configuration (3) is not an H_0 -periodic ground state.

REFERENCE

1. Sinai Ya. G., Theory of phase transitions: rigorous results, / Ya. G. Sinai – Science, M. 1980.

2. Rozikov U.A., Gibbs measures on Cayley trees, / U.A. Rozikov – World Scientific, Singapore, 2013.

3. Rahmatullaev M.M., Abraev B.U., On ground states for the SOS model with competing interactions / M.M.Rahmatullaev, B.U. Abraev // Journal of Siberian Federal University, 2022, Vol 15. No.2 pp. 1-14.

4. Abraev B.U. Ground states for the SOS model with competing binary interactions on a Cayley tree / Abraev B.U. // Uzbek Mathematical Journal 2022, Volume 66, Issue 3, pp.10-20.

UDC 517.98
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_187

SOME CONSTRUCTIVE p-ADIC GENERALIZED GIBBS MEASURES FOR THE ISING MODEL ON A CAYLEY TREE

Rahmatullaev Muzaffar Muhammadjanovich, DSc., professor,
mrahmatullaev@rambler.ru
Namangan regional department, Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky, Namangan, Uzbekistan,

Tukhtabaev Akbarkhuja Mamajonovich, PhD. student,
Namangan state university, Namangan, Uzbekistan,
akbarxoja.toxtaboyev@mail.ru

Abstract: *The paper is devoted to some non-periodic p-adic generalized Gibbs measures for Ising model on a semi-Cayley tree of order $k \geq 1$. We construct uncountable non-periodic p-adic generalized Gibbs measures for the Ising model on a semi-Cayley tree. We study the boundedness of the measures. Furthermore, we find conditions that guarantee existence of the phase transition.*

Keyworsds: *p-adic numbers, p-adic Ising model, Cayley tree, Gibbs measure, phase transition.*

НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКТИВНО *P*-АДИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕННЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович, д.ф.-м.н., профессор,
mrahmatullaev@rambler.ru
Наманганское областное отделение Института математики им. В.И. Романовского, г. Наманган, Узбекистан,
Тухтабаев Акбархужа Мамажонович, PhD.докторант,
Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан,
akbarxoja.toxtaboyev@mail.ru

Аннотация: *Статья посвящена изучению некоторых непериодических p-адических обобщенных мер Гиббса для модели Изинга на полудереве Кэли порядка $k\geq 1$. Построено несчетное количество непериодических p-адических обобщенных мер Гиббса для модели Изинга на полудереве Кэли, а также изучена задача ограниченности этих мер. Кроме того, найдены условия, гарантирующие существование фазового перехода.*

Ключевые слова: *p-адические числа, p-адическая модель Изинга, дерево Кэли, мера Гиббса, фазовый переход.*

Introduction. Let $\mathbb{Q}$ be the field of rational numbers. For a fixed prime number p, every rational number $x\neq 0$ can be represented in the form $x=p^r\dfrac{m}{n}$ where, $r, m, n\in\mathbb{Z}, n>0$ and m, n are relatively prime with p. The p-adic norm of $x\in\mathbb{Q}$ is given by

$$|x|_p=\begin{cases} p^{-r}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

This norm is non-Archimedean, i.e., it satisfies the strong triangle inequality $|x+y|_p\leq\max\{|x|_p,|y|_p\}$ for all $x,y\in\mathbb{Q}$.

The completion of $\mathbb{Q}$ with respect to the p-adic norm defines the p-adic field $\mathbb{Q}_p$.

Any p-adic number $x\neq 0$ can be uniquely represented in the canonical form

$$x=p^{\gamma(x)}\left(x_0+x_1p+x_2p^2+...\right),$$

where $x_j,\ \gamma(x)\in\mathbb{Z},\ x_0\neq 0,\ x_j\in\{0,1,...,p-1\},\ j=1,2,...$.

In this case $|x|_p=p^{-\gamma(x)}$. For $a\in\mathbb{Q}_p$ and $r>0$ we denote

$$B(a,\ r)=\{x\in\mathbb{Q}_p:\ |x-a|_p<r\}.$$

p-adic *exponential* is defined by

$$\exp_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

which converges for $x\in B\left(0,\ p^{-\frac{1}{p-1}}\right)$.

We set

$$E_p=\left\{x\in\mathbb{Q}_p:|x-1|_p<p^{-\frac{1}{p-1}}\right\}.$$

This set is the range of the p-adic exponential function (see e.g. [2]).

Let (X,B) be a measurable space, where B is an algebra of subsets X. A function $\mu:B\to\mathbb{Q}_p$ is said to be a p-adic measure if for any $A_1,A_2,...,A_n\in B$ such that $A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j$, the following holds:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i).$$

A p-adic measure μ is called bounded if $\sup\{|\mu(A)|_p: A\in B\}<\infty$. It is said that p-adic measure is *probabilistic* if $\mu(X)=1$.

Let $\Gamma_+^k=(V,L)$, be a semi-infinite Cayley tree [1] of order $k\geq 1$ with the root $x^0\in V$ (whose each vertex has exactly $k+1$ edges, except for the root x^0, which has k edges). Here V is the set of vertices and L is the set of edges. The vertices x and y are called nearest neighbors and they are denoted by $l=\langle x,y\rangle$ if there exists an edge l connecting them. A collection of the pairs $\langle x,x_1\rangle,\ \langle x_1,x_2\rangle,\ldots,\ \langle x_{d-1},y\rangle$ is called a path from the point x to the point y. The distance $d(x,y)$, $x,y\in V$, on the semi-Cayley tree, is the number of edges of the shortest path from x to y.

We set

$$W_n=\{x\in V\mid d(x,x^0)=n\},\ \ V_n=\{x\in V\mid d(x,x^0)\leq n\},$$

$$L_n=\{l=<x,y>\in L\mid x,y\in V_n\}.$$

The set of direct successors of $x\in W_n$ is defined by

$$S(x)=\{y\in W_{n+1}:d(x,y)=1\}.$$

We recall a coordinate structure in Γ_+^k: every vertex x (except for x^0) of Γ_+^k has coordinates $(i_1,i_2,...,i_n)$, here $i_m\in\{1,2,...,k\}$, $m=\overline{1,n}$, and for the vertex x^0 we put (0). Namely, the symbol (0) constitutes level 0, and the sites $(i_1,i_2,...,i_n)$ form level

n (i.e. $d(x^0, x) = n$) of the lattice. Let us define on Γ_+^k binary operation $\circ : \Gamma_+^k \times \Gamma_+^k \to \Gamma_+^k$ as follows: for any two elements $x = (i_1, i_2, ..., i_n)$ and $y = (j_1, j_2, ..., j_m)$ put $x \circ y = (i_1, i_2, ..., i_n) \circ (j_1, j_2, ..., j_m) = (i_1, i_2, ..., i_n, j_1, j_2, ..., j_m)$

By means of the defined operation Γ_+^k becomes a noncommutative semigroup with a unit. Let us denote this group by $(G^k, \circ)$. Using this semigroup structure one defines translations $\tau_g : G^k \to G^k,\ g \in G^k$ by $\tau_g(x) = g \circ x$.

Let $G \subset G^k$ be a sub-semigroup of G^k and $h : G^k \to Y$ be a Y-valued function defined on G^k. We say that h is G*-periodic* if $h(\tau_g(x)) = h(x)$ for all $g \in G$ and $x \in G^k$. Any G^k-periodic function is called *translation-invariant*. Now for each $m \geq 2$ we put $G_m = \{x \in G^k : d(x, x^0) \equiv 0 \pmod m\}$. One can check that G_m is a sub-semigroup of $x \in G^k$.

We consider p-adic Ising model on the semi-infinite Cayley tree Γ_+^k. Let $\mathbb{Q}_p$ be a field of p-adic numbers and $\Phi = \{-1, 1\}$. A configuration σ on $A \subseteq V$ is defined as a function $x \in A \to \sigma(x) \in \Phi$. The set of all configurations on A is denoted by $\Omega_A = \Phi^A$. For given configurations $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_n}$ and $\varphi^{(n)} \in \Omega_{W_n}$ we define a configuration in Ω_{V_n} as follows

$$(\sigma_{n-1} \vee \omega_n)(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), & if\ x \in V_{n-1}, \\ \varphi^{(n)}(x), & if\ x \in W_n. \end{cases}$$

A formal p-adic Hamiltonian $H : \Omega \to \mathbb{Q}_p$ of the Ising model is defined by

$$H(\sigma) = J \sum_{<x,y> \in L} \sigma(x)\sigma(y) \ , \tag{1}$$

where $J \in B\left(0,\ p^{\frac{1}{1-p}}\right)$ for any $<x, y> \in L$.

We are aiming to study some non-periodic p-adic generalized Gibbs measures for the

Ising model on a Cayley tree. Our approach is based on properties Markov random fields on the Cayley tree.

Let $h: x \in V \setminus \{x^0\} \to h_x \in \mathbb{Q}_p$ be a function. We define p-adic probability generalized Gibbs distribution $\mu_h^{(n)}$ on Ω_{V_n} by

$$\mu_h^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n^{(h)}} \exp_p \{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x \in W_n} h_x^{\sigma(x)}, \ n = 1, 2, ..., \tag{2}$$

where $Z_n^{(h)}$ is corresponding normalizing constant:

$$Z_n^{(h)} = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \exp\{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x \in W_n} h_x^{\sigma(x)}. \tag{3}$$

The compatibility conditions for $\mu_h^{(n)}(\sigma_n)$, $n \geq 1$ are given by the equality

$$\sum_{\varphi^{(n)} \in \Omega_{W_n}} \mu_h^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \varphi^{(n)}) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{4}$$

In this case, by the p-adic analogue of Kolmogorov theorem ([3]) there exists a unique measure μ_h on the set Ω such that $\mu_h\left(\left\{\sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\right\}\right) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1})$, for all n and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$.

A limiting p-adic distribution generated by (2) is called p-adic *generalized Gibbs measure* [4].

If there are two different measures μ_s, μ_h and they are bounded, then one says that there is a *quasi-phase transition*. If there are at least two distinct p-adic generalized Gibbs measures μ and ν such that μ is bounded and ν is unbounded, then one says that a *phase transition* occurs. Moreover, if there is a sequence of sets A_n such that $A_n \in \Omega_{V_n}$ with $|\mu(A_n)|_p \to 0$ and $|\nu(A_n)|_p \to \infty$ as $n \to \infty$, then there occurs a *strong phase transition* [4].

Theorem 1. [4] *The sequence of p-adic distributions $\left\{\mu_h^{(n)}(\sigma_n)\right\}_{n\geq 1}$ determined by formula (2) is consistent if and only if for any $x \in V \setminus \{x^0\}$, the following equation holds*

$$h_x^2 = \prod_{y \in S(x)} \frac{\theta h_y^2 + 1}{h_y^2 + \theta} \tag{5}$$

where $\theta = \exp\{2J\}$, $\theta \neq 1$.

