e-ISSN 1694-8645

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

BULLETIN OSH STATE UNIVERSITY
MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES

№1 (2023)

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ

ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН

ЖАРЧЫСЫ

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

Илимий журнал

№1, 2023

ВЕСТНИК

ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА

Научный журнал

BULLETIN

Osh State University

MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА»

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_6

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физико-математических наук, профессор,
ablabekov_63@mail.ru
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына,
Кыргызская Республика, г. Бишкек
Байсеркеева Айнура Бектургановна, кандидат физико-математических наук, доцент
a.baiserkeeva@mail.ru
Асылбек кызы Мээрим, магистрант
asylbekova1458@gmail.com
Иссык-Кульский государственный университет им.К.Тыныстанова,
Кыргызская Республика г. Каракол,

Аннотация. *При исследовании обратных задач математической физики важную роль играет знание решений соответствующей прямой (в данном случае нелокальную) задачи. В настоящей работе исследуется существование и единственность классического решения одной нелокальной задачи для одномерного неоднородного псевдопараболического уравнения третьего порядка. Для доказательства существования и единственности решения поставленной задачи применяется метод фундаментального решения. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций.*

Ключевые слова: *псевдопараболическое уравнениене, нелокальная задача, фундаментальное решение, задача Гурса,   интегральное уравнение, краевая задача.*

ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН БИР ЛОКАЛДЫК ЭМЕС МАСЕЛЕНИН ЧЕЧИЛИШИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, физика-математика илимдеринин доктору, профессор,
ablabekov_63@mail.ru
Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети, Бишкек шаары,
Кыргыз Республикасы
Байсеркеева Айнура Бектургановна, физика-математика илимдеринин канддиты, доцент
a.baiserkeeva@mail.ru
Асылбек кызы Мээрим, магистрантка
asylbekova1458@gmail.com

К.Тыныстанов атындагы Ысык-Көл мамлекеттик университети,

Каракол шаары, Кыргыз Республикасы

Аннотация. *Математикалык физиканын тескери маселелерин изилдөөдө тиешелүү түз (биздин учурда локалдык эмес) маселенин чыгарылышын билүү маанилүү роль ойнойт. Бул макалада биз үчүнчү тартиптеги бир өлчөмдүү бир тектүү эмес псевдопараболалык теңдеме үчүн локалдык эмес маселенин классикалык чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын изилдейбиз. Коюлган маселенин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө үчүн фундаменталдык чыгарылыш ыкмасы колдонулат. Үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функциялар классында каралып жаткан маселенин бир манилүү чыгарымдуулугунун жетиштүү шарттары алынган.*

Ачкыч сөздөр: *псевдопараболикалык теңдеме, локалдык эмес маселе, фундаменталдык чыгарылыш, Гурстун маселеси, интегралдык теңдеме, чектик маселе.*

SOLVABILITY OF ONE NONLOCAL PROBLEM FOR A PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Ablabekov Baktybai Saparbekovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor,

ablabekov_63@mail.ru

Kyrgyz National University J. Balasagyna,

Kyrgyz Republic, Bishkek

Bayserkeeva Ainura Bekturganovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

a.baiserkeeva@mail.ru

Asylbek kyzy Meerim, master student

asylbekova1458@gmail.com

Issyk-Kul State University named after K. Tynystanov,

Kyrgyz Republic, Karakol

Abstract. *In the study of inverse problems of mathematical physics, knowledge of the solutions of the corresponding direct (in this case, nonlocal) problem plays an important role. In this paper, we study the existence and uniqueness of a classical solution of a nonlocal problem for a one-dimensional nonhomogeneous pseudoparabolic equation of the third order. The fundamental solution method is used to prove the existence and uniqueness of a solution to the problem posed. Sufficient conditions are established for the unique solvability of the problem under consideration in the class of continuously differentiable functions.*

Key words: *pseudoparabolic equation, nonlocal problem, fundamental solution, Goursat task, integral equation, boundary value problem.*

Введение

В настоящее время активно изучаются локальные и нелокальные начально-краевые задач для псевдопараболических уравнений из-за того, что прикладные задачи физики, механики, биологии сводятся к таким уравнениям и вызывают большой практический и теоретический интерес. Например, известно, что [1, 2] движение уравнение фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде описывается следующим уравнением:

$$\beta_0(x)D_t\,p(x,t)-div[\frac{k(x)}{\mu(x)}grad\,p(x,t)+\eta(x)\beta_0(x)D_t grad\,p(x,t)]=0, \qquad (0.1)$$

где $p(x,t)$ - искомая функция, характеризирующая давление жидкости в трещинах; $k(x)$ - коэффициент проницаемости трещин; $\beta_0(x)$ - коэффициент сжимаемости жидкости; $\mu(x)$ - вязкость жидкости, $\eta(x)$ - коэффициент пьезопроводности. Задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды в капиллярно-пористых средах, описываются уравнением Аллера [3] (см. [4, с. 371]):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(u)\frac{\partial u}{\partial x}+A\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right]+f(x,t), \qquad (0.2)$$

где A – варьируемый параметр, $D(u)$ – коэффициент диффузитивности, являющийся функцией искомой влажности.

Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых задаются условия, связывающие значения искомого решения или его производных в различных точках границы и каких-либо внутренних точках.

Нелокальные задачи для псевдопараболических уравнений с интегральными условиями изучены в работах А.Бузани [9, 10].

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решений одной нелокальной задачи с одним локальным условием и одним периодическим условием для одномерного псевдопараболического уравнения третьего порядка.

Постановка задачи и основной результат.

В области $D_T=\{(x,t):0<x<l,\,0<t<T\}$ рассмотрим задачу определения функции $u(x,t)$ из уравнения

$$Lu\equiv u_t-u_{xxt}-u_{xx}=f(x,t),\quad (x,t)\in D_T \qquad (1)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0<x<l, \qquad (2)$$

граничным условиям

$$u(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le T, \qquad (3)$$

$$u_x(0,t)=u_x(l,t),\quad 0\le t\le T, \qquad (4)$$

где $u_0(x), \mu(t)$, $f(x,t)$ - заданные, непрерывные при $[0,l]$, $[0,T]$, D_T соответственно функции.

Через $C^{(n,m)}(D_T)$ обозначен класс функций $u(x,t)$, определенных в D_T и таких, что $\partial^{k+l}u / \partial x^k \partial t^l \in C(D_T)$ при $0 \le k \le n, \quad 0 \le l \le m$; $C^{(0,0)}(D_T)$ обозначим через $C(D_T)$.

Определение. Классическим решение задачи (1)-(4) называется функция $u(x,t)$ из класса $C^{(2,1)}(D_T) \cap C^{(1,0)}(\bar{D}_T)$, удовлетворяющая условиям (1)-(4) в классическом смысле.

Справедлива

Теорема. Пусть выполнены для заданных функций следующие условия: 1) $u_0(x) \in C^2[0,l],\ \mu(t) \in C^1[0,T],\ f(x,t) \in C(\bar{D}_T)$, 2) $u_0(0) = \mu_1(0),\ u_0'(0) = u_0'(l).$ Тогда задача (1)-(4) имеет единственное решение, такое, что $u(x,t) \in C^{(2,1)}(D_T) \cap C^{(1,0)}(\bar{D}_T)$.

Доказательство. Обозначим $u_x(l,t)$ через $\psi(t)$ и рассмотрим следующую задачу Гурса для псевдопараболического уравнения: найти в области D_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) и условиям Гурса

$$u(0,t) = \mu(t),\ u_x(0,t) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Предположим, что $\psi(t) \in C^1[0,T]$, причем $\psi(0) = u_0'(l)$.

Тогда, в силу теоремы 3 из [4], задача (1), (2), (5) имеет единственное решение и это решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \int_0^x Z(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int_0^x u_0(\xi)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - I\right) Z(x-\xi,t) d\xi \\ &+ [\psi(t) shx + \int_0^t \psi(\tau)\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + I\right) Z(x, t-\tau) d\tau] + [\mu(t) chx + \\ &+ \int_0^t \mu(\tau) \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \right) Z(x, t-\tau) d\tau] - u_0(0) Z(x,t) + u_0(x) e^{-t} - u_0(0) \frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $E(x,t)=\theta(t)Z(x,t)$ - фундаментальное решение оператора L:

$$Z(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi^2+1}e^{-\frac{\xi^2}{\xi^2+1}t+i\xi|x|}d\xi. \tag{7}$$

Вводя обозначение

$$K(x,t,\tau)=\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+I\right)Z(x,t-\tau), \tag{8}$$

$$h(x,t)=\int_0^t\int_0^x Z(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^x u_0(\xi)(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-I)Z(x-,t)d\xi+$$

$$\begin{aligned}&+\mu(t)chx+\int_0^t\mu(\tau)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)Z(x,t-\tau)d\tau]-\\&-u_0(0)\left(\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}+Z(x,t)\right)+u_0(x)e^{-t},\end{aligned} \tag{9}$$

перепишем формулу (6) в виде

$$u(x,t)=\psi(t)shx+\int_0^t K(x,t,\tau)\psi(\tau)d\tau+h(x,t), \tag{10}$$

Далее исследуем функции $K(x,t,\tau)$ и $h(x,t)$.

Имеет место следующее утверждение

Лемма 1. При $t>\tau$ ядро $K(x,t,\tau)$ определяемое равенством (9) имеет непрерывные производные по x , t и при любых $k,l=0,1,2,\dots$,справедлива оценка

$$\left|D_x^2 D_t K(x,t,\tau)\right|\le\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+I\right)\frac{e^{-|x|(1-(t-\tau))}}{2}(1+(t-\tau))(2+|x|)^2. \tag{11}$$

Доказательство. Лемм 1 доказывается с помощью оценок функции $Z(x,t)$ и ее производных [5]:

$$\left|D_x^k D_t^l Z(x,t)\right|\le\frac{e^{-|x|(1-t)}}{2}(1+t)^k(2+|x|)^l.$$

Теперь оценим функцию $h(x,t)$, определяемое равенством (9). Так как

$u_0(x)\in C^2[0,l],\ \mu(t)\in C^1[0,T],\ f(x,t)\in C(\bar{D}_T)$, то $h(x,t)\in C^{(2,1)}(\bar{D}_T)$, то из (9) с учетом равенства (11) имеем

$$|h(x,t)|\le\int_0^t\int_0^x|Z(x-\xi,t-\tau)||f(\xi,\tau)|d\xi d\tau+\int_0^x|u_0(\xi)|\left|(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-I)Z(x-,t)\right|d\xi+$$

$$+|\mu(t)|chx+\int_0^t|\mu(\tau)|\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)Z(x,t-\tau)\right|d\tau]+$$

$$+|u_0(0)|\left|\left(\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}+Z(x,t)\right)\right|+|u_0(x)|e^{-t}\le$$

$$\le C+\|f\|_C\int_0^t\int_0^x\frac{e^{-|x-\xi|(1-(t-\tau))}}{2}d\xi d\tau+\|u_0\|_C\int_0^x\left[\frac{e^{-|x-\xi|(1-(t-\tau))}}{2}\left((2+|x-\xi|)^2+1\right)\right]d\xi,$$

где С постоянные зависящее от заданных функций $u_0(x),\mu(t),\ f(x,t)$.

Далее можно показать, что справедливо оценка

$$\left|D_x^2D_th(x,t)\right|\le\frac{e^{-|x|(1-t)}}{2}(1+t)(2+|x|)^2. \qquad (12)$$

Таким образом функции $K(x,t,\tau)$, $h(x,t)$ и их производные являются непрерывными и ограниченными функциями. В равенство (10) входит неизвестная функция $\psi(t)$.

Из леммы 1 и неравенств (11), (12) следует, что равенство можно дифференцировать по *x* и затем пологая *x=l*, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $\psi(t)$:

$$\psi(t)=A\int_0^t\frac{\partial K(l,t,\tau)}{\partial x}\psi(\tau)d\tau+A\frac{\partial h(l,t)}{\partial x}, \qquad (13)$$

где $A=(1-cshl)^{-1}$.

Ядро и правая часть интегрального уравнения (13) непрерывные и ограниченные функции. Тогда решение уравнения (13) имеет вид

$$\psi(t)=g(t)+\int_0^tR(t,\tau)g(\tau)d\tau, \qquad (14)$$

где $R(t,\tau)$ - резольвента ядра $A\dfrac{\partial K(l,t,\tau)}{\partial x}$, а $g(t)=A\dfrac{\partial h(l,t)}{\partial x}$.

Подставляя (14) в формулу (10) найдем явное решение задачи (1) -(4). Кроме того, из системы уравнений (10), (13) следует непрерывная зависимость решения задачи (1)-(4)

от заданных функций $u_0(x), \mu(t), \ f(x,t)$. Теорема доказана.

Литература

1. Баренблатт, Г.И. О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах [Текст] /Г.И.Баренблатт // Прикл. математика и механика. -1963. – Т. 27, №2. – С. 348– 350.
2. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах [Текст] /Г.И.Баренблатт, Ю.П.Желтов, И.Н.Кочина // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 852– 864.
3. Hallaire M. L’eau et la production vegetable // Institut national de la recherche Agronomique. 1964. № 9.
4. Чудновский, А.Ф. Теплофизика почвы [Текст] /А.Ф.Чудновский. –М.: Наука, 1976. - 352с.
5. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] /Б.С.Аблабеков. - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.
6. Аблабеков Б.С. Фундаментальное решение и задачи Коши для двумерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде [Текст] /Б.С.Аблабеков // Известия КГТУ им. И.Раззакова, №19, Бишкек 2009. - С.98-101.
7. Аблабеков Б.С. Начально-краевая задача для двумерного уравнения фильтрации жидкостей в трещиновато-пористой среде на неограниченном канале[Текст] /Б.С.Аблабеков // Исслед.по и.-д.у. Бишкек: Илим 2009. - Вып. 41. с.165-169.
8. Аблабеков Б.С. Решение некоторых начальных и краевых задач для уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде [Текст] /Б.С.Аблабеков, А.А.Курманбаева //
9. Bouziani A. Initial-boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions [Текст] / A. Bouziani //J. Math. Anal. Appl. 291 (2004) 371–386.
10. Bouziani A. Solvability of a nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition [Текст]/ A. Bouziani // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 55 (2003), 883-904.

УДК 514.75

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_13

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Апаков Юсупжон Пулатович, д.ф.-м.н., профессор,
yusupjonapakov@gmail.com,
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз,
Наманганский инженерно-строительный институт,
Наманган, Узбекистан
Хамитов Азизбек Ахмаджон угли, аспирант,
azizbek.khamitov.93@mail.ru,
Наманганский инженерно-строительный институт,
Наманган, Узбекистан

Аннотация. *В работе для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками рассмотрена краевая задача в трехмерном пространстве в полуограниченной области. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Существование решения доказано методом разделения переменных. Решение построено явно в виде бесконечного ряда, обоснована возможность почленного дифференцирования ряда по всем переменным.*

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение с частными производными, уравнение третьего порядка, кратные характеристики, краевая задача, единственность, существование, ряд, полуограниченная область, абсолютная и равномерная сходимость.*

ON SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM POSED FOR AN EQUATION WITH THE THIRD ORDER MULTIPLE CHARACTERISTICS IN A SEMI-BOUNDED DOMAIN IN THREE DIMENSIONAL SPACE

Apakov Yupjon Pulatovich, Dr Sc, professor,
yusupjonapakov@gmail.com,
V.I.Romanovskii Institute of Matematics of the Academy of Sciences of the Uzbekistan,
Namangan, Uzbekistan
Hamitov Azizbek Ahmadjon uglu, Postgraduate Student,
Namangan Engineering-Construction Institute,
azizbek.khamitov.93@mail.ru,
Namangan, Uzbekistan

Abstract. *In this work, the boundary value problem posed for an equation with the third order multiple characteristics in a semi-bounded domain in three dimensional space is considered. The uniqueness of a solution of* *the posed problem is proved by the method of energy integral. The existence of the solution is proved by means of the method of variables separation. The solution is constructed in form of the exact infinite series, and an opportunity of term-by-term differentiation of the series with respect to all variables is justified.*

Key words: *Partial differential equation, third order equation, multiple characteristics, boundary value problem, uniqueness, existence, series, semi-bounded domain, absolute and smooth convergence.*

1. Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка изучаются многими авторами (см., например, [1-11]).

В работе [12], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx}+u_{yy}-\frac{\nu}{y}u_y=u_x u_{xx}, \quad \nu=const.$$

Это уравнение при $\nu=1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu=0$ описывает плоско - параллельный поток [13].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах H. Block [14], E. Del Vecehio[15]. L. Catabriga в работе [16] для уравнения $D_x^{2n+1}u-D_y^2u=0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала, решил краевые задачи.

В работах [17-18] построены фундаментальные решения уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдены оценки при $|t|\to\infty$.

2. Постановка задачи

В области $D^+=\{(x,y,z):\ 0<x<+\infty,\ 0<y<q,\ 0<z<r\}$ рассмотрим уравнения

$$L[u]\equiv\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

где $q>0, \ r>0$ – постоянные вещественные числа, и для него исследуем следующую задачу.

Задача B**.** Найти решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C^{3,2,2}_{x,y,z}\left(D^+\right)\cap C^{2,1,1}_{x,y,z}\left(D^+\cup\Gamma\right)$, имеющего ограничение первой производной по y, по z и второй производной по x при $x\to+\infty$, и $u_y,u_z\in L_2\left(D^+\right)$, удовлетворяющего следующими краевыми условиями

$$u_y\left(x,0,z\right)=u_y\left(x,q,z\right)=0,\ u_z\left(x,y,0\right)=u_z\left(x,y,r\right)=0,\ 0<x<+\infty, \quad (2)$$

$$\begin{gathered} u\left(0,y,z\right)=\psi_1\left(y,z\right), \\ \lim_{x\to+\infty}u\left(x,y,z\right)=\lim_{x\to+\infty}u_x\left(x,y,z\right)=0,\ 0\le y\le q,\ \ 0\le z\le r, \end{gathered} \quad (3)$$

где $\Gamma=\partial D^+$ – граница области D^+, $\psi_1\left(y,z\right)$ – заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\frac{\partial\psi_1\left(0,z\right)}{\partial y}=\frac{\partial\psi_1\left(q,z\right)}{\partial y}=0,\frac{\partial^4\psi_1\left(y,0\right)}{\partial y^3\partial z}=\frac{\partial^4\psi_1\left(y,r\right)}{\partial y^3\partial z}=0. \quad (4)$$

Отметим, что в плоскости полуограниченных областях изучены в работах [19-22], а в трехмерном пространстве для уравнения второго порядка в работах [23-24] исследованы некоторые корректные краевые задачи. А также в работах [25-28] в конечные области изучены краевые задачи в трехмерном пространстве.

3. Единственность решения

Теорема 1. Если задача B имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное пусть задача B имеет два решения $u_1\left(x,y,z\right)$ и $u_2\left(x,y,z\right)$. Тогда функция $u\left(x,y,z\right)=u_1\left(x,y,z\right)-u_2\left(x,y,z\right)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u\left(x,y,z\right)\equiv0$ в D^+.

Для этого уравнения (1) умножим на *u*, тогда получим

$$uL\left[u\right]\equiv u\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)=0\text{, или}$$

$$u\,L[u]\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\,u_y\right)+u_y^2-\frac{\partial}{\partial z}\left(u\,u_z\right)+u_z^2=0. \quad (5)$$

Интегрируя тождество (5) по области

$D_d=\{(x,y,z):\ 0<x<d,\ 0<y<q,\ 0<z<r\}$, где $d>0$, имеем

$$\int_0^q\int_0^r u(d,y,z)u_{xx}(d,y,z)dydz-\int_0^q\int_0^r u(0,y,z)u_{xx}(0,y,z)dydz-\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(d,y,z)dydz+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(0,y,z)dydz-\int_0^d\int_0^r u(x,q,z)u_y(x,q,z)dxdz+\int_0^d\int_0^r u(x,0,z)u_y(x,0,z)dxdz-\qquad(6)$$
$$-\int_0^d\int_0^q u(x,y,r)u_z(x,y,r)dxdy+\int_0^d\int_0^q u(x,y,0)u_z(x,y,0)dxdy+\iiint_{D_d}u_y^2(x,y,z)dxdydz+$$
$$+\iiint_{D_d}u_z^2(x,y,z)dxdydz=0.$$

Если $d\to+\infty$, то $D_d\to D^+$. При этом, учитывая однородные краевые условия задачи B, т.е. $\psi_1(y,z)=0$, свойства функции $u(x,y,z)$ при $x\to+\infty$ и $u_y,u_z\in L_2(D^+)$, из (6) получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(0,y,z)dydz+\iiint_{D^+}u_y^2(x,y,z)dxdydz+\iiint_{D^+}u_z^2(x,y,z)dxdydz=0.$$

Отсюда следует, что $u_y(x,y,z)=0$ и $u_z(x,y,z)=0$, тогда $u(x,y,z)=f(x)$ в D^+. Поставляя в уравнение (1) имеем $f'''(x)=0$. Отсюда, $f(x)=C_1x^2+C_2x+C_3.$ Из условии (3) получим $f(0)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, тогда, $C_1=0,\ C_2=0,\ C_3=0$, отсюда имеем, что $f(x)=0.$ Следовательно, $u(x,y,z)\equiv 0$ в $D^+\cup\Gamma$. В силу последнего, получим $u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z).$

Теорема 1 доказана.

4. Существование решения

Теорема 2. Если функции $\dfrac{\partial^{i+j}\psi_1(y,z)}{\partial y^i\partial z^j}\in L_2[0<y<q,0<z<r],\ i,j=\overline{1,3}$ и выполняются условия согласования (4), то решение задачи B существует.

Доказательство. Решение задачи B ищем в виде

$$u(x,y,z)=\mathrm{X}(x)\cdot V(y,z). \tag{7}$$

Поставляя (7) в уравнение (1) и разделяя переменные, относительно функции $\mathrm{X}(x)$ получим уравнение:

$$\mathrm{X}''' + \lambda \mathrm{X} = 0, \tag{8}$$

а для функции $V(y,z)$ - следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} V_{yy} + V_{zz} + \lambda V = 0, \\ V_y(0,z) = V_y(q,z) = 0, \\ V_z(y,0) = V_z(y,r) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где λ - параметр разделения.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (9).

Положим

$$V(y,z) = Y(y)\cdot Z(z). \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение (9), разделяя переменные, имеем задачи

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0, \\ Y'(0) = Y'(q) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} Z'' + \mu Z = 0, \\ Z'(0) = Z'(r) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где ν и μ - постоянные, связанные соотношением $\nu + \mu = \lambda$.

Решение задачи (11), (12) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} Y(y) = A_1 \sin\sqrt{\nu}\, y + B_1 \cos\sqrt{\nu}\, y, \\ Z(z) = A_2 \sin\sqrt{\mu} z + B_2 \cos\sqrt{\mu} z. \end{cases} \tag{13}$$

С учетом граничных условий, из (13) находим

$$\begin{cases} Y_n(y) = B_n \cos\dfrac{n\pi y}{q}, \\ Z_m(z) = B_m \cos\dfrac{m\pi z}{r}, \end{cases} \tag{14}$$

где $\nu_n = \left(\dfrac{n\pi}{q}\right)^2, \mu_m = \left(\dfrac{m\pi}{r}\right)^2, (n,m = 1,2,3,\ldots) -$ собственные значения.

Тогда, в качестве решения спектральной задачи (11), (12) возьмем функции

$$V_{n,m}(y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{qr}},\ \textit{если}\ n,m=0,\\ \dfrac{2}{\sqrt{qr}}\cos\dfrac{n\pi y}{q}\cos\dfrac{m\pi z}{r},\ \textit{если}\ n,m\in N,\end{cases} \tag{15}$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{n,m}=\left(\frac{n^2}{q^2}+\frac{m^2}{r^2}\right)\pi^2,\ \ n,m\in N.$$

Отметим, что система собственных функций (15) задачи (11), (12) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2\left(D^+\right)$ и образует там базис [26].

Решение уравнения (8) имеет вид:

$$X_{n,m}(x)=C_{1n,m}e^{-k_{n,m}x}+e^{\frac{1}{2}k_{n,m}x}\left(C_{2n,m}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}x+C_{3n,m}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}x\right), \tag{16}$$

где

$$k_{n,m}=\sqrt[3]{\lambda_{n,m}}=\sqrt[3]{\nu_n+\mu_m}=\sqrt[3]{\left(\frac{n\pi}{q}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{r}\right)^2}.$$

Далее, по постановке задачи B следует, что

$$\lim_{x\to+\infty}X_{n,m}(x)=\lim_{x\to+\infty}X'_{n,m}(x)=0.$$

Следовательно, в (16) необходимо считать, что $C_{2n,m}=C_{3n,m}=0$. Тогда функция (16) примет вид

$$X_{n,m}(x)=C_{1n,m}e^{-k_{n,m}x}. \tag{17}$$

Теперь, в силу (7) решение задачи B ищем в виде

$$u(x,y,z)=X_0(x)V_0(y,z)+\sum_{n,m=1}^{+\infty}X_{n,m}(x)V_{n,m}(y,z). \tag{18}$$

Функция, определяемая формальным рядом (18), удовлетворяет условиям (2).

Считая временно, что ряд в (18) и его производные сходятся равномерно и требуем от функции $u(x,y,z)$, определяемой рядом (18), выполнения краевых условий (3), получим

$$u(0,y,z)=\psi_1(y,z)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\sum_{m,n=1}^{+\infty}C_{1n,m}\cos\frac{n\pi y}{q}\cos\frac{m\pi z}{r},$$

где $C_{1n,m}$ — коэффициенты Фурье функции $\psi_1(y,z)$, т.е.

$$C_{1n,m}=\psi_{1n,m}=\frac{2}{\sqrt{qr}}\int_0^q\int_0^r\psi_1(y,z)\cos\frac{n\pi y}{q}\cos\frac{m\pi z}{r}dydz. \qquad (19)$$

Подставив $C_{1n,m}$ в (18), получим

$$u(x,y,z)=X_0(x)V_0(y,z)+\sum_{n,m=1}^{+\infty}\psi_{1n,m}e^{-k_{n,m}x}\cos\frac{n\pi y}{q}\cos\frac{m\pi z}{r}. \qquad (20)$$

Теперь докажем, что ряд (20) и его производные u_{xxx}, u_{yy} и u_{zz} сходятся равномерно в области $D^+\cup\Gamma$, то функция $u(x,y,z)$, определяемая этим рядом, даёт решение задачи B.

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (20). Из (20) имеем

$$\begin{aligned}&|u(x,y,z)|=\left|X_0(x)V_0(y,z)+\sum_{n,m=1}^{+\infty}\psi_{1n,m}e^{-k_{n,m}x}\cos\frac{n\pi y}{q}\cos\frac{m\pi z}{r}\right|\le\\&\le M_0+\frac{2}{\sqrt{qr}}\sum_{n,m=1}^{+\infty}|\psi_{1n,m}|.\end{aligned} \qquad (21)$$

Интегрируя по частям (19) и принимая во внимание условие (4), получим

$$\psi_{1n,m}=\left(\frac{qr}{\pi^2}\right)^3\frac{\psi_{1n,m}^{(6)}}{n^3m^3}, \qquad (22)$$

где

$$\psi_{1\,n,m}^{(6)}=\frac{2}{\sqrt{qr}}\int_0^q\int_0^r\frac{\partial^6\psi_1(y,z)}{\partial y^3\partial z^3}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}dydz,$$

Учитывая условия на заданные функции, из (21) имеем

$$|u(x,y,z)|\le M_0+M_1\sum_{n,m=1}^{+\infty}\frac{\left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|}{n^3m^3}<\infty,$$

где $M_0, M_1=const>0.$

Отсюда следует, что ряд (20) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что производные ряда (20) входящий в уравнение (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $D^{+} \cup \Gamma$. Для этого вычисляем производные по y и по z, из (20) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2}{\sqrt{qr}}\left(\frac{\pi}{q}\right)^2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} n^2 \psi_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} \cos\frac{n\pi y}{q}\cos\frac{m\pi z}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{2}{\sqrt{qr}}\left(\frac{\pi}{r}\right)^2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} m^2 \psi_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} \cos\frac{n\pi y}{q}\cos\frac{m\pi z}{r}.$$

Оценим полученные равенства и учитывая (22), имеем

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le M_2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{\left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|}{nm^3}, \qquad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \le M_3 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{\left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|}{n^3 m},$$

где $M_2 = \left(\frac{\pi}{q}\right)^2 M_1,\ M_3 = \left(\frac{\pi}{r}\right)^2 M_1.$

Используя неравенства Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le M_2 \sqrt{\sum_{m,n=1}^{+\infty} \left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|^2} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{nm^3}\right)^2} \le \overline{M_2} \left\|\psi_1^{(6)}\right\| < \infty,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \le M_3 \sqrt{\sum_{m,n=1}^{+\infty} \left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|^2} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3 m}\right)^2} \le \overline{M_3} \left\|\psi_1^{(6)}\right\| < \infty,$$

так как

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|^2 \le \left\|\psi_1^{(6)}\right\|^2_{L_2[0<y<q,0<z<r]},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \overline{M_2}, \overline{M_3} = const > 0.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость третьей производной по x ряда (20) следует из $\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right| \le \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|$ и доказанного выше.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Abdullaev, O. K. On a problem for the third order equation with parabolic-hyperbolic operator including a fractional derivative [Text] / O. K. Abdullaev, A. A. Matchanova. // Lobachevskii J. Math. 2022. Vol 43, pp. 275–283.
2. Андреев, А. А. Характеристическая задача для системы гиперболических

дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками [Текст] / А. А. Андреев, Ю.О. Яковлева // Вестн. Самар. тех. ун-та, сер.: Физ.-мат. науки. 2013. № 30, 31–36 с.