Main results. On the semi-Cayley tree of order two, we denote by $h_i^{(t)}$ ($i = 0, 1, 2$) and $h_j^{(p)}$ ($j = 1, 2$) the translation-invariant and G_2-periodic solutions of the equation (5), respectively. It is known [4] that if $p \equiv 1 \pmod 4$ then

$$h_0^{(t)} = 1,\ h_{1,2}^{(t)} = \frac{\theta - 1 \pm \sqrt{(\theta-3)(\theta+1)}}{2},\ h_{1,2}^{(p)} = \frac{1-\theta \pm \sqrt{(\theta-1)^2 - 4\theta^2}}{2\theta} \quad (6)$$

Let $k \geq 3,\ k_0 = 2$. For $x \in V$, by $S_{k_0}(x)$ we denote an arbitrary set of k_0 vertices of the set $S(x)$, and remaining $k - k_0$ vertices is denoted by $S_{k-k_0}(x)$. Let $k - k_0 = a + b + c$, where a and b are even, c is even or odd. We define the set of quantities $h = \{h_x, x \in V\}$ (where $h_x \in \left\{1, h_1^{(t)}, h_2^{(t)}, h_1^{(p)}, h_2^{(p)}\right\}$) as follows:

if at vertex x we have $h_x = h_i^{(t)}$ ($i = 1, 2$) ($h_x = h_i^{(p)}$ or $h_x = 1$), then the function h_y, which gives p-adic values to each vertex $y \in S(x)$ is defined by the following rule (7) (resp. (8) or (9)).

$$h_y = \begin{cases} h_i^{(t)} & \text{on} \quad a/2 + 2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ h_{3-i}^{(t)} & \text{on} \quad a/2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ h_i^{(p)} & \text{on} \quad b/2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ h_{3-i}^{(p)} & \text{on} \quad b/2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ 1 & \text{on} \quad c \quad \text{vertices of } S(x). \end{cases} \quad (7)$$

$$h_y = \begin{cases} h_i^{(t)} & \text{on} \quad a/2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ h_{3-i}^{(t)} & \text{on} \quad a/2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ h_i^{(p)} & \text{on} \quad b/2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ h_{3-i}^{(p)} & \text{on} \quad b/2 + 2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ 1 & \text{on} \quad c \quad \text{vertices of } S(x). \end{cases} \quad (8)$$

$$h_y = \begin{cases} h_i^{(t)} & \text{on} \quad a/2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ h_{3-i}^{(t)} & \text{on} \quad a/2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ h_i^{(p)} & \text{on} \quad b/2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ h_{3-i}^{(p)} & \text{on} \quad b/2 \quad \text{vertices of } S(x), \\ 1 & \text{on} \quad c + 2 \quad \text{vertices of } S(x). \end{cases} \quad (9)$$

Lemma 1. *Let* $p \equiv 1 \pmod 4$. *Then any set of quantities according to the rules (7), (8)* *and (9) on the Cayley tree Γ_+^k satisfy the functional equation (5).*

Remark 1. 1) If $a=b=c=0$ in (7) and (9) then p-adic generalized Gibbs measures corresponding to set of quantities h_x are translation-invariant, the figure for case (8), we get p-adic generalized $G_2^{(2)}$-periodic Gibbs measures (see [4]);

2) If $a=b=0,\ c\neq 0$ in (9) and (7), (8) then p-adic generalized Gibbs measures corresponding to set of quantities h_x are translation-invariant (see [4]) and ART Gibbs measures, respectively (see [6]);

3) If $b=c=0, a\neq 0$ in (7) then p-adic generalized Gibbs measures corresponding to set of quantities h_x are (k_0)-translation-invariant (see [7]);

4) If $a=c=0, b\neq 0$ in (8) then p-adic generalized Gibbs measures corresponding to set of quantities h_x are (k_0)-periodic (see [7]);

5) In other cases, we get new measures except to previous known ones.

In real case Bleher-Ganikhodjaev construction was studied in [8]. We are going to investigate this construction in p-adic case. Consider an infinite path $\pi = x^0 = x_0 < x_1 < \ldots$ on the semi-Cayley tree Γ_+^k (the notation $x<y$ meaning that paths from the root to y go through x). We assign the set of p-adic numbers $h^\pi = \{h_x^\pi, x\in V\}$ satisfying the equation (5) to the path π. For $n=1, 2, \ldots, x\in W_n$, the set h^π is unambiguously defined by the conditions

$$h_x^\pi = \begin{cases} \dfrac{1}{h_*}, & if \quad x \prec x_n,\ x\in W_n, \\ h_*, & if \quad x_n \prec x,\ x\in W_n, \end{cases} \tag{10}$$

where $x\prec x_n$ (resp. $x_n \prec x$) means that x is on the left (resp. right) from the path π and h_* is translation-invariant solution of the equation (5).

Lemma 2. *For any infinite path π, there exists a unique set of numbers $h^\pi = \{h_x^\pi, x\in V\}$ satisfying (5) and (10).*

Remark 2. The measure which is defined in Lemma 2, depends on the path π. The cardinality of the measures is uncountable (see [8]).

Theorem 2. *Let* $p \equiv 1 \pmod 4$. *Then for the measures correspond to the set of quantities according to the rules (7), (8) and (9) the followings hold*

1) *If* $a^2 + b^2 \neq 0$, *then the measures are unbounded;*
2) *If* $a = b = 0$, *then the measures are bounded.*

Theorem 3. *Let* $p \geq 3,\ h_x^{\pi}$ *be the set of quantities defined by (10). Then the measures correspond to the set of quantities* h_x^{π} *are bounded if and only if* $h_* = 1$.

Theorem 4. *Let* $p \geq 3,\ \mathbb{Q}_p$ *be a field of* p*-adic numbers in which there exist translation-invariant solutions of the functional equation (5). Then there exists a phase transition in the field* $\mathbb{Q}_p$.

REFERENCES

1. U.A.Rozikov, Gibbs Measures on Cayley Trees, World Scientific Publisher, Singapore, 2013.
2. V.S.Vladimirov, I.V.Volovich and E.V.Zelenov, p-Adic Analysis and Mathematical Physics, World Scientific Publisher, Singapore, 1994.
3. N.N.Ganikhodjayev, F.M.Mukhamedov, U.A.Rozikov, Existence of phase transition for the Potts p-adic model on the set $\mathbb{Z}$. Theor. Math. Phys. 130(2002), No.3, 425-431.
4. O.N.Khakimov, On a generalized p-adic Gibbs measure for Ising model on trees, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl., 6(3), 207-217, 2014.
5. F.M.Mukhamedov, On p-adic quasi Gibbs measures for $q+1$-state Potts model on the Cayley tree, p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl., (2010), 241-251.
6. H.Akin, U.A.Rozikov, S.Temir, A new set of limiting Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree, J.Stat. Phys., 142, 314-321, 2011.
7. M.M.Rahmatullaev and A.M.Tukhtabaev, Non periodic p-adic generalized Gibbs measure for the Ising model, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl., 11, 319-327, 2019.
8. P.M.Bleher and N.N.Ganikhodjaev, On pure phases of the Ising model on the Bethe lattice, Theor. Probab. Appl., 35, 216-227, 1990.

УДК 517.98 – 519.21
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_195

NEW WEAKLY PERIODIC $p-$ADIC GENERALIZED GIBBS MEASURE FOR THE $p-$ADIC ISING MODEL ON THE CAYLEY TREE OF ORDER TWO

Raxmatullayev MuzaffarMuxammadjanovich, Dr Sc, professor,
mrahmatullaev@rambler.ru
Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Namangan, Uzbekistan
Abdukaxorova Zulxumor Tuxtasinovna, graduate student of PhD,
zulxumorabdukaxorova@gmail.com
Namangan State University,
Namangan, Uzbekistan.

Abstract. *In the present paper, we study the $p-$adic Ising model on the Cayley tree of order two. The existence of H_A-weakly periodic (non-periodic) $p-$adic generalized Gibbs measures for this model is proved.*

Keywords: *Cayley tree, $p-$adic numbers, $p-$adic Ising model, Gibbs measure, weakly periodic Gibbs measure.*

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ $p-$АДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА ДЛЯ $p-$АДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович, д.ф.-м.н., профессор,
mrahmatullaev@rambler.ru
Институт Математики имени В.И. Романовского
Академии Наук Республики Узбекистан,
Наманган, Узбекистан
Абдукахорова Зулхумор Тухтасиновна, аспирант,
zulxumorabdukaxorova@gmail.com
Наманганский государственный университет,

Наманган, Узбекистан

Аннотация. *В этой статье изучене $p-$адическая модель Изинга на дереве Кэли второго порядка. Доказано существование H_A - слабо периодических (непериодических) $p-$адических обобщенных мер Гиббса для этой модели.*

Ключевые слова: *Дерево Кэли, $p-$ адические числа, модель Изинга, мера Гиббса, слабо периодические мера Гиббса.*

Let Q be the field of rational numbers. For a fixed prime p, every rational number $x \neq 0$ can be represented in the form $x = p^r \frac{n}{m}$, where $r, n \in Z$, m is a positive integer, and n and m are relatively prime with p, r is called the order of x and written $r = ord_p x$. The p-adic norm of x is given by

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

This norm is non-Archimedean and satisfies the so called strong triangle inequality

$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$

for all $x, y \in Q$.

The completion of Q with respect to the p-adic norm defines the p-adic field which is denoted by Q_p (see [1]).

The completion of the field of rational numbers Q is either the field of real numbers R or one of the fields of $p-$adic numbers Q_p (Ostrowski's theorem).

Any p-adic number $x \neq 0$ can be uniquely represented in the canonical form

$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + ...)$

where $\gamma(x) \in Z$ and the integers x_j satisfy: $x_0 \neq 0,\ x_j \in \{0,1,2,..., p-1\},\ j \in N$ (see [1]). In this case $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree i.e., a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Denote by V the set of vertices, and by L the set of edges of the Cayley tree Γ^k. Two vertices x and y are called *nearest neighbours* if there exist an edge $l \in L$ connecting them and denote by $l = \langle x, y \rangle$ (see [2]).

Fix $x_0 \in \Gamma^k$ and given vertex x, denote by $|x|$ the number of edges in the shortest path connecting x_0 and x.

For $x, y \in \Gamma^k$, denote by $d(x, y)$ the number of edges in the shortest path connecting x and y. For $x, y \in \Gamma^k$, we write $x \leq y$ if x belongs to the shortest path connecting x_0 with y, and we write $x < y$ if $x \leq y$ and $x \neq y$. If $x \leq y$ and $|y| = |x| + 1$, then we write $x \to y$.

We set

$$W_n = \{x \in V | d(x, x_0) = n\}, \ V_n = \{x \in V | d(x, x_0) \leq n\}, \ L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L | x, y \in V_n\}$$
$$S(x) = \{y \in V : x \to y\}, \quad S_1(x) = \{y \in V : d(x, y) = 1\}.$$

The set $S(x)$ is called *direct successor of* x.

We consider a $p-$adic Ising model where the spin values take in the set $\Phi = \{-1, 1\}$. We define a configuration σ on V by the function $\sigma : x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Similarly, one can be define σ_n and σ^n on V_n and W_n respectively. Ω is the set if all configuration on V and denote $\Omega = \Phi^V$ (resp. $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$).

For given configurations $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ and $\varphi^{(n)} \in \Omega_{W_n}$ we define a configuration in Ω_{V_n} as follows

$$(\sigma_{n-1} \vee \varphi^n)(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), & if \quad x \in V_{n-1} \\ \varphi^n(x), & if \quad x \in W_n \end{cases}.$$

A formal $p-$adic Hamiltonian $H : \Omega \to Q_p$ of the $p-$adic Ising model is defined by

$$H(\sigma) = J \sum_{\{x,y\} \in L} \sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

where $0 < |J|_p < p^{-1/(p-1)}$ for any $\langle x, y \rangle \in L$.