3. Зикиров, О.С. О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка [Текст] / О.С. Зикиров // Рус. мат. Т. 2014. №58 (7). 53–60 с.
4. Репин, О. А., Кумыкова С. К. Задача со сдвигом для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами [Текст] / О. А. Репин, С. К. Кумыкова // Вестн. Самар. тех. ун-та, сер.: Физ.-мат. науки. 2012. №29 (4), 17–25 с.
5. Сабитов, К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области [Текст] / К.Б. Сабитов // Дифферен. урав. 2011. №47, 706–714 с.
6. Сопуев, А. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Н.К. Аркабаев // Вестн. Томск. ун-та, мат. мех. 2013. №21 (1), 16–23 с.
7. Шхануков, М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах [Текст] / М. Х. Шхануков // Дифференц. уравн. 1982. №18, 689–699 с.
8. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для одного интегро - дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка [Текст] / Т. К. Юлдашев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - № 1(34). - С. 56-65.
9. Юлдашев, Т. К. Об интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка [Текст] / Т. К. Юлдашев // Рус. мат. 2015. №59 (9), 62–66 с.
10. Yuldashev, T.K. Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel [Text] / T. K. Yuldashev, Yu. P. Apakov, A. Kh. Zhuraev // Lobachevskii J. Math. 2021. Vol 42, pp. 1317–1327.
11. Yuldashev, T.K. Boundary-value problems for loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains [Text] / T. K. Yuldashev, B. I. Islomov, E. K. Alikulov // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol 41, pp. 926–944.
12. Рыжов, О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа [Текст] / О.С. Рыжов // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

13. Диесперов, В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения [Текст] / В.Н. Диесперов // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.
14. Block, H. Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples [Text] / H. Block // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21),- pp. 1- 30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.
15. Del Vicchio, E. Sulleequazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$ [Text] / Del Vicchio E. Sulleequazioni // Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.
16. Cattabriga, L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple [Text] / L. Cattabriga // Rendiconti del seminario matimatico della univ. di Padava. - 1961, 31. - pp. 1-45.
17. Джураев, Т.Д. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Т.Д. Джураев, Ю.П. Апаков // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007. - № 2(15). - С.18-26.
18. Джураев, Т.Д, Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени [Текст] / Т.Д. Джураев, Ю.П. Апаков // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, том 62. № 1.- С. 40-51.
19. Апаков, Ю.П. К решению краевых задач для уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ в неограниченных областях [Текст] / Ю.П. Апаков // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. –Ташкент, 2006. –№3. –С. 17-20.
20. Апаков, Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях [Текст] / Ю.П. Апаков // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. –Нальчик, 2008. -№2(22). –С. 147-151.
21. Апаков, Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье в областях с некомпактными границами [Текст] / Ю.П. Апаков // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2008. -№1. –С. 14-22
22. Апаков, Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю.П. Апаков // – Т.: «Fan va texnologiya», 2019, -156 с.
23. Апаков, Ю.П. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнений в конечной призматической области трехмерного пространства [Текст] / Ю.П. Апаков

// Тез. докл. Всесоюзной школы молодых ученых. «Функциональные методы в прикладной математике и математической физике» 2-часть, -Ташкент, ТошДУ.1988. -С. 5.

24. Апаков, Ю.П. О некоторых нелокальных задачах для параболо-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве [Текст] / Ю.П. Апаков // «Прямые и обратные краевые задачи математической физики» .- Тошкент, Фан, 1987,-С. 80-95.
25. Апаков, Ю.П., Хамитов А.А. О решения одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве [Текст] / Ю.П. Апаков, А.А. Хамитов // Научный вестник Наманганского государственного университета. – Наманган, 2020. - № 4. – С. 21-31.
26. Сабитов, К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины [Текст] / К.Б. Сабитов // Известия вузов. Математика 2021, № 10, - С. 60-70.
27. Юлдашев, Т. К. Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром [Текст] / Т. К. Юлдашев // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2018, том 145, -С. 95–109.
28. Sidorov, S. N. Inverse Problem of Finding a Factor Depending on the Spatial Variables on the Right-Hand Side in a Parabolic-Hyperbolic Equation [Text] / S.N. Sidorov // Differential Equations. 2021. Vol. 57. No. 12. -pp 1585-1597.

УДК 517.928.2

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_24

КОНЕЧНАЯ СКОРОСТЬ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ В КРОСС ДИФФУЗИОННЫХ СИСТЕМАХ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Арипов Мирсаид Мирсиддиқович, д.ф.-м.н., профессор,

mirsaidaripov@mail.ru

Хожимуродова Мадина Бахромовна,PhD,

madinakhojimurodova@gmail.com

Национальный университет Узбекистана,

Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *Исследована задача Коши для кросс диффузионной параболической системы уравнений не дивергентного вида с переменной плотностью и поглощением, зависящим от времени. В работе путем построения решение типа Зельдовича-Баренблатта для системы установлены нелинейные эффекты конечной скорости и пространственной локализации распространение тепла. Используются метод регуляризации и методика верхнего-нижнего решения, чтобы показать локальное существование решения для нелинейного вырождающегося параболического системы. Обсуждается существование глобального решения, установлены blow-up свойство решения. Доказано локальное существование и единственность классического решения.*

Ключевые слова: *Задача Коши, кросс-диффузия, переменной плотность, конечной скорость, поглощение, локальное существование, глобальное решение, blow-up свойство*

FINITE VELOCITY AND SPACE LOCALIZATION IN NON- DIVERGENT CROSS-DIFFUSION SYSTEMS WITH VARIABLE DENSITY

Aripov Mirsaid Mirsiddikovich, Dr Sc, professor,

mirsaidaripov@mail.ru

Khojimurodova Madina Bakhromovna, PhD,

madinakhojimurodova@gmail.com

National University of Uzbekistan

Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *The Cauchy problem for a cross-diffusion parabolic system of non-divergent equations with variable density and time-dependent absorption is investigated.*

In this paper, by constructing a solution of the Zeldovich-Barenblatt type for the system, nonlinear effects of

finite velocity and space localization of heat conductivity are established. The regularization method and the upper-lower solution technique are used to show the local existence of a solution for a nonlinear degenerate parabolic system. The existence of a global solution is discussed, the blow-up property of the solution is established. The local existence and uniqueness of the classical solution is proved.

Key words: *Cauchy problem, cross-diffusion, variable density, finite velocity, absorption, local existence, global solution, blow-up property.*

Рассмотрим в области $Q=\{(t,x):\ t>0,\ x\in R^N\}$ следующую задачу Коши для кросс диффузионной параболической системы уравнений не дивергентного вида с переменной плотностью и поглощением, зависящим от времени

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v^{\alpha_1}\nabla\left(|x|^n v^{m_1-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right)-\gamma_1(t)\,u,\ \frac{\partial v}{\partial t}=u^{\alpha_2}\nabla\left(|x|^n u^{m_2-1}\left|\nabla v^k\right|^{p-2}\nabla v\right)-\gamma_2(t)\,v,\ (1)$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\ge 0,\ \ v|_{t=0}=v_0(x)\ge 0,\ \ \forall x\in R^N \qquad (2)$$

где $m_i-1,\ \alpha_i>0,\ i=1,k\ge 1,p\ge 2,0<\gamma_i(t)\in C(0,\infty),n\ge p$ - положительные вещественные числа, $n\neq -2,\ u=u(t,x)\ge 0,\ \ v=v(t,x)\ge 0$ - искомые решения.

Нелинейные уравнения и системы уравнений в не дивергентной форме часто используются для описания различных физических явлений, таких, как процесс диффузии для биологических видов, резистивный диффузионных явлений в бес силовых магнитных полей, кривая потока укорочения, распространение инфекционных заболеваний и так далее, см. [1] - [6].

В работе [1] изучается нелинейные вырождающиеся параболическая система $u_t=v^{\gamma_1}\left(u_{xx}+au\right),\ v_t=u^{\gamma_2}\left(v_{xx}+bv\right)$ с граничными условиями Дирихле. Используются метод регуляризации и методика верхнего-нижнего решения, чтобы показать локальное существование решения для нелинейного вырождающегося параболического системы. Обсуждается существование глобального решения, установлены blow-up свойство решения.

Исследовано положительные решения вырожденных квазилинейных параболических систем не дивергентной форме

$$\begin{aligned} u_{it} &= f_i\left(u_{i+1}\right)\left(\Delta u_i+a_iu_i\right),\ x\in\Omega,\ t>0,\ i=1,2,...,n-1,\\ u_{nt} &= f_n\left(u_1\right)\left(\Delta u_n+a_nu_n\right),\ x\in\Omega,\ t>0 \end{aligned}$$

с однородной граничным условием Дирихле и положительным начальным условием в работе [2]. Доказано локальное существование и единственность классического решения.

Показано, что когда $\min\{a_1,...,a_n\} \le \lambda_1$ (где λ_1 является первое собственное значение $-\Delta$ в Ω с однородным граничным условием Дирихле), то существует глобальное положительное классическое решение и все он не имеют свойство blow-up.

В работе [3] исследовано асимптотическое поведение автомодельных решений параболической системы не дивергентного вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i^{\gamma_i} \nabla\left(\left|\nabla u_i\right|^{p-2} \nabla u_i\right) - u_{3-i}^{q_i} \quad \left(i = 1, 2\right)$$

Построены асимптотические представления автомодельных решений нелинейных в зависимости от значения входящих в систему числовых параметров, найдены необходимые и достаточные признаки их существования.

Свойства конечной скорости распространения возмущения (КСРВ) и асимптотика автомодельных решений для дивергентных систем рассмотрены в работах [3-6]. В настоящей работе путем построения решение типа Зельдовича-Баренблатта для системы (1) установлены нелинейные эффекты конечной скорости и пространственной локализации распространение тепла. Получены функции $\gamma_i(\mathrm{t}), i = 1, 2$ при котором происходит пространственная локализация распространение возмущения. Ниже построена автомодельная система, найдено её точное решение, проведён качественный анализ решение автомодельной системы. Автомодельная система относительно $\mathrm{f}(\xi), \psi(\xi)$ для (1) строится следующим образом оценки обобщённого решения и фронта для задачи (1),(2). Найдены условия на числовые параметры системы характеризующие нелинейную среду и

$$\mathrm{u}\left(\mathrm{t}, \mathrm{x}\right) = \bar{\mathrm{u}}(\mathrm{t}) \mathrm{w}\left(\tau, \varphi\left|\mathrm{x}\right|\right), \; \mathrm{v}\left(\mathrm{t}, \mathrm{x}\right) = \bar{\mathrm{v}}(\mathrm{t}) \psi\left(\tau, \varphi\left|\mathrm{x}\right|\right) \tag{3}$$

Тогда система (1) превращается в систему

$$\begin{gathered}\frac{\partial w}{\partial \tau} = \psi^{\alpha_1} \nabla\left(\left|x\right|^n \psi^{m_1-1} \left|\nabla w^k\right|^{p-2} \nabla w\right), \; \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = w^{\alpha_2} \nabla\left(\left|x\right|^n w^{m_2-1} \left|\nabla \psi^k\right|^{p-2} \nabla v\right), \\ \tau(\mathrm{t}) = \int\limits_0^t \bar{w}(\mathrm{y})]^{\alpha_1 + k(\mathrm{p}-2) + m_1 - 1} dy = \int\limits_0^t [\bar{v}(\mathrm{y})]^{\alpha_2 + k(\mathrm{p}-2) + m_2 - 1} dy\end{gathered} \tag{4}$$

$$\bar{\mathrm{w}}(\mathrm{t}) = \exp(-\int\limits_{\mathrm{o}}^{\mathrm{t}} \gamma_1(\mathrm{y}) \mathrm{dy}), \quad \bar{\psi}(\mathrm{t}) = \exp(-\int\limits_{\mathrm{o}}^{\mathrm{t}} \gamma_2(\mathrm{y}) \mathrm{dy}),$$

Используя алгоритм нелинейного расщепления [4] полагая

$$\begin{gathered}\mathrm{w}\left(\tau, \mathrm{x}\right) = (\mathrm{T} + \tau)^{-\alpha_1} \mathrm{z}\left(\tau_1(\tau), \varphi\left|\mathrm{x}\right|\right), \; \mathrm{v}\left(\tau, \mathrm{x}\right) = (\mathrm{T} + \tau)^{-\alpha_2} \theta\left(\tau_1(\tau), \varphi\left|\mathrm{x}\right|\right), \\ \mathrm{z}\left(\tau_1, \varphi\left|\mathrm{x}\right|\right) = \mathrm{f}_1(\xi), \theta\left(\tau_1, \varphi\left|\mathrm{x}\right|\right) = \psi_1(\xi), \xi = \varphi(\left|\mathrm{x}\right|) \tau_1^{-1/\mathrm{p}},\end{gathered}$$

$$\tau_1(t)=\frac{(T+\tau)^{1-\alpha_1 k(p-2)+m_1+n_1-1)}}{1-\alpha_1 k(p-2)+m_1+n_1-1)},\ 1-\alpha_1 k(p-2)+m_1+n_1-1\neq 0, T\geq 0$$

Система (4) при выполнение условия $n_2 m_1-\alpha_1 m_1+k(p-2)=\alpha_2 m_1-\alpha_1 m_1+k(p-2)$, превращается в автомодельную систему уравнений

$$f_2^{n_1}\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}f_2^{m_1-1}\left|\frac{df_1{}^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df_1}{d\xi}\right)+\frac{1}{p}\xi\frac{df_1}{d\xi}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2 m_1+\alpha_1 k(p-2)+n_1-1}f_1=0,$$

$$f_1^{n_2}\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}f_1^{m_2-1}\left|\frac{df_2{}^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df_2}{d\xi}\right)+\frac{1}{p}\xi\frac{df_2}{d\xi}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1 m_2+\alpha_2(p-2)+n_2-1}f_2=0,$$

где где $\xi-$ автомодельная переменная, $s=pN/(p-n), n<p$,

Введем функции

$$u_+(t,x)=\bar{u}(t)(T+\tau)^{-\alpha_3}\left(a-\xi^{p/(p-1)}\right)_+^{p_1},\ v_+(t,x)=\bar{v}(t)(T+\tau)^{-\alpha_4}\left(a-\xi^{p/(p-1)}\right)_+^{p_i}, a>0$$

$$p_i=\frac{p-1}{k(p-2)+m_1+\alpha_1-1}, i=1,2, \xi=\varphi(|x|)\tau_1^{-1/p}, \varphi(|x|)=[(p-n)/p]|x|^{p/(p-n)}, p-n\neq 0$$

$$\tau_1(t)=\frac{(T+\tau)^{1-\alpha_3(k(p-2)+m_1+\alpha_1-1)}}{1-\alpha_3(k(p-2)+m_1+\alpha_1-1)}, 1-\alpha_3(k(p-2)+m_1+\alpha_1-1)$$

В работе в частности доказана следующая теорема

Теорема. Пусть выполнены условия

$$\alpha_i+k(p-2)+m_i-1>0,\ i=1,2,\ \tau_1(\infty)<\infty,\ p>n$$

$$u_0(x)\leq u_+(0,x), x\in R^N$$

Тогда для решения задачи (1), (2) имеет место оценка

$$u(t,x)\leq u_+(t,x), v(t,x)\leq v_+(t,x) \text{ в } Q$$

а для фронта (свободной границы) справедлива оценка $|x|\ \leq[p/(p-n)]a^{(p-1)/p}(\tau_1(t))^{1/(p-n)}$ и решение задачи (1), (2) пространственно локализовано.

Замечание. Из оценки решения, полученной в теореме вытекает, что поскольку $u(t,x)\leq u_+(t,x), v(t,x)\leq v_+(t,x)$ в Q, то решение задачи (1), (2) обладает свойством

$$u(t,x)\equiv 0, v(t,x)\equiv 0 \text{ при } |x|\ \geq[p/(p-n)]a^{(p-1)/p}(\tau_1(t))^{1/(p-n)} \text{ и}$$

$$\tau_1(t)>0,\ \forall t>0$$

что означает конечную скорость распространения возмущений [1-3].

Основной сложностью при численном решение рассмотренной задачи является не единственности решения задачи (1) -(2). Поэтому весьма важно при численных расчетах выбор подходящих начальных приближений в зависимости от значения числовых параметров системы. Так как мы располагаем оценкой решения, её можно использовать в сочетание с принципом сравнение решения для проведения вычислительного эксперимента для достаточно широкого класса данных, используя найденное решение в качестве начального приближения. Также можно анализировать оценку погрешности численного расчета сопоставляя её с точными данными.

Литература

1. Samarskii, A.A. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations. Berlin [Text] / A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov, A.P. Mikhailov // 4(1995), Walter de Grueter, 535. http://dx.doi.org/10.1515/9783110889864
2. Zhi-wen Duan, Li Zhou. Global and Blow-Up Solutions for Nonlinear Degenerate Parabolic Systems with Crosswise-Diffusion [Text] / Zhi-wen Duan, Li Zhou. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 244(2000). – P. 263--278.
3. Арипов, М. К асимптотическому поведению решений нелинейных параболических систем уравнений недивергентного вида. Вестник КазНУ [Text] / М. Арипов, А.С. Матякубов //, №3(86), 2015, с. 275-282.
4. Aripov, M. Method of the Standard Equation for the Solution of the Nonlinear Value Problem [Text] / M. Aripov // Fan, Tashkent, 1988, 137 p.
5. Aripov, M. Computer modeling of nonlinear processes of diffusion [Text] / M. Aripov, Sh.A. Sadullaeva // Tashkent, “University” 2020, 687 pp.
6. Aripov, M., An asymptotic analysis of a self-similar solution for the double nonlinear reaction-diffusion system [Text] / M. Aripov, Sh.A. Sadullaeva // J. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 2015, 6 (6), p. 1-10. (ISSN 1997-1397)

УДК 514:13

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_29

ГЕОМЕТРИЯ В ПОЛУЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Артикбаев Абдуллаазиз, д.ф.-м.н., профессор,
aartykbaev@mail.ru
Исмоилов Шерзодбек, PhD, ст. преподаватель,
sh.ismoilov@nuu.uz
Ташкентский государственный транспортный университет,
Ташкент, Узбекистан.

Аннотация. *Геометрия полуевклидовых пространств является интенсивно развывшейся частью неевклидовой геометрии. В работе изложены основные результаты полученные за последний тридцать лет, по геометрии трехмерных полуевклидовых пространств. Трехмерными полуевклидовыми пространствами являются изотропное и галилеева пространства. В конце работе приведены несколько нерешенных задачи в галилеевом и изотропном пространстве.*

Ключевые слова: *Изотропное пространство, Галлиева пространства, изотропная сфера, первая и вторая квадратичная форма.*

GEOMETRY IN SEMI-EUCLIDEAN SPACES

Artykbaev Abdullaaziz, Dr Sc, professor,
aartykbaev@mail.ru
Ismoilov Sherzodbek, teacher,
Sh.ismoilov@nuu.uz
Tashkent State Transport University,
Tashkent, Uzbekistan.

Abstract. *The geometry of semi-Euclidean spaces is an intensively developed part of non-Euclidean geometry. The paper presents the main results obtained over the past thirty years on the geometry of three-dimensional semi-Euclidean spaces. Three-dimensional semi-Euclidean spaces are isotropic and Galilean spaces. At the end of the paper, several unsolved problems in the Galilean and isotropic space are presented.*

Key words: *An isotropic space, Gallean space, isotropic sphere, first and second fundamental form.*

1. Введение. Вопросы геометрии “в целом” в плоском пространстве времени россмотрена в работе Д.Д. Соколова и А.Артикбаева [2].

Под плоском пространством-временны подразумеваются изучение движение на плоскости с учетом времени. Изучение геометрических образов с учетом времени порождает геометрию Миновского ${}^{1}R_{n}$, которая является пространством с неположительное определенной метрикой [7].

Так как точка на плоскости имеет две координаты, прибавляя к ним время получаем, трехмерную пространству. Следовательно, плоскость и время образует трехмерную пространству. Когда координаты плоскости и время рассматриваются раздельно появляется трехмерные полуевклидовы пространства. Таких пространств два изотропное пространство R_3^2, галилеева пространства R_3^1.

В этой статье мы приводим некоторые известные результаты по геометрии “в целом” поверхностей в пространствах R_3^1, R_3^2 и изложим некоторые переменные задачи.

Свойства поверхностей галилеева пространства R_3^1.

Дифференциальная геометрия поверхностей в галилеевом пространстве R_3^1 изучена в работе [2].

Пусть $Oxyz$ система координат в ${}^{1}R_3$, и $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ базис. Тогда рассматривается поверхности заданные. Специальной системе координатных линий, заданное векторным уравнением

$$r(u,v) = u\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1}$$

Вырожденная первая квадратичная форма этой поверхности имеет вид.

$$ds^2 = \begin{cases} ds_1^2 = du^2 \\ ds_1^2 = G(u,v)dv^2 \text{ при } u = const. \end{cases} \tag{2}$$

Плоскости $x = u = const$ называются особыми плоскостями пространства R_3^1.

Нормаль поверхности $\vec{n}$ – определяется как единичный вектор на особой плоскости перпендикулярной касательной плоскости. С помощью этой нормали определяется вторая квадратичная форма поверхности.

По аналогии евклидова пространства изучается кривизна кривой на поверхности и аналог нормальной кривизны. Определяются главные кривизны и полная кривизна поверхности как произведение нормальных кривизны поверхности.

Формально основные понятие теория поверхностей определяются как в евклидовом пространстве, но геометрическое значение этих величин существенно отличаются от евклидова значение. Имеется существенное отличие в квалификации точек поверхности. В галилеевом пространстве на поверхности кроме эллиптических гиперболических параболических точек существует, названная автором “циклические” точки [14]. Доказана что существует поверхности все точки которого являются циклическими [13].

Основные отличие свойств поверхностей галилеева пространства R_3^1 от евклидова R_3 – связана с вырожденностью метрики пространства.

В галилеевом пространстве не выполняется знаменитая теорема Гауса, о том что полная кривизна поверхности выполни определяется через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности [2]. Тот чает полной кривизны поверхности которая не зависит от коэффициента первой квадратичной формы названа дефектом кривизны поверхности.

Длина кривой вычисляемое по формуле (2) не дает возможность определят кратчайшей на поверхности. Поэтому кратчайшая определятся как кривая имеющая минимальная вариации поворота [2]. Этот особенность затрудняет определят аналог изгибание поверхности в галилеевом пространстве.

С начала XXI века возросли интересе к изучению дифференциальную геометрию кривых и поверхностей в галилеевом пространстве R_3^1 [2].

Среды, которых особенно надо отметит работы Мухиддин Айдин [5][6] которые применяет к исследованию геометрии дробных производных функции.

Геометрия изотропного пространства.

Геометрией поверхностей изотропного пространства ещё в 1945-48- года занимался немецкий математик К.Штрубеккер [11]. После появление работы Д.Д.Соколова и А.Артикбаева [2] возобновился интерес к геометрию изотропного пространства. Хотя изотропное пространство галилеева пространства отличается заменой порядок метрики, геометрия поверхностей вполне отличны друг от друга [8].

Надо отметит, что изотропное пространство является самодвойственным пространством в смысли проективной геометрии [7].

Дифференциальная геометрия изотропного пространства строется по в изотропное пространстве нормаль поверхности единственный вектор коллинеарной оси Oz в координатной системе $Oxyz$. Основные характеристики поверхности тесно связана с ее проекцией на плоскости Oxy. Поэтому пространственная задача переходит к задаче на плоскости. Возникает проблема определят пространственные характеристики поверхности с помошью его проекции но плоскости. Решение этой проблемы в некоторых случаях удается с помощью двойственной поверхностью к данной [12][9] Существуют работы где для изучение теорию поверхности изотропного пространства применены метод наложного пространства [7]. Метод наложного пространствах заключается в том, что нареду изотропного пространства рассматривается евклидова пространства с той же системой координат.[7][10]. В этих методах в основном меняется нормаль поверхности. Но изменения нормали не влияет геометрическим характеристикам поверхности [8]. Последнее время появились множество работ связанных с многомерной геометрией изотропного пространства [15].

В изотропном пространстве можно определят некоторые новые характеристики поверхности.

Определение 3.3.1. Площадь (меру) $S\left(M'\right)$ множества M' на метрической сфере изотропного пространства назовем внешней кривизной множества $M \in F$ и обозначим её $\omega_F\left(M\right) = S\left(M'\right)$[12].

Пусть $M \subset F -$ поверхность изотропного пространства и $M^* \subset F^* -$ его двойственный образ, то есть множество соответствующее по двойственности относительно изотропной сферы.

Определение 3.3.2. Площадь (меру) множества $M^* \subset F^*$ назовем условной внешней кривизной множества $M \subset F$ и обозначим $\mu_F(M) = S(M^*)$. [12]

С помощью геометрии изотропного пространства некоторые задачи геометрии "в целом" легко решаются. Кроме того доказана, что задача восстановление поверхности по внешней кривизне, по гауссовой кривизне и по полной кривизне эквивалентны в изотропном пространстве.

Теорема 1. Задачи существования поверхности по полной кривизне, по внешней кривизне и по условной внешней кривизне в изотропном пространстве являются эквивалентными.

Доказательство. Пусть поверхность $F:\{z = f(x, y)\}$, существование которой доказывается теоремой, проектируется в область D на плоскости Oxy, причем край поверхности Γ проектируется в край области D. Обозначим через $M' \subset D$ проекцию множества $M \subset F$ на плоскость Oxy.

Для удобства введем обозначения: $p = f_x'$, $q = f_y'$, $r = f_{xx}'', t = f_{xy}''$ $s = f_{yy}''$.

Отсюда: $r = p'_x, \quad s = p'_y = q'_x, \quad t = q'_y$,

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Найдем формулу для вычисления внешней кривизны $\omega_F(M)$ поверхности

$$\omega_F(M) = \iint_{M^*} d\alpha dz = \iint_{M^*} \begin{vmatrix} \alpha'_x & z'_x \\ \alpha'_y & z'_y \end{vmatrix} dxdy.$$

Вычислим необходимые производные функций

$$\alpha'_x = \frac{\frac{p}{q}(qs+pr) - \frac{r}{q}(p^2+q^2)}{p^2+q^2}, \quad \alpha'_y = \frac{\frac{p}{q}(qt+ps) - \frac{s}{q}(p^2+q^2)}{p^2+q^2},$$

$$z'_x = -\frac{rp+sq}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad z'_x = -\frac{sp+tq}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставляя найденные производные в равенство, получаем

$$\iint_{M^*} \begin{vmatrix} \alpha'_x & z'_x \\ \alpha'_y & z'_y \end{vmatrix} dxdy = \iint_{M'} \frac{-1}{q(p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} \Big[\Big(p(qs+pr) - r(p^2+q^2)\Big)(sp+tq) -$$

$$-\Big(p(qt+ps) - s(p^2+q^2)\Big)(rp+sq)\Big] dxdy =$$

$$\iint_{M'} \frac{-1}{q(p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} \Big[p^2qs^2 + p^3sr + pq^2st + p^2qtr - p^3rs - pq^2rs -$$

$$-p^2qrt - q^3rt - p^2qrt - p^3sr - pq^2st - p^2qs^2 + p^3sr + pq^2sr + p^2qs^2 + q^3s^2\Big] dxdy =$$

$$= \iint_{M'} \frac{-1}{q(p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} \Big[-p^2qrt - q^3rt + p^2qs^2 + q^3s^2\Big] dxdy =$$

$$= \iint_{M'} \frac{-1}{q(p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} q(p^2+q^2)(s^2-rt) dxdy =$$

$$= \iint_{M'} \frac{rt-s^2}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy.$$

Следовательно, внешняя кривизна вычисляется по формуле

$$\omega_M(F) = \iint_{M'} \frac{rt-s^2}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy.$$

Теперь найдем формулу для вычисления условной кривизны поверхности. Так как площадь поверхности в R_3^2 равна площади его проекции на плоскость Oxy, мы легко получим формулу для вычисления условной кривизны поверхности

$$\mu_F(M) = \iint_{D'} d\tilde{x}d\tilde{y} = \iint_{D} \begin{vmatrix} \tilde{x}'_x & \tilde{y}'_x \\ \tilde{x}'_y & \tilde{y}'_y \end{vmatrix} dxdy = \iint_{D} (f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy}) dxdy = \iint_{D} (rt - s^2) dxdy.$$

В работе И.Я. Бакельмана [7] приведена связь между задачей существования поверхности по заданной внешней кривизне и решением дифференциального уравнения Монжа-Ампера. Если установить эту связь с вышеуказанными задачами в изотропном пространстве, то мы получим:

для полной и условной кривизны

$$rt - s^2 = \varphi(x, y).$$

для внешней кривизны

$$rt - s^2 = \varphi(x, y)\left(p^2 + q^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Эти уравнения являются частными случаями уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, p, q)$, решенного в [7]. Теорема доказана.

2. Некоторые задачи в галилеевом и изотропном пространстве.

1. Определить геодезическую на поверхностях галилеева и изотропного пространства.
2. Изучит свойства изометричных поверхностей в изотропном и галилеевом пространстве. Изометрия определяется в соответствие с вырожденной метрики.
3. Изучит свойства дефекта кривизны поверхности галилеева пространства.
4. Разъяснит геометрическую значению разницы полной кривизны поверхностей галиеева и изотропного пространства с полной кривизной евклидова пространства
5. Определит аналог уравнение Синус-Гардона на седловых поверхностей галилеевом и изотропном пространстве.

Литература

1. Artykbaev A. The dual surfaces of an isotropic space R_3^2 [Text] / A. Artykbaev, Sh. Ismoilov. – Bull. Inst. Math., 2021, Vol-4, Issue-4, pp. 1-8.
2. Артыкбаев А. Геометрия в целом в пространстве время[Текст] / А. Артыкбаев, Д.Д. Соколов. – Ташкент, Фан, 1991, 120-127 с.

3. Artykbaev A. Special mean and total curvature of a dual surface in isotropic spaces[Text] / A. Artykbaev, Sh. Ismoilov. – International electronic journal of geometry, 2022, volume 15, Issue 1, pp. 1–10.

4. Artykbaev A. Surface recovering by a give total and mean curvature in isotropic space [Text] / A. Artykbaev, Sh.Ismoilov. – Palestine Journal of Mathematics, 2022, vol-11(3), pp. 351-361.

5. Aydin M.E.Affine factorable surfaces in isotropic spaces[Text] / M.E. Aydin, A.E Kara, V. Ergüt. – TWMS J. Pure Appl. Math., 2020, Vol-11, N-1, pp.72-88.

6. Aydin M. E. Translation hypersurfaces with constant curvature in 4-dimensional isotropic space[Text] / M. E. Aydin, A.O. Ogrenmis. – International Journal of Maps in Mathematics, 2019, Vol-2, Issue 1, pp. 108-130.

7. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии[Текст]/ Б. А. Розенфельд, Москва Наука, 1969, 547 с.

8. Sachs H. Isotrop Geometri des Raumes[Text] / H.Sachs. – 1990 -300 c.

9. Lone M.S. Dual translation surfaces in the three dimensional simply isotropic space [Text] / M.S. Lone, M.K. Karacan. – Tamkang journal of mathematics, 2018, Volume 49, Number 1, 67-77.

10. Karacan M. K., Yoon D. W. and Bukcu B., Translation surfaces in the three-dimensional simply isotropic space [Text] / M. K. Karacan, D. W. Yoon, B. Bukcu – Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 2016, Vol-13(7).

11. Strubecker K. Differential geometrie des isotropen Raumes I,II III [Text] / K. Strubecker, – Math.Z. 1942, vol-47, 743-777; 1942, vol-48 369-427; 1943, vol-48 369-427.

12. Ismoilov Sh.Sh. Geometry of the Monge - Ampere equation in an isotropic space [Text] / Sh.Sh. Ismoilov, – Uzbek Mathematical Journal, 2022, vol-66, issue-2, pp. 66-77.

13. Ismoilov Sh.Sh. Cyclic surfaces in pseudo-euclidean space[Text] / Sh.Sh. Ismoilov, B.M. Sultanov., – India, International Journal of Statistics and Applied Mathematics. 2020. Volume 5, №1, pp. 28-31.

14. Султанов Б.М. Существование циклической поверхности по заданной функции полной кривизны[Текст] /Б.М. Султанов, – Вестник НУУ. 2017, №2\2, стр. 201- 204.

15. Исмоилов Ш.Ш. Свойства двойственной поверхности в многомерном изотропном пространстве[Текст]/ Ш.Ш. Исмоилов,— Tashkent, Physical and mathematical sciences, 2022. Volume 3. Issue 1. – P. 47-58

УДК 517.968

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_37

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА С ВЫРОЖДЕННЫМИ МАТРИЧНЫМИ ЯДРАМИ НА ПОЛУОСИ

Асанов Авыт, д.ф.-м.н., профессор,
avyt.asanov@manas.edu.kg
Кыргызско-Турецкий Университет Манас,
Бишкек, Кыргызстан
Асанов Рухидин Авытович, к.ф.-м.н., и.о. доцент,
ruhidin_asanov@yahoo.com
Международный Университет Центральной Азии,
Токмок, Кыргызстан
Асанова Каныкей Авытовна, к.ф.-м.н., стар.науч. сотр.,
kanya.asanova@gmail.com
Институт математики НАН КР,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Исследована система линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с вырожденными матричными ядрами но полуоси. Рассматриваемая система линейных интегральных уравнений третьего рода относиться к классу некорректных задач.На основе сравнительно нового подхода показано, что решения для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с вырожденными матричными ядрами но полуоси эквивалентно решению систем линейных алгебраических уравнений. Далее, изучены вопросы существования и единственности решения для этой системы линейных интегральных уравнений третьего рода.*

Ключевые слова: *решения, систем линейных интегральных уравнений, на полуоси, алгебраических, Фредгольма, третьего рода, эквивалентно.*

ЖАРЫМ ОКТОГУ МАТРИЦАЛЫК ЯДРОЛОРУ АЖЫРАГАН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ФРЕДГОЛЬМДУН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ ЖӨНҮНДӨ

Асанов Авыт, д.ф.-м.н., профессор,
avyt.asanov@manas.edu.kg
Кыргызско-Турецкий Университет Манас,
Бишкек, Кыргызстан
Асанов Рухидин Авытович, к.ф.-м.н., ага окутуучу,

ruhidin_asanov@yahoo.com
Международный Университет Центральной Азии,
Токмок, Кыргызстан
Асанова Каныкей Авытовна, к.ф.-м.н., ага.илим.кызм.,
kanya.asanova@gmail.com
Институт математики НАН КР,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Жарым октогу матрицалык ядролору ажыраган Фредгольмдун үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы изилденген. Үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы корректүү эмес маселелердин классына кирет. Салыштырмалуу жаңы ыкманын негизинде, жарым октогу Фредгольмдун үчүнчү түрдөгү матрицалык ядролору ажыраган сызыктуу интегралдык теңдемелер системасынын бир классын чыгаруу маселеси, сызыктуу алгебралык теңдемелер системасын чыгаруу маселесине эквиваленттүү экени көрсөтүлгөн. Андан ары, үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин бул системасы үчүн чыгарылыштарынын бар экендиги жана жалгыздыгы изилденди.*

Ачкыч сөздөр: *чыгарылышы, сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы, жарым ок, алгебралык, Фредгольм, үчүнчү түрдөгү, эквиваленттүү.*

ON SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR INTEGRAL FREDHOLM EQUATIONS OF THE THIRD KIND WITH DEGENERATE MATRIX KERNELS ON THE SEMIAXIS

Asanov Avyt, Dr Sc, professor,
avyt.asanov@manas.edu.kg
Kyrgyz-Turkish Manas University,
Bishkek, Kyrgyzstan
Asanov Ruhidin Avytovich, Dr Sc, acting associate professor,
ruhidin_asanov@yahoo.com
International University of Central Asia,
Tokmok, Kyrgyzstan
Asanova Kanykei Avytovna, Dr Sc, senior researcher,
kanya.asanova@gmail.com
Institute of Mathematics of the NAS of the Kyrgyz Republic,
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *A system of Fredholm linear integral equations of the third kind with degenerate matrix kernels on semi-axes is investigated. The considered system of linear integral equations of the third kind belongs to the class of ill-posed problems. Based on a relatively new approach, it is shown that solutions for one class of systems of Fredholm linear integral equations of the third kind with degenerate matrix kernels on semi-axes are equivalent to solving systems of linear algebraic equations. Further, the questions of the existence and uniqueness of the solution for this system of linear integral equations of the third kind are studied.*

Key words: *solutions, systems of linear integral equations, on the semi-axis, algebraic, Fredholm, of the third*

kind, are equivalent.

1. Введение

Различные вопросы для интегральных уравнений исследовались в $[1-15]$. В частности, в $[3]$ для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву. В работах $[5-6]$ для систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву. В [7] на основе нового подхода исследованы вопросы существования и единственности решения систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с особенностью в одной точке на конечном промежутке. В работе $[8]$ исследованы вопросы существования и единственности решения для неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В $[9]$ изучены вопросы регуляризации и единственности решения систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В [10] на основе подхода, предложенного в [8], изучен класс интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на конечном промежутке. В работах [13] и [14] на основе подходов предложенных в [7] и [10] разработан улучшенный новый подход исследования систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями на конечном промежутке. В [15] изучены вопросы существования и единственности решения систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностьями на оси.

В данной работе доказаны теоремы единственности и существования решения для систем интегральных уравнений (1).

Обозначим через $C_n[a,\infty)-$ пространство всех n - мерных вектор-функций с элементи из $C[a,\infty)$, где $C[a,\infty)-$пространство всех непрерывных функций на $[a,\infty)$. Для векторов $u=(u_1,\dots,u_n)^T$, $v=(v_1,\dots,v_n)^T\epsilon\, R^n$ определим скалярное произведение по формуле

$$<u,v>=\ u_1v_1+\dots+u_nv_n\,.$$

Через $L_p[a,\infty)$ обозначим пространство всех функций с интегрируемой p-й степенью на $[a,\infty)$, p> 1.

Обозначим через $L_{p,n}[a,\infty)-$пространство всех n - мерных вектор-функций с элементами из $L_p[a,\infty)$.

2. Системы линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси

Рассмотрим следующие системы интегральных уравнений

$$p(x)u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_j(x) \int_a^{\infty} B_j(y)u(y)dy + f(x),\ x\epsilon[a,\infty), \tag{1}$$

где $p(x) -$ известная непрерывная функция на $[a,\infty)$, $A_j(x) = (\ a_{is,j}(x))$ и $B_j(x) = (\ b_{is,j}(x))$ - $n \times n-$ мерные известные непрерывные матричные функции на $[a,\infty)$ $(j = 1,\dots,m)$, $f(x) = (f_i(x))\ -\ n-$ мерная известная непрерывная вектор-функция на $[a,\infty)$, $u(x) = (u_i(x))\ -\ n-$ мерная неизвестная непрерывная вектор-функция на $[a,\infty)$, $\lambda -$ действительный параметр, $p(x_l) = 0, x_l\ \epsilon[a,\infty),\ l = 1,2,\dots,k$.

Всюду будем предполагать, что

$$p(x) = \prod_{e=1}^{k} p_l(x),\ p_l(x_l) = 0,\ p_l(x)\ \epsilon\ C(R), \tag{2}$$

$p_l(x) \neq 0$ при $x\ \epsilon\ R$ и $x \neq x_l,\ l = 1,\dots,k$.

Предположим выполнения следующих условий:

а) Для всех $l = 1,\dots,k$, и $j = 1,\dots,m$ $A_{l,j}(x) = (\ a_{is,lj}) -$ являются непрерывными матричными функциями на R, $a_{is,kj}(x) \in L_p[a,\infty)$,

$p > 1, b_{is}(x) \in L_q[a,\infty),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (\ i,s = 1,\dots,n, j = 1,\dots,m)$ где

$$A_{0,j}(x) = A_j(x), A_{l,j}(x) = \frac{1}{p_l(x)}\left[A_{l-1,j}(x) - A_{l-1,j}(x_l)\right], x\epsilon[a,\infty);$$

б) Для всех $l = 1,\dots,k$ $f_l(x) = (f_{i,l}(x)) -$ функции являются непрерывными функциями на $[a,\infty)$, $f_{i,k}(x) \in L_p[a,\infty), (i = 1,\dots,n)$ где

$$f_0(x) = f(x),\qquad f_l(x) = \frac{1}{p(x)}[f_{l-1}(x) - f_{l-1}(x_l)],\qquad x\ \epsilon\ [a,\infty).$$

Теорема. Пусть выполняются условия (2), а) и б). Тогда

1) если система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \lambda \sum_{j=1}^{m} A_j(x_1)c_j + f(x_1) = 0, \\ \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{1,j}(x_2)c_j + f_1(x_2) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{k-1,j}(x_k)c_j + f_{k-1}(x_k) = 0, \\ c_i = \int_a^{\infty} B_i(y)[\lambda \sum_{j=1}^{m} A_{k,j}(y)c_j + f_k(y)]dy, i = 1,\dots,m, \end{cases} \tag{3}$$

относительно неизвестных векторов $c_1, c_2 \dots, c_m$ имеет единственное решения, то система интегральных уравнений (1) в пространстве $C_n[a,\infty) \cap L_{p,n}[a,\infty), p > 1$ имеет единственное решение представимое в виде

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{k,j}(x)c_j + f_k(x),\ x\ \epsilon\ [a,\infty); \tag{4}$$

2) если система линейных алгебраических уравнений (3) несовместимы, то интегральное уравнение (1) в пространстве $L_{p,n}[a,\infty), p > 1$ не имеет решения;

3) если система линейных алгебраических уравнений (3) имеет бесконечное число решений зависящий от q параметров, то интегральное уравнение (1) в пространстве $C_n[a,\infty) \cap L_{p,n}[a,\infty), p > 1$ имеет бесконечное число решений зависящих от q параметров. В этом случае, общее решения системы (1) определяется по формуле (4).

Доказательство. Сначала, пусть $u(t) \epsilon\, C_n[a,\infty) \cap L_{p,n}[a,\infty)$ является решениям систем интегральных уравнений (1). Тогда, полагая $x = x_1$ из (1) имеем

$$\lambda \textstyle\sum_{j=1}^{m} A_j(x_1) \int_a^\infty B_j(y)\, u(y)dy + f(x_1) = 0, \tag{5}$$

Вычитая (5) из (1) получим

$$\prod_{l=1}^{k} p_l(x)\, u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} [A_j(x) - A_j(x_1)] \int_a^\infty B_j(y)\, u(y)dy + f(x) - f(x_1).$$

Отсюда учитывая условия а) и

$$\textstyle\prod_{l=2}^{k} p_l(x)\, u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{1,j}(x) \int_a^\infty B_j(y)\, u(y)dy + f_1(x),\ x \,\epsilon\, [a,\infty). \tag{6}$$

Если $k = 1$, то

$$\prod_{l=2}^{k} p_l(x) = 1,\ x \,\epsilon\, [a,\infty).$$

В случае, когда $k \geq 2$ полагая $x = x_2$ из (6) имеем

$$\lambda \textstyle\sum_{j=1}^{m} A_{1,j}(x_2) \int_a^\infty B_j(y)\, u(y)dy + f_1(x_2) = 0. \tag{7}$$

Вычитая (7) из (6) и учитывая условию а) и б) получим

$$\textstyle\prod_{l=3}^{k} p_l(x)\, u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{2,j}(x) \int_a^\infty B_j(y)\, u(y)dy + +f_2(x),\ x \,\epsilon\, [a,\infty). \tag{8}$$

Если $k = 2$, то

$$\prod_{l=3}^{k} p_l(x) = 1,\ x \,\epsilon [a,\infty).$$

В случае, когда $k \geq 3$, продолжая этот процесс убедимся, что решение систем уравнений (1) $u(x)$ удовлетворяют условию (3) и определяется по формуле (4).

Наоборот, пусть $u(x) \,\epsilon\, C_n[a,\infty) \cap L_{p,n}[a,\infty)$ определяется по формуле (4) и удовлетворяют условию (3). Умножая (4) на $p_k(x)$ и в силу (3) получим

$$p_k(x)u(x) = \lambda \textstyle\sum_{j=1}^{m} A_{k-1,j}(x)c_j + f_{k-1}(x),\ x \,\epsilon [a,\infty). \tag{9}$$

Далее умножая (9) на $p_{k-1}(x)$ и учитывая условию (3) получим

$$p_{k-1}(x)\, p_k(x)u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{k-2,j}(x)c_j + f_{k-2}(x),\ x \epsilon[a,\infty). \qquad (10)$$

Продолжая этот процесс по отношению к системе (10) и учитывая условие (3) убедимся, что $u(t)$ является решением систем интегральных уравнений (1). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим системы интегральных уравнений (1) при n=2, m=1, k=2, $a = 0, x_1 = 0, x_2 = 3,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x - 3,$ p> 1,

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 3-x \end{pmatrix},\ B_1(y) = \begin{pmatrix} e^{-y} & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} \alpha x(x-3)e^{-x} + \beta x + \mu \\ \beta_1 x + \mu_1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda,\ \alpha, \beta, \mu, \beta_1, \mu_1 -$ действительные параметры, $\lambda \neq 0.$ Тогда

$$A_{1,1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_{2,1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x-3)e^{-x} + \beta \\ \beta_1 \end{pmatrix},\ f_2(x) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix},\ x \epsilon[0,\infty).$$

Далее из (4) имеем

$$u_1(x) = \alpha e^{-x},\ u_2(x) = 0,\ x \epsilon[0,\infty). \qquad (11)$$

В этом случае система (3) записываются в следующим виде:

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, получим:

1) Пусть $\lambda \neq 0,\ \beta = -0{,}5\,\alpha\lambda,\ \mu = 0,\ \beta_1 = 0, \mu_1 = 0.$ Тогда система интегральных уравнений (1) имеет единственное решение в пространстве $C_2[0,\infty) \cap L_{p,2}[0,\infty),$ p $>$ 1, определяемое в виде (11).

2) Пусть $\lambda \neq 0$ и нарушается хотя бы один из следующих равенств:

$\beta = -0{,}5\alpha\lambda, \mu = 0,\ \beta_1 = 0, \mu_1 = 0.$ Тогда система интегральных уравнений (1) не имеет решение в пространстве

$$C_2[0,\infty) \cap L_{p,2}[0,\infty), \qquad p > 1.$$

Литература

1. Цалюк, З.Б. В кн.: Итоги науки и техники [Текст] / З.Б. Цалюк //. Сер. Матем. анализ, М., 1977, т.15, с.131-198.
2. Лаврентьев, М.М. Об интегральных уравнениях первого рода [Текст] / М.М.

Лаврентьев // ДАН, 1959, т.127, №1, с.31-33.

3. Лаврентьев, М.М., Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский// М.: Наука, 1980. 286 с.

4. Иманалиев, М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов // ДАН, 1989, т.309, № 5, с.1052-1055.

5. Иманалиев, М.И. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода[Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов // ДАН, 2007, т.415, №1, с.14-17.

6. Иманалиев, М.И. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов // ДАН, 2010, т.430, №6, с.1-4.

7. Иманалиев, М.И. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов, Р.А. Асанов // // ДАН, 2011, т.437, № 5, с.592-596.

8. Apartsyn, A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind [Text] / A.S. Apartsyn // VSP, Utrecht, The Netherlands, 2003, 168 pages.

9. Asanov, A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind [Text] / A.Asanov // VSP, Utrecht, The Netherlands,1998, 276 pages.

10. Asanov, A. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind [Text] / A.Asanov, K. Matanova, R. Asanov. // Kuwait Journal of Science, 2017,Vol.44, No 1, pp.17-28.

11. Bukhgeim, A.L. Volterra Equations and Inverse Problems [Text] / A.L. Bukhgeim // VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999, 204 pages.

12. Denisov, A.M. Elements of the Theory of Inverse Problems [Text] / A.M. Denisov // VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999, 272 pages.

13. Imanaliev, M.I. " Solutions to Systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Third kind with Multipoint Singularities" [Text] / M.I. Imanaliev A.Asanov, R.A. Asanov //Doklady Mathematics, 2017, Vol. 95, No 3, pp. 235-239.

14. Imanaliev, M.I. "On a class of Systems of Linear and Nonlinear Fredholm Integral Equations of the Third kind with Multipoint Singularities" [Text] / M.I. Imanaliev A.Asanov, R.A. Asanov // Differential Equations, 2018, Vol.54, No.3, pp. 381-391.

15. Asanov, A. One Class of Systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Third Kind on the Real Line with Multipoint Singularities [Text] / A.Asanov, R.A. Asanov //Differential Equations, 2020, Vol. 56, pp. 1363–1370.

УДК 517. 928

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_44

О ПРИМЕНИИ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕШЕНИЙ К ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Байзаков Асан Байзакович, д.ф.-м.н., профессор
asan_baizakov@mail.ru
Джээнбаева Гулгаакы Абдыкааровна, к.ф.-м.н, научный сотрудник
baytemirova2007@mail.ru
Асанкулова Айпери Сатылгановна
koitawcity@mail.ru
Институт математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Исследовать разрешимость задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных можно провести методом преобразования решений.*

В настоящей работе изучена разрешимости и структура решений задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: *Задачи Коши, нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, классический метод характеристик, метод Галеркина, метод дополнительного аргумента, уравнения Вольтерра II рода.*

ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН КОШИ МАСЕЛЕЛЕРИНЕ ЧЫГАРЫЛЫШЫНА ТРАНСФОРМАЦИЯЛЫК МЕТОДДУН КОЛДОНУУ ЖӨНҮНДӨ

Байзаков Асан Байзакович, ф.-м.и.д., профессор
asan_baizakov@mail.ru
Джээнбаева Гулгаакы Абдыкааровна, ф.-м.и.к., илимий кызматкер
baytemirova2007@mail.ru
Асанкулова Айпери Сатылгановна
koitawcity@mail.ru
Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер Академиясы математика Институту
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Коши маселесинин жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер жана интегро-дифференциалдык жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн чечилүү жөндөмдүүлүгүн чечимди трансформациялоо ыкмасы менен изилдөөгө болот.*

Бул макалада биз сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык жекече туундулуу дифференциалдык

теңдемелер үчүн Коши маселесинин чечилүү жөндөмдүүлүгүн жана структурасын изилдейбиз.

Ачкыч сөздөр: *Коши маселелери, сызыктуу эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер, мүнөздөмөлөрдүн классикалык ыкмасы, Галеркин методу, кошумча аргумент методу, экинчи түрдөгү Вольтерра теңдемелери.*

ON THE APPLICATION OF THE SOLUTION TRANSFORMATION METHOD TO THE CAUCHY PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES

Baizakov Asan Baizakovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

asan_baizakov@mail.ru

Dzheenbaeva Gulgaaki Abdykaarovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences

baytemirova2007@mail.ru

Asankulova Aiperi Satylganovna

koitawcity@mail.ru

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic

Abstract. *The solvability of the Cauchy problem for partial differential equations and integro-differential partial differential equations can be studied by the solution transformation method.*

In this paper, we study the solvability and structure of solutions to the Cauchy problem for nonlinear integro-differential partial differential equations

Key words: *Cauchy problems, nonlinear partial differential equations, classical method of characteristics, Galerkin method, additional argument method, Volterra equations of the second kind.*

Исследование разрешимости задачи Коши нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и нахождение структуры таких решений все еще остается актуальной задачей.

Разработано несколько разных методов для исследования разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Например, хорошо известны: классический метод характеристик, метод Галеркина, метод дополнительного аргумента. С помощью метода дополнительного аргумента также удается исследовать разрешимость и уравнения выше первого порядка.

Исследовать разрешимость задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производныхи и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных можно провести методом преобразования решений.

Академиком Иманалиевым М. и его учениками было заложено основы исследования разрешимости задачи Коши для некоторых классов дифференциальных уравнений в частных производных [1]. Сутью этого метода является преобразование решений исходной задачи Коши к нахождению решений эквивалентного ей интегрального уравнения Вольтерра II рода, к которой применим принцип сжатых отображений. Позднее этот способ сведения к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра II рода назван методом преобразования решений в теории дифференциальных и интегральных уравнений [2]. Примечательно то, что одновременно находиться и интегральное представление искомых решений задачи Коши нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных[3-4].

В настоящей работе изучена разрешимости и структура решений задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial L[u]}{\partial x}+(\alpha^2+1)L[u]+\int_0^t K(t,s,u(s,x))ds=f\left(t,x,u,u_t,u_x\right),\quad 0\le s\le t\le T, \quad (1)$$

где $L[u]=u_{tt}+u,\ x\in R,\ \alpha\in R_+$ с начальным условием

$$u(0,x)=\varphi\left(x\right),\quad u_t(0,x)=\psi(x). \quad (2)$$

Предположение А. Пусть

$f(t,x,u,u_t,u_x)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1\big|_u\right), K(t,s,u)\in\bar{C}\left(R_+\times R_+\times R\right)\cap Lip\left(L_2\big|_u\right)$,

$\varphi(x)\in\bar{C}^2\left(R\right),\psi(x)\in\bar{C}^2\left(R\right)$.

Решение данной задачи Коши ищется в виде

$$u\left(t,x\right)=c\left(t,x\right)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q\left(\nu,s\right)dsd\nu . \quad (3)$$

Мы будем следовать методу, предложенные в [1-2].

Далее, будем находить частные производные искомой функции из соотношения (3). Имеем

$$u_t\left(t,x\right)=c_t\left(t,x\right)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q\left(\nu,s\right)dsd\nu.$$

Далее, имеем

$$u_{tt}=c_{tt}+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q\left(t,s\right)ds-(u-c).$$

Отсюда

$$L[u]\equiv u_{tt}+u=c_{tt}+c+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q\left(t,s\right)ds; \quad (4)$$

$$L[u]=L[c]+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q\left(t,s\right)ds.$$

Кроме того

$$\frac{dL[u]}{dx}=\frac{dL[c]}{dx}-\alpha[L[u]-L[c]]+\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)Q(t,s)ds. \qquad (5)$$

Из (5) находим производные по x

$$\frac{d^2L[u]}{dx^2}=\frac{dL[c]}{dx}-\alpha[\frac{dL[u]}{dx}-\frac{dL[c]}{dx}]-\alpha\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)Q(t,s)ds-$$
$$-\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)ds+Q(t,x).$$

Из последнего с учетом (4), (5) находим

$$\frac{d^2L[u]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[u]}{dx}+(\alpha^2+1)L[u]=\frac{d^2L[c]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[c]}{dx}+ \qquad (6)$$
$$+(\alpha^2+1)L[c]+Q(t,x).$$

Обозначим

$$H(t,x,c)=\frac{d^2L[c]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[c]}{dx}+(\alpha^2+1)L[c].$$

Из (1) и (6) вытекает нелинейное интегральное уравнения Вольтерра второго рода относительно $Q(t,x)$ вида:

$$\begin{aligned}
&Q(t,x)=f(t,x,c(t,x)+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)dsd\nu,\\
&c_t(t,x)+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)dsd\nu,\\
&c_x(t,x)-\alpha[u-c]+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)dsd\nu) \qquad (7)\\
&+\int_{0}^{t}K\left(t,\tau,c(t,x)+\int_{0}^{\tau}\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q(\nu,s)dsd\nu\right)d\tau+\\
&+H(t,x,c)\equiv A[Q].
\end{aligned}$$

Для решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра (7) дополнительно, допустим некоторые обычные ограничения относительно функции $H(t,x,c)$:

При всех $\{t>0, x\in R\}$ функция $H(t,x,c)$ непрерывна и ограничена

$$\|H(t,x,c)\|\le M_0=const.$$

Уравнение (7) будем решать с помощью топологическим методом, а именно, принципом сжатых отображений. Правую часть уравнения (7) рассмотрим как оператор A[Q], действующий на функцию $Q(t,x)$.