We define a function $h : x \to h_x$, $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$, $h_x \in Q_P$ and consider $p-$ adic probability generalized Gibbs measure μ_h^n on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_h^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n^{(h)}} \exp_p\{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}, \quad n = 1,2,..., \tag{2}$$

where $Z_n^{(h)}$ is the normalizing constant

$$Z_n^{(h)} = \sum_{\varphi \in \Omega_{V_n}} \exp_p\{H_n(\varphi)\} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}. \tag{3}$$

A $p-$adic probability generalized Gibbs measure μ_h^n is said to be consistent if for all $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$, we have

$$\sum_{\varphi \in \Omega_{W_n}} \mu_h^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \varphi) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{4}$$

In this case, by the $p-$adic analogue of Kolmogorov theorem there exists a unique measure μ_h on the set Ω such that $\mu_h(\{\sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}) = \mu_h^{(n)}(\sigma_n)$ for all n and $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.(see [3])

Proposition 1.[4] The sequence of $p-$ adic probability distributions $\{\mu_h^{(n)}\}_{n\geq 1}$, determined by formula (2) is consistent if and only if for any $x \in V \setminus \{x_0\}$**,** the following equation holds:

$$h_x^2 = \prod_{y \in S(x)} \frac{\theta h_y^2 + 1}{h_y^2 + \theta}, \tag{5}$$

where $\theta = \exp_p(2J),\ \theta \neq 1.$

It is known that Γ^k can be represented as a non-commutative group G_k, which is the free product of k +1 cyclic groups of the second order [2].

Let $G_k / G_k^* = \{H_0, H_1, ..., H_r\}$ be a factor group, where G_k^* is a normal subgroup of index $r \geq 1$.

Definition 1. A set $h = \{h_x,\ x \in G_k\}$ of quantities is called G_k^*- periodic if $h_{xy} = h_x$, for all $x \in G_k$ and $y \in G_k^*$.

For $x \in G_k$ we denote by $x_\downarrow$ the unique point of the set $\{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$.

Definition 2. A set of quantities $h=\{h_x,\ x\in G_k\}$ is called G_k^*- weakly periodic, if $h_x=h_{ij}$, for any $x\in H_i\ x_{\downarrow}\in H_j$.

Definition 3. A *p*-adic generalized Gibbs measure μ is said to be G_k^*-(weakly) periodic if it corresponds to a G_k^*- (weakly) periodic h. We call a G_k-periodic measure a translation-invariant measure.

Let

$$H_A=\left\{x\in G_k:\sum_{i\in A}\omega_x(a_i)-even\right\},$$

where $\varnothing\neq A\subseteq N_k=\{1,2,3,...,k+1\}$, and $\omega_x(a_i)$ is the number of letters a_i in a word $x\in G_k$. Note that H_A- is a normal subgroup of the G_k (see [2]). Note that a weakly periodic Gibbs measure depends on normal subgroup. According to the selection of the normal subgroup, different weakly periodic Gibbs measures are found (see [3]). The set of weakly periodic Gibbs measures also includes the set of periodic (in particular translation-invariant) Gibbs measures.

We note that in the case $|A|=k+1$ (where $|A|$ is the number of elements of the set A), i.e., $A=N_k$, the concept of weak periodicity coincides with ordinary periodicity. Therefore, we consider $A\subset N_k$ such that $A\neq N_k$. In this work, we consider the case $|A|=1$. According to (5) the H_A-weakly periodic set of h_x has the following form

$$h_x=\begin{cases} h_{00}, & if\ \ x\in H_A, \quad x_{\downarrow}\in H_A,\\ h_{01}, & if\ \ x\in H_A, \quad x_{\downarrow}\in G_k\setminus H_A,\\ h_{10}, & if\ \ x\in G_k\setminus H_A, \quad x_{\downarrow}\in H_A,\\ h_{11}, & if\ \ x\in G_k\setminus H_A, \quad x_{\downarrow}\in G_k\setminus H_A.\end{cases} \tag{6}$$

By (5) we have

$$\begin{cases} h_{00}^2=\dfrac{\theta h_{10}^2+1}{\theta+h_{10}^2}\cdot\dfrac{\theta h_{00}^2+1}{\theta+h_{00}^2},\\ h_{01}^2=\left(\dfrac{\theta h_{00}^2+1}{\theta+h_{00}^2}\right)^2,\\ h_{10}^2=\left(\dfrac{\theta h_{11}^2+1}{\theta+h_{11}^2}\right)^2,\\ h_{11}^2=\dfrac{\theta h_{11}^2+1}{\theta+h_{11}^2}\cdot\dfrac{\theta h_{01}^2+1}{\theta+h_{01}^2}.\end{cases} \tag{7}$$

Consider operator $W: R^4 \to R^4$, defined as follows:

$$\begin{cases} h_{00}'^2 = \dfrac{\theta h_{10}^2+1}{\theta+h_{10}^2}\cdot\dfrac{\theta h_{00}^2+1}{\theta+h_{00}^2}, \\ h_{01}'^2 = \left(\dfrac{\theta h_{00}^2+1}{\theta+h_{00}^2}\right)^2, \\ h_{10}'^2 = \left(\dfrac{\theta h_{11}^2+1}{\theta+h_{11}^2}\right)^2, \\ h_{11}'^2 = \dfrac{\theta h_{11}^2+1}{\theta+h_{11}^2}\cdot\dfrac{\theta h_{01}^2+1}{\theta+h_{01}^2}. \end{cases}$$

Note that the system of (7) describes fixed points of the operator W, i.e. $h = W(h)$.

Lemma 1. The following sets are invariant with respect to the operator W:

$$I_1 = \{h \in R^4 : h_{00} = h_{01} = h_{10} = h_{11}\},$$
$$I_2 = \{h \in R^4 : h_{00} = \pm h_{11},\ h_{10} = \pm h_{01}\}.$$

Remark 1. [4] *It is easy to see that if the function* $-h_x$ *is a solution to equation (5), then the function* $-h_x$ *is also a solution. These solutions define the same measure* μ_h *which we consider Ising model on the Cayley tree*

of order k.

We shall find H_A-weakly periodic (non-periodic) $p-$adic generalized Gibbs measure for the Ising model on the set I_2.

The system of equation (7) has the following solutions

$$h_{00_{1,2}} = \pm 1,$$
$$h_{00_{3,4}} = \pm\frac{\theta-1+\sqrt{(\theta+1)(\theta-3)}}{2},$$
$$h_{00_{5,6}} = \pm\frac{\theta-1-\sqrt{(\theta+1)(\theta-3)}}{2},$$
$$h_{00_{7,8}} = \pm\sqrt{-1}.$$

Lemma 2. The solutions h_{00_7} and h_{00_8} belong to Q_p, iff $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Theorem 1. If $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ then there exists at least one weakly periodic (non-periodic) $p-$adic generalized Gibbs measure for the $p-$adic Izing model on the Cayley tree of order two.

Remark 2. In [5] it was proved that for the Ising model on a Cayley tree of order k = 2 with respect to the normal divisor of index 2, there does not exist a weakly periodic (non-translation-invariant) Gibbs measure in real case. In p-adic case in Theorem 1 it was shown that for the Ising model there is at least one new weakly periodic p-adic generalized Gibbs measure.

REFERENCES

1. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. V. Zelenov, p -Adic Analysis and Mathematical Physics (*World Sci. Publ., Singapore*,1994).

2. U. A. Rozikov, Gibbs Measures on Cayley Trees *(World Sci. Publ., Singapore*, 2013).

3. Rozikov U. A., Rahmatullaev M. M. Description of weakly periodic Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree. *Theor. Math.Phys.*, 156(2): (2008).

4. Khakimov O. N. On a Generalized p-adic Gibbs Measure for Ising Model on Trees. *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.*, 6(3), 2014, pp.207-217.

5. Rahmatullaev M. M. "On new weakly periodic Gibbs measures of the Ising model on the Cayley tree of order 6". *J. Phys.: Conf. Ser.*, 697 (2016), 012020, pp.7.

УДК 517.978
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_202

DIFFERENTIAL L-CAPTURE AND EVASION GAMES WITH INERTIAL PLAYERS UNDER GEOMETRIC CONSTRAINTS ON CONTROLS

Samatov Bahrom Tadjiahmatovich, Dr Sc, professor,
samatov57@gmail.com
Turgunboeva Mohisanam Akhmadullo kizi, student of PhD,
turgunboyevamohisanam95@gmail.com
Namangan State University,
Namangan, Uzbekistan

Abstract. *This paper is devoted to solve l-capture and evasion problems for a differential game of two players, a pursuer and an evader, with inertial motions. We impose geometric constraints on controls of the players.* *Originally, we devise an l-approach strategy, on the basis of Chikrii's method of resolving functions, for a pursuer and we present new sufficient conditions of l-capture. Here as l-capture, we refer the moment when a pursuer approaches an evader at the range l>0. In the evasion problem we define the strategy guaranteeing an evader to diverge from a pursuer at the distance greater than l>0. Besides that, new sufficient conditions of evasion have been shown.*

Keywords: *Differential game, l-capture, evasion, pursuer, evader, geometric constraint, strategy, guaranteed time of l-capture.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНИХ ИГР *l*-ПОИМКИ И УБЕГАНИЯ С ИНЭРЦИОННЫМИ ИГРОКАМИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЯМИ

Саматов Бахром Таджиахматович , д.ф.-м.н., профессор,
samatov57@gmail.com
Тургунбоева Мохисанам Ахмадулло кизи, аспирант,
turgunboyevamohisanam95@gmail.com
Наманганский государственный университет,
Наманган, Узбекистан

Аннотация: *В этой статье рассмотрена проблемы чем l-поимка и убегания для дифференциальных игр с двумя игроками, называется преследователь и убегающий, имеет инерционные движения. Мы наложили геометрические ограничения на управление игроками. Мы построили стратегию сходимости на основе метода разрешающих функции А.А.Чикрия для преследователя и представили новые достаточные условия l-поимки. Здесь, под l-захватом мы понимаем момент, когда преследователь приближат- ся к убегающему на расстояние l>0. В задаче об уклонении мы определили стратегию, гарантирующую уклонение убегающего от преследователя на расстояние большее, чем l>0. Кроме того, показаны новые достаточные условия уклонения.*

Ключевые слова: *дифференциальная игра, l-поимка, убегания, преследова-тель, убегающий, геометрическое ограничение, стратегия, гарантированное время l-поимка.*

Introduction. Differential game problems were first comprehensively looked into by American mathematician R.Isaacs [1, p. 340] in the 1950th. Subsequently, Pontryagin [2, p. 551] and Krasovsky-Subbotin [3, p. 517] set the fundamental approaches of Theory of Differential Games.

The problem for the case of *l*-approach [5, p. 272] was first proposed and explained by Indian mathematician Ramchundra. Later, Pshenichnyi [6, p. 484-485], Petrosyan [4, p. 31-38], Satimov [7, p. 203], Azamov [8, p. 38-43], Samatov [9, 10] and others studied that problem, and interesting results were obtained by them. In the work of Petrosyan and Dutkevich [4, p. 31-38], the *l*-capture problem was investigated for the players moving at the limited velocities by coordinates on the plane and also, a lifeline game was solved by geometrical method. Later on, by virtue of Chikrii's method of resolving functions, B.T.Samatov [9, p. 907-921; 10, p. 94-107] solved the problem of group pursuit for the case of *l*-capture in a simple motion of the players under integral constraints on controls. In [11, p. 574-579], Khaidarov considered the problem of positional *l*-capture of one evader by a group of pursuers provided that each of the players has a simple movement.