Определим множество

$$Q=\left\{u(t,x):u(t,x)\in\bar{C}^{(2,2)}\left(\left[0,T\right]\cap R\right)\cap\|u\|\le h\right\}.$$

Величины T , h определяются позже.

Из уравнения (7) будем иметь $\|AQ\|\le M_1+M_0+KT_0$,

где $M_1\equiv\max f(t,x,u,u_t,u_x,),\ M_0\equiv\max\left\|H\left(t,x,c\right)\right\|,\mathrm{K}\equiv\max\mathrm{K}(t,\mathrm{s},x,u)$.

Если выберем T_0 и h так, чтобы

$$M_1+M_0+KT_0\le h\ ,$$

то, оператор $AQ:Q\to Q$. Теперь оценим разность

$$\begin{aligned}&\|A[Q_1(t,x)]-A[Q_2(t,x)]\|\le\Big\|f(t,x,c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q_1(\nu,s)dsd\nu,\\&c_t(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q_1(\nu,s)dsd\nu,\\&c_x(t,x)-\alpha[u-c]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)\sin(t-\nu)Q_1(\nu,s)dsd\nu)\\&+\int_0^t K\left(t,\tau,c(t,x)+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q_1(\nu,s)dsd\nu\right)d\tau-\\&-f(t,x,c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q_2(\nu,s)dsd\nu,\\&c_t(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q_2(\nu,s)dsd\nu,\\&c_x(t,x)-\alpha[u-c]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)\sin(t-\nu)Q_2(\nu,s)dsd\nu)\\&+\int_0^t K\left(t,\tau,c(t,x)+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q_2(\nu,s)dsd\nu\right)d\tau\Big\|\le\\&\le[\frac{3L_1}{\alpha}+\frac{L_2}{\alpha}]\left\|Q_1(\nu,s)-Q_2(\nu,s)\right\|.\end{aligned}$$

Выберем $\alpha\in R_+$ так, что

$$\frac{3L_1+L_2}{\alpha}<1\ .$$

Отсюда следует, что нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода (7) имеет единственное непрерывное и ограниченное решение Q(t,x).

Исследуем теперь дифференциальные свойства решений начальной задачи (1)-(3).

При всех $\{t>0,x\in R\}$ из равенства (3) вытекает неравенство:

$$
\begin{aligned}
&\|u(t,x)\| \le \|c(t,x)\| + \\
&+\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)} \left|\sin(x-s)\sin(t-\nu)\right| \|Q(\nu,s)\| \, ds d\nu \le \\
&\le C_0 + \frac{h}{\alpha} = h_1 = const.
\end{aligned}
$$

При проведении вышеприведенной оценки было учтено, что $|\sin\alpha| \le 1, |\sin\beta| \le 1.$

Аналогичные оценки можно поучить и для всех производных, входящих в уравнение (1).

Итак, справедлива

Теорема. Пусть выполнены предположение А. Тогда интегро-дифференциальное уравнение в частных производных (1) с начальным условием (2) имеет единственное решение $u(t,x) \in \bar{C}^{(2,2)}([0,T]\times R)$.

Литература

1. Иманалиев, М.И. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, К. Какишов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С. 19-28.
2. Иманалиев, М.И., О разрешимости задачи Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / М.И. Иманалиев, А.Б. Байзаков // Поиск (научн. приложение международ. журнала «Высшая школа Казахстана»), Сер. ест.-техн.наук. – Алматы, 2009. – №1. – С. 209-213.
3. Байзаков, А.Б. Разрешимость и структура решений начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка[Текст] / А.Б. Байзаков, Г.А. Джээнбаева // Наука, новые технологии и инновации. – Бишкек, 2017. – №5. – С.100-104.
4. Байзаков, А.Б. О разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Б. Байзаков, Г.А. Джээнбаева, К.А. Айтбаев // Вестник Института математики НАН КР. - 2019.-№1.- С123-127.
5. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа[Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. // – Москва: Наука, 1972. – 544 с.
6. Коротков, В.В. Интегральные операторы[Текст] / В.В. Коротков // -Новосибирск: Наука, 1975. – 302с.
7. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения[Текст] / М.Л. Краснов // Москва: Наука, 1975. – 304 с.

8. Михлин, С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям[Текст] / С. Г. Михлин // Москва: Физматгиз, 1959. – 232 с.

9. Мюнтц, Г. М. Интегральные уравнения. Часть 1: Линейные уравнения Вольтерра[Текст] / Г. М. Мюнтц // Москва: ОНТИ, 1934. – 330 с.

10. Иманалиев, М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными[Текст] / М.И. Иманалиев // Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.

УДК 517.95
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_51

ОБ ОДНОЙ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Бараталиев Керим Бараталиевич, д.ф. –м.н., профессор,
barataliev k@mail.ru
Тилек кызы Нуржанат
nurjanat281199@gmail.com
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Рассматривается одна задача, которая относится к теории псевдодифференциальных операторов (сокращенно ПДО). Теория ПДО развилась из теории сингулярных интегральных операторов. В своей современной форме она было создана в середине 60-х годов двадцатого столетия. Поэтому, естественно, что одной из наиболее существенных областей приложения ПДО являются задачи, связанные сингулярными операторами. Рассматренная задача изучена с помощью методов теории вариационных неравенств. Доказаны теоремы существования, единственности и корректности решений рассматренных вариационных неравенств.*

Ключевые слова: *Псевдодифференциальные операторы; вариационные задачи; вариационные неравенства; вариационные уравнения; корректность значи.*

ПСЕДИФФЕРЕНЦИАЛЬДЫК ОПЕРАТОРЛОРДУН ТЕОРИЯСЫНА ТААНДЫК БОЛГОН БИР МАСЕЛЕ

Бараталиев Керим Бараталиевич, ф.-м.и.д., профессор
baratalievk@mail.ru
Тилек кызы Нуржанат
nurjanat281199@gmail.com
Ж.Баласагын атындагыКыргыз улуттук университети,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Псевдодифференциалдык операторлордун (кыскача ПДО) теориясына таандык болгон бир математикалык маселе каралат. ПДО нун теориясы сингулярдык интегралдык теңдемелердин теориясынын негизинде өсүп чыккан жана өзүнүн азыркы заманбап формасына өткөн кылымдын 60-жылдарында түзүлгөн. Ошондуктан ПДО нун теориясынын негизги колдонулуштарынын бири болуп сингулярдык интегралдардын теориясы менен байланышкандыгы табийгий нерсе. Каралып жаткан математикалык маселе вариациалык барабарсыздыктардын теориясынын методдору менен изилденген*

жана анын чыгарылыштары бар экендиги, анын жалгыздыгы далилденген.

Ачкыч сөздөр: *Псевдодифференциалдык операторлор; вариациялык маселе; вариациялык барабарсыздыктар; вариациялык теңдемелер;маселенин корректүүлүгү.*

ABOUT ONE PSEUDODIFFERENTIAL PROBLEM

Barataliyev Kerim Baratalievich, .Dr Sc., professor,

baratalievk@mail.ru

Tilek kyzy Nurzhanat

nurjanat281199@gmail.com

Kyrgyz National University J. Balasagyn,

Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *One problem is considered, which belongs to the theory of pseudodifferential operators (abbreviated as PDO). The theory of PDO has developed from the theory of singular integral operators. In its modern form, it was created in the mid-60s of the twentieth century. Therefore, it is natural that one of the most significant areas of application of PDOs are problems associated with singular operators. The considered problem is studied using the methods of the theory of variational inequalities. Existence, uniqueness, and well-posedness theorems for the solutions of the considered variational inequalities are proved.*

Key words: *Pseudodifferential operators; variational problems; variational inequalities; variational equations; correctness means.*

Введение

Многие важные прикладные задачи приводят к так называемым задачам с односторонними граничными условиями или к вариационным неравенствам. Простейшим примером такого рода является следующая задача: в области $\tilde{\Omega}$ с границей Г найти решение уравнения $\Delta u = f$, такое, что на Г выполняются условия

$$u \geq 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial u} \geq 0, \ \ u\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0.$$

Обобщенное решение этой задачи удовлетворяет не интегральному тождеству (как, в случае задачи Дирихле), а некоторому интегральному неравенству, которое и называют вариационным неравенством.

I. В монографии [1, С. 279] замечено, что можно изучать односторонние задачи (или вариационные неравенства) для псевдо дифференциальных операторов. Например, возьмем пространство $V = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, $\Omega(-1,1)$ замкнутое выпуклое множество

$K = \{\upsilon \in V, \upsilon \geq 0 \upsilon \in V, \upsilon \geq 0$ п.в. в $\Omega = (-1,1)\}$; в $V = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ оператор

$$Au = \upsilon.p.\int_{-1}^{1}\frac{\dot{u}(y)}{x-y}dy\left(\dot{u}=\frac{du}{dy}\right). \tag{1}$$

Существует единственное $u \in K$, удовлетворяющее неравенству

$$(Au, v-u) \geq (f, v-u) \qquad \forall v \in K \tag{2}$$

для заданного f из V'».

Интеграл (1) существует в смысле главного значения по Коши в пространстве $L_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, где скалярное произведение определяется формулой [3]

$$(u,v)_{H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)} = \int_{-1}^{1}\frac{u\upsilon\cdot dx}{\sqrt{(1-x)(x-1)}},$$

а сходимость в $L_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ является сходимостью в среднем квадратичном с весом

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x-1)}}, |x| \leq 1.$$

Относительно подпространств $V = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ и $V = H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ пространства Соболева $H^S(\Omega)$ дробного порядка s [2,С. 71-85], отметим, что пространство $V = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ строго вложено в $V = H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ и имеет более сильную топологию, чем топология в $V = H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, причем

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \left\{u \middle| u \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega); \rho^{-\frac{1}{2}} = u \in L_2(\Omega), \rho \in C_0^{\infty}(\Omega)\right\}.$$

Справедлива следующая

Теорема [1]. Пусть H гильбертово пространстве, $K \subset H -$замкнутое выпуклое множество и $f \in H'$- заданный элемент, а оператор $A: K \to AK$ эллиптичен:

$$\exists \alpha > 0: \alpha\|v\|^2 \leq \langle Av, v\rangle \qquad \forall v \in K \tag{3}$$

Тогда вариационное неравенство

$$\langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \qquad \forall v \in K \tag{4}$$

не только однозначно разрешимо, но и корректно разрешимо.

Доказательство однозначной разрешимости вариационного неравенства (4) установлено в [1], остановимся лишь в том, что задача и корректно разрешима. В самом деле, пусть u_0 $и$ $u_\delta \in K-$ решения задачи (4), соответствующие заданным функциям f_0 $и$ $f_\delta \in (H_0^{1/2}(-1,1))'$, т.е.

$$(Au_0, v-u_0) \geq (f_0, v-u_0) \qquad \forall v \in K \tag{5}$$

и

$$(Au_\delta, v-u_\delta) \geq (f_\delta, v-u_\delta) \quad \forall v \in K, \tag{6}$$

где

$$\| f_0 - f_\delta \| \leq \delta \qquad (\delta = const > 0.$$

Положив в (5) $v = u_\delta$, а в (6): $v = u_0$, имеем

$$(Au_0, v-u_0) \geq (f_0, u_\delta - u_0),$$

$$(Au_\delta, u_0-u_\delta) \geq (f_\delta, u_0 - u_\delta)$$

и сложив их, находим

$$\langle A(u_1-u_2), u_1-u_2 \rangle \leq \langle f_1 - f_2, u_1-u_2 \rangle \ .$$

Далее, из однозначной разрешимости вариационного неравенства (6) следует, что

$$\|u_0 - u_\delta\|^2 \leq \|A^{-1}\| \cdot \| f_0 - f\|_\delta, \|u_0 - u_\delta\|.$$

Отсюда получаем условие корректности рассматриваемой задачи относительно свободного члена неравенства:

$$\|u_0 - u_\delta\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \delta \,.$$

II. В том случае, когда множество совпадает со всем пространством, т.е. $K = H_0^{1/2}(-1,1)$ вместо вариационного неравенства (4) получаем вариационное уравнение

$$p.v.\int_{-1}^{1} \frac{\dot{u}}{t-x} dt = f(x)(|x| \leq 1). \tag{7}$$

Это уравнение в литературе известно под названием интегро-дифференциальным уравнением Прандтля (см. [3], стр. 207) с граничными условиями

$$u(-1) = 0 \ , \ u(1) = p \tag{8}$$

Из доказанной выше теоремы следует следующая

Теорема 2. Пусть $E = H-$ гильбертово пространстве, $K \subset H-$ замкнутое выпуклое множество и $f \in H'$- заданный элемент, а оператор A коэрцитивен:

$$\exists \alpha > 0: \alpha \|v\|^2 \le \langle Av, v \rangle \quad \forall v \in K,$$

Тогда уравнение (7) не только однозначно разрешимо, но и корректно разрешимо.

III. Если теперь ввести обозначение $\varphi(x) = \dot{u}(x) \quad (|x| \le 1)$, то вместо (7) получаем сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши

$$p.v.\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = f(x) \quad (|x| \le 1), \tag{9}$$

где заданная функция $f(x)$ принадлежит классу $H_\alpha(-1,1)$.

Известно (см., напр., [3], стр. 62), что общее решение уравнения (9) дается формулой

$$\varphi(x) = \frac{c}{\pi \cdot \sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} f(t) dt, \tag{10}$$

где c- произвольная постоянная.

Проинтегрируя обе части последнего равенства по x и принимая во внимание значение интеграла ([3], стр.208)

$$\int \frac{c}{\sqrt{1-x^2}(t-x)} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln \frac{1-tx+\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1-tx-\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}},$$

получим

$$u(x) = \frac{c}{\pi} \arcsin x + C_1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_{-1}^{1} f(t) \ln \frac{1-tx+\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1-tx-\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}} dt;$$

Наконец, удовлетворяя граничным условиям (8), найдем

$$c = p,\ c_1 = 0{,}5p.$$

Тогда единственным решением задачи (8)-(9) является функция

$$u(x) = \frac{p}{\pi} \arcsin x + \frac{p}{2} + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-1}^{1} H(t,x) f(t) dt, \tag{11}$$

где

$$H(t,x)=\ln\frac{1-tx+\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1-tx-\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}\,dt.$$

1V. Покажем теперь, что **задача** решения вариационного **неравенства (4)** эквивалентна **вариационной задаче:** найти функцию

$$u\in K: J(u)=\inf_{v\in K} J(v). \tag{12}$$

где квадратичный функционал $J(v)\ (v\in K)$ определяется формулой

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v),\ v\in K \tag{13}$$

Пусть $a(u,v)-$билинейная непрерывная форма, отвечающая

линейному непрерывному оператору $A\in J[H_{00}^{1/2}(-1,1),(H_{00}^{1/2}(-1,1))'],$ т.е.

$$(Au,v)=a(u,v), Au\in(H_{00}^{1/2}(-1,1))',v\in(H_{00}^{1/2}(-1,1). \tag{14}$$

Тогда соотношение (12) эквивалентно неравенству [1]

$$a(u,v-u)\ge(f,v-u)\quad\forall v\in K \tag{15}$$

Наоборот, в силу решение вариационного неравенства (15) является и решением задачи (12).

Известно, что если билинейная непрерывная форма удовлетворяет условиям

$$a(u,v)=a(v,u)\qquad\forall u,v\in H_{00}^{\frac{1}{2}}(-1,1)$$

$$a(v,v)\ge\alpha\|v\|^2\ ,\alpha>0,\quad\forall v\in H_{00}^{1/2}(-1,1),$$

а если функционал $J(v)$ $\left(v\in H_{00}^{1/2}(-1,1)\right)$ выпуклый и дифференцируемый, то его производная, определяемая по формуле

$$(J'(u),v)=\frac{d}{d\lambda}J(u+\lambda v)\Big|_{\lambda=0},$$

равна

$$(J'(u),v)=a(u,v)-(f,v).$$

При этом множество $K\subset H_{00}^{\frac{1}{2}}(-1,1)$ является выпуклым и замкнутым. При выполнении выше перечисленных условий вариационная задача

$$u\in K: J(u)\le J(v)\qquad\forall v\in K, \tag{16}$$

имеет единственное решение, а значит и вариационное неравенство (15) однозначно разрешимо в силу их эквивалентности.

Таким образом, методы решения вариационных задач пригодны и для решения вариационных неравенств.

V. В работе [3] подробно изучено полное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение Прандтля с ядром Коши и с малым параметром ε ≥ 0

$$\text{p.v.} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(t)}{t-x} dt = \pi \cdot \varepsilon \cdot \varphi(x) - \pi \cdot f(x) \;\; (|x| \le 1), \tag{18}$$

при граничных условиях

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = p\,.$$

Оператор, порожденный формулами (7)-(8), является частным случаем уравнения (18). Причем, если при заданном значении ε решение уравнения (18) существует, то функция $\varphi'(t)$ является ограниченной и с помощью неравенства

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le \left| \int_{-1}^{1} \varphi'(t) dt \right| \le \|\varphi'(t)\|_{L_p} \cdot |x_1 - x_2| \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

можно убедиться, что решение $\varphi(x)$ задачи (18)-(8) принадлежит классу $H_{00}^{1/2}(-1,1)([A], стр.207)$.

Рассмотренный выше случай относится к случаю ε =0. А относительно случая ε≠0 отметим, что при этом уравнение (19) сводится [3] к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\varphi(t) + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^{1} H(x,t)\varphi(t) dt = g(x) \;\; (|x| \le 1), \tag{19}$$

где

$$g(x) = \frac{p}{\pi} \arg\sin x + \frac{p}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} H(x,t) f(t) dt,$$

$$H(t,x) = \ln \frac{1 - tx + \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1 - tx - \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}} dt.$$

В пространстве $L_2(-1,1)$ уравнение (19) представляет собой как операторное уравнение вида

$$A\varphi - \mu\varphi = g \quad (g \in L_2(-1,1)), \tag{20}$$

где $A-$ вполне непрерывной и самосопряженный оператор в $L_2(-1,1)$, для которого справедлива теорема Гильберта – Шмидта.

В заключение отметим, что уравнение Прандтля имеет важное значение в теории смешанных краевых задач и к нему приводятся ([2], стр. 206):

а) задача об обтекании идеальной жидкостью тонкого крыла конечного размаха;

в) задача о взаимодействии упругой на растяжение, но абсолютно гибкой накладки с упругой полуплосткостью и др.

Литература.

1. Лионс, Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач[Текст] / Ж.Л. Лионс. // М.: Мир, 1972. 587с.

2. Лионс, Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения[Текст] / Ж.Л. Лионс, Э. Мадженес // М. Мир, 1971. – 371 с.

3. Александров, В. М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями[Текст] / В. М. Александров, Е.В. Комленко М.: 1986. -334с.

УДК 517.956.6

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_59

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ТРЁХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Исломов Бозор Исломович, д.ф.-м.н., профессор,
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
islomovbozor@yandex.com
Аликулов Ёлкин Кодирович, д.ф.ф.-м. (PhD), и.о.доцент,
Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий и Нурафшонский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий,
aliqulov.yolqin.1984@mail.ru
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В данной работе формулируется и изучается задача с условиями Геллерстедта на разных характеристических плоскостях для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в трехмерной области. Основным методом исследования поставленной задачи является преобразование Фурье. На основе преобразования Фурье задача и уравнение сводится к плоскому аналогу задачи Геллерстедта со спектральным параметром, как в уравнении, так и в граничных условиях.*

Доказана единственность решения поставленной задачи с помощью нового принципа экстремума для нагруженных уравнений смешанного типа третьего порядка. Используя общего представления решения, доказывается существования решения задачи методом интегральных уравнений. Кроме того, изучено асимптотическое поведение решения задачи при больших значениях спектрального параметра. Найдены достаточные условия, при которых все операции законны.

Ключевые слова: *Уравнение третьего порядка, нагруженное уравнение, задача Геллерстедта, преобразование Фурье, регулярное решение, принцип экстремума, оценка решения.*

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED THIRD-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION IN AN INFINITE THREE DIMENSIONAL DOMAIN

Islomov Bozor Islomovich, Dr Sc, professor,
National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
islomovbozor@yandex.com
Alikulov Yolqin Kodirovich, PhD, a.a.professor,
Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi and Nurafshon branch of the Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi,

aliqulov.yolqin.1984@mail.ru
Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we formulate and study the problem with Gellerstedt conditions on different characteristic planes for a loaded parabolic-hyperbolic equation of the third order in a three-dimensional domain. The main method of the study of the problem is the Fourier transform. Based on the Fourier transform, the problem and equation are reduced to a planar analogue of the Gellerstedt problem with a spectral parameter, both in the equation and in boundary conditions.*

The uniqueness of the solution of the problem is proved using a new extremum principle for loaded equations of mixed type of the third order. Using a general representation of the solution, the existence of a solution to the problem by the method of integral equations is proved. In addition, the asymptotic behavior of the solution of the problem for large values of the spectral parameter is studied. Sufficient conditions have been found under which all operations are legal.

Key words:. *Third-order equation, loaded equation, Gellerstedt problem, Fourier transform, regular solution, extremum principle, estimation of the solution.*

Рассмотрим уравнение

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\begin{cases}U_y-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & в\ \Omega_0,\\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & в\ \Omega_1\bigcup\Omega_2\bigcup\Omega_3.\end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $\Omega=\Omega_0\bigcup\Omega_1\bigcup\Omega_2\bigcup\Omega_3\cup\left(\bar{\Omega}_0\bigcap\bar{\Omega}_1\right)\cup\left(\bar{\Omega}_0\bigcap\bar{\Omega}_2\right)\cup\left(\bar{\Omega}_1\bigcap\bar{\Omega}_3\right)\cup$ $\cup\left(\bar{\Omega}_2\bigcap\bar{\Omega}_3\right)$ - область трёхмерного пространства (x,y,z), ограниченная поверхностями:

$$\Gamma_0: x=0,\ 0\le y\le h,\ \ z\in(-\infty,+\infty),\ \ \Gamma_1: x=1,\ 0\le y\le h,\ \ z\in(-\infty,+\infty),$$

$$\Gamma_2: y=h,\ 0\le x\le 1,\ \ z\in(-\infty,+\infty),\ \ S_1: x+y=0,\ \ y\le 0,\ \ 0\le x\le\frac{x_0}{2},\ \ z\in(-\infty,+\infty),$$

$$S_2: x-y=x_0,\ \ y\le 0,\ \ \frac{x_0}{2}\le x\le x_0,\ \ z\in(-\infty,+\infty),\ \ S_3: x+y=x_0,\ y\le 0,\ x_0\le x\le\frac{1+x_0}{2},\ \ z\in(-\infty,+\infty),$$

$$S_4: x-y=1,\ \ y\le 0,\ \ \frac{1}{2}\le x\le 1,\ \ z\in(-\infty,+\infty),\ \ x_0\in[0,1],$$

где

$$\mu=const<0 \qquad (2)$$

Уравнения (1) является параболическим и гиперболическим в областях Ω_0 и $\Omega_j\ \ (j=\overline{1,3})$ соответственно.

Введём обозначения: $A(0,0,z)=\bar{S}_0\cap\bar{S}_1,\ \ E(x_0,0,z)=\bar{S}_2\cap\bar{S}_3,$

$$C_1\left(\frac{x_0}{2};-\frac{x_0}{2};z\right)=\bar{S}_1\cap\bar{S}_2,\quad C_2\left(\frac{x_0+1}{2};\frac{x_0-1}{2};z\right)=\bar{S}_3\cap\bar{S}_4,\quad B(1,0,z)=\bar{\Gamma}_1\cap\bar{S}_4,$$

$$\Omega_0=\Omega\bigcap\{(x,y,z):x>0,\ y>0,\ z\in(-\infty,+\infty)\},\ \ \Omega_1=\Delta AC_1E,\ \ \Omega_2=\Delta EC_2B,\ \ \Omega_3=\square C_1EC_2B,$$

$$I_0=\{(x,y,z):\ 0<x<1,\ y=0,\ z\in(-\infty,+\infty)\},\ I_1=\{(x,y,z):\ 0<x<x_0,\ y=0,\ z\in(-\infty,+\infty)\},$$

$$I_2=\{(x,y,z):\ x_0<x<1,\ y=0,\ z\in(-\infty,+\infty)\},\ l_0=\bar{\Gamma}_0\cap\bar{S}_1,\ l_1=\bar{\Gamma}_1\cap\bar{S}_4,\ \ l_2=\bar{S}_2\cap\bar{S}_3,$$

$$D=\Omega\bigcap\{z=0\},\ D_i=\Omega_i\bigcap\{z=0\},\ (i=\overline{0,3}),\ \sigma_j=S_j\bigcap\{z=0\},\ (j=\overline{1,4}),\ \gamma_i=\Gamma_i\bigcap\{z=0\},\ (i=\overline{0,2})\ ,$$

$$J_j=I_j\bigcap\{z=0\},\ \left(j=\overline{0,2}\right),\ E_1(x_0,0)=\bar{J}_1\bigcap\bar{J}_2,\ \ \bar{J}_0=\bar{J}_1\bigcup\bar{J}_2\,.$$

Определение 1. $L(-\infty,+\infty)-$множество функций $\mathrm{H}(x,y,z)$, определенных в Ω и абсолютно интегрируемых по переменному z в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Определение 2. Функция $U(x,y,z)$ называется регулярным решением уравнения (1), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $U(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap L(-\infty,+\infty)$;

2) $U_x(x,y,z),\ U_y(x,y,z),\ U_z(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap L(-\infty,+\infty)$, кроме того, функции $U_x(x,y,z)$ и $U_y(x,y,z)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на линиях $l_0,\ l_1$ и l_2;

3) $U_{xxx},\ U_{xzz}\in C(\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)\cap L(-\infty,+\infty),\quad U_{xy}\in C(\Omega_0)\cap L(-\infty,+\infty),$ $U_{xyy}\in C(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)\cap L(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяет уравнению (1).

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача AG. Требуется найти в области Ω регулярное решение $U(x,y,z)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U|_{\Gamma_0}=\Phi_0(y,z),\quad U|_{\Gamma_1}=\Phi_1(y,z),\ 0\le y\le h,\ z\in(-\infty,+\infty)\,, \tag{3}$$

$$U_x\big|_{\Gamma_0} = \Psi_1(y,z), \quad 0 \le y \le h,\ z \in (-\infty,+\infty)\,, \tag{4}$$

$$U\big|_{S_2} = \Psi_2(x,z),\ \frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{S_2} = \Psi_3(x,z),\ \frac{x_0}{2} \le x \le x_0,\ \ z \in (-\infty,+\infty)\,, \tag{5}$$

$$U\big|_{S_3} = \Psi_4(x,z),\ \frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{S_3} = \Psi_5(x,z), x_0 \le x \le \frac{x_0+1}{2},\ z \in (-\infty,+\infty)\,, \tag{6}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} U(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = 0\,, \tag{7}$$

где $n-$внутренняя нормаль, $\Phi_0(y,z), \Phi_1(y,z), \Psi_j(x,z), (j=\overline{1,5})-$ заданные функции,

причем $\Psi_2(x_0,z) = \Psi_3(x_0,z) = 0, \Phi_0(h,z) = \Psi_1(0,z), \quad \Phi_1(h,z) = \Psi_1(1,z),$

$$\Phi_j(y,z) \in C\big([0;h]\times R\big) \cap L(-\infty,+\infty), \quad \Phi'_{jy}(y,z) \in C\big((0;h)\times R\big) \cap L(-\infty,+\infty),\ (j=0,1),$$

$$\Psi_1(y,z) \in C\big([0,h]\times R\big) \cap C^2\big((0,h)\times R\big) \cap L(-\infty,+\infty),$$

$$\Psi_2(x,z) \in C^2\left(\left[\frac{x_0}{2},x_0\right]\times R\right) \cap C^3\left(\left(\frac{x_0}{2},x_0\right)\times R\right) \cap L(-\infty,+\infty),$$

$$\Psi_3(x,z) \in C^1\left(\left[\frac{x_0}{2},x_0\right]\times R\right) \cap C^3\left(\left(\frac{x_0}{2},x_0\right)\times R\right) \cap L(-\infty,+\infty),$$

$$\Psi_3(x,z) \in C^2\left(\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right]\times R\right) \cap C^3\left(\left(x_0,\frac{x_0+1}{2}\right)\times R\right) \cap L(-\infty,+\infty),$$

$$\Psi_5(x,z) \in C^1\left(\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right]\times R\right) \cap C^3\left(\left(x_0,\frac{x_0+1}{2}\right)\times R\right) \cap L(-\infty,+\infty),$$

$$\lim_{|z|\to\infty} \Phi_i(y,z) = 0,\ \forall y \in [0,h], (i=0,1), \tag{8}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} \Psi_k(x,z) = 0,\ \forall x \in \left[x_0,\frac{x_0}{2}\right](k=2,3),\ \lim_{|z|\to\infty} \Psi_m(x,z) = 0,\ \forall x \in \left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right](m=4,5). \tag{9}$$

О предположениях относительно поведения функций $U(x,y,z)$ мы можем ввести следующие преобразования Фурье по переменной z:

$$u(x,y;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U(x,y;z)e^{i\lambda z}dz. \qquad (10)$$

Если функция

$$U\left(x,y,z\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\left(x,y;\lambda\right)e^{-i\lambda z}d\lambda \qquad (11)$$

является решением задачи AG, то функция $u(x,y;\lambda)$ должна быть регулярным решением задачи AG_{λ}.