In the paper, we have studied the *l*-capture and evasion problems in a differential game with inertial players whose controls are subject to geometrical constraints. In the *l*-capture problem, an approach strategy is formulated for a pursuer and sufficient conditions of *l*-capture are obtained. In the evasion problem, a specific strategy is suggested for an evader and sufficient conditions of evasion are found. Furthermore, it is shown how the distance between the players changes during the evasion game.

1. Statement of problems. Suppose that in the finite-dementional space $\mathbb{R}^n$, the pursuer chases the evader. Let their motions be based on the differential equations with initial conditions

$$\ddot{x} = u, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} = v, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad y(0) = y_0 \tag{2}$$

correspondingly, where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_0, y_0 are the initial states of the players for which it is supposed that $|x_0 - y_0| > l$, $l > 0$; x_1, y_1 are their initial velocity vectors accordingly, and assume $x_1 = y_1$; the acceleration vectors u, v function as control parameters of the players, respectively and they depend on the time $t \geq 0$.

The controls u, v are single out as measurable functions $u(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$, and they are subject to the constraints

$$|u(t)| \leq \alpha \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)| \leq \beta \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{4}$$

which are usually said the *geometric constraints* (in short, G*-constraints*), where α, β are the given positive parametric numbers which express maximal acceleration values of the players appropriately. The family of all the measurable functions satisfying (3) is denoted by $U_{G,l}$, and the family of all the measurable functions satisfying (4) is denoted by $V_{G,l}$.

Definition 1. A measurable function $u(\cdot) \in U_{G,l}$ $\left(v(\cdot) \in V_{G,l}\right)$ is said an *acceptable control of the pursuer* (*of the evader*).

For some $u(\cdot) \in U_{G,l}$ and $v(\cdot) \in V_{G,l}$, from the equations (1), (2) the triplets $\left(x_0, x_1, u(\cdot)\right)$ and $\left(y_0, y_1, v(\cdot)\right)$ describe the trajectories

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \int_0^t (t-s)u(s)ds, \quad y(t) = y_0 + y_1 t + \int_0^t (t-s)v(s)ds$$

of the players.

The chief target of the pursuer is to converge the evader at the distance $l > 0$ (l-capture problem), i.e., to attain the relation

$$|x(\eta) - y(\eta)| \leq l \tag{5}$$

at some finite time $\eta > 0$. As for the evader struggles to get out of the occurrence of (5) (evasion problem), i.e., to continue the inequality

$$|x(t)-y(t)|>l \tag{6}$$

for all $t \geq 0$ or if it is impossible, to put off the instant η when the inequality (5) holds.

Obviously, for the pursuer, control functions depending only on the time $t \geq 0$ are not adequate to solve the *l*-capture problem, and suitable types of controls should be strategies.

Let us introduce the denotations: $z(t)=x(t)-y(t),\ z(0)=z_0,\ \dot{z}(0)=z_1$. Then we have $z_0=x_0-y_0,\ z_1=x_1-y_1$.

Due to (1), (2), come to the unique Cauchy problem in the form

$$\ddot{z}=u-v,\ \dot{z}(0)=0,\ z(0)=z_0. \tag{7}$$

2. The main results.

Definition 2. For $\alpha \geq \beta$**,** we say the function

$$\mathbf{u}(v,z_0)=v-\lambda(v,z_0)\frac{\alpha z_0+vl}{\alpha+\lambda(v,z_0)l} \tag{8}$$

the *convergence strategy of the pursuer* or Π_l *-strategy* in the differential game (1)-(4), where $\lambda(v,z_0)=\frac{1}{h^2}\left[\langle v,z_0\rangle+\alpha l+\sqrt{\left(\langle v,z_0\rangle+\alpha l\right)^2+h^2\left(\alpha^2-|v|^2\right)}\right]$, $h^2=|z_0|^2-l^2$.

Note that the function $\lambda(v,z_0)$ is generally called the *resolving function*. Below we will provide some important properties for the strategy (8) and the resolving function $\lambda(v,z_0)$.

Proposition 1. If $\alpha \geq \beta$ holds, then the strategy (8) is defined and continuous for any $v,\ |v|\leq\beta$, and the equality $|\mathbf{u}(v,z_0)|=\alpha$ holds during the *l*-capture game.

Proposition 2. If $\alpha \geq \beta$ is valid, then the function $\lambda(v,z_0)$ is defined, non- negative and continuous for any $v,\ |v|\leq\beta$, and it is bounded as

$$(\alpha-\beta)/(|z_0|-l)\leq\lambda(v,z_0)\leq(\alpha+\beta)/(|z_0|-l). \tag{9}$$

Definition 3. In *l*-capture (1)-(4), we say that Π_l-strategy (8) *guarantees to occur l-capture* in some time interval $[0,T_l]$ if, for any $v(\cdot)\in V_{G,l}$:

a) some moment $t_*\in[0,T_l]$, occurs $|z(t_*)|\leq l$, is likely to be found;

b) in the time interval $[0,\ t_*]$, the inclusion $\mathbf{u}(v,z_0)\in U_{G,l}$ is satisfied,

where the number T_l is called a *guaranteed time of l-capture*.

Theorem 1. Let $\alpha>\beta$. Then Π_l -strategy (8) guarantees to occur

l-capture on the interval $[0, T_l]$ in the l-capture problem (1)-(4), where

$$T_l = \sqrt{2(|z_0| - l)/(\alpha - \beta)}.$$

Definition 4. We call the control function

$$v_*(t) = -\beta \frac{z_0}{|z_0|} \tag{10}$$

a *strategy of the evader*.

Definition 5. We say that the strategy $v_*(t)$ is *winning* if, for any control $u(\cdot) \in U_{G,l}$, the solution $z(t)$ of

$$\ddot{z} = u(t) - v_*(t), \quad \dot{z}(0) = 0, \quad z(0) = z_0 \tag{11}$$

fulfills the inequality (6) for all t, $t \geq 0$.

Theorem 2. Let $\alpha \leq \beta$. Then in the evasion game (1)-(4), the strategy $v_*(t)$ is winning in the time interval $[0, +\infty)$, and the distance between the pursuer and the evader varies in terms of the function

$$E(t) = \frac{\beta - \alpha}{2} t^2 + |z_0| - l.$$

REFERENCES

1. Isaacs R. Differential games. John Wiley and Sons, New York. 1965, 340 p.
2. Pontryagin L.S. Selected Works. MAKS Press, Moscow. 2014, 551 p.
3. Krasovsky N.N. Game-Theoretical Control Problems/ Subbotin A.I. Springer, New York. 1988, 517 p.
4. Petrosyan L.A. Games with “a Survival Zone”. Occasion *L*-catch / Dutkevich V.G. Vestnik Leningrad State Univ., 1969, Vol.3, № 13, p. 31-38.
5. Nahin P.J. Chases and escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion. Princeton University Press, Princeton. 2012, p. 272.
6. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. Cybernetics and Systems Analysis, 1976, Vol. 12, № 5, p. 484-485.
7. Satimov N.Yu. Methods for solving the pursuit problem in the Theory of Differential Games. Izd-vo NUUz, Tashkent. 2003. P. 203
8. Azamov A.A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Serdica Bulgariacae math., 1986, Vol. 12, № 1, p. 38-43.

9. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. Cybernetics and Systems Analysis, 2013, Vol. 49, № 6, p. 907-921.
10. Samatov B.T. Differential game with a lifeline for the inertial movements of players / Soyibboyev U.B. Ural Mathematical Journal, Vol. 7, № 2, p. 94-107.
11. Khaidarov B.K. Positional *l*-catch in the game of one evader and several pursuers. Prikl. Matem. Mekh., 1984, Vol. 48, № 4, p. 574-579.

UDK 517.911
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_208

NONLINEAR TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND ORDER IMPULSIVE SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MIXED MAXIMA

Fayziyev Aziz Kudratillayevich, PhD student
fayziyev.a@inbox.ru
Tashkent state university of economics,
Tashkent, Uzbekistan

Abstract: *A two-point nonlinear boundary value problem for a second order system of ordinary integro-differential equations with impulsive effects and mixed maxima is investigated. By applying some transformations is obtained a system of nonlinear functional integral equations. The existence and uniqueness of the solution of the nonperiodic two-point boundary value problem are reduced to the one valued solvability of the system of nonlinear functional integral equations in Banach space* $PC\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$. *The method of successive approximations in combination with the method of compressing mapping is used in the proof of one-valued solvability of nonlinear functional integral equations.*

Keywords: *Second order system, impulsive integro-differential equations, two-point nonlinear boundary value conditions, mixed maxima, successive approximations, existence and uniqueness of solution.*

НЕЛИНЕЙНАЯ ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СМЕШАННЫМИ МАКСИМУМАМИ

Файзиев Азиз Кудратиллаевич, PhD докторант,
fayziyev.a@inbox.ru
Ташкентский государственный экономический университет
Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *Исследуется двухточечная нелинейная краевая задача для системы обыкновенных* *интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с импульсными эффектами и смешанными максимумами. Путем применения некоторых преобразований получается система нелинейных функциональных интегральных уравнений. Существование и единственность решения непериодической двухточечной краевой задачи сводятся к однозначной разрешимости системы нелинейных функциональных интегральных уравнений в Банаховом пространстве* $PC\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$. *Метод последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений используется при доказательстве однозначной разрешимости нелинейных функциональных интегральных уравнений.*

Ключевые слова: *система второго порядка, импульсные интегро-дифференциальные уравнения, двухточечные нелинейные краевые условия, смешанные максимумы, последовательные приближения, существование и единственность решения.*

1. Introduction.

Mathematical model of many problems of modern sciences, technology and economics are described by differential and integro-differential equations, the solutions of which are functions with first kind discontinuities at fixed or non-fixed times. Such differential and integro-differential equations are called equations with impulsive effects. A lot of publications of studying on differential and integro differential equations with impulsive effects, describing many natural and technical processes, are appearing (see, for examples, [1–20]. Two-point and multi-point boundary value problems for the differential and integro-differential equations are studied by many authors (see, for example [21–24]. Second-order differential equations with nonlocal boundary value conditions and impulsive effects are almost not studied. The fact is that the reduction of such a problem to an equivalent functional integral equation has difficulties. In this paper, we investigate a two-point nonlinear boundary value problem for a system of second order integro-differential equations with impulsive effects, nonlinear kernel depending on construction of mixed maxima. The questions of existence and uniqueness of the solution to the nonlinear two-point boundary value problem are investigated. We note that the differential and integro-differential equations with mixed maxima have singularity in studying of the questions of solvability. Moreover, the jumpiness of solutions is a natural thing for differential equations with mixed maxima [25].

On the interval $[0,T]$ for $t \neq t_i,\ i = 1,2,\dots,p$ we consider the questions of existence and constructive methods of calculating of the unique solutions of the second order system of nonlinear ordinary integro-differential equations with impulsive effects and maxima

$$x''(t) = f\left(t, x(t), \int_0^T \Theta\left(t, s, \max\left\{x(\tau)\middle|\tau \in \left[\lambda_1(s) :|: \lambda_2(s)\right]\right\}\right) ds\right), \tag{1}$$

where $t \neq t_i$, $i = 1, 2, ..., p$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, $x \in X$, X is the closed bounded domain in the space $\mathbb{R}^n$, $f(t, x, y) \in \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda_i(t) < T$, $i = 1, 2,$

$$\left[\lambda_1(t) :|: \lambda_2(t)\right] = \left[\min\left\{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\right\}; \max\left\{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\right\}\right], \quad \max_{0 \le t \le T} \int_0^T \left|\Theta\left(t, s, x\right)\right| ds < \infty.$$

The equation (1) we study with nonlinear conditions

$$A_1(t)x(0^+) + B_1(t)x(T^-) = C_1(t, x(t)), \tag{2}$$

$$A_2(t)x'(0^+) + B_2(t)x'(T^-) = C_2(t, x(t)) \tag{3}$$

and nonlinear impulsive effect

$$x\left(t_i^+\right) - x\left(t_i^-\right) = F_i\left(x\left(t_i\right)\right), \quad i = 1, 2, ..., p, \tag{4}$$

$$x'\left(t_i^+\right) - x'\left(t_i^-\right) = G_i\left(x\left(t_i\right)\right), \quad i = 1, 2, ..., p, \tag{5}$$

where $A_i(t), B_i(t)$ are $n \times n$-dimensional matrix-functions, $C_i(t, x(t)) \in \mathbb{R}^n$ is nonlinear vector-function, $i = 1, 2$, $F_i, G_i \in \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda_i(t) < T$, $i = 1, 2,$ $x\left(t_i^+\right) = \lim_{\nu \to 0^+} x\left(t_i + \nu\right)$, $x\left(t_i^-\right) = \lim_{\nu \to 0^-} x\left(t_i - \nu\right)$ are right-hand side and left-hand side limits of function $x(t)$ at the point $t = t_i$, respectively.

$C\left([0, T], \mathbb{R}^n\right)$ is the notation of the Banach space, which consists continuous vector function $x(t)$, defined on the segment $[0, T]$, with the norm

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \max_{0 \le t \le T} \left| x_j(t) \right|}.$$

$PC\left([0, T], \mathbb{R}^n\right)$ is the notation of the following linear vector space

$$PC\left([0, T], \mathbb{R}^n\right) = \left\{x : [0, T] \to \mathbb{R}^n;\ x(t) \in C\left(\left(t_i, t_{i+1}\right], \mathbb{R}^n\right),\ i = 1, ..., p\right\},$$

where $x\left(t_i^+\right)$ and $x\left(t_i^-\right)$ $(i = 0, 1, ..., p)$ exist and are bounded; $x\left(t_i^-\right) = x\left(t_i\right)$. Note, that the linear vector space $PC\left([0, T], \mathbb{R}^n\right)$ is Banach space with the following norm

$$\| x \|_{PC} = \max\left\{\| x \|_{C((t_i,t_{i+1}])},\ i=1,2,...,p\right\}.$$

2. Formulation of problem.

To find the function $x(t) \in PC\left([0,T], R^n\right)$, which for all $t \in [0,T],\ t \neq t_i,\ i=1,2,...,p$ satisfies the second-order integro-differential equation (1), nonlinear two point conditions (2), (3) and for $t = t_i\ i=1,2,...,p,\ 0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < T$ satisfies the nonlinear limit conditions (3), (4).

3. Reduction to nonlinear system of functional integral equations.

Let the function $x(t) \in PC\left([0,T], \mathbb{R}^n\right)$ is a solution of the second order boundary value problem (1)-(5). Then, integrating the integro-differential equation (1) one time on the intervals: $\left(0,t_1\right],\ \left(t_1,t_2\right],...,\ \left(t_p,t_{p+1}\right],$ we obtain:

$$\int_0^{t_1} f(x)\,ds = \int_0^{t_1} x''(s)\,ds = x'(t_1^-) - x'(0^+),\ t \in \left(0,t_1\right],$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} x''(s)\,ds = x'\left(t_2^-\right) - x'\left(t_1^+\right),\ t \in \left(t_1,t_2\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{t_p}^{t_{p+1}} f(s)\,ds = \int_{t_p}^{t_{p+1}} x''(s)\,ds = x'\left(t_{p+1}^-\right) - x'\left(t_p^+\right),\ t \in \left(t_p,t_{p+1}\right],$$

where for convenience, we put

$$f(t) = f\left(t, x(t), \int_0^T \Theta\left(t, s, \max\left\{x(\tau) \middle| \tau \in [\lambda_1(s), \lambda_2(s)]\right\}\right) ds\right).$$

Hence, taking $x'(0^+) = x'(0),\quad x'(t_{k+1}^-) = x'(t)$ into account, on the interval $(0,T]$ we have

$$\int_0^t f(s)\,ds = \left[x'\left(t_1\right) - x'\left(0^+\right)\right] + \left[x'\left(t_2\right) - x'\left(t_1^+\right)\right] + ... + \left[x'(t) - x'\left(t_p^+\right)\right] =$$

$$= -x'(0) - \left[x'\left(t_1^+\right) - x'\left(t_1\right)\right] - \left[x'\left(t_2^+\right) - x'\left(t_2\right)\right] - ... - \left[x'\left(t_p^+\right) - x'\left(t_p\right)\right] + x'(t).$$

Taking into account the condition (5), the last equality we rewrite as

$$x'(t)=x'(0)+\int\limits_0^t f(s)\,ds+\sum_{0<t_i<t} G_i\left(x\left(t_i\right)\right). \tag{6}$$

We subordinate the function $x'(t)\in PC\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$ in presentation (6) to satisfy the nonlinear two-point boundary condition (3):

$$x'(T)=x'(0)+\int\limits_0^T f(s)\,ds+\sum_{0<t_i<T} G_i\left(x\left(t_i\right)\right). \tag{7}$$

Substituting (7) into condition (3), we find $x'(0)$ as follows:

$$x'(0)=Q_2^{-1}(t)\left[C_2(t,x(t))-B_2(t)\int\limits_0^T f(s)\,ds-B_2(t)\sum_{0<t_i<T} G_i\left(x\left(t_i\right)\right)\right], \tag{8}$$

where $\det Q_2(t)\neq 0,\ Q_2(t)=A_2(t)+B_2(t)$.

Substituting (8) into presentation (6), we obtain:

$$x'(t)=Q_2^{-1}(t)\left[C_2(t,x(t))-B_2(t)\int\limits_0^T f(s)\,ds-B_2(t)\sum_{0<t_i<T} G_i\left(x\left(t_i\right)\right)\right]+$$

$$+\int\limits_0^t f(s)\,ds+\sum_{0<t_i<t} G_i\left(x\left(t_i\right)\right). \tag{9}$$

Then, integrating integro-differential equation (9) one time on the intervals $\left(0,t_1\right],\ \left(t_1,t_2\right],\ldots,\ \left(t_p,t_{p+1}\right]$ and taking $x'(0^+)=x'(0),\quad x'(t_{k+1}^-)=x'(t)$ into account, on the interval $(0,T]$ we have

$$\int\limits_0^t Q_2^{-1}(s)\left[C_2(s,x(s))-B_2(s)\int\limits_0^T f(\theta)\,d\theta-B_2(s)\sum_{0<t_i<T} G_i\left(x\left(t_i\right)\right)\right]ds+$$

$$+\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^s f(\theta)\,d\theta+\sum_{0<t_i<s} G_i\left(x\left(t_i\right)\right)\right]ds=$$

$$=\left[x\left(t_1\right)-x\left(0^+\right)\right]+\left[x\left(t_2\right)-x\left(t_1^+\right)\right]+\ldots+\left[x(t)-x\left(t_p^+\right)\right]=$$

$$=-x(0)-\left[x\left(t_1^+\right)-x\left(t_1\right)\right]-\left[x\left(t_2^+\right)-x\left(t_2\right)\right]-\ldots-\left[x\left(t_p^+\right)-x\left(t_p\right)\right]+x(t). \tag{10}$$

Taking into account the nonlinear impulsive condition (4), from the last equality (10) we derive

$$x(t)=x(0)+\int_0^t Q_2^{-1}(s)\left[C_2(s,x(s))-B_2(s)\int_0^T f(\theta)\,d\theta-B_2(s)\sum_{0<t_i<T}G_i\left(x\left(t_i\right)\right)\right]ds+$$

$$+\int_0^t\left[\int_0^s f(\theta)\,d\theta+\sum_{0<t_i<s}G_i\left(x\left(t_i\right)\right)\right]ds+\sum_{0<t_i<t}F_i\left(x\left(t_i\right)\right). \tag{11}$$

Applying the two-point nonlinear condition (2) to the equation (11), we find the value of $x(0)$ as follows:

$$x(0)=Q_1^{-1}(t)C_1(t,x(t))-\int_0^T Q_1^{-1}(t)B_1(t)Q_2^{-1}(s)C_2(s,x(s))ds+$$

$$+\int_0^T Q_1^{-1}(t)B_1(t)Q_2^{-1}(s)B_2(s)\int_0^T f(\theta)\,d\theta ds+$$

$$+\int_0^T Q_1^{-1}(t)B_1(t)Q_2^{-1}(s)B_2(s)\sum_{0<t_i<t}G_i\left(x\left(t_i\right)\right)ds-Q_1^{-1}(t)B_1(t)\int_0^T\int_0^s f(\theta)\,d\theta\,ds-$$

$$-Q_1^{-1}(t)B_1(t)\int_0^T\sum_{0<t_i<t}G_i\left(x\left(t_i\right)\right)ds-Q_1^{-1}(t)B_1(t)\sum_{0<t_i<t}F_i\left(x\left(t_i\right)\right). \tag{12}$$

In getting (12), we used well known formulas, which connected by the name of Dirichlet:

$$\int_0^T g(t,s)\int_0^s f(\theta)\,d\theta ds=\int_0^T f(s)\int_s^T g(t,\theta)\,d\theta\,ds,$$

$$\int_0^T g(t,s)\sum_{0<t_i<t}I_i\left(x\left(t_i\right)\right)ds=\sum_{0<t_i<T}\int_{t_i}^T g(t,s)\,ds\,I_i\left(x\left(t_i\right)\right).$$

Then, we rewrite (12) as follows

$$x(0)=Q_1^{-1}(t)C_1(t,x(t))-\int_0^T V_0(t,s)C_2(s,x(s))ds+$$

$$+\int_0^T V_1(t,s)\,f(s)\,ds+\sum_{0<t_i<T}V_1(t,t_i)G_i\left(x\left(t_i\right)\right)-Q_1^{-1}(t)B_1(t)\sum_{0<t_i<T}F_i\left(x\left(t_i\right)\right), \tag{13}$$

where $V_0(t,s)=Q_1^{-1}(t)B_1(t)Q_2^{-1}(s),\ \ \det Q_1(t)\neq 0,\ \ \ Q_1(t)=A_1(t)+B_1(t),$

$$V_1(t,s)=Q_1^{-1}(t)B_1(t)\left[\int_s^T Q_2^{-1}(\theta)\left[A_2(\theta)+2B_2(\theta)\right]d\theta\right].$$