Применяя преобразование Фурье (11) к уравнению (1) и задачу AG, получим следующее уравнение

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\begin{cases}u_y-u_{xx}+\lambda^2u-\mu\, u(x,0,\lambda), & x>0, \quad y>0, \quad \lambda\in(-\infty,+\infty),\\ u_{yy}-u_{xx}+\lambda^2u-\mu\, u(x,0,\lambda), & x>0, \quad y<0, \quad \lambda\in\left(-\infty,+\infty\right)\end{cases} \qquad (12)$$

и **задаче** AG_{λ} **:** Определить функцию $u(x,y,\lambda)$ такую, что

1) $u(x,y,\lambda)\in C\left(\bar{D}\right)\cap C^1\left(D\right)$;

2) $u(x,y,\lambda)$ является регулярным решением уравнения (12) в областях $D_k,\ (k=\overline{0,3})$;

3) $u(x,y,\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$u\big|_{\gamma_0}=\varphi_0(y,\lambda),\ u\big|_{\gamma_1}=\varphi_1(y,\lambda), \quad 0\le y\le h, \quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \qquad (13)$$

$$u\big|_{\gamma_2}=\psi_1(x,\ \lambda), \quad 0\le x\le 1, \ \ \lambda\in(-\infty,+\infty), \qquad (14)$$

$$u\big|_{\sigma_2}=\psi_2(x,\lambda),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_2}=\psi_3(x,\lambda), \frac{x_0}{2}\le x\le x_0, \ \ \lambda\in\left(-\infty,+\infty\right), \qquad (15)$$

$$u\big|_{\sigma_3}=\psi_4(x,\lambda),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_3}=\psi_5(x,\lambda), x_0\le x\le\frac{x_0+1}{2},\ \lambda\in(-\infty,+\infty), \qquad (16)$$

где $\varphi_0(y,\lambda),\ \varphi_1(y,\lambda),\ \psi_j(x,\lambda),\ (j=\overline{1,3})-$ заданные функции, причем

$$\varphi_i(y,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_i(y,z)e^{i\lambda z}dz,\ \ (i=0,1),\ \psi_j(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_j(x,z)e^{i\lambda z}dz,\ (j=\overline{1,5}), \qquad (17)$$

и

$$\psi_2(x_0,\lambda)=\psi_3(x_0,\lambda),=0\ \varphi_0(h,\lambda)=\psi_1(0,\lambda),\ \varphi_1(h,\lambda)=\psi_1(1,\lambda), \tag{18}$$

$$\varphi_i(y,\lambda)\in C\left[0;h\right]\cap C^1(0,h),\ (i=0,1), \tag{19}$$

$$\psi_1(x,\lambda)\in C[0,1]\cap C^3(0,1), \tag{20}$$

$$\psi_2(x,\lambda)\in C^2\left[\frac{x_0}{2},x_0\right]\cap C^3\left(\frac{x_0}{2},x_0\right),\psi_3(x,\lambda)\in C^1\left[\frac{x_0}{2},x_0\right]\cap C^3\left(\frac{x_0}{2},x_0\right), \tag{21}$$

$$\psi_4(x,\lambda)\in C^2\left[x_0;\frac{1+x_0}{2}\right]\cap C^3\left(x_0;\frac{1+x_0}{2}\right),\psi_5(x,\lambda)\in C^1\left[x_0;\frac{1+x_0}{2}\right]\cap C^3\left(x_0;\frac{1+x_0}{2}\right). \tag{22}$$

Любое регулярное решение уравнения (12) представимо в виде[1],[2]:

$$u(x,y;\lambda)=\upsilon(x,y;\lambda)+\omega(y;\lambda), \tag{23}$$

где $\upsilon(x,y,\lambda)$ – решение уравнения

$$0=\begin{cases}\upsilon_y-\upsilon_{xx}+\lambda^2\upsilon-\mu\,\upsilon(x,0,\lambda), & (x,y)\in D_0,\ \ \lambda\in(-\infty,+\infty),\\ \upsilon_{yy}-\upsilon_{xx}+\lambda^2\upsilon-\mu\,\upsilon(x,0,\lambda), & (x,y)\in D_1\cup D_2\cup D_3,\ \lambda\in(-\infty,+\infty),\end{cases} \tag{24}$$

здесь

$$\omega(y;\lambda)=\begin{cases}\omega_0(y;\lambda),\ \ y\in[0,h],\\ \omega_1(y;\lambda),\ \ y\in\left[-\frac{x_0}{2},0\right],\\ \omega_2(y;\lambda),\ \ y\in\left[\frac{x_0-1}{2},0\right],\end{cases} \tag{25}$$

а $\omega_i(y,\lambda)\ (i=\overline{0,2})$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции [3], [4] причем без ограничения общности можем полагать, что

$$\omega_0(0;\lambda)=\omega_0(1;\lambda)=0,\quad \omega_1(0;\lambda)=\omega_1(x_0;\lambda)=0,\quad \omega(x_0;\lambda)=\omega(1;\lambda)=0. \tag{26}$$

В силу представления (23) с учетом (25), задача AG_λ редуцируется к задаче AG_λ^* нахождения регулярного в области D решения $\upsilon(x,y;\lambda)$ уравнения (24), удовлетворяющего условиям

$$\upsilon\big|_{\gamma_0}=\varphi_0(y;\lambda)-\omega_0(y;\lambda),\quad \upsilon\big|_{\gamma_1}=\varphi_1(y;\lambda)-\omega_0(y;\lambda),\quad 0\le y\le h,\quad \lambda\in R, \tag{27}$$

$$\upsilon_x\big|_{\gamma_2}=\psi_1(y;\lambda),\quad 0\le y\le h,\quad \lambda\in R, \tag{28}$$

$$\upsilon\big|_{\sigma_2}=\psi_2(x;\lambda)-\omega_1(x-x_0;\lambda),\quad x_0/2\le x\le x_0,\ \lambda\in R, \tag{29}$$

$$\upsilon_n\big|_{\sigma_2}=\psi_3(x;\lambda)+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1'(x-x_0;\lambda),\quad x_0/2\le x\le x_0,\ \lambda\in R, \tag{30}$$

$$\upsilon\big|_{\sigma_3}=\psi_4(x;\lambda)-\omega_2(x_0-x;\lambda),\quad x_0\le x\le \left(x_0+1\right)/2,\ \lambda\in R, \tag{31}$$

$$\upsilon_n\big|_{\sigma_3}=\psi_5(x;\lambda)+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_2'(x_0-x;\lambda),\quad x_0\le x\le \left(x_0+1\right)/2,\ \lambda\in R, \tag{32}$$

где $\omega_i(y;\lambda)\ (i=\overline{0,2})-$ пока неизвестная функция.

Применяя метод, использованный в работе [5], любое регулярное решение уравнения (24) представим в виде

$$\upsilon(x,y,\lambda)=w(x,y,\lambda)+\vartheta(x,\lambda), \tag{33}$$

где $w(x,y,\lambda)$ – решение уравнения

$$0=\begin{cases} w_y-w_{xx}+\lambda^2 w & в\ D_0, \\ w_{yy}-w_{xx}+\lambda^2 w & в\ D_j\ (j=\overline{1,3}), \end{cases} \tag{34}$$

а $\vartheta(x,\lambda)-$решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\vartheta''(x,\lambda)-\left(\lambda^2-\mu\right)\vartheta(x,\lambda)=-\mu\, w(x,0,\lambda),\ 0<x<1, \tag{35}$$

где $\vartheta(x,\lambda)=\vartheta_0(x,\lambda),\ x\in\bar{J}_0, \vartheta(x,\lambda)=\vartheta_1(x,\lambda),\ x\in\bar{J}_1,\ \ \vartheta(x,\lambda)=\vartheta_2(x,\lambda),\ x\in\bar{J}_2.$

Замечание 1. Учитывая, что функция $a_j ch\lambda x+b_j sh\lambda x,\ \ (j=\overline{0,2})$ удовлетворяет уравнению (34), при исследовании задачи $AG^*{}_\lambda$ без ограничения общности можно предполагать, что

$$\vartheta_0(0,\lambda)=\vartheta_0(1,\lambda)=0, \tag{36$_0$}$$

$$\vartheta_1(0,\lambda)=\vartheta_1\left(x_0,\lambda\right)=0, \tag{36$_1$}$$

$$\vartheta_2\left(x_0,\lambda\right)=\vartheta_2(1,\lambda)=0. \tag{36$_2$}$$

Решение задач (35), (36_0); (35), (36_1) и (35), (36_2) соответственно представим в виде

$$\vartheta_0(x,\lambda)=\frac{\mu\, sh(x-1)\sqrt{\lambda^2-\mu}}{\sqrt{\lambda^2-\mu}\;\; sh\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int\limits_0^1 sh\, t\sqrt{\lambda^2-\mu}\;\; w(t,0,\lambda)dt-$$

$$-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int\limits_x^1 sh(x-t)\sqrt{\lambda^2-\mu}\; w(t,0,\lambda)dt, \quad 0\le x\le 1, \tag{37_0}$$

$$\vartheta_1(x,\lambda)=\frac{\mu\, sh(x-x_0)\sqrt{\lambda^2-\mu}}{\sqrt{\lambda^2-\mu}\;\; shx_0\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int\limits_0^{x_0} sh\, t\sqrt{\lambda^2-\mu}\;\; w(t,0,\lambda)dt-$$

$$-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int\limits_x^{x_0} sh(x-t)\sqrt{\lambda^2-\mu}\; w(t,0,\lambda)dt, \quad 0\le x\le x_0 \tag{37_1}$$

и

$$\vartheta_2(x,\lambda)=\frac{\mu shx_0\sqrt{\lambda^2-\mu}\; ch\, x\sqrt{\lambda^2-\mu}}{\sqrt{\lambda^2-\mu} sh\left(x_0-1\right)\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int\limits_{x_0}^1 sh(1-t)\sqrt{\lambda^2-\mu}\; w(t,0,\lambda)dt-$$

$$-\frac{\mu\, chx_0\sqrt{\lambda^2-\mu}\;\; shx\sqrt{\lambda^2-\mu}}{\sqrt{\lambda^2-\mu}\; sh(x_0-1)\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int\limits_{x_0}^1 sh(1-t)\sqrt{\lambda^2-\mu}\, w(t,0,\lambda)dt-$$

$$-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int\limits_{x_0}^{x} sh(x-t)\sqrt{\lambda^2-\mu}\; w(t,0,\lambda)dt, \quad x_0\le x\le 1. \tag{37_2}$$

В силу представления (33) с учетом (36_0), (36_1), (36_2) задача $AG^*{}_\lambda$ редуцируется к задаче $AG^*_{1\lambda}$ нахождения в области D регулярного решения $w(x,y,\lambda)$ уравнения (34), удовлетворяющего условиям

$$w|_{\gamma_0}=\varphi_1(y;\lambda)-\omega_0(y;\lambda), \quad w|_{\gamma_1}=\varphi_1(y;\lambda)-\omega_0(y;\lambda), \quad 0\le y\le h, \tag{38}$$

$$w_x\Big|_{\gamma_2}=\psi_1(y,\,\lambda)-\vartheta_0'(x,\lambda), \quad 0\le x\le 1, \tag{39}$$

$$w|_{\sigma_2}=\psi_2(x;\lambda)-\omega_1(x-x_0;\lambda)-\vartheta_1(x,\lambda), \quad \frac{x_0}{2}\le x\le x_0,, \tag{40}$$

$$w_n\Big|_{\sigma_2}=\psi_3(x;\lambda)+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1'(x-x_0;\lambda)-\frac{1}{\sqrt{2}}\vartheta_2'(x,\lambda), \quad x_0/2\le x\le x_0, \tag{41}$$

$$w|_{\sigma_3}=\psi_4(x;\lambda)-\omega_2(x_0-x;\lambda)-\vartheta_2(x,\lambda), \quad x_0\le x\le\frac{x_0+1}{2}, \tag{42}$$

$$w_n\Big|_{\sigma_3}=\psi_5(x;\lambda)+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1'(x_0-x;\lambda)-\frac{1}{\sqrt{2}}\vartheta_2'(x,\lambda), \tag{43}$$

где $\vartheta_i(x,\lambda),(i=\overline{0,2})$ определяются из (37_i) .

Для доказательства единственности решение задачи $AG,\ AG_\lambda$ и AG_λ^* играет важную роль следующая лемма.

Лемма 1. Если $\varphi_0(y,\lambda)\equiv\varphi_1(y,\lambda)\equiv 0,\ \forall y\in[0,h],\ \ \psi_1(y,\lambda)\equiv 0,\ \forall y\in\left[0,h\right],$

$\psi_2(x,\lambda)\equiv\psi_3(x,\lambda)\equiv 0,\ \forall x\in\left[\frac{x_0}{2},x_0\right]$ и $\psi_4(x,\lambda)\equiv\psi_5(x,\lambda)\equiv 0,\ \ \forall x\in\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right],$

$\lambda\in(-\infty,+\infty),$ то

$$\tau_j(x,\lambda)\equiv 0,\ \ \forall x\in\bar{J}_j\quad(j=\overline{0,2}),$$

здесь $\tau_j(x,\lambda)=w(x,0,\lambda),\quad x\in\bar{J}_j.$

Лемма доказывается с помощью аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе [6].

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 1 и $\vartheta_j(x,\lambda)\equiv 0,$ $\forall\, x\in\bar{J}_j\ \ (j=\overline{0,2}),$ то в области D соответственно задачи AG_λ^* и $AG_{1\lambda}^*$ для уравнения (24) и (34) может иметь не более одного решения.

Теорема 1 доказывается с помощью принципа экстремума для параболических уравнений [1], [7].

Теорема 2.Если выполнены условия теоремы 1, то в области Ω задача AG может иметь не более одного решения.

Используя представление решение (23) и (33) с учетом условия леммы 1 докажем единственность решения задачи AG для уравнения (1).

Теорема 3. Если выполнены условия (2), (18) - (22), то решение задачи AT_λ для уравнения (12) существует.

Теорема 3 доказывается методом интегральных уравнений [8].

Из теоремы 3 следует существование решения задачи AG для уравнения (1).

Литература

1. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа[Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажонов // Ташкент: «Фан». 1986. 220 с.

2. Салахитдинов, М.С. Уравнения смешанно-составного типа[Текст] / М.С. Салахитдинов// Ташкент: «Фан». 1974. 156 с.

3. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа[Текст] / Т.Д. Джураев // Ташкент: «Фан». 1979. 240 с.

4. Islomov, B. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients[Text] / B.Islomov, U.I. Baltaeva // EJDE. Texas State University San Marcos, 2015. V. 2015. № 221. Pp. 1-10.

5. Исломов, Б. Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа[Текст] / Б.Исломов, Д.М. Курьязов // “Узбекский математический журнал”. 2000. № 2. С. 29-35.

6. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных[Текст] / А.В. Бицадзе // М.: Наука. 1981. 448 с.

7. Ильин, А.М., Линейные уравнения второго порядка параболического типа[Текст] / А.М.Ильин, А.С.Калашников, О.А.Олейник // ЖВМиМФ.1965. 4(6). С.1006-1024.

8. Islomov, B.I. Boundary value problem for loaded equation of parabolic-giperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain [Text] / B.I.Islomov, Y.K. Alikulov //International journal of applied mathematics, 2021, Vol.34, No.2, pp.158-170.

УДК 517.956

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_69

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ишанкулов Толиб, д.ф.-м.н. профессор,

tolibi@mail.ru

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова

Самарканд, Узекистан

Маннонов Махмуд базовый докторант.

maxmudjon_mannonov@mail.ru

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова

Аннотация. *Рассматривается задача продолжения n-аналитической функции в область по значениям ее последовательных производных до (n-1) – го порядка на части границы. Построена формула продолжения Карлемана для n – аналитических функций.*

Ключевые слова: *уравнение Коши – Римана, полианалитические функции, теорема Коши, формула Сохоцкого – Племеля, формула продалжения.*

CANTINUATION OF POLYANALYTIC FUNCTIONS

Ishankulov Tolib, Dr Sc, professor,

tolibi@mail.ru

Samarkand State University named after Sharof Rashidov,

Samarkand, Uzbekistan

Mannonov Maxmud, basic doctoral student

maxmudjon_mannonov@mail.ru

Samarkand State University named after Sharof Rashidov

Abstract: *We consider the problem of continuation the n analytic function in to a domain by values of its sequential derivatives up to the (n-1) – th order on a part of the boundary. Carleman's continuation formula for n - analytic functions is constructed.*

Key words: *Cauchy – Riemann equation, n – analytic function, Cauchy theorem, Sokhotskiy – Plemel formula, continuation formula.*

Введение

Функция

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

называется полианалитической порядка n (или кратко $n-$ аналитической) в некоторой области D плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, если она в D имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно и удовлетворяет обобщенному условию Коши-Римана:

$$\frac{\partial^n w}{\partial \overline{z}^n} = 0, \quad где \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1}$$

Полианалитические функции тесно связаны с полигармоническими функциями. Функция $u(x, y)$ тогда и только тогда является полигармонической, если она служит вещественной или мнимой частью полианалитической функции [7]. Бианалитические функции (решения уравнения (1) при m=2) в виду их связи с бигармоническими функциями, имеют важные применения.

В работах Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, А. В. Бицадзе, М. Б. Балка, Х. Бегера и их учеников рассмотрены различные краевые задачи для полианалитических функций [4,7-9]. В этих статьях краевые условия задаются на всей границе области регулярности.

В данной работе рассмотрим задачу продолжения n-аналитической функции в область по ее значениям и значениям производных до ($n-1$)-го порядка на части границы этой области.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D-$ ограниченная область с кусочно-гладкими границей требуется определить n -аналитическую функцию $w(z)$ в области D по значениям ее последовательных производных $\frac{\partial^k w}{\partial \overline{z}^k}(k = 0,1,...,n-1)$, на части границы $S(S \subset \partial D)$ этой области:

$$\frac{\partial^k w}{\partial \overline{z}^k} = f_k(z) \quad (k = 0,1,...,n-1), \quad z \in S \quad \left(\frac{\partial^0 w}{\partial \overline{z}^0} = w\right). \tag{2}$$

Класс полианалитических порядка n функций в области D обозначим через $\Pi_n(D)$. При n = 1 этот класс совпадает с классом аналитических в области D функций. Поэтому задачу (1), (2) естественно называть граничной задачей продолжения для полианалитических функций. Данная задача является некорректной. Решение единственно, но неустойчиво. Пример некорректности типа Адамара приведен в [10].

2. Формула продолжения Карлемана

Важным средством в теории аналитических функций является интегральная формула Коши. Для $n-$аналитической функции Н. Теодореско [2] впервые получил подобную формулу выражающую значения $n-$ аналитической функции в области D через значений этой функции и ее последовательных производных $w_{\overline{z}^k}\left(k=0,1,...,n-1\right)$ на границе:

$$w\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\partial D}\frac{\left(\overline{z}-\overline{t}\right)^k}{k!\left(t-z\right)}w_{\overline{t}^k}(t)dt \quad \left(w_{\overline{t}^0}=w\right). \tag{3}$$

В случае $n=1$, решение задачи (1), (2) для аналитических функций можно задавать формулой Карлемана ([5, стр. 60-61]; [6, стр. 18-19]). Для $n-$аналитических функций когда часть границы области является отрезком действительной оси (область типа шапочки) формула Карлемана доказана в [10]. Приведем аналог формулы Карлемана для $n-$аналитических функций в случае когда областью регулярности являеться единичный круг $D_1=\left\{z:\left|z\right|<1\right\}$, S - дуга $\left(t',t''\right)$ окружности $\partial D_1,\left(t'=e^{i\theta'},t''=e^{i\theta''}\ 0<\theta'<\theta''<2\pi\right)$. Рассмотрим гармоническую меру ω дуги S относительно круга D_1 [5]:

$$\omega_1\left(z,\theta',\theta''\right)=\frac{1}{\pi}\arg\left(\frac{z-e^{i\theta''}}{z-e^{i\theta'}}e^{\frac{\theta'-\theta''}{2}i}\right).$$

Функция Карлемана дуги S относительно круга D_1 следующий вид [5]:

$$\Phi_\sigma\left(t,z\right)=\frac{1}{t-z}\exp\left\{\sigma\left[\lambda(t)-\lambda(z)\right]\right\},$$

где $\lambda\left(z\right)\in A(D_1)$ аналитическая функция в области D_1 такая что $\omega(z)=\mathrm{Re}\,\lambda\left(z\right)$, $\sigma>0$ положительный числовой параметр.

Теорема 1. Для функции $w\in\Pi_n\left(D_1\right)\cap C^{n-1}\left(\overline{D}_1\right)$ при $z\in D_1$ справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения

$$w(z)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!}\Phi_\sigma(t,z)w_{\bar t^k}(t)dt \tag{4}$$

$$\begin{gathered}w(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!(t-z)}w_{\bar t^k}(t)dt+\\+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\sigma\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!}w_{\bar t^k}(t)e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}dt.\end{gathered} \tag{5}$$

Доказательство. Эквивалентность (4) и (5) следует из формулы

$$\lim_{\sigma\to\infty}\psi(\sigma,z)=\int_0^\infty\frac{d\psi(\sigma,z)}{d\sigma}+\psi(0,z)\cdot$$

Докажем (4). Из определения функции Карлемана, следует что Φ_σ представима в виде

$$\Phi_\sigma(t,z)=\frac{1}{t-z}+g_\sigma(t,z),$$

где

$$g_\sigma(t,z)=\frac{\exp\{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]\}-1}{t-z}$$

регулярная ограниченная аналитическая по t функция в области D_1. Покажем, что функция

$$F(t,z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!}w_{\bar t^k}(t)$$

является аналитической по t в D_1, непрерывной на $\bar D_1$. Прямое вычисление показывает справедливость равенства:

$$\frac{\partial F(t,z)}{\partial\bar t}=\frac{(\bar z-\bar t)^{n-1}}{(n-1)!}w_{\bar t^n}(t)=0.$$

Тогда функция $F_1(t,z)=g_\sigma(t,z)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!}w_{\bar t^k}(t)$ тоже является аналитической по t в D_1, ограниченной на $\bar D_1$. По теореме Коши, имеем:

$$\int_{\partial D_1} g_\sigma(t,z) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!} w_{\bar{t}^k}(t)dt = 0. \tag{6}$$

Из равенств (3) и (6), поличем

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \Phi_\sigma(t,z) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!} w_{\bar{t}^k}(t)dt.$$

Перепишем последнее равенства в вида:

$$\begin{gathered} w(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_S \frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!(t-z)} e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]} w_{\bar{t}^k}(t)dt + \\ + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial D \setminus S} \frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!(t-z)} e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]} w_{\bar{t}^k}(t)dt \end{gathered} \tag{7}$$

Оценим второй интеграл в правой части (7):

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial D \setminus S} \frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!(t-z)} e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]} w_{\bar{t}^k}(t)dt \right| \le C_1(z) e^{-\sigma\omega(z)} \tag{8}$$

где $C_1(z)$ вполне определенная функция не зависящая от $\sigma,$ конечная при каждом $z \in D_1$. Переходя к пределу в (7), при $\sigma \to \infty$ и учитывая неравенство (8), поличим (4).

Эквивалентные формулы продолжения типа Карлемана (4), (5) дают решение задачи (1), (2) в D_1.

Рассмотрим вопрос существования, решения задачи (1), (2). С этой целью рассмотрим область $D_1' = D_1 \cup \{z : \theta' < \arg z < \theta''\}$. Обозначим через $L(S)$ множество абсолютно интегрируемых на S функций. Критерий разрешимости задачи (1), (2) в D_1 дает следующая

Теорема 2. Пусть

$$f_k \in L(S) \cap C^{n-k-1}(S^\circ), \quad S^0 = \mathrm{Int} S \quad (k = 0,...,n-1).$$

Для существования функции $w \in \Pi_n(D_1) \cap C^{n-1}(D_1 \cup S_0)$ удовлетворяющей условиям

$$w_{\bar{z}^k}(t)=f_k(t)\quad (k=0,1,...,n-1), t\in S_0, \tag{9}$$

необходимо и достаточно чтобы для каждого $z\in D_1'$ сходился несобственный интеграл:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} d\sigma \sum_{k=0}^{n-1}\int_S \frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!} f_k(t) e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}dt\right|<\infty \tag{10}$$

(равномерно на кампактах из D_1).

Доказательство. Необходимость. Пусть сушествует функция $w\in \Pi_n(D_1)\cap C^{n-1}(D_1\cup S_0)$ удовлетворяющая условиям (9). Функция

$$g_{1\sigma}(t,z)=\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}$$

при каждом $z\in D_1'$, является аналитической по t в D_1, непрерывной на $\bar{D}_1$. Поэтому повторяя рассуждение при доказательстве теоремы 1, можно убедится что равенство (6) сохраняется если там заменит g_σ на $g_{1\sigma}$:

$$\int_{\partial D_1} e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}w_{\bar{t}^k}(t)dt=0.$$

Перепишем последнее равенство в виде:

$$\int_S g_{1\sigma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}f_k(t)dt=-\int_{\partial D_1\backslash S} g_{1\sigma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}w_{\bar{t}^k}(t)dt. \tag{11}$$

Оценим интеграл, стоящей в правой части равенства (11). Имеем

$$\left|\int_{\partial D_1} e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}w_{\bar{t}^k}(t)dt\right|\le C\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{k!}C_1 e^{-\sigma\omega(z,\theta',\theta'')}$$

где $C_1=\max\limits_{\substack{0\le k\le n-1\\ t\in\partial D_1}}\left|w_{\bar{t}^k}(t)\right|,\ C_1=\max\limits_{\substack{t\in\partial D_1\\ z\in K}}\left|\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}\right|.$

Таким образам

$$\left|\int_S e^{\sigma\left[\lambda(t)-\lambda(z)\right]}\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\overline{z}-\overline{t}\right)^k}{k!}w_{\overline{t}^k}(t)dt\right|\le C_2 e^{-\sigma\omega(z,\theta',\theta'')}, z\in D_1'. \quad (12)$$

Из неравенства (12) следует выполнение условия (10).

Достаточность. Пусть функции $f_k \in L(S)\cap C^{n-k-1}(S^{\circ})$, удовлетворяют условиям (10). Покажим что существует функция $w\in \Pi_n(D_1)\cap C^{n-1}(D_1\cup S_0)$ удовлетворяющая условиям (9). Рассмотрим выражение в правой части (5), если заменит там $w_{\overline{t}^k}(t)$ на $f_k(t)$ $\left(k=0,1,...,n-1\right)$. Полученное выражение обозначим через $g\left(z\right)$. Первое слагаемое в выражение $g\left(z\right)$ является интегралом типа Коши для $n-$ аналитических функций

$$F\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\frac{\left(\overline{z}-\overline{t}\right)^k}{k!\left(t-z\right)}f_k(t)dt, \quad (13)$$

которое представляет $n-$аналитическую в D_1 функцию $F_+\left(z\right)$ и $n-$аналитическую в $D_1'\setminus\overline{D}_1$ функцию $F_-\left(z\right)$ такие что разность их предельных значений и предельных значений их производных до $\left(n-1\right)-$ го порядка по нормалям (или по углам ограниченного раствора, а соответствующие точки $z^+\in D_1$ и $z^-\in D_1'\setminus\overline{D}_1$ при стремлении к точке $t\in S_0$ находятся на равных расстояниях от t) на S_0 равны $f_k(t)$ $\left(k=0,1,...,n-1\right)$ [4, стр. 67-69]

$$\frac{\partial^k F_+(t)}{\partial\overline{t}^k}-\frac{\partial^k F_-(t)}{\partial\overline{t}^k}= f_k(t),\left(k=0,1,...,n-1\right), t\in S_0.$$

Причем, если одно из этих функций непрерывна вместе со своими производными до $\left(n-1\right)-$го порядка в соответствующей области вплоть до S_0, то другая тоже обладает данным свойством. Согласно (10), второе слагаемое выражения $g\left(z\right)$ являетется $n-$ аналитической по z в D_1'. Следовательно, выражение $g\left(z\right)$ определяет $n-$

аналитическую в D_1 функцию $g_1(z)$ и $n-$ аналитическую в $D_1' \setminus \bar{D}_1$ функцию $g_2(z)$ и

$$\frac{\partial^k g_1(t)}{\partial \bar{z}^k} - \frac{\partial^k g_2(t)}{\partial \bar{z}^k} = f_k(t), (k = 0,1,...,n-1), t \in S_0. \qquad (14)$$

С другой стороны выражение для $g(z)$ равно выражению правой части (4), если заменим $w_{\bar{t}^k}(t)$ на $f_k(t)$ $(k = 0,1,...,n-1)$. Так как для точек $z \in D_1' \cap \{|z| > 1\}$ функция $\omega(z,\theta',\theta'')$ принимает значения больше единицы, то $g_2(z) = 0$. Отсюда следует

$$\frac{\partial^k g_2(t)}{\partial \bar{z}^k} = 0, (k = 0,1,...,n-1), t \in S_0.$$

Но тогда из (14) получим

$$\frac{\partial^k g_1(t)}{\partial \bar{z}^k} = f_k(t), (k = 0,1,...,n-1), t \in S_0.$$

Следовательно, $g_1(z)$ требуемая $n-$аналитическая функция $w(z)$.

Критерий разрешимости задачи аналитического продолжения впервые была получена в [3]. Теорема 2 является аналогом теоремы Фока-Куни для $n-$аналитических функций в круге.

Литература

1. Carleman, T. Les functions quasi analytiques[Text] / T. Carleman //. Gauthier-Villars, Paris, 1926

2. Teodoresku, N. La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique Mathématique [Text] / N. Teodoresku // Gauthier-Villars, Paris, 1931

3. Фок, В. А. О введении “гасящей” функции в дисперсионные соотношения[Текст] / В.А. Фок, Ф.М. Куни //, Докл. АН СССР. 127(6), 1195–1196 (1959)

4. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н. И. Мусхелишвили //М. Физматгиз, 1962. 600с

5. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / М. М. Лаврентьев, В. Г.Романов, С. Шишатский // М.: Наука, 1980

6. Айзенберг, Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения [Текст] / Л. А. Айзенберг // Новосибирск: Наука, 1990

7. Балк, М. Б. Полианалитические функции и их обобщения [Текст] / М. Б. Балк // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления том 85, 187–246 (1991)

8. Heinrich, B. Boundary value problems for bipolyanalytic functions, Applicable Analysis[Text] / Heinrich Begehr, Ajay Kumar. // 85:9, 1045-1077 (2006)

9. Heinrich, B. A boundary value problem for Bitsadze equation in the unit disc[Text] / Heinrich Begehr //, Journal of Contemporary Mathematical Analysis. 42, 177-183 (2007)

10. Ишанкулов, Т. Продолжение полианалитических функций[Текст] / Ишанкулов Т., Фозилов Д. Ш. // Известия вузов. Математика. 8, 37-45 (2021)

УДК 517.968

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_78

ОДИН КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА-СТИЛТЬЕСА ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Каденова Зууракан Ажимаматовна

Заведующая лабораторией теории обратных задач ИМНАН КР, д.ф.-м.н.

kadenova71@mail.ru

Бекешова Дамира Аманбаевна

Соискатель ИМ НАН КР

bekeshova.d@mail.ru

Бишкек, Кыргызстан

Орозмаматова Жыпаргул Шермаматовна, к.ф.-м.н,

Ошский технологический университет

jypar75@mail.ru

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной работе, с помощью понятия производной по возрастающей функции, и методом неотрицательных квадратичных форм доказывается единственность решений для одного классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода с двумя независимыми переменными.*

Ключевые слова: *линейные интегральные уравнения, первого рода, с двумя независимыми переменными, единственность.*

БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ФРЕДГОЛЬМ-СТИЛТЕСТИН КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ЭКИ ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕЛЕРИНИН БИР КЛАССЫ

Каденова Зууракан Ажимаматовна

УИА МИнун тескери маселелер лабораториясынын башчысы, ф.-м.и.д.

kadenova71@mail.ru

Бекешова Дамира Аманбаевна

УИА МИнун илим изилдөөчү

bekeshova.d@mail.ru

Бишкек, Кыргызстан

Орозмаматова Жыпаргүл Шермаматовна ф.-м.и.к.,

Ош технологиялык университети

jypar75@mail.ru

Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада өсүүчү функцияга карата туунду түшүнүгүн колдонуу менен терс эмес квадраттык формалар усулунун, функционалдык анализдин усулдарынын жардамында биринчи түрдөгү Фредгольм-Стилтестин көз карандысыз эки өзгөрүлмөлүү сызыктуу интегралдык тендемелердин чечимдеринин жалгыздыгы далилденди.*

Ачкыч сөздөр: *сызыктуу интегралдык тендемелер, биринчи түрдөгү, эки өзгөрүлмөлүү жалгыздык.*

ONE CLASS OF FREDHOLM-STIELTIES LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

Kadenova Zuurakan Azhimamatovna
Head of the laboratory theory of inverse problems IM NAS KR,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
kadenova71@mail.ru
Bekeshova Damira Amanbaevna
Applicant IM NAS KR
bekeshova.d@mail.ru
Bishkek, Kyrgyzstan
Orozmamatova Zhipargul Shermamatovna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Osh Technological University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *In the present article the theorem about uniqueness of the linear integral equations Freaholm-Stielties of the first two independent variables with method of nonnegative quadratic forms and the concept of derivative with respect to increasing function.*

Key words: *linear inteqral equations, first kind, two variables, uniqueness.*

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_{t_0}^T H(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=$$

$$= f(t,x),(t,x)\in G, \qquad G=\{(t,x)\in R^2 : t_0\le t\le T,\ a\le x\le b\}, \tag{1}$$

где $\varphi(x), \psi(t)$ являются строго возрастающие непрерывные функции соответственно в области $[a,b], [t_0,T]$.

В настоящее время большой интерес вызывают обратные и некорректные задачи. Понятие корректности в работах А.Н. Тихонов [1], М.М. Лаврентьев [2] и В.К. Иванова [3], отличное от классического, дало средство для изучения некорректных задач и стимулировало интерес к интегральным уравнениям, имеющим большое прикладное значение. Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [4], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В [5]- [10] исследованы вопросы единственности и устойчивости решений для линейных интегральных уравнений первого рода.

Понятие производной по возрастающей функции было введено А. Асановым в 2001 г. в [11] и играет особую роль в исследовании. Это понятие является обобщением обычного понятия производной функции и является обратным оператором для одного класса интеграла Стилтьеса.

$$K(t,x,y)=\begin{cases} A(t,x,y), & t_0 \le t \le T, \quad a \le y \le x \le b; \\ B(t,x,y), & t_0 \le t \le T, \quad a \le x \le y \le b, \end{cases} \tag{2}$$

$$H(t,x,s)=\begin{cases} M(t,x,s), & t_0 \le s \le t \le T, \quad a \le x \le b; \\ N(t,x,s), & t_0 \le t \le s \le T, \quad a \le x \le b. \end{cases} \tag{3}$$

$A(t,x,y), B(t,x,y), M(t,x,s), N(t,x,s), C(t,x,s,y)$ - известные функции, определенные соответственно в области

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(t,x,y): \quad t_0 \le t \le T, \quad a \le y \le x \le b\}; \\ G_2 &= \{(t,x,y): \quad t_0 \le t \le T, \quad a \le x \le y \le b\}; \\ G_3 &= \{(t,x,s): \quad t_0 \le s \le t \le T, \quad a \le x \le b\}; \\ G_4 &= \{(t,x,s): \quad t_0 \le t \le s \le T, \quad a \le x \le b\}; \\ G_5 &= \{(t,x,s,y): \quad t_0 \le s \le t \le T, \quad a \le y \le x \le b\}. \end{aligned}$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$. Решение $u(t,x)$ ищется в $L^2_{\varphi,\psi}(G)$, где $v(t,x)\in L^2_{\varphi,\psi}(G)$ тогда и только тогда когда

$$\int_G |v(t,x)|^2 d\varphi(x) d\psi(t) < \infty.$$

Обозначим

$$\begin{cases} P(s,y,z)=A(s,y,z)+B(s,z,y), & (s,y,z)\in G_1, \\ Q(s,y,\tau)=M(s,y,\tau)+N(\tau,y,s). & (s,y,\tau)\in G_3. \end{cases} \tag{4}$$

Определения. Производной по $\varphi(x)$ функции $f(x)$ в точке $x\in(a,b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению функции $\Delta\varphi(x)$ при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует):

$$f_{\varphi}^{'}(x) = \frac{df}{d\varphi}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}$$

Нахождение производной функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ будем называть дифференцированием по $\varphi(x)$ этой функции. Если функция $f(x)$ в точке $x \in (a,b)$ имеет конечную производную по $\varphi(x)$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой по $\varphi(x)$ в этой точке. Функция $f(x)$, дифференцируемая по $\varphi(x)$ во всех точках интервала называется дифференцируемой по $\varphi(x)$ на (a,b).

С помощью производной по возрастающей функции и методом неотрицательных квадратичных форм доказывается теорема единственности решений уравнения (1).

Пусть выполняются следующие условия:

1) $P(s,b,a) \geq 0,\ s \in [t_0,T], P(s,b,a) \in C[t_0,T],$

$$P'_{\varphi(y)}(s,y,a) \leq 0,\ (s,y) \in G,\ P'_{\varphi(y)}(s,y,a) \in C(G),$$

$$P'_{\phi(z)}(s,b,z) \geq 0,\ \ (s,z) \in G,\ P'_{\phi(z)}(s,b,z) \in C(G),$$
$$P''_{\phi(z)\phi(y)}(s,y,z) \leq 0,\ \ (s,y,z) \in G_1,\ P''_{\phi(z)\phi(y)}(s,y,z) \in C(G_1),$$

$$Q(T,y,t_0) \geq 0,\ \ y \in [a,b],\ Q(T,y,t_0) \in C[a,b],$$
$$Q'_{\psi(s)}(s,y,t_0) \leq 0,\ \ (s,y) \in G,\ Q'_{\psi(t)}(s,y,t_0) \in C(G),$$
$$Q'_{\psi(\tau)}(T,y,\tau) \geq 0 \quad (y,\tau) \in G,\ Q'_{\psi(\tau)}(T,y,\tau) \in C(G),$$

$$Q''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,y,\tau) \leq 0,\ (s,y,\tau) \in G_2,\ Q''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,y,\tau) \in C(G_2).$$

и для любого

$$v(t,x) \in L_2(G), \int_a^x A(t,x,y)v(t,y)d\varphi(y), \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)d\varphi(y), \int_{t_0}^t M(t,x,s)v(s,x)d\psi(s), \int_t^T N(t,x,s)v(s,x)d\psi(s) \in C(G),$$

где $C[t_0,T],\ C(G), C(G_1)$ и $C(G_3)$-пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,T],\ G, G_1$ и G_3;

2) $C(T,b,t_0,a)\ge 0$,

$$C'_{\varphi(s)}(s,b,t_0,a)\in C[t_0,T],\ C'_{\varphi(s)}(s,b,t_0,a)\le 0\ \forall s\in[t_0,T],$$

$$C'_{\varphi(\tau)}(T,b,\tau,a)\in C[t_0,T],\ C'_{\varphi(\tau)}(T,b,\tau,a)\ge 0\ \forall\ \tau\in[t_0,T],$$

$$C'_{\varphi(y)}(T,y,t_0,a)\in C[a,b],\ C'_{\varphi(y)}(T,y,t_0,a)\le 0\forall\ y\in[a,b],$$

$$C'_{\varphi(z)}(T,b,t_0,z)\in C[a,b],\ C'_{\varphi(z)}(T,b,t_0,z)\ge 0\ \forall z\in[a,b],$$

$$C''_{\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,a)\in C(G),\ C''_{\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,a)\ge 0\ \forall\ (s,y)\in G,$$

$$C''_{\psi(\tau)\varphi(y)}(T,y,\tau,t_0)\in C(G),\ C''_{\psi(\tau)\varphi(y)}(T,y,\tau,t_0)\le 0\ \forall\ (y,\tau)\in G,$$

$$C''_{\varphi(z)\psi(s)}(s,b,t_0,z)\in C(G),\ C''_{\varphi(z)\psi(s)}(s,b,t_0,z)\le 0\ \forall\ (s,z)\in G,$$

$$C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(T,b,\tau,z)\in C(G),\ C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(T,b,\tau,z)\ge 0\ \forall\ (\tau,z)\in G,$$

$$C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(z)}(s,y,\tau,a)\in C(G_3),\ C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(z)}(s,y,\tau,a)\ge 0\ \forall\ (s,y,\tau)\in G_3,$$

$$C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)}(s,b,\tau,z)\in C(G_3),\ C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)}(s,b,\tau,z)\le 0\ \forall\ (s,z,\tau)\in G_3,$$

$$C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,z)\in C(G_1),\ \ C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,z)\ge 0\forall\ (s,y,z)\in G_1,$$

$$C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,\tau,z)\in C(G_1),\ \ C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,\tau,z)\le 0\forall\ (\tau,y,z)\in G_1,$$

$$C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,z)\in C(G_4),\ C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,z)\ge 0\forall\ (s,y,\tau,z)\in G_4,$$

$$C''_{\psi(\tau)\varphi(s)}(s,b,\tau,a)\in C(G_5),\ C''_{\psi(\tau)\varphi(s)}(s,b,\tau,a)\le 0\forall\ (s,\tau)\in G_5=\{(s,\tau):t_0\le\tau\le s\le T\},$$

$$C''_{\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,t_0,z)\in C(G_6),\ C''_{\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,t_0,z)\le 0\forall(y,z)\in G_6=\{(y,z):a\le z\le y\le b\},$$

3) При почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ и для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R$:

$$L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left(-P'_{\varphi(y)}(s,y,a)\right)\alpha_1^2+$$

$$+\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left(-Q'_{\varphi(y)}(s,y,t_0)\right)\alpha_2^2+\frac{2}{(s-t_0)(y-a)}\left(-C(s,y,t_0,a)\right)\alpha_1\alpha_2+$$

$$+\frac{1}{y-a}\left(-Q''_{\psi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\right)\alpha_3^2+\frac{2}{y-a}\left(-C'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,a)\right)\alpha_3\alpha_1+$$

$$+\frac{2}{s-t_0}\left(-C'_z(s,y,t_0,z)\right)\alpha_2\alpha_4+\frac{1}{s-t_0}\left(-P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z)\right)\alpha_4^2+$$

$$+\left(-2C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(s,y,\tau,z)\right)\alpha_3\alpha_4\geq 0;$$

4) Если при почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ $L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=0$, то выполняется, хотя бы, один из следующих условий:

$$1)\ \alpha_1=0;\quad 2)\ \alpha_2=0;\quad 3)\ \alpha_3=0;\quad 4)\ \alpha_4=0.$$

Теорема. Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение $u(t,x)$ уравнения (1) единственно в классе $L^2_{\varphi,\psi}(G)$.

Доказательство. В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_x^b B(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_{t_0}^t M(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+$$

$$\int_t^T N(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=f(t,x),\ (t,x)\in G. \quad (4)$$

Обе части уравнения (4) умножим на $u(t,x)$ и интегрируем по области G:

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y A(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_y^b B(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s M(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_s^T N(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y). \tag{5}$$

Применяя формулу Дирихле из (5), имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y\left[A(s,y,z)+B(s,z,y)\right]u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s[M(s,y,\tau)+N(\tau,y,s)]u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y). \tag{6}$$

Учитывая обозначения (3), получим

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\varphi(z)d\varphi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)+ \tag{7}$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y).$$

Преобразуем каждый из интегралов левой части уравнения (7). Дважды интегрируя по частям и применяя формулу Дирихле, для первого интеграла получим

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(y)d\varphi(s)=$$

$$=-\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,v)dv\right)d\psi(z)\,u(s,y)d\varphi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}P(s,b,a)\left(\int_{a}^{b}u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\varphi(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b}P'_{\varphi(y)}(s,y,a)\left(\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\varphi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b}P'_{\varphi(z)}(s,b,z)\left(\int_{z}^{b}u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\psi(z)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b}\int_{a}^{y}P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z)\left(\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\psi(z)d\varphi(y)d\varphi(s), \tag{8}$$

где $P'_{\psi(z)}(t,x,s)$, $P'_{\varphi(x)}(t,x,s)$ частные производные по t и s соответственно. Дважды интегрируя по частям и применяя формулы Дирихле для второго интеграла, имеем

$$\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}Q(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=-\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}Q(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_{\tau}^{s}u(\xi,y)d\xi\right)d\tau u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}Q(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{T}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}Q'_{\psi(s)}(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}Q'_{\tau}(T,y,\tau)\left(\int_{\tau}^{T}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_{\tau}^{s}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\psi(s)d\varphi(y). \tag{9}$$

Для преобразования третьего интеграла, используем соотношение

$$C\nu''_{\psi(\tau)\phi(z)}=(C\nu)''_{\psi(\tau)\phi(z)}-\left(C'_{\psi(\tau)}\nu\right)'_{\phi(z)}-\left(C'_{\phi(z)}\nu\right)'_{\psi(\tau)}+C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}\nu.$$

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\int_{a}^{y}C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\varphi(z)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)d\varphi(z)d\psi(\tau)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T C(s,y,t_0,a)\left(\int_{t_0}^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T C'_\tau(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\psi(s)d\psi(\tau)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_z^b C'_z(s,y,t_0,z)\left(\int_{t_0}^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)d\varphi(z)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T\int_z^b C''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)d\varphi(\tau)d\varphi(z).$$

Далее, имея в виду, что

$$C\nu\nu''_{\varphi(s)\varphi(y)}=\frac{1}{2}\left(C\nu^2\right)''_{\psi(s)\varphi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_{\psi(s)}\nu^2\right)'_{\varphi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_{\varphi(y)}\nu^2\right)'_{\psi(s)}+\frac{1}{2}C''_{\psi(s)\varphi(y)}\nu^2-C\nu'_{\varphi(y)}\nu'_{\varphi(s)}$$

и применением формулу Дирихле, получим

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T C(T,b,t_0,a)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,\nu)d\xi\right)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}C'_\tau(T,b,\tau,a)\left(\int_\tau^T\int_a^b u(\xi,\nu)d\xi d\nu\right)^2 d\psi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C''_{\tau s}(s,b,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^b u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\psi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T C'_{\tau y}(T,y,\tau,t_0)\left(\int_\tau^T\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'''_{\tau sy}(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\psi(s)-$$

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'_\tau(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)d\psi(\tau)d\psi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}C'_z(T,b,t_0,z)\left(\int_{t_0}^T\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)-$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T C''_{\tau z}(T,b,\tau,z)\left(\int_\tau^T\int_z^b u(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(z)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y C'''_{\tau zy}(T,y,\tau,z)\left(\int_\tau^T\int_z^y u(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\psi(\tau)d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'''_{\tau zs}(s,b,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^b u(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(z)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C^{(IV)}_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)- \tag{10}$$

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)\,d\xi\right)\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)d\varphi(z)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)$$

Выражения (8), (9) и (10) подставляя в (7), получим

$$\frac{1}{2}(T,b,t_0,a)\left(\int_a^b\int_{t_0}^T u(\xi,\nu)\,d\xi d\nu\right)^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\left\{P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)\,d\nu\right)^2-\right.$$

$$\left.-C_{\psi(s)}(s,b,t_0,a)\left(\int_a^b\int_{t_0}^s u(\nu,\xi)\,d\nu d\xi\right)^2+C_{\psi(s)}(T,b,s,a)\left(\int_s^T\int_a^b u(\xi,\nu)\,d\xi d\nu\right)^2\right\}d\psi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\left\{Q(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^T u(\xi,y)\,d\xi\right)^2-C_{\varphi(y)}(T,y,t_0,a)\left(\int_a^y\int_{t_0}^T u(\nu,\xi)\,d\nu d\xi\right)^2+\right.$$

$$\left.+C'_{\varphi(y)}(T,b,t_0,y)\left(\int_{t_0}^T\int_y^b u(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2\right\}d\varphi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y\left\{L\left(s,y,\tau,z,\int_a^y u(s,\nu)\,d\nu,\int_{t_0}^s u(\xi,y)\,d\xi,\int_\tau^s u(\xi,y)\,d\xi,\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left[P'_{\varphi(y)}(s,b,y)\left(\int_y^b u(s,\nu)\,d\nu\right)^2+Q'_{\psi(s)}(T,y,s)\left(\int_s^T u(\xi,y)\,d\xi\right)^2+\right.$$

$$+C''_{\psi(s)\varphi(y)}\left(s,y,t_0,a\right)\left(\int_{t_0}^{s}\int_{a}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2-C''_{\psi(s)\varphi(y)}\left(T,y,s,t_0\right)\left(\int_{s}^{T}\int_{a}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2-$$

$$-C''_{\varphi(y)\psi(s)}\left(s,b,t_0,y\right)\left(\int_{t_0}^{s}\int_{y}^{b}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2+C''_{\psi(s)\varphi(y)}\left(T,b,s,y\right)\left(\int_{s}^{T}\int_{y}^{b}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{y-a}\left[C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(y)}\left(s,y,\tau,a\right)\left(\int_{\tau}^{s}\int_{a}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2-\right.$$

$$\left.-C'''_{\psi(\tau)\varphi(y)\psi(s)}\left(s,b,\tau,y\right)\left(\int_{\tau}^{s}\int_{y}^{b}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{s-t_0}\left[C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}\left(s,y,t_0,z\right)\left(\int_{t_0}^{s}\int_{z}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2-C'''_{\psi(s)\varphi(z)\varphi(y)}\left(T,y,s,z\right)\left(\int_{s}^{T}\int_{z}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2\right]+$$

$$\left.+C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}\left(s,y,\tau,z\right)\left(\int_{\tau}^{s}\int_{z}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2\right\}d\varphi\left(z\right)d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}C''_{\psi(\tau)\psi(s)}\left(s,b,\tau,a\right)\left(\int_{\tau}^{s}\int_{a}^{b}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)-$$

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{a}^{y}C''_{\varphi(z)\varphi(y)}\left(T,y,t_0,z\right)\left(\int_{t_0}^{T}\int_{z}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2d\varphi\left(z\right)d\varphi\left(y\right)=\\&=\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}f\left(s,y\right)u\left(s,y\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right).\end{aligned}\qquad(11)$$

Пусть $f(t,x)\equiv 0,\ (t,x)\in G.$ Тогда учитывая условия 1), 2), 3) и 4), из (11) имеем

$$\int_{t_0}^{s}u\left(\xi,y\right)d\xi=0,\ \forall\left(s,y\right)\in G \text{ или } \int_{a}^{y}u\left(s,\nu\right)d\nu=0,\ \forall\left(s,y\right)\in G.$$

Отсюда $u(t,x)=0,$ при всех $(t,x)\in G.$ Теорема доказана.

Литература

1. Иванов, В.К. О некорректно поставленных задачах. Дифференциальные

уравнения[Текст] / Иванов В.К.//-1968.- №2.-С.61.

2. Лаврентьев, М.М. Об интегральных уравнениях первого рода[Текст] / Лаврентьев М.М. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.

3. Тихонов, А.Н. О методах решения некорректно поставленных задач[Текст] / Тихонов А.Н. // В кн.: Тезисы докладов, Международный конгресс математиков.- М., 1966.

4. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа[Текст] / Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. // М.: Наука, 1980.

5. Иманалиев, М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода[Текст] / Иманалиев М.И., Асанов А. // ДАН СССР.-1989.-Т.309., №5.,-С. 1052-1055.

6. Иманалиев, М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода[Текст] / Иманалиев М.И., Асанов А. // ДАН 2007. Т. 415. № 1. с. 14-17.

7. Imanaliev, M.I. A Class of Linier Intergral Eguations of the First Kind with Two Independent Variables[Text] / Imanaliev M.I., AsanovA., Kadenova Z.A. // ISSN 1064-5624, Doklady Mathematics, 2014, Vol.89, № 1, pp.98-102.

8. Asanov, A. Regularization and Stability of Systems of Linear Integral Fredholm Equations of the First Kind[Text] / Asanov A., Kadenova Z. A. // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 38, Samara State Technical University, Samara, 2005, Pp.11–14. (In Russ.), http://mi.mathnet.ru/eng/vsgtu/v38/p11, DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu363

9. Asanov, A. M. Uniqueness and stability of solutions of linear intergral equations of the first kind with two variables[Text] / Asanov A. M., H. Chelik, Kadenova Z. A. // International Journal of Mathematical Analysis. – 2013. – Vol. 7. – No 17-20. – P. 907-914. – DOI 10.12988/ijma.2013.13088. – EDN XKWECX.

10. Kadenova, Z. A. On the uniqueness of solutions of Fredholm linear integral equations of the first kind on the semi-axis [Text] / A. Asanov, Z. A. Kadenova, D. Bekeshova // Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. – 2022. – No 1. – P. 82-87. – DOI 10.52448/16948173_2022_1_82. – EDN FXALAA.

11. Asanov, A. The denivative of a function by means of a increasing function. [Text] / Asanov A.// Fen Bilimleri Dergisi, Kyrgyz-Turkish Manas University, 1. 18-64 (2001).

УДК 517.954

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_90

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Кадиркулов Бахтиёр Жалилович, д.ф.-м.н., доцент
kadirkulovbj@gmail.com
Ташкентский государственный университет востоковедения,
Ташкент, Узбекистан
Эргашев Окилжон Тухтасин угли, ассистент,
okiljonergashev@gmail.com
Национальный исследовательский университет Ташкентский институт инженеров ирригации и мелиорации сельского хозяйства,
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В данной работе для вырождающегося параболического уравнения дробного порядка с оператором Герасимова-Капуто изучается нелокальная обратная задача типа Бицадзе-Самарского. Для решения задачи используется спектральный метод, с помощью которого рассматриваемая задача сводится к исследованию спектральной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно пространственной переменной. Исследованы спектральные вопросы полученной, а также сопряженной задачи, при этом дифференциальный оператор, соответствующий сопряженной задаче, получается разрывным. Найдены собственные числа, а также собственные функции задач, доказана полнота, а также базисность Рисса полученных систем. Далее, при определенных условиях на заданные функции, доказаны теоремы о единственности и существования решения поставленной задачи. При доказательстве единственности решения задачи используется полнота системы собственных функций, соответствующей спектральной задачи, а решение задачи представляется в виде абсолютно и равномерно сходящего ряда.*

Ключевые слова: *обратная задача, оператор Герасимова-Капуто, уравнение дробного порядка, базис Рисса, сопряженная задача.*

ON AN INVERSE PROBLEM OF THE BITSADZE-SAMARSKY TYPE FOR PARABOLIC EQUATION OF FRACTIONAL ORDER

Kadirkulov Baxtiyor Jalilovich, DSc, docent,
kadirkulovbj@gmail.com
Tashkent State University of Oriental Studies
Tashkent, Uzbekistan
Ergashev Okiljon Tuxtasin o'g'li, assistant
okiljonergashev@gmail.com
The Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural

Mechanization Engineers - National Research University

Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we study a nonlocal inverse problem of the Bitsadze-Samarskii type for a degenerate parabolic equation of fractional order with the Gerasimov-Caputo operator. The spectral method is used to solve the problem. Using this method, the problem under consideration is reduced to the study of a spectral boundary value problem for a second-order ordinary differential equation with respect to a spatial variable. The spectral questions of the obtained problem, as well as of the adjoint problem, are investigated, and the differential operator corresponding to the adjoint problem is being discontinuous. Eigenvalues and eigenfunctions of the problems are found, completeness and the Riesz basis property of the obtaining systems are proved. Further, under certain conditions on the given functions, uniqueness and existence theorems for a solution to the posed problem are proved. When proving the uniqueness of the solution to the problem, we use the completeness of the system of eigenfunctions of the corresponding spectral problem, and construct the solution of the problem in the form of an absolutely and uniformly descending series.*

Key words: *inverse problem, Gerasimov-Caputo operator, equation of fractional order, Riesz basis, adjoint problem.*

1. Введение и постановка задачи (Introduction and problem statement). Среди первых имеющихся в литературе работ по нелокальным задачам можно назвать исследование, посвященное изучению нелокальных эллиптических краевых задач, принадлежащее Т. Карлеману [1]. Он рассмотрел задачу с нелокальным условием, заключающуюся в поиске голоморфной функции в ограниченной области, связывающей значения этой функции в разных точках границы. Эта задача была сведена к сингулярному интегральному уравнению с отклонением. Отметим также работы [2] и [3], в которых изучались абстрактные нелокальные эллиптические краевые задачи.