Substituting (13) into presentation (11), we obtain final view of nonlinear system of functional integral equations:

$$x(t) = J(t;x) \equiv Q_1^{-1}(t)C_1(t,x(t)) + \int_0^T W_0(t,s)C_2(s,x(s))ds +$$

$$+\int_0^T W_1(t,s) f\left(s, x(s), \int_0^T \Theta\left(s,\theta,\max\left\{x(\tau)\middle|\tau\in[\lambda_1(\theta),\lambda_2(\theta)]\right\}\right)d\theta\right)ds +$$

$$+\sum_{0<t_i<T} W_1(t,t_i)G_i\left(x\left(t_i\right)\right) + \sum_{0<t_i<T} W_2(t_i)F_i\left(x\left(t_i\right)\right), \tag{14}$$

where

$$W_0(t,s) = \begin{cases} -V_0(t,s), & t \le s \le T, \\ -V_0(t,s) + Q_2^{-1}(s), & 0 \le s < t, \end{cases}$$

$$W_1(t,s) = \begin{cases} V_1(t,s), & t \le s \le T, \\ V_1(t,s) - \int_0^t Q_2^{-1}(\theta)B_2(\theta)d\theta + \int_s^t Q_2^{-1}(\theta)\left[A_2(\theta)+B_2(\theta)\right]d\theta, & 0 \le s < t, \end{cases}$$

$$W_2(s) = \begin{cases} -Q_1^{-1}(s)B_1(s), & t \le s \le T, \\ Q_1^{-1}(s)A_1(s), & 0 \le s < t. \end{cases}$$

3. One valued solvability.

Theorem. Suppose that the following conditions are fulfilled:

1). $M_f = \max\limits_{0\le t\le T}\left| f\left(t, 0, \int_0^T \Theta\left(t,s,0\right)ds\right)\right| < \infty;\quad M_{C_i} = \max\limits_{0\le t\le T}\left| C_j(t,0)\right| < \infty,\quad j=1,2;$

2). $m_F = \max\limits_{i\in\{1,2,\dots,p\}}\left| F_i(0)\right| < \infty,\quad m_G = \max\limits_{i\in\{1,2,\dots,p\}}\left| G_i(0)\right| < \infty;$

3). For all $t\in[0,T]$, $x, y\in R^n$ holds

$$\left| f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\right| \le M_1(t)\left| x_1 - x_2\right| + M_2(t)\left| y_1 - y_2\right|;$$

4). For all $t, s\in[0,T]^2$, $x\in R^n$ holds

$$\left|\Theta(t,s,x_1) - \Theta(t,s,x_2)\right| \le M_3(t,s)\left| x_1 - x_2\right|;$$

5). For all $t\in[0,T]$, $x\in R^n$ holds

$$\left|C_j(t,x_1)-C_j(t,x_2)\right|\le M_{4j}(t)\left|\,x_1-x_2\,\right|,\;\; j=1,2;$$

6). For all $x\in R^n,\; i=0,1,...,p$ hold

$$\left|F_i(x_1)-F_i(x_2)\right|\le m_{1i}\left|\,x_1-x_2\,\right|,\;\; \left|G_i(x_1)-G_i(x_2)\right|\le m_{2i}\left|\,x_1-x_2\,\right|;$$

7). $\rho=\chi_1+...+\chi_5<1,$ where $\chi_1,...,\chi_5$ are defined by the formulas (18)-(20) below.

Then the two-point boundary value problem (1)-(5) has a unique solution $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$. This solution can be founded by the following iterative process:

$$\begin{cases} x^k\left(t\right)=J(t;x^{k-1}),\;\; k=1,2,3,... \\ x^0\left(t\right)=0,\;\; t\in(t_i,t_{i+1}),\;\; i=0,1,2,...,p. \end{cases} \tag{15}$$

Proof. We consider the following operator

$$J:PC\left([0,T];R^n\right)\to PC\left([0,T]\times R^n\right),$$

defined by the right-hand side of equation (14). Applying the principle of contracting operators to (14), we show that the operator J, defined by equation (14), has a unique fixed point.

Taking first and second conditions of the theorem, for the first difference of the approximations (15) we have the following estimate

$$\left\|\,x^1(t)-x^0(t)\,\right\|\le\max_{0\le t\le T}\left|\,Q_1^{-1}(t)\,\right|\cdot\left|\,C_1(t,0)\,\right|+\max_{0\le t\le T}\int_0^T\left|\,W_0(t,s)\,\right|\cdot\left|\,C_2(t,0)\,\right|ds+$$

$$+\max_{0\le t\le T}\int_0^T\left|W_1(t,s)\right|\left|\,f\left(s,0,\int_0^T\Theta\left(s,\theta,0\right)d\theta\right)\right|ds+$$

$$+\max_{0\le t\le T}\sum_{i=1}^p\left|\,W_1(t,t_i)\right|\cdot\left|\,G_i(0)\,\right|+\sum_{i=1}^p\left|\,W_2(t_i)\right|\cdot\left|\,F_i(0)\,\right|\le$$

$$\le\left\|\,Q_1^{-1}(t)\,\right\|M_{C_1}+\sigma_0 M_{C_2}+\sigma_{11}M_f+\sigma_{12}m_G+\sigma_2 m_F<\infty, \tag{16}$$

where

$$\sigma_0=\max_{0\le t\le T}\int_0^T\left|\,W_0(t,s)\,\right|ds,\;\; \sigma_{11}=\max_{0\le t\le T}\int_0^T\left|W_1(t,s)\right|ds,$$

$$\sigma_{12} = \max_{0 \le t \le T} \sum_{i=1}^{p} \left| W_1(t, t_i) \right|, \quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{p} \left| W_2(t_i) \right|.$$

Then, by the third - sixth conditions of the theorem, for difference of arbitrary consecutive approximations and arbitrary $t \in (t_i, t_{i+1}]$ we have

$$\left\| x^{k+1}(t) - x^k(t) \right\| \le \max_{0 \le t \le T} \left| Q_1^{-1}(t) \right| M_{41}(t) \left| x^k(t) - x^{k-1}(t) \right| +$$

$$+ \max_{0 \le t \le T} \int_0^T \left| W_0(t,s) \right| M_{42}(s) \left| x^k(s) - x^{k-1}(s) \right| ds +$$

$$+ \max_{0 \le t \le T} \int_0^T \left| W_1(t,s) \right| \left[M_1(s) \left| x^k(s) - x^{k-1}(s) \right| + \right.$$

$$\left. + M_2(s) \int_0^T M_3(s,\theta) \left| x^k(\theta) - x^{k-1}(\theta) \right| d\theta \right] ds +$$

$$+ \max_{0 \le t \le T} \sum_{i=1}^{p} \left| W_1(t,t_i) \right| m_{2i} \left| x^k(t_i) - x^{k-1}(t_i) \right| + \sum_{i=1}^{p} \left| W_2(t_i) \right| m_{1i} \left| x^k(t_i) - x^{k-1}(t_i) \right|.$$

Hence, by the introduced norm in the space $PC([0,T], R^n)$ we obtain

$$\left\| x^k(t) - x^{k-1}(t) \right\|_{PC} \le \rho \cdot \left\| x^{k-1}(t) - x^{k-2}(t) \right\|_{PC}, \tag{17}$$

where $\rho = \chi_1 + ... + \chi_5$,

$$\chi_1 = \max_{0 \le t \le T} \left| Q_1^{-1}(t) \right| M_{41}(t), \quad \chi_2 = \max_{0 \le t \le T} \int_0^T \left| W_0(t,s) \right| M_{42}(s) ds, \tag{18}$$

$$\chi_3 = \max_{0 \le t \le T} \int_0^T \left| W_1(t,s) \right| \left[M_1(s) + M_2(s) \int_0^T M_3(s,\theta) d\theta \right] ds, \tag{19}$$

$$\chi_4 = \max_{0 \le t \le T} \sum_{i=1}^{p} \left| W_1(t,t_i) \right| m_{2i}, \quad \chi_5 = \sum_{i=1}^{p} \left| W_2(t_i) \right| m_{1i}. \tag{20}$$

According to the last condition of the theorem, we have $\rho < 1$. Therefore, from the estimate (17) follows that

$$\left\| x^k(t) - x^{k-1}(t) \right\|_{PC} < \left\| x^{k-1}(t) - x^{k-2}(t) \right\|_{PC}. \tag{21}$$

It implies from (21) that the operator J on the right-hand side of the equation (14) is contracting. According to fixed point principle in the Banach space $PC\left([0,T], R^n\right)$ and taking into account estimates (16), (17), we conclude that the operator J has a unique fixed point. Consequently, the two-point nonlinear boundary value problem (1)-(5) has a unique solution $x(t) \in PC\left([0,T], R^n\right)$.

REFERENCE

1. Anguraj A., Arjunan M. M. Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations, Elect. J. Differential Equations, 2005, vol. 2005, no. 111, pp. 1–8.
2. Ashyralyev A., Sharifov Ya. A. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two–point and integral boundary conditions, Advances in Difference Equations, 2013, vol. 2013, no. 173. doi: 10.1186/1687-1847-2013-173.
3. Ashyralyev A., Sharifov Ya. A. Optimal control problems for impulsive systems with integral boundary conditions, Elect. J. of Differential Equations, 2013, vol. 2013, no. 80, pp. 1–11.
4. Bai Ch., Yang D. Existence of solutions for second-order nonlinear impulsive differential equations with periodic boundary value conditions, Boundary Value Problems (Hindawi Publishing Corporation), 2007, vol. 2007, no. 41589, pp. 1–13. doi: 10.1155/2007/41589.
5. Bin L., Xinzhi L., Xiaoxin L. Robust global exponential stability of uncertain impulsive systems, Acta Mathematika Scientia, 2005, vol. 25, no. 1, pp. 161–169.
6. Chen J., Tisdell Ch. C., Yuan R. On the solvability of periodic boundary value problems with impulse, J. of Math. Anal. and Appl., 2007, vol. 331, pp. 902–912.
7. Hu Z., Han M. Periodic solutions and bifurcations of first order periodic impulsive differential equations, International Journal of Bifurcation and Chaos, 2009, vol. 19, no. 8, pp. 2515–2530.
8. Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. Theory of impulsive differential equations, A, vol. 6. Singapore, World Scientific, 1989, 434 pp.. doi: 10.1142/0906.
9. Li X., Bohner M., Wang Ch.-K. Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications, Automatica, 2015, vol. 52, pp. 173–178.
10. Mardanov M. J., Sharifov Ya. A., Habib M. H. Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions, Electr. J. of Differential Equations, 2014, vol. 2014, no. 259, pp. 1–8.
11. Samoilenko A. M., Perestyk N. A. Impulsive differential equations. World Scientific, A, vol.