Нелокальная краевая задача нового типа для эллиптического дифференциального уравнения, возникающая в теории плазмы, была сформулирована А.В.Бицадзе и А.А.Самарским [4]. Эта задача была сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. С помощью принципа экстремума для эллиптических уравнений, доказана единственность классического решения.

Далее, результаты по теории уравнений в частных производных и функционально-дифференциальных уравнений позволили исследовать проблему разрешимости для широкого класса нелокальных эллиптических краевых задач [5]. Аналогичные задачи для уравнений смешанного типа изучались в работах [6], [7].

Пусть $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, $T > 0$, ${}_C D_{0t}^{\alpha} = J_{0t}^{1-\alpha} \frac{d}{dt}, 0 < \alpha \le 1$ - интегро-дифференциальный оператор Герасимова-Капуто, а J_{0t}^{ν} - интегральный оператор Римана-Лиувилля, которая определяется по формуле [8]

$$J_{0t}^{\nu}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1}\varphi(\tau)d\tau, \nu>0.$$

В области Ω рассмотрим следующую обратную нелокальную задачу:

Задача *BS*. Требуется найти пару функций $(u(x,t), g(x))$ из класса

$$u,\ {}_C t^{-\beta} D_{0t}^{\alpha} u,\ u_{xx} \in C(\bar{\Omega}),\ \ g(x)\in C[0,1],$$

удовлетворяющую в области Ω уравнению

$$t^{-\beta}\,{}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x) \tag{1}$$

и условиям

$$u(x,0)=\varphi(x), 0\le x\le 1,\ \ u(x,T)=\psi(x), 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t)=0,\ 0\le t\le T\ ,\ \ u(1,t)=u(x_0,t), 0\le t\le T\ . \tag{3}$$

Здесь $\varphi(x),\psi(x)$ - заданные функции, $\beta\ge 0, 0\le x_0<1$.

2. Спектральные свойства задачи *BS* (Spectral Properties of the *BS* Problem). Сначала изучим спектральные свойства задачи *BS*. Для этого рассмотрим однородное уравнение

$$t^{-\beta}\,{}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = u_{xx}(x,t), \tag{4}$$

соответствующее к уравнению (1). Для решения задачи *BS* применим спектральный метод, согласно которому, нетривиальное частное решение задачи ищется в виде $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$. Подставляя последнее в уравнение (4) и пользуясь условиями (3) для нахождения $X(x)$ получим следующую спектральную задачу

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ X(0)=0, X(1)=X(x_0). \tag{5}$$

При $\lambda\le 0$ исследуемая задача имеет только тривиальное решение, а при $\lambda>0$ получим две серии собственных чисел

$$\lambda_{n_1}=\left(\frac{(2n-1)\pi}{1+x_0}\right)^2, \lambda_{n_2}=\left(\frac{2n\pi}{1-x_0}\right)^2, n\in N, \tag{6}$$

которым соответствуют собственные функции вида

$$X_{n_1}(x)=\sin\sqrt{\lambda_{n_1}}\,x, X_{n_2}(x)=\sin\sqrt{\lambda_{n_2}}\,x, n\in N. \tag{7}$$

Отметим, что среди двух серий собственных чисел из (6) имеются совпадающие. Действительно, приравнивая λ_{s1} и λ_{m2} из (6), получим соотношение между x_0, s и m:

$$x_0 = \frac{2s - 2m - 1}{2s + 2m - 1}, s, m \in N, s > m, \qquad (8)$$

при этом, соответствующие значения λ_{s1} и λ_{m2} совпадают, так что система собственных функций (7) не будет полной и возникает проблема о дополнении этой системы с присоединенными функциями.

Впервые задача (5) исследована в работе [9], где показана полнота корневых функций дифференциального оператора, соответствующей к этой задаче. Спектральная задача вида (5) в более общей постановке исследована в работе [10], где найден более общий критерий базисности, позволяющий установить базисность Рисса корневых функций дифференциальных операторов в случае несамосопряженных задач.

Теперь, так как соотношение (8) зависит также от точки x_0, то выясним характер этой точки, тем самым уточным результаты вышеуказанных работ.

Ясно, что, когда x_0 иррациональное число из интервала (0,1), соотношение (8) не имеет место, значит, собственные числа и соответствующие собственные функции задачи (5) различны. Теперь остается выяснить характер рациональных чисел из этого интервала.

Следующий пример показывает, что (8) не имеет место и при некоторых рациональных значениях x_0. Действительно, рассмотрим случай $x_0 = \frac{1}{2}.$ Тогда из (8) следует $2s = 6m + 1$. В силу $m, s \in N$, число $6m + 1$ всегда нечетное, а $2s$ - четное, то есть (8) не имеет место ни при каких $m, s \in N$. Значит, существуют рациональные дроби, при которых все собственные функции различны.

Теперь находим связь между значениями x_0, s и m, при которых справедливо равенство (8), а также даём алгоритм нахождения соответствующих значений $m, s \in N$. Имеет место:

Лемма 1. Пусть $x_0 \in (0,1)$ - рациональное число, такое, что $x_0 = \frac{p}{q}$, где $p < q$, а p и q - взаимно простые нечетные натуральные числа, причем $q - p$ кратное к 4. Тогда существует счетное число значений s и m, такие что для двух серий собственных чисел из (8) имеет место $\lambda_{s1} = \lambda_{m2}$.

Доказательство. Действительно, из условия на x_0, соотношение (8) примет следующий вид

$$s = \frac{m(p+q)}{q-p} + \frac{1}{2}. \tag{9}$$

По условию, $q-p$ - кратное к 4, тогда оно представляется в виде $q-p=4r$, где $r \in N$. Отсюда $q = p+4r$. Тогда (9) принимает вид

$$s = \frac{m(p+2r)}{2r} + \frac{1}{2}. \tag{10}$$

По условию, числа p,q нечетные. Тогда, очевидно, что число $p+2r$ также нечетное, а числа $p+2r$ и $2r$ не имеют общих делителей. Значит, условие $s \in N$ можно обеспечить только за счет значений m и, нетрудно видеть, что это имеет место только и только тогда, когда $m = k \cdot r$, где k -любое нечетное натуральное число. Действительно, при таких значениях m из (10) имеем

$$s = \frac{k(p+2r)}{2} + \frac{1}{2},$$

и так как $k(p+2r)$ -нечетное, отсюда следует, что $s \in N$.

Таким образом, для нахождения значений s и m, при которых (8) имеет место, получили следующие формулы

$$m = k \cdot r, s = \frac{m(p+q)}{q-p} + \frac{1}{2}, \tag{11}$$

где $r = \dfrac{q-p}{4}$, $k = 1,3,5,\ldots$. Лемма доказана.

Учитывая лемму 1 и формулу (8), интервал (0,1) разделим на два множества Q_1 и Q_2, где Q_2 содержит все рациональные x_0, удовлетворяющий условиям леммы 1, а Q_1 - все остальные.

Наряду с задачей (5) рассмотрим задачу, сопряженную к этой задаче

$$-Y''(x) = \lambda Y(x), x \in (0,x_0) \cup (x_0,1), \tag{12}$$

$$Y(0) = Y(1) = 0, Y(x_0+0) = Y(x_0-0), Y'(1) = Y'(x_0+0) - Y'(x_0-0). \tag{13}$$

Отметим, что задача (12)-(13) корректна, то есть она не имеет лишних условий. Эту задачу надо рассмотреть, как две краевые задачи с условиями склеивания вида (13).

Переходим к нахождению собственных функций задач (5) и (12)-(13). Рассмотрим случай $x_0 \in Q_1$. В этом случае получим две серии собственных чисел вида (6), которым соответствуют собственные функции вида (7), причём все эти функции разные и не ортогональные.

Задача (12), (13) при $x_0 \in Q_1$ также имеет собственные числа вида (6). Решая эту задачу, нетрудно видеть, что собственные функции имеют вид

$$Y_{s1}(x) = \begin{cases} \dfrac{4\sin\mu_{s1}x}{1+x_0}, & 0 \le x \le x_0 \\ \dfrac{2\sin\mu_{s1}(x-1)}{(x_0+1)\cos\mu_{s1}}, & x_0 \le x \le 1 \end{cases}, \quad Y_{m2}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_0 \\ \dfrac{2\sin\mu_{m2}(x-1)}{(1-x_0)\cos\mu_{m2}}, & x_0 \le x \le 1 \end{cases}. \quad (14)$$

Лемма 2. Системы функций (7) и (14) являются биортогональными, то есть имеет место

$$(X_{s1}(x), Y_{mj}(x))_{L_2(0,1)} = \begin{cases} 1, s = m, j = 1 \\ 0, s \ne m, j = 1,2 \end{cases}, (X_{s2}(x), Y_{mj}(x))_{L_2(0,1)} = \begin{cases} 1, s = m, j = 2 \\ 0, s \ne m, j = 1,2 \end{cases}.$$

Доказательство леммы 2 проводят непосредственно с помощью вычисления соответствующих интегралов.

Лемма 3. Системы (7) и (14) образуют базис Рисса $L_2(0,1)$.

Отметим, что более подробную информацию о базисах Рисса можно найти в работах [11, 12].

Таким же образом исследуются вопросы базисности собственных функций для значений x_0 из Q_2. Отметим, что в этом случае задачи (5) и (12)-(13) имеют помимо собственных функций, ещё и присоединенные функции, соответствующие тем собственным значениям, порядковые номера которых, определяются по формулам (11).

3. Существование и единственность решения задачи *BS* при $x_0 \in Q_1$ (Existence and uniqueness of a solution to the *BS* problem for $x_0 \in Q_1$).

Переходим к исследованию существования и единственности решения задачи *BS*. Согласно теории, решение $u(x,t)$, $g(x)$ задачи будем искать в виде разложения по специально выбранному базису из системы функций (7)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{n1}(t)\cdot X_{n1}(x)+u_{n2}(t)\cdot X_{n2}(x)\right), \tag{15}$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_{n1}\cdot X_{n1}(x)+g_{n2}\cdot X_{n2}(x)\right), \tag{16}$$

где $u_{ni}(t)$ - неизвестные функции и g_{ni} - неизвестные постоянные.

Подставляя (15) и (16) в уравнение (1), получим совокупность уравнений для нахождения функций $u_{n1}(t),u_{n2}(t)$ и постоянных g_{n1},g_{n2}:

$$t^{-\beta}\,{}_C D_{0t}^{\alpha}u_{ni}(t)+\lambda_{ni}u_{ni}(t)=g_{ni}\,,\ i=1,2,\ n\in N\,. \tag{17}$$

Из представления (15), учитывая условия (2), а также полноту системы (7), получим, что неизвестные функции $u_{n1}(t),u_{n2}(t)$ также удовлетворяют условиям

$$u_{ni}(0)=\varphi_{ni},u_{ni}(T)=\psi_{ni}\,, \tag{18}$$

где φ_{ni},ψ_{ni} - коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд по системе функций (7), которые находятся по формулам

$$\varphi_{ni}=\int_0^1\varphi(x)Y_{ni}(x)dx,\psi_{ni}=\int_0^1\psi(x)Y_{ni}(x)dx, \tag{19}$$

а $Y_{n1}(x),Y_{n2}(x)$ - функции, определенные по формулам (14), $i=1,2$, $n\in N$.

Найдем решение уравнения (17). Как следует из [8], общее решение однородного уравнения, соответствующее (17) имеет вид

$$u_{ni}(t)=C_{ni}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha}),$$

где $E_{\alpha,m,l}(z)$ - функция Килбаса-Сайго [8, 13].

Учитывая, что функция $u_{ni}(t)=\dfrac{g_{ni}}{\lambda_{ni}}$ является частным решением неоднородного уравнения (17), общее решение которого представимо в виде

$$u_{ni}(t)=C_{ni}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})+\frac{g_{ni}}{\lambda_{ni}},\ i=1,2,\ n\in N.$$

Удовлетворяя это решение первому условию из (18), получим

$$u_{ni}(t)=\varphi_{ni}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})+\frac{g_{ni}}{\lambda_{ni}}\left(1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})\right). \tag{20}$$

Теперь определим неизвестные g_{n1},g_{n2}. Для этого равенство (20) удовлетворим второму условию из (18). Тогда для нахождения постоянных g_{n1},g_{n2} получим следующие уравнения

$$\varphi_{ni}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\alpha+\beta})+(1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\alpha+\beta}))\frac{g_{ni}}{\lambda_{ni}}=\psi_{ni}.$$

Отсюда

$$g_{ni}=\frac{\lambda_{ni}\left(\psi_{ni}-\varphi_{ni}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\alpha+\beta})\right)}{1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\alpha+\beta})},\ i=1,2,n\in N. \tag{21}$$

Подставляя (21) в выражение для функций $u_{ni}(t)$ в (20), получим

$$u_{ni}(t)=\frac{1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})}{1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\beta+\alpha})}\psi_{ni}+\frac{E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\beta+\alpha})}{1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\beta+\alpha})}\varphi_{ni}, \tag{22}$$

где $i=1,2,n\in N$.

Таким образом, найден формальный вид решения задачи в виде рядов (21) и (22), где коэффициенты g_{ni} и функции $u_{ni}(t)$ определяются соответственно по формулам (21) и (22).

3.1. Единственность решения задачи *BS*. (Uniqueness of a solution to the *BS* problem). Сначала приводим некоторые свойства функции Килбас-Сайго $E_{\alpha,m,l}(-x)$, которые используем при доказательстве единственности и существования решения задачи *BS*.

Теорема 1 [13]. *Пусть* $\alpha > 0$, $m > 0$ *и* $l > -\frac{1}{\alpha}$. *Тогда функция* $E_{\alpha,m,l}(-x)$ *является вполне монотонной на* $(0,\infty)$ *если и только если выполняются условия* $\alpha \le 1$, $l \ge m - \frac{1}{\alpha}$.

Так как $E_{\alpha,m,l}(0) = 1$, из этой теоремы следует, что

Следствие 1. *Для любой* $x > \varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *, такое что* $1 - E_{\alpha,m,l}(-x) \ge \delta > 0$.

Имеет место:

Теорема 2. Если решение задачи *BS* существует, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, противоположное. Пусть существуют два решения $\{u_1(x,t), g_1(x)\}$ и $\{u_2(x,t), g_2(x)\}$ задачи BS.

Обозначим $\tilde{u}(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ и $\tilde{g}(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Тогда функции $\tilde{u}(x,t)$ и $\tilde{g}(x)$ удовлетворяют уравнению

$$t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha} \tilde{u}(x,t) = \tilde{u}_{xx}(x,t) + \tilde{g}(x) \tag{23}$$

и условиям

$$\tilde{u}(x,0) = 0,\ \ \tilde{u}(x,T) = 0,\ \ 0 \le x \le 1, \tag{24}$$

$$\tilde{u}(0,t) = 0,\ \ \tilde{u}(x_0,t) = \tilde{u}(1,t),\ \ 0 \le t \le 1. \tag{25}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}_{ni}(t) = \int_0^1 \tilde{u}(x,t) Y_{ni}(x) dx, \tag{26}$$

где функция $Y_{ni}(x)$ определяется по формуле (14), $i = 1,2$, $n \in N$.

Применяя оператор ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ к обеим частям равенства (26) и учитывая уравнение (23), а также условия (24) и (25), заключаем, что функция $\tilde{u}_{ni}(t)$ удовлетворяет уравнению и условиям:

$$t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha} \tilde{u}_{ni}(t) + \lambda_{ni} \tilde{u}_{ni}(t) = \tilde{g}_{ni},\ \ \tilde{u}_{ni}(0) = 0,\ \ \tilde{u}_{ni}(T) = 0, \tag{27}$$

где $\tilde{g}_{ni} = (\tilde{g}(x), Y_{ni}(x))_0$, $i = 1,2$, $n \in N$.

Из (17), (18) и (22) получим, что решение уравнения из (27), удовлетворяющее первому краевому условию из (27), имеет вид

$$\tilde{u}_{ni}(t) = \frac{\tilde{g}_{ni}}{\lambda_{ni}}\left(1 - E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni} t^{\beta+\alpha})\right).$$

Отсюда, удовлетворяя второе краевое условие из (27), получим

$$\frac{\tilde{g}_{ni}}{\lambda_{ni}}\left(1 - E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni} t^{\beta+\alpha})\right) = 0.$$

Далее, учитывая следствие 1, получим, что $\tilde{g}_{ni} = 0$. Отсюда следует, что задача (27) имеет только тривиальное решение, т.е. $\tilde{u}_{ni}(t) = 0$, $\tilde{g}_{ni} = 0$.

В результате получим, что для любого фиксированного $t \in [0,1]$ функции $\tilde{u}(x,t), \tilde{g}(x)$ ортогональны к системе (14), которая полна в $L_2(0,1)$. Тогда $\tilde{u}(x,t) = 0$, $\tilde{f}(x) = 0$. Единственность решения задачи доказана.

3.2. Существование решение задачи *BS*. (Existence of a solution to the *BS* problem). Докажем существование решения задачи. Имеет место:

Теорема 3. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(x) \in C^4[0,1],\ \varphi(0) = \varphi''(0) = 0, \varphi(1) = \varphi(x_0), \varphi''(1) = \varphi''(x_0),$$

$$\psi(x) \in C^4[0,1],\ \psi(0) = \psi''(0) = 0, \psi(1) = \psi(x_0), \psi''(1) = \psi''(x_0).$$

Тогда решение задачи BS существует.

Доказательство. Поскольку система (7) образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$, то функции $u(x,t)$ и $g(x)$ можно представить в виде биортогонального ряда (15) и (16), где коэффициенты g_{ni} и функции $u_{ni}(t)$ определяются соответственно по формулам (21) и (22).

При помощи непосредственного вычисления несложно показать, что функции $u(x,t)$, $g(x)$, определенные рядами (15) и (16), удовлетворяют уравнению (1) и условиям

(2), (3). Остаётся доказать правомерность этих действий. Теперь покажем, что $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,0}\left(\overline{\Omega}\right)$. Из (15), дифференцируя два раза $u(x,t)$ по переменной *x* получим

$$u_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\lambda_{n1}\cdot u_{n1}(t)X_{n1}(x)-\lambda_{n2}\cdot u_{n2}(t)X_{n2}(x)\right). \tag{28}$$

Так как $|X_{ni}(x)|\le 1$, $i=1,2$, отсюда следует, что

$$\left|u_{xx}(x,t)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{n1}\left|u_{n1}(t)\right|+\lambda_{n2}\left|u_{n2}(t)\right|\right). \tag{29}$$

Оценим функции $u_{n1}(t)$ и $u_{2n}(t)$. Учитывая свойства функции Килбаса-Сайго (см. теорема 1, следствие), из (22) имеем

$$|u_{ni}(t)|\le\frac{2}{\delta}\left(|\varphi_{ni}|+|\psi_{ni}|\right),\ i=1,2\,. \tag{30}$$

Далее, интегрируя по частям выражения для коэффициентов φ_{ni},ψ_{ni} из (19), с учетом (30) и условий теоремы, из (29) получим

$$\left|u_{xx}(x,t)\right|\le C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{n1}}\left(\left|\varphi_{n1}^{(4)}\right|+\left|\psi_{n1}^{(4)}\right|\right)+\frac{1}{\lambda_{n2}}\left(\left|\varphi_{n2}^{(4)}\right|+\left|\psi_{n2}^{(4)}\right|\right)\right),$$

где $\varphi_{ni}^{(4)}=\int\limits_0^1\varphi^{IV}(x)Y_{ni}(x)dx,\psi_{ni}^{(4)}=\int\limits_0^1\psi^{IV}(x)Y_{ni}(x)dx,i=1,2$, $C>0$.

Таким образом, ряд (28) мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\left(\left|\varphi_{n1}^{(4)}\right|+\left|\psi_{n1}^{(4)}\right|\right)+\frac{1}{n^2}\left(\left|\varphi_{n2}^{(4)}\right|+\left|\psi_{n2}^{(4)}\right|\right)\right),$$

сходимость которого следует из неравенства Коши-Шварца, а также из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_{ni}^{(4)}|^2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\psi_{ni}^{(4)}|^2,\ i=1,2$.

Тогда согласно теореме Вейерштрасса [14], ряд (28) сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{\Omega}$ и его сумма является непрерывной функцией в этой области. Таким же образом доказывается, что $t^{-\beta}{}_CD_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, а $f(x)\in C[0,1]$ вытекает из того, что $t^{-\beta}{}_CD_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, $u_{xx}\in C(\overline{\Omega})$ и из уравнения (1). Теорема доказана.

Литература

1. Carleman, T.. Sur la theorie des equations integrales et ses applications. [Text] / T. Carleman. // Verhandlungen des Internat. // Math. Kongr., Zurich. 1932. №1. P.138–151.
2. Vyshik, M.I. On strongly elliptic system of differential equations. [Text] / M.I. Vyshik. // Mat.sb. 1951. № 29. P.615–676.
3. Browder, F. Non-local elliptic boundary value problems. [Text] / F. Browder. // Amer. J. Math.. 1964. №86. P.735–750.
4. Бицадзе, А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. [Текст] /А.В. Бицадзе, А.А. Самарский. //Докл. АН СССР. / -1969. -Т. 185. № 4. -С. 739–740.
5. Скубачевский, А.Л. Неклассические краевые задачи [Текст] /А.Л. Скубачевский // Современная Математика Фундаментальные Направления / -2007. -Т. 26. -С. 3–132.
6. H.Al.Shamsi, The Bitsadze–Samarskii type problem for mixed type equation in the domain with the deviation from the characteristics. [Text] /H.Al.Shamsi, B.J.Kadirkulov, S.Kerbal. // Lobachevskii journal of mathematics. 2020. Vol. 41. P.1021–1030.
7. Khubiev, K.U.. The Bitsadze–Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation. [Text] / K.U. Khubiev. // Journal of Samara State Technical University. Ser. physical and mathematical sciences. 2019. Vol.23. No.4. P.789-796.
8. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations. [Text] / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo // Elsevier. – Amsterdam: 2006. -523 p.
9. Ерошенков, Е.П. О полноте систем корневых функций двух задач Бицадзе-Самарского. [Текст] /Е.П.Ерошенков, Б.К.Кокебаев. // В кн.: Тезисы докладов VIII респ. науч. конф. по матем. и мех., часть 1/ Алма-ата: 1984. -С. 131.
10. Ильин, В.А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка[Текст] / Ильин В.А // Дифференц. Уравнения. 1986, том 22, № 12, С. 2059–2071.
11. Бари, К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. [Текст] / Бари К. //Уч. зап. МГУ / -Москва. -Т. 148. Вып. 4. -1951. -С. 69-107.
12. Будаев, В.Д. Ортогональные и биортогональные базисы. [Текст] / Будаев В.Д. //Известия РГПУ им. А.И. Герцена. -2005. -Т. 5, № 13. -С. 7-38.
13. Boudabsa, L. Some Properties of the Kilbas-Saigo Function. [Text] / L. Boudabsa, T. Simon. // Mathematics. 2021. 9 (217). P.1-24.
14. Ильин, В.А. Основы математического анализа. Часть 2: учебник [Текст] /В.А. Ильин, Э.Г. Позняк // – Москва: Наука, 1998. -448 с.

УДК 517.968.22

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_103

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Каракеев Таалайбек Тултемирович, д.ф.-м.н., профессор,
ttkarakeev@gmail.com
Эсенаманова Гулжан Кубановна, ст. преподаватель,
gggg gggg 74@inbox.ru
Кыргызский Национальный Университет им. Ж.Баласагына
Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация. *В работе исследованы вопросы регуляризации нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций. Обоснован метод регуляризации лаврентьевского типа, доказана сходимость регуляризованного решения к точному решению по равномерной метрике и единственность решения уравнения в пространстве непрерывных функций.*

Ключевые слова*: регуляризация, уравнение Вольтерра, равномерная сходимость, малый параметр.*

ЭКИ КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ВОЛЬТЕРРАНЫН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН РЕГУЛЯРДОО

Каракеев Таалайбек Тултемирович, ф.-м.и.д., профессор,
ttkarakeev@gmail.com
Эсенаманова Гулжан Кубановна, ага окутуучу,
gggg gggg 74@inbox.ru
Ж.Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети
Бишкек, Кыргыз Республикасы

Аннотация. *Макалада эки көз карандысыз өзгөрүлмөлүү үчүнчү түрдөгү Вольтерранын сызыктуу эмес интегралдык теңдемелерин үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде регулярдоо маселеси изилденет. Лаврентьевдик типтеги метод негизделген, регулярдалган чыгарылыштын так чыгарылышка бир калыпта жыйналуусу жана теңдеменин чыгарылышынын үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде жалгыздыгы далилденген.*

Ачкыч сөздөр*: регулярдоо, Вольтерранын теңдемелери, бир калыпта жыйналуу, кичи параметр.*

REGULARIZATION OF NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS THE THIRD KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

Karakeev Taalaibek Tultemurovich, Dr Sc, professor,
ttkarakeev@gmail.com

Esenamanova Guljan Кubanovna, teacher,
gggg gggg 74@inbox.ru
Kyrgyz National University J. Balasagyn
Bishkek, Kyrgyz Republic

Abstract. *In this work, questions of regularization of nonlinear two-dimensional Volterra integral equations of the third kind in the space of continuous functions are studied. The method of regularization of the Lavrentiev type is substantiated, the convergence of the regularized solution to the exact solution with respect to the uniform metric and the uniqueness of the solution of the equation in the space of continuous functions are proved.*

Key words: *regularization, Volterra equation, uniform convergence, small parameter.*

В работах [1-3, 10] исследованы вопросы регуляризируемости интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. В [1,5-8] одним из существенных условий для построения регуляризированных уравнений, которые обладают свойством вольтерровости и относятся к методам лаврентьевского типа [9, С.49] является свойство монотонности известной функции $p(x)$ при искомой функции вне интеграла. Целью данного исследования является изучение возможности распространение метода регуляризации лаврентьевского типа на случай интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с двумя независимыми переменными и оператором умножения на непрерывную функцию $p(x,y)$, которая является неубывающей либо невозрастающей по x функцией при всех y из заданного отрезка.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x,y)u(x,y)+\int_0^x K(x,y,s)u(s,y)ds+\int_0^x\int_0^y Q_0(x,y,s,\tau,u(s,\tau))d\tau ds=g(x,y), \quad (1)$$

где известные функции $p(x,y)$, $K(x,y,s)$, $Q_0(x,y,s,\tau,u)$, $g(x,y)$ подчиняются условиям:

$K(x,y,s)\in C(D_0), K(x,y,x)\geq 0, D_0=\{(x,y,s)/0\leq s\leq x\leq b, 0\leq y\leq c\}$;

$G(x,y)\geq d_1>0, G(x,y)=C_0p(x,y)+K(x,y,x),\ 0<d_1, C_0=const$;

$Q_0(x,y,s,\tau,u)\in C(D_1\times R), D_1=\{(x,y,s,\tau)/\ 0\leq s\leq x\leq b,\ \ 0\leq\tau\leq y\leq c\}$,

$Q_0(x,y,x,\tau,u)=0, g(x,y),\ p(x,y)\in C(D), D=[0,b]\times[0,c]$.