14. Singapore, World Scientific, 1995, 462 pp.. doi: 10.1142/2892.
12. Sharifov Ya. A. Optimal control problem for systems with impulsive actions under nonlocal boundary conditions, Vestnik samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seria: Fiziko-matematicheskie nauki, 2013, vol. 33, no. 4, pp. 34–45 (in Russian).
13. Sharifov Ya. A. Optimal control for systems with impulsive actions under nonlocal boundary conditions, Russian Mathematics (Izv. VUZ), 2013, vol. 57, no. 2 65–72. doi: 10.3103/S1066369X13020084.
14. Sharifov Ya. A., Mammadova N. B. Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, Differential equations, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 403–411. doi: 10.1134/S0012266114030148.
15. Sharifov Ya. A. Conditions optimality in problems control with systems impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, Ukrainain Math. Journ., 2012, vol. 64, no. 6, pp. 836–847.
16. Yuldashev T. K. Periodic solutions for an impulsive system of nonlinear differential equations with maxima, Nanosystems: Phys. Chem. Math., 2022, vol. 13, no. 2, pp. 135–141. doi: 10.17586/2220-8054-2022-13-2-135-141.
17. Yuldashev T. K. Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima, Vestnik Sam. Gos. Tekh. Univer. Seria: Fiziko-matematicheskie nauki, 2022, vol. 26, no. 2, pp. 368–379. doi:10.14498/vsgtu1917.
18. Yuldashev T. K., Fayziyev A. K. On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima, Nanosystems: Phys. Chem. Math., 2022, vol. 13, no. 1, pp. 36–44. doi: 10.17586/2220-8054-2022-13-1-36-44.
19. Yuldashev T. K., Fayziyev A. K. Integral condition with nonlinear kernel for an impulsive system of differential equations with maxima and redefinition vector, Lobachevskii Journ. Math., 2022, vol. 43, no. 8, pp. 2332–2340. doi: 10.1134/S1995080222110312.
20. Yuldashev T. K., Saburov Kh. Kh., Abduvahobov T. A. Nonlocal problem for a nonlinear system of fractional order impulsive integro-differential equations with maxima, Chekyabinsk. Fiz.-Mat. Zhurn., 2022, vol. 7, no. 1, pp. 113–122. doi: 10.47475/2500-0101-2022-17108.
21. Abildayeva A., Assanova A., Imanchiyev A. A multi-point problem for a system of differential equations with piecewise-constant argument of generalized type as a neural network model, Eurasian Math. Journ., 2022, vol. 13, no. 2, pp. 8–17.
22. Assanova A. T., Dzhobulaeva Z. K., Imanchiyev A. E. A multi-point initial problem for a non-classical system of a partial differential equations, Lobachevskii Journ. Math., 2020, vol. 41, no. 6, pp. 1031–1042. doi: 10.1134/S1995080220060049.
23. Minglibayeva B. B., Assanova A. T. An existence of an isolated solution to nonlinear

twopoint boundary value problem with parameter, Lobachevskii Journ. Math., 2021, vol. 42, no. 3, pp. 587–597. doi: 10.1134/S199508022103015X.
24. Usmanov K. I., Turmetov B. Kh., Nazarova K. Zh. On unique solvability of a multipoint boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution, Symmetry, 2022, vol. 14, no. 8 (1262), pp. 1–15. doi: 10.3390/sym14081626.
25. Yuldashev T. K. On a nonlocal problem for impulsive differential equations with mixed maxima, Vestnik KRAUNTS. Seria: Fiziko-matematicheskie nauki, 2022, vol. 38, no. 1, pp. 40–53.

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_220

INTEGRAL REPRESENTATION FOR HYPERGEOMETRIC FUNCTION OF THE MITTAG-LEFFLER TYPE $\bar{F}_B^{(3)}$

Hasanov Anvar, Dr Sc, professor,
anvarhasanov@yahoo.com
Yuldashova Khilola,
anvarhasanov@yahoo.com
Mathematical Institute named after Romanovsky V.I

The Mittag-Leffler function has gained importance and popularity through its applications. When solving differential equations of fractional order and integral equations of fractional order. Also, the Mittag-Leffler function plays an important role in various fields of applied mathematics and engineering sciences, such as chemistry, biology, statistics, thermodynamics, mechanics, quantum physics, computer science, signal processing [1-6].

Consider the folloving three variable hypergeometric function

$$\bar{F}_B^{(3)}(x,y,z)=\bar{F}_B^{(3)}\left(\begin{matrix} a_1,\alpha_1;a_2\beta_1;a_3\gamma_1;b_1,\alpha_2;b_2,\beta_2;b_3,\gamma_2; \\ c,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;c_1,\alpha_4;c_2\beta_4;c_3,\gamma_4; \end{matrix}\middle| x,y,z\right)$$
$$=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{\alpha_1 m}(a_2)_{\beta_1 n}(a_3)_{\gamma_1 p}(b_1)_{\alpha_2 m}(b_2)_{\beta_2 n}(b_3)_{\gamma_2 p}}{(c)_{\alpha_3 m+\beta_3 n+\gamma_3 p}}\frac{x^m}{\Gamma(c_1+\alpha_4 m)}\frac{y^n}{\Gamma(c_2+\beta_4 n)}\frac{z^p}{\Gamma(c_3+\gamma_4 p)} \tag{1}$$

where $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c,c_1,c_2,c_3,x,y,z\in\mathbb{C},\ \min\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}>0,\quad i=\overline{1,4}$

For a generalized hypergeometric function of the Mittag-Leffler type $\bar{F}_B^{(3)}$, the following integral representations of the Euler type take place

$$\bar{F}_B^{(3)}(x,y,z)=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\mu-b_1)}$$
$$\times\int_0^1 \xi^{b_1-1}(1-\xi)^{\mu-b_1-1}\bar{F}_B^{(3)}\left(\begin{matrix} a_1,\alpha_1;a_2\beta_1;a_3,\gamma_1;\mu,\alpha_2;b_2,\beta_2;b_3,\gamma_2; \\ c,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;c_1,\alpha_4;c_2\beta_4;c_3,\gamma_4; \end{matrix}\middle| x\xi^{\alpha_2},y,z\right)d\xi,$$
$$\operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}b_1>0,$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\bar{F}_B^{(3)}(x,y,z)=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(b_2)\Gamma(\mu-b_2)}\\
&\times\int_0^1 \xi^{b_2-1}(1-\xi)^{\mu-b_2-1}\bar{F}_B^{(3)}\left(\begin{matrix}a_1,\alpha_1;a_2\beta_1;a_3,\gamma_1;b_1,\alpha_2;\mu,\beta_2;b_3,\gamma_2;\\ c,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;c_1,\alpha_4;c_2\beta_4;c_3,\gamma_4;\end{matrix}\middle| x,y\xi^{\beta_2},z\right)d\xi,\\
&\operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}b_2>0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{F}_B^{(3)}(x,y,z)=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(b_3)\Gamma(\mu-b_3)}\\
&\times\int_0^1 \xi^{b_3-1}(1-\xi)^{\mu-b_3-1}\bar{F}_B^{(3)}\left(\begin{matrix}a_1,\alpha_1;a_2\beta_1;a_3,\gamma_1;b_1,\alpha_2;b_2,\beta_2;\mu,\gamma_2;\\ c,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;c_1,\alpha_4;c_2\beta_4;c_3,\gamma_4;\end{matrix}\middle| x,y,z\xi^{\gamma_2}\right)d\xi,\\
&\operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}b_3>0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{F}_B^{(3)}(x,y,z)=\frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)\Gamma(\mu_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(\mu_1-b_1)\Gamma(\mu_2-b_2)\Gamma(\mu_3-b_3)}\\
&\times\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_1-1}\eta^{b_2-1}\tau^{b_3-1}(1-\xi)^{\mu_1-b_1-1}(1-\eta)^{\mu_2-b_2-1}(1-\tau)^{\mu_3-b_3-1}\times\\
&\times\bar{F}_B^{(3)}\left(\begin{matrix}a_1,\alpha_1;a_2\beta_1;a_3,\gamma_1;b_1,\alpha_2;\mu,\beta_2;b_3,\gamma_2;\\ c,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;c_1,\alpha_4;c_2\beta_4;c_3,\gamma_4;\end{matrix}\middle| x\xi^{\alpha_2},y\eta^{\beta_2},z\tau^{\gamma_2}\right)d\xi d\eta d\tau\\
&\operatorname{Re}\mu_1>\operatorname{Re}b_1>0,\quad \operatorname{Re}\mu_2>\operatorname{Re}b_2>0,\quad \operatorname{Re}\mu_3>\operatorname{Re}b_3>0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{F}_B^{(3)}(x,y,z)=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(a_1)\Gamma(\mu-a_1)}\\
&\times\int_0^1 \xi^{a_1-1}(1-\xi)^{\mu-a_1-1}\bar{F}_B^{(3)}\left(\begin{matrix}\mu,\alpha_1;a_2\beta_1;a_3,\gamma_1;b_1,\alpha_2;b_2,\beta_2;b_3,\gamma_2;\\ c,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;c_1,\alpha_4;c_2\beta_4;c_3,\gamma_4;\end{matrix}\middle| x\xi^{\alpha_1},y,z\right)d\xi,\\
&\operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}a_1>0.
\end{aligned}
$$

(6)

This can be proved by substituting the integral representations for the series representation of the function $\bar{F}_B^{(3)}$ and considering that the series is absolutely convergent, by interchanging the signs of integral and series and using Euler's Beta and Gamma functions.

REFERENCES

1. Mittag–Leffler GM. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(z)$. C R Acad Sci Paris. 1903;137:554–558.

2. Luchko Y. Initial boundary value problems for the generalized multiterm time fractional diffusion equation. J Math Anal Appl. 2011; 374: 538–548.

3. Li Z, Liu Y, Yamamoto M. Initial boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients. Appl Math Comput. 2015; 257:381–397.
4. Salim T.O. Some properties relating to the generalized Mittage–Leffler function. Adv Appl Math Anal. 2009; 4:21–30.
5. Luchko Y, Gorenflo R. An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives. Acta Math Vietnam. 1999; 24:207–233.
6. Gorenflo R, Kilbas A, Mainardi F, Rogosin S. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. 2nd edition: Springer-Verlag GmbH Germany, 2020.
7. Srivastava H.M., Daoust Martha C. On Eulerian integrals associated with Kampe de Feriet's function. Publications de L'institut Mathematique, Nouvelle serie, 1969, T. 9 (23), 199-202.
8. Maged G. Bin-Saad, Anvar Hasanov and Michael Ruzhansky (2021), Some properties relating to the Mittag–Leffler function of two variables. Integral Transforms and Special Functions. 2022, 33(5), pp. 400–418.

Резолюция международной научной конференции “Актуальные проблемы математики и образования”

Резолюция

международной научной конференции **“Актуальные проблемы математики и образования”**, посвященной 80-летию заслуженного деятеля науки Кыргызкой Республики, члена-корреспондента НАН КР, доктора физико-математических наук, профессора, почетного академика НАН КР Келдибая Алымкулова

12-13 мая 2023 года в Ошском государственном университете состоялась международная научная конференция **“Актуальные проблемы математики и образования”**, посвященной 80-летию заслуженного деятеля науки Кыргызкой Республики, члена-корреспондента НАН КР, доктора физико-математических наук, профессора, почетного академика НАН КР **Келдибая Алымкулова**.

Организатором конференции выступил Ошский государственный университет.

В работе конференции приняли участие ученые, преподаватели высших учебных заведений региона и республики. Широкая география участников видных ученых-математиков из **России, Казахстана, Узбекистана, Испании, Германии, Чехии** подтверждает актуальность темы конференции и рассматриваемых в её рамках вопросов.

Программа конференции включала пленарное и шесть секционных заседаний по различным актуальным направлениям математики и образования. Для обеспечения участия широкого круга заинтересованных лиц был обеспечен онлайн формат работы.

В работе конференции приняли участие более **120 человек**. Было заслушано свыше **190 докладов и сообщений**. Темы докладов и выступлений затрагивали самые разнообразные и актуальные проблемы таких направлений как геометрия, топология, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теория операторов, спектральная теория, математическое и компьютерное моделирование, методика преподавания математики и информатики и др.

Участники конференции подчеркнули значительную роль профессора **Келдибая Алымкулова** в развитие математической науки, его весомый вклад в воспитание и подготовку молодых научных кадров; указали современные направления и проблемы математической науки и образования и необходимость развития фундаментальных и прикладных исследований; отметили, что в настоящее время в современном мире и Кыргызстане повышается роль математики и математического образования.

Материалы конференции будут опубликованы в журналах **«Вестник ОшГУ: Математика. Физика. Техника», «Вестник ОшГУ: Педагогика. Психология»,**

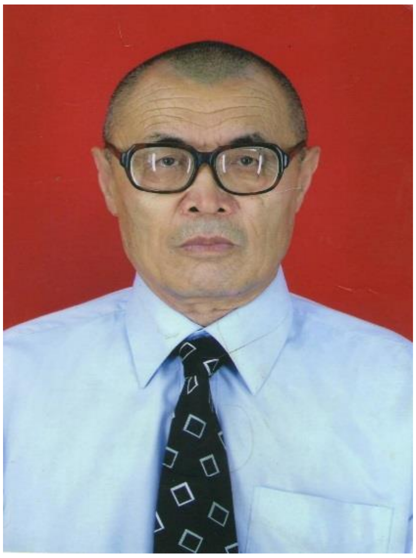
«Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования».

По итогам проведенных пленарных, секционных заседаний и дискуссий Конференция рекомендует:

- *акцентировать внимание молодых ученых на решения приоритетных и прикладных проблем математик, экономики, медицины, экологии, энергетики и IT-технологии;*
- *уделять внимание на подготовку высококвалифицированных научно-педагогических кадров, отвечающих современным требованиям времени;*
- *усилить интеграцию исследовательских деятельностей научных организаций, школ и вузов различных стран;*
- *широко использовать информационные и коммуникационные технологии, способствующие взаимодействию участников образовательного процесса, доступ к информационным источникам, эффективный мониторинг и контроль результатов образовательного процесса;*
- *развивать критическое и системное мышления учеников, студентов и магистрантов в процессе преподавания математических дисциплин;*
- *ежегодно проводить научную конференцию «Алымкуловские чтения».*

Участники конференции отмечают высокий уровень организации и проведения данного мероприятия, способствующего установлению новых творческих связей, объединению научного потенциала ученых, научных и образовательных организаций различных стран.

Жизнь и деятельность Келдибая Алымкулова



Алымкулов Келдибай родился 11 января 1943 года в селе Герейт-Шорон Ноокатского района Ошской области. Трудовую деятельность начал в 1964 году после окончания физико-математического факультета Кыргызского государственного университета в г. Фрунзе (ныне Бишкек). По рекомендации член-корреспондента АН КР, профессора Ю.В. Быкова он был принят на работу в Академию младшим научным сотрудником.

В 1965 году служил в Советской Армии на Украине.

В 1966-1969 годах учился в аспирантуре при Академии наук КР.

В 1969-1971 годах работал учителем математики в Кок-Жарской средней школе Ноокатского района.

В 1971-1999 годах работал старшим научным сотрудником, заведующим лабораторией АН КР.

В 1973 году под руководством академика М.Иманалиева защитил кандидатскую диссертацию (г. Фрунзе).

В 1991 году под руководством академика РАН Д.В. Аносова в Математическом институте имени Стеклова АН СССР в Москве защитил докторскую диссертацию.

В 1999-2001 годах был профессором кафедры математического анализа физико-математического факультета ОшГУ.

В 2001-2007 годах был заведующим кафедрой общей информатики Ошского государственного университета.

С 2007 года профессор кафедры алгебры и геометрии факультета МИТ ОшГУ.

С 2007 года и до последних дней жизни являлся директором Института фундаментальных и прикладных исследований Ошского государственного университета.

Алымкулов Келдибай внес значительный вклад в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярным возмущением. Он разработал аналитические методы: «Униформизация», «Структурное сращивание» и «Нелокальная бифуркация периодических решений».

Келдибай Алымкулович внес большой вклад в подготовку научных кадров ОшГУ, возглавил научную школу по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, подготовил 2 докторов наук и 9 кандидатов наук, является автором более 150 научных статей и монографии.

Келдибай Алымкулович участвовал и выступал с научными докладами в международных конференциях в Болгарии (Варна), Венгрии (Будапешт), Польше (Варшава), Таиланде (Бангкок), Греции (остров Самос-Пифагор), Швеции (Стокгольм), России (Москва, Новосибирск, Нальчик и др.), Украине (Киев, Черновцы, Тернополь), Казахстане (Алма-Ата), Узбекистане (Ташкент, Самарканд), Азербайджане (Баку).

По инициативе К. Алымкулова в 2008 году в ОшГУ был открыт диссертационный совет на соискание ученой степени кандидата наук по направлениям “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление” и “Геометрия и топология”, которым руководил до 2015 года, в то же время был членом диссертационного совета в городе Бишкек. Келдибай Алымкулов с 2015 года был членом диссертационного совета при Институте математики НАН КР г. Бишкек.

Награды и звания:

– Почетная грамота Министерства образования, науки и культуры КР, 1999 г.
– Почетная грамота государственной администрации Ошской области, 2001 г.
– Лучший работник образования КР, 2005 г.
– Член-корреспондент Национальной академии наук Кыргызской Республики, 2010 г.
– Заслуженный деятель науки Кыргызской Республики, 2011 г.
– С 2011 года он являлся членом редколлегии американского журнала «Математика и статистика», членом Американского и Европейского общества математиков, вице-президентом Кыргызского общества математиков.
– Почетная грамота Правительства Кыргызской Республики, 2014 г.
– Лауреат премии «Хан-Тенрии», 2017 г.
– Академик Российской академии естественных наук, 2019 г.
– Почетный академик Национальной академии наук Кыргызской Республики, 2021 г.

Келдибай Алымкуловдун өмүрү жана чыгармачылыгы

Алымкулов Келдибай 1943-жылдын 11-январында Ош облусунун, Ноокат районунун, Төөлөс айыл өкмөтүнүн Герейт-Шорон кыштагында туулган. 1964-жылы Фрунзе (азыркы Бишкек) шаарында Кыргыз Мамлекеттик университетинин физика-математика факультетин бүтүргөн. Кыргыз илимдер Академиясынын мүчө-корреспонденти, профессор Я.В. Быковдун сунушу менен Академиянын кичи илимий кызматкери катары ишке кабыл алынган.

1965-жылы Украинада Советтик Армияда кызмат өтөгөн.

1966-1969-жылдары Кыргыз илимдер Академиясынын аспирантурасында окуган.

1969-1971-жылдары Ноокат районунун Көк-Жар орто мектебинде математика мугалими болуп эмгектенген.

1971-1999-жылдары Кыргыз илимдер Академиясында улук илимий кызматкер, лаборатория башчысы болуп эмгектенген.

1973-жылы Фрунзе шаарында академик М. Иманалиевдин жетекчилиги алдында кандидаттык диссертациясын коргогон.

1991-жылы Россия илимдер Академиясынын академиги Д.В. Аносовдун жетекчилиги алдында Москва шаарындагы СССР илимдер Академиясынын Стеклов атындагы математика институнда доктордук диссертациясын коргогон.

1999-2001-жылдары ОшМУнун физика-математика факультетинин математикалык анализ кафедрасынын профессору,

2001-2007-жылдары ОшМУнун жалпы информатика кафедрасынын башчысы,

2007-жылдан тартып ОшМУнун МИТ факультетинин Алгебра жана геометрия кафедрасынын профессору,

2007-жылдан тартып көзү өткөнгө чейин ОшМУнун алдындагы Фундаменталдык жана прикладдык изилдөөлөр институтунун директору кызматтарын аркалап келген.

Алымкулов Келдибай Алымкулович кадимки дифференциалдык сингулярдуу козголгон теңдемелер теориясына бараандуу салым кошкон. Агай “Униформдаштыруу”, “Структуралык жалгаштыруу” жана “Мезгилдуу чечимдердин локалдык эмес бифуркациясы” аналитикалык методдорун кийирген.

Келдибай Алымкуловичтин ОшМУга, Кыргызстанга илимий кадраларды даярдоодо салымы зор, 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер адистиги боюнча илимий мектепти жетектеп, илимдин 2 докторун жана 9 кандидатын чыгарган, ошондой эле 150дөн ашуун илимий макаланын жана монографиянын автору. Келдибай Алымкулович Болгарияда (Варна), Венгрияда (Будапешт), Польшада (Варшава), Таиландда (Бангкок), Грецияда (Самос-Пифагор аралы), Швецияда (Стокгольм), Россияда (Москва, Новосибирск, Нальчик, ж.б.), Украинада (Киев, Черновцы, Тернополь), Казахстанда (Алма-Ата), Өзбекстанда (Ташкент, Самарканд), Азербайжанда (Баку) болгон конференцияларга катышып, илимий докладдарды жасап келген.

2008-жылы ОшМУнун алдында 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер жана 01.01.04 – геометрия жана топология адистиктери боюнча илимдин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн диссертациялык кеңешин ачып, 2015-жылга чейин жетектеп, ошол эле мезгилде Бишкек шаарындагы диссертациялык кеңеште мүчө болуп келген. 2015-жылдан бери Бишкек шаарындагы КР УИАнын математика институтуна жана Ж. Баласагын атындагы КУУга караштуу диссертациялык кеңешинде мүчө болуп келди.

Сыйлыктары:

- Кыргыз Республикасынын билим берүү, илим жана маданият министрлигинин Ардак грамотасы, 1999-ж.
- Ош облусунун мамлекеттик администрациясынын Ардак грамотасы, 2001-ж.
- Кыргыз Республикасынын билим берүүсүнүн мыктысы, 2005-ж..
- Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын мүчө-корреспонденти, 2010-ж.
- Кыргыз республикасынын илимине эмгек сиңирген ишмер”, 2011-ж.
- 2011-жылдан тартып Американын “Математика жана статистика” журналынын редакциялык кеңешинин мучөсү, Америка жана Европа математиктер коомунун мүчөсү, Кыргызстан математиктер коомунун вице президенти болуп келди.
- 2014-жылы Кыргыз Республикасынын Өкмөтүнүн Ардак грамотасы, 2014-ж.
- “Хан-Теңири” сыйлыгынын лауреаты, 2017-ж.
- Россиянын табигый илимдер академиясынын академиги, 2019-ж.
- Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Ардактуу Академиги, 2021-ж.

**«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ.
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА»
ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ**

Техникалык редактор: ***Абдирайимова Назигай Абдинабиевна***

ОшМУнун "Билим" редакциялык басма бөлүмүндө даярдалып,
басмадан чыгарылды.

Биздин дарек: 723500, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331.
Байланыш телефону: +996 553 50 00 54
Факс: (+9963222) 70915
Электрондук дарек: journal-mpht@oshsu.kg
Сайт: www.oshsu.kg

Негиздөөчүсү – Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги,
Ош мамлекеттик университети

Басууга берилди: 30.06.2023
Көлөмү: 26,7 б.т.
Форматы: 176x250 1/8 Нуска: 300 д.

«Билим» редакциялык – басма бөлүмү