Пусть I - тождественный оператор, J - оператор Волтерра: $Jv=\int_0^x v(s,y)ds$. Действуя оператором $I+C_0J$ на уравнение (1) получим уравнение вида

$$p(x,y)u(x,y)+\int_0^x G(s,y)u(s,y)ds= \\ =\int_0^x L(x,y,s)u(s,y)ds+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau,u(s,\tau))d\tau ds+f(x,y), \quad (2)$$

где

$L(x,y,s) = K(s,y,s) - K(x,y,s) - C_0 \int_s^x K(\nu,y,s)d\nu,$

$Q\big(x,y,s,\tau,u(s,\tau)\big) = -Q_0(x,y,s,\tau) - C_0 \int_s^x Q_0\big(\nu,y,s,\tau,u(s,\tau)\big)d\nu,$

$f(x,y) = g(x,y) + C_0 \int_0^x g(s,y)ds.$

Рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$\begin{gathered}\big(\varepsilon + p(x,y)\big)u_\varepsilon(x,y) + \int_0^x G(s,y)u_\varepsilon(s,y)ds = \int_0^x L(x,y,s)u_\varepsilon(s,y)ds + \\ + \int_0^x\int_0^y Q\big(x,y,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)d\tau ds + \varepsilon u(0,y) + f(x,y).\end{gathered} \tag{3}$$

Воспользуемся резольвентой

$$-\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right)G(s,y)$$

ядра $\big(-G(s,y)/(\varepsilon + p(x,y))\big)$ и, уравнение (3) приведем к следующему эквивалентному виду

$$\begin{gathered}u_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)}\int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)}\left\{\int_0^s L(s,y,\nu)\times\right. \\ u_\varepsilon(\nu,y)d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu)u_\varepsilon(\nu,y)d\nu + \int_0^s\int_0^y Q\big(s,y,\nu,\tau,u_\varepsilon(\nu,\tau)\big)d\tau d\nu - \\ \left. -\int_0^x\int_0^y Q\big(x,y,\nu,\tau,u_\varepsilon(\nu,\tau)\big)d\tau d\nu + f(s,y) - f(x,y)\right\}ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x,y)}\times \\ \exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right)\left\{\int_0^x L(x,y,s)u_\varepsilon(s,y)ds + \int_0^x\int_0^y Q\big(x,y,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)d\tau ds + f(x,y)\right\}.\end{gathered} \tag{4}$$

Лемма 1. Пусть для всех $0 \le s \le x \le b,\ 0 \le \tau \le y \le c$ функция $v(x,y)$ неотрицательна и удовлетворяет неравенству

$$v(x,y) \le c_1 + c_2 \int_0^x v(s,y)ds + c_3 \int_0^x \int_0^y v(s,\tau)d\tau ds,$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные, $c_1 > 0, c_2 \ge 0, c_3 \ge 0.$ Тогда

$$v(x,y) \le c_1 \exp\big(x(c_2 + c_3 y)\big).$$

Пусть выполняются следующие условия

д) $g(0,y) = p(0,y) = 0,\ p(x,y) > 0,\ \forall x \in (0,b], \forall y \in [0,c],\ p(x,y)$ – неубывающая по x функция в области D;

ж) $M_1 = C_0 L_K + L_{K1},\ L_K = Lip(K(x,y,s)|x),\ L_{K1} = Lip(K_x(x,y,s)|x)$,

$$|Q_0(x,s,u) - Q_0(x,s,\omega) - Q_0(y,s,u) + Q_0(y,s,\omega)| \le L_Q(x-y)|u-\omega|.$$

Для оператора $(H_\varepsilon u)(x,y)$, заданного в виде

$$\begin{aligned}(H_\varepsilon u)(x,y) \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p(x,y)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu\right)\left[u(0,y) - u(x,y)\right] - \\ - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)}\left[u(s,y) - u(x,y)\right] ds,\end{aligned} \tag{5}$$

имеет место [1]

Лемма 2. При выполнении условий *а) - д)* для $u(x,y) \in C(D)$ имеет место оценка

$$\|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)} \le 4(d_1 e)^{-1} \varepsilon^{1-\beta} \|u(x,y)\|_{C(D)} + \omega_u(\varepsilon^\beta),$$

где $\|\cdot\|_{C(D)} = \max_D |\cdot|$, $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup_{\substack{|x-s| \le \varepsilon^\beta \\ y \in [0,c]}} |u(x,y) - u(s,y)|$, $\quad 0 < \beta < 1$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия *а*) – *ж*), и уравнение (1) имеет решение $u(x,y) \in C(D)$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (2). При этом имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)\|_{C(D)} \le M_2 \left(4(d_1 e)^{-1} \varepsilon^{1-\beta} \|u(x,y)\|_{C(D)} + \omega_u(\varepsilon^\beta)\right),$$

$M_2 = \exp\left(b M_0 (1 + c)\right), M_0 = \left(M_1 + L_Q\right) d_1^{-1} (2 + e^{-1})$.

Доказательство. Положим $\eta_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)$, где $u(x,y)$ – решение уравнения (1). Тогда из (5) получим следующее уравнение

$$\begin{aligned}\eta_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)} \left\{ \int_0^s L(s,y,\nu) \times \right. \\ \times \eta_\varepsilon(\nu,y) d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu) \eta_\varepsilon(\nu,y) d\nu + \int_0^s \int_0^y Q\left(s,y,\nu,\tau,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\right) d\tau d\nu - \\ \left. - \int_0^x \int_0^y Q\left(x,y,\nu,\tau,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\right) d\tau d\nu + \varepsilon\left(u(s,y) - u(x,y)\right) \right\} ds + \\ + \frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y) d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right) \left\{ \int_0^x L(x,y,s) \eta_\varepsilon(s,y) ds + \right. \\ \left. + \int_0^x \int_0^y Q\left(x,y,s,\tau,\eta_\varepsilon(s,\tau)\right) d\tau ds + \varepsilon\left[u(0,y) - u(x,y)\right] \right\}.\end{aligned} \tag{6}$$

Так как $p(x,y)$ неубывающая по x в области D, то при $\nu \le x$

$$\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)} \le \frac{1}{\varepsilon+p(\nu,y)}, (x,y)\in D\,.$$

Тогда используя условие $G(x,y)\ge d_1, (x,y)\in D,$ для функции

$$B_\varepsilon(x,y)=\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}(x-s)ds$$

получим

$$|B_\varepsilon(x,y)| \le d_1^{-1}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\, ds =$$

$$\left|W_\varepsilon(x,y,s)=\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right| = d_1^{-1}\int_0^{W_\varepsilon(x,y,0)} e^{-\rho}\rho d\rho < d_1^{-1}\int_0^\infty e^{-\rho}\rho d\rho = d_1^{-1}.$$

Так как

$$|L(x,y,\nu)-\ L(s,y,\nu)| \le M_2(x-s),$$

то в силу ж) имеем

$$\left|-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\left\{\int_0^s L(s,y,\nu)\times\right.\right.$$

$$\times\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu)\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu + \int_0^s\int_0^y Q\big(s,y,\nu,\tau,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\big)\,d\tau d\nu -$$

$$\left.\left.\int_0^x\int_0^y Q\big(x,y,\nu,\tau,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\big)\,d\tau d\nu\right\} ds\right| \le 2\big(M_2+L_Q\big)|B_\varepsilon(x,y)|\left\{\int_0^x |\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu + \right.$$

$$\left.+\int_0^x\int_0^y |\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\};$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)\left\{\int_0^x L(x,y,s)\,\eta_\varepsilon(s,y)ds + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^x\int_0^y Q\big(x,y,s,\tau,\eta_\varepsilon(s,\tau)\big)d\tau ds\right\}\right| \le \big(M_2+L_Q\big)\frac{d_1^{-1}}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x G(\nu,y)d\nu\times$$

$$\times exp\left(-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x G(\nu,y)d\nu\right)\left\{\int_0^x |\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu\ + \int_0^x\int_0^y |\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\} \le$$

$$\leq \left(M_2+L_Q\right)d_1^{-1}e^{-1}\left\{\int\limits_0^x |\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu + \int\limits_{0,}^{x}\int\limits_0^{y} |\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\},$$

$$\sup_{\rho\geq 0}[\rho e^{-\rho}] \leq e^{-1}, \qquad \rho=\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}exp\left(-\int\limits_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right).$$

В силу полученных оценок из (6) имеем

$$|\eta_\varepsilon(x,y)| \leq M_0\left\{\int\limits_0^x |\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu + \int\limits_0^x\int\limits_0^y |\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\} + \|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)},$$

где $M_0=\left(M_2+L_Q\right)d_1^{-1}(2+e^{-1})$.

Отсюда, используя Лемму 2 получим оценку

$$|\eta_\varepsilon(x,y)| \leq \exp\left(xM_0(1+y)\right)\|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)}.$$

Следовательно, переходя к норме в $C(D)$ и используя оценку Леммы 2, при $\varepsilon\to 0$, получим, что регуляризованное решение $u_\varepsilon(x,y)\to u(x,y)$ равномерно. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 решение уравнения (1) единственно в $\mathrm{C}(D)$.

Предположим, что

е) $p(b,y)=0,\ p(x,y)>0,\ \forall x\in[0,b), \forall y\in[0,c],\ p(x,y)$ – невозрастающая по x функция в области D.

Лемма 3. При выполнении условий *а)-г), е)* для функций $u(x,\tau)\in C(D)$, имеет место оценка

$$\|(H_\varepsilon v)(x,y)\|_C \leq d_2(\varepsilon \mathrm{p}^{-1}(0)+(d_1\theta_2 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta})\|u(x,y)\|_{C(D_0)}+d_3\omega_v(\varepsilon^\beta),$$

где $d_2=4+2M_0\ \ d_3=1+\theta_2^{-1},\ \theta_2=1-\theta_1, 0<\theta_1<1,$

$\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)=\sup\limits_{|x-t|\leq\varepsilon^\beta}|u(x,y)-u(t,y)|, \quad 1/2\leq\beta<1.$

Теорема 2. Пусть выполняются условия *а)-г), ж-е)* и уравнение (1) имеет решение $u(x,\tau)\in C(D)$. Тогда решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1) при $\varepsilon\to 0$ и имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,y)-u(x,y)\|_{C(D)} \leq$$

$$\leq C_2\left(d_2\left(\mathrm{p}^{-1}(0,y)\varepsilon+(d_1\theta_2 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\right)\|u(x,y)\|_{C(D_0)}+d_3\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right),$$

где $d_2,\ d_3,\ \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)$ - определяются также как в лемме 1, $0<C_2=const$.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 2 решение уравнения (1) единственно в $C(D)$.

Литература

1. Асанов А. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода[Текст] / А.Асанов, Г.Ободоева //Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям – Фрунзе: Илим, 1994. – Вып.25. – С.65–74.

2. Бухгейм А.Л. Уравнение Вольтерра и обратные задачи [Текст] / А.Л.Бухгейм. Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.

3. Булатов М.В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – Т. 42, № 3. – С. 330–335.

4. Янно Я. Регуляризация одного уравнения Вольтерра I рода равносильного уравнению III рода[Текст] / Я.Янно //Учен. зап. Тартуск. гос. ун–та, 1987. – Вып.762. – С.16–30.

5. Глушак А.В. Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера-Дарбу[Текст] / А.В.Глушак, Т.Т.Каракеев // ЖВМиМФ. – 2006. – Т.46.-№ 5. – С. 848-857.

6. Каракеев Т.Т. Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Т.Т.Каракеев //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. -Бишкек: Илим, 2003. – Вып.32. – С.179-183.

7. Омуров Т.Д. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач[Текст] / Т.Д.Омуров, Т.Т.Каракеев. Бишкек: Илим, 2006. – 164 с.

8. Karakeev T.T. Regularization of Systems of Volterra Linear Integral Equations of the Third Kind [Текст] / T.T.Karakeev // Lobachevskii J. of Mathematics, 2020, 41 (9), P.1816–1821.

9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н.Тихонов, В.Я. Арсенин. М.: Наука, 1986.– 287 с.

10. J.Cerha. A note on Volterra integral equations with degenerate kernel [Text] / J.Cerha// Comment, math. Univ. carol., 1972, 13, № 4, P.659-672

УДК 517.97

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_110

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Керимбеков Акылбек, д.ф.-м.н., профессор,

akl7@rambler.ru

Кыргызско- Российский Славянский университет им. Б. Ельцина

Эрмекбаева Айжан Турдубековна, ст. преподаватель,

aijana.ermekbaeva@mail.ru

Ошский государственный университет,

Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Исследованы некоторые особенности построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при подвижном точечном управлении тепловым процессом в случае, когда краевая задача управляемого процесса в уравнении содержит интегральный оператор Фредгольма. Исследована сходимость приближенного решения и найдены достаточные условия сходимости. При исследовании были использованы методы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, классического вариационного исчисления, уравнений математической физики, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.*

Ключевые слова: *оптимальное управление, оптимальный процесс, приближенное решение, сходимость, функционал.*

ФРЕДГОЛЬМ ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕСИ МЕНЕН МҮНӨЗДӨЛГӨН ЖЫЛУЛУУК ПРОЦЕССТЕРИН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМИЗАЦИЯЛОО МАСЕЛЕСИНИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Керимбеков Акылбек, ф.-м.и.д., профессор,

akl7@rambler.ru

Б. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян университети

Эрмекбаева Айжан Турдубековна, улук окутуучу,

aijana.ermekbaeva@mail.ru

Ош мамлекеттик университети,

Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Бул макалада теңдемеде Фредгольмдун интегралдык оператору башкаруу процессинде камтылганда, жылуулукпроцессин кыймылдуу чекиттик башкаруу учурундагы сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин жакындаштырып чыгаруунун айрым өзгөчөлүктөрү изилденген. Жакындаштырылган чыгарылыштын окшоштугу изилденген жана алардын окшоштугунун жетиштүү* *шарттары табылган. Изилдөөдө бөлүштүрүлгөн параметрлер системасында оптималдуу башкаруу теориясынын методдору , вариациялык эсептөө, математикалык физиканын теңдемелери, функционалдык анализ жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер теориясы колдонулду.*

Ключевые слова: *оптималдык башкаруу, оптималдуу процесс, жакындаштырылган чечим, жыйналуучулук, функционал.*

APPROXIMATE SOLUTION OF THE PROBLEM OF NONLINEAR OPTIMIZATION OF THE THERMAL PROCESSES DESCRIBED BY A FREDHOLM INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kerimbekov Akylbek, Dr Sc, professor,
akl7@rambler.ru
Kyrgyz Russian Slavic University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin Ermekbaeva
Ayzhan Turdubekovna, teacher,
aijana.ermekbaeva@mail.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The article investigates some features of the construction of the approximate solution of the problem of nonlinear optimization for the mobile point control of the thermal process in the case, when the boundary value problem of a controlled process in the equation contains the integral Fredholm operator. The convergence of the approximate solution is studied and sufficient conditions for their convergence are found. The methods of the optimal control theory of distributed parameters systems, methods of classical variational calculus, methods of solving of equations of mathematical physics, methods functional analysis and the theory of nonlinear integral equations.*

Key words: *optimal control, optimal process, approximate solution, convergence, functional.*

Введение

При исследовании задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных обнаруживается, что наличия интегрального оператора того или иного вида приводит к изменению структуры решения задачи нелинейной оптимизации [1]. В работах [2, 3] исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации при подвижном точечном управлении тепловым процессом в случае, когда краевая задача управляемого процесса в уравнении содержит интегральный оператор Фредгольма. Здесь мы приведем некоторые данные, которые могут быть использованы при доказательстве сходимости приближенных решений. Требуется минимизировать функционал

$$J\left[u(t)\right]=\int_0^1\left[V(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u(t)\right]dt,\quad \beta>0$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx} + \lambda \int_0^T K(t,\tau) V(\tau, x)\, d\tau + \delta\left(x - x_0(t)\right) f[t, u(t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T,$$

$$V(0,x) = \psi(x), \qquad\qquad 0 < x < 1$$

$$V_x(t,0) = 0, \qquad V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, \quad 0 < t \le T.$$

где заданные функции $\xi(x) \in H(0,1)$, $\psi(x) \in H\ (0,$ и ядро $K(t,\tau)$, определеная в области $D = \{0 \le t \le T, 0 \le \tau \le T\}$, все являются элементами гильбертова пространства $H(Y)$. Здесь $H(Y)$ – пространство Гильберта квадратично−суммируемых функций, определенных на множестве Y, $f[t,u(t)] \in H(0,T)$ – заданные функции, причем функция $f[t,u(t)]$ –нелинейна по функциональной переменной $u(t) \in H(0,T)$ и является монотонной функцией, т.е.

$$\frac{\partial f[t,u(t)]}{\partial u(t)} \ne 0, \ \forall t \in [0,T];$$

$\delta(x - x_0(t))$ – сингулярная обобщенная функция Дирака, $0 < x_0(t) < 1$; T – фиксированный момент времени, α − положительная постоянная, λ − параметр.

1. Приближение оптимального управления и их сходимость.

Алгоритм построения приближений оптимального управления определяются по формулам

$$u_n(t) = \varphi\left[t, q_n(t), \beta\right], \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $q_n(t)$ находится методом последовательных приближений, как решение нелинейного интегрального уравнения, и в пределе совпадает с точным решением, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(t) = q^0(t)$, причем удовлетворяет оценке

$$\left\| q^0(t) - q_n(t) \right\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \left\| G\left[h(t)\right] \right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \ n = 1, 2, 3, \ldots, \ 0 < \gamma < 1.$$

Лемма 1. Приближения оптимального управления сходится к оптимальному управлению по норме гильбертово пространства $H(0,T)$.

$$\left\|u^0(t)-u_n(t)\right\|_{H(0,T)}=\left\|\varphi\left[t,q^0(t),\beta\right]-\varphi\left[t,q_n(t),\beta\right]\right\|_{H(0,T)}\le\varphi_0(\beta)\left\|q^0(t)-q_n(t)\right\|_{H(0,T)}\le$$

$$\le\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G\left[h(t)\right]\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\ ,$$

так как функция $\varphi\left[t,q^0(t),\beta\right]$ является элементом гильбертово пространства $H(0,T)$.

2. Приближения оптимального процесса и их сходимость.

Различают следующие виды приближений оптимального процесса:

1) $m-$е приближение оптимального процесса по “резольвенте":

$$V_m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u^0(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x),$$

где $R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),$

$$\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)=\begin{cases}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}ds,0\le\tau\le t,\\ \lambda\int_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds,t\le\tau\le T.\end{cases}$$

Лемма 2. Приближения оптимального процесса по резольвенте сходится к оптимальному процессу по норме гильбертово пространства $H(0,T)$.

$$\left\|V^0(t,x)-V_m^0(t,x)\right\|_{H(Q)}\le C_1\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0.$$

2) $m,k-$е приближение оптимального процесса, построенное с учетом приближения оптимального управления

$$V_m^k(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u_k(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x).$$

Лемма 3. $m,k-$е приближение оптимального процесса сходится по норме $H(Q)$.

$$\left\|V_m^0(t,x)-V_m^k(t,x)\right\|_{H(Q)}^2\le C_2^2f_0^2\varphi_0^2(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[h(t)\right]\right\|_{H(0,T)}^2\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

3) $m,k,r-$е конечномерное приближение оптимального процесса

$$V_m^{k,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u_k(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x).$$

Лемма 4. Конечномерное приближение оптимального процесса сходится к m,k – му приближению оптимального процесса по норме гильбертово пространства $H(Q)$.

$$\left\|V_m^k(t,x)-V_m^{k,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}^2=\frac{C_3}{\pi^2}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}\right]=\frac{C_3}{\pi^2}\frac{r+1}{r^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0\,.$$

Лемма 5. Конечномерные приближения сходится к оптимальному процессу по норме гильбертово пространства $H(Q)$.

$$\left\|V^0(t,x)-V_m^{k,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\left\|V^0(t,x)-V_m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|V_m(t,x)-V_m^k(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$

$$+\left\|V_m^k(t,x)-V_m^{k,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0.$$

3. Приближения минимального значения функционала и их сходимость.

Для минимального значения функционала будем различать следующие виды его приближений:

1) $m-$е приближение по “резольвенте” минимального значения функционала

$$J_m\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[V_m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u^0(t)\right]dt,\ \ \beta>0,$$

Лемма 6. $m-$е приближение функционала по резольвенте сходится к минимальному значению функционала.

$$\left|J(u^0)-J_m(u^0)\right|\le\left\|V^0(T,x)+V_m^0(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}\left\|V^0(T,x)-V_m^0(T,x)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[m\to\infty]{}0,$$

2) $m,k-$е приближение минимального значения функционала

$$J_m\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[V_m^k(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u_k(t)\right]dt,\ \ \beta>0,$$

Лемма 7. $m,k-$е приближение минимального значения функционала сходится к $m-$му приближению.

$$\left|J_m(u^0)-J_m(u_k)\right|\le\left\|V_m^0(T,x)+V_m^k(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}C_2f_0\varphi_0(\beta)\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}+$$

$$+\beta\left\|p(t,u^0(t))+p(t,u_k(t)\right\|\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{\forall m}0,$$

3) $m,k,r-$ е приближение минимального значения функционала

$$J_m^r\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[V_m^{k,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u_k(t)\right]dt,\ \ \beta>0.$$

Лемма 8. m,k,r – е приближение минимального значения функционала сходится к m,k – му приближению.

$$\left|J_m(u_k)-J_m^r(u_k)\right|\le\left\|V_m^k(T,x)+V_m^{k,r}(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}\overline{C_3}\,\frac{1}{\pi^2}\frac{r+1}{r^2}\xrightarrow[r\to\infty]{\forall m,k}0.$$

Лемма 9. Конечномерные приближения сходятся к минимальному значению функционала.

$$\left|J(u^0)-J_m^r\left(u_k\right)\right|\le\left|J(u^0)-J_m(u^0)\right|+\left|J_m(u^0)-J_m(u_k)\right|+\left|J_m(u_k)-J_m^r(u_k)\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0.$$

Вывод.

Как следует из полученных результатов наличие интегрального оператора Фредгольма в краевой задаче управляемого процесса существенно влияет на построение приближений как оптимального процесса, так и минимального значения функционала. Отметим, что это обстоятельство влияет также на скорости сходимости приближений.

Литература

1. Kerimbekov, A. On the solvability of the problem of the boundary control of thermal processes, described by the Fredholm integro-differential equation [Текст] / / A. Kerimbekov // Abstracts of International Congress of Mathematicians. South Korea, Seoul, 2014. – P.570.

2. Эрмекбаева, А.Т. Условия оптимальности в задаче подвижного точечного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями[Текст] / / А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева // Журнал «Вестник КРСУ». − Том 16, № 5. – Бишкек, 2016. − С. 45−50.

3. Эрмекбаева А.Т. Подвижное оптимальное точечное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями[Текст] / / А.Т. Эрмекбаева // Журнал «Вестник КРСУ». − Том 17, № 1. – Бишкек, 2017. − С. 71-75.

УДК 517.956

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_116

КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кошанов Бакытбек , докт. ф.-м. наук, профессор,

koshanov@list.ru

Институт математики и математического моделирования

Алматы, Казахстан

Сабиржанов Музаффар, PhD докторант

smskg@bk.ru

Ошский Государственный Университет

Ош, Кыргызстан

Аннотация. В настоящей статье исследуется вопрос единственности решения регулярной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения $\mathrm{l}(\cdot) - A$ с оператором Трикоми A. Порядок дифференциального выражения $\mathrm{l}(\cdot)$ считается произвольным натуральным числом n. Для дифференциального выражения $\mathrm{l}(\cdot)$ задаются регулярные краевые условия по временной переменной t. Оператор A является порожденной уравнением Трикоми $Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$. Граничные условия для оператора Трикоми задаются условием Дирихле на эллиптической части и дробными производными следами решения вдоль характеристик. Указывается, что данный оператор является самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)$. Самосопряженность оператора A гарантирует существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций, если Ω -- область, ограниченной кривой Ляпунова и характеристиками волнового уравнения.

Ключевые слова: уравнение Трикоми, регулярные краевые условия по времени, дробные производные Римана-Лиувилля, единственность решения, собственные функций, полные ортонормированные системы.

CRITERIA FOR THE UNIQUENESS OF A SOLUTION NONLOCAL TO A TIME PROBLEM FOR SOME DIFFERENTIAL-OPERATORIAL EQUATIONS

Koshanov Bakytbek, Dr. ph.-m. sciences, professor,

koshanov@list.ru

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling

Almaty, Kazakhstan

Sabirzhanov Muzaffar, PhD student

smskg@bk.ru

Osh State University

Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *In this article, we study the question of the uniqueness of the solution of a time-regular problem for a differential-operatorial equation* $l(\cdot) - A$ *with the Tricomi operator* A*. The order of the differential expression is considered to be an arbitrary natural number* n*. The differential expression* $l(\cdot)$ *is given regular boundary conditions with respect to the time variable* t *. The operator* A *is generated by the Tricomi equation* $Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$*. The boundary conditions for the Tricomi operator are given by the Dirichlet condition on the elliptic part and by the fractional derivatives of the traces of the solution along the characteristics. Specifies that the given operator is a self-adjoint operator in* $L_2(\Omega)$*. The self-adjointness of the operator* A *guarantees the existence of a complete orthonormal system of eigenfunctions* $L_2(\Omega)$ *if is* Ω *a domain bounded by the Lyapunov curve and the characteristics of the wave equation*

Key words: *Tricomi equation, regular boundary conditions by time, Riemann-Liouville's fractional derivatives, uniqueness of solution, Eigen functions, complete orthonormal systems.*

1. В функциональном пространстве $L_2(0,T)$ рассмотрим оператор B, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathrm{l(w)} \equiv \frac{\mathrm{d^n w}}{\mathrm{dt^n}} + \mathrm{p_1(t)}\frac{\mathrm{d^{n-1}w}}{\mathrm{dt^{n-1}}} + \cdots + \mathrm{p_n(t)w(t)},\ 0 < t < T \quad (1)$$

с регулярными краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_{kj}w^{(k)}(0) + \beta_{kj}w^{(k)}(T)\right] = 0\,,\ \ j = 1,2,\dots,n \quad (2)$$

где $p_j(t) \epsilon\, C^{(n-j)}[0,T],\ \ j = 1,2,\dots,n.$

Требование I. Предположим, что область определения оператора B задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями [1]. Иначе говоря, в случае нечетного $\mathrm{n} = 2\mathrm{p} - 1$ следующие два определителя θ_0, θ_1 отличны от нуля; в случае четного $\mathrm{n} = 2\mathrm{p}$ следующие два определителя θ_{-1}, θ_1 отличны от нуля.

Сопряженный оператор B^* задается дифференциальным выражением

$$B^*R(t) = l^+(R), \qquad 0 < t < T$$

и областью определения

$$D(B^*) = \{R \,\epsilon\, W_2^n[0,T] : V_1(R) = 0, \dots, V_n(R) = 0\}.$$

В работе [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. *Пусть область определения оператора* B *задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда область определения оператора сопряженного* B^* *задается также регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями.*

Нам потребуется также следующее утверждение [3].

Теорема 2 [3]. *Пусть оператор B порожден регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора B является полной системой в пространстве* $L_2(0,T)$.

Применяя теорему 1 и теорему 2 к сопряженному оператору B^*, можем сформулировать утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены требование I. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора B^* полна в пространстве* $L_2(0,T)$.

2. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ кривой Ляпунова σ, оканчивающейся в окрестности точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$ малыми дугами "нормальной кривой" σ_0, а при $y < 0$ – характеристиками OC: $x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 0$, BC: $x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 1$ уравнения

$$Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = f(x,y) \tag{3}$$

Задача T. Найти в Ω решение уравнения (3), удовлетворяющие условию

$$u(x,y;t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0: (x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{4}{9}y^3 = \tfrac{1}{4}, \tag{4}$$

$$x^{5/6}D_{0+}^{1/6}(u(\chi_0(x))x^{-2/3}) + (1-x)^{5/6}D_{1-}^{1/6}(u(\chi_1(x))(1-x)^{-2/3}) = 0, \tag{5}$$

где

$$u(\chi_0(x)) = u\left(x, -\left[\frac{3x}{2}\right]^{2/3}\right), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$
$$u(\chi_1(x)) = u\left(x, -\left[\frac{3(1-x)}{2}\right]^{2/3}\right), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1.$$

Здесь граничные условия задаются с помощью дробных производных Римана-Лиувилля [2]

$$D_{0+}^{1/6}g(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1/6}}dt,$$
$$D_{1-}^{1/6}g(x) = -\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{\frac{1}{6}}}dt.$$

Оператор, соответствующий краевой задаче T обозначим через A. Собственные значения оператора A будем нумеровать парой целочисленных индексов η_m. Собственные функции оператора A обозначим через $v_m(x,y)$ соответствующих собственным значением η_m.

В работе [4] доказано следующее утверждение.

Теорема 4 [4]. Оператор A является самосопряженным в пространстве $L_2(\Omega)$.

Как следствие данной теоремы 4 заключаем, что собственные функций $\{v_m(x,y), m = 1,2,\dots,\}$ оператора A образуют полную систему функций в $L_2(\Omega)$.

4. Пусть Ω - конечная область из предыдущего пункта. В области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^n u(x,y;t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\frac{\partial^{n-j} u(x,y;t)}{\partial t^{n-j}} == y\frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial x^2} +$$

$$+\frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial y^2} + f(x,y;t), (x,y) \in \Omega,\ 0 < t < T \tag{6}$$

с краевыми условиями по t

$$U_v\big(u(x,y;\cdot)\big) = 0, \qquad v = 1,2,\dots,n,\ (x,y) \in \Omega \tag{7}$$

и с условиями по (x,y)

$$u(x,y;t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0: (x-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{4}{9}y^3 = \tfrac{1}{4}\ , \tag{8}$$

$$x^{\,5/6} D_{0+}^{5/6}\big(u(\chi_0(x);t)x^{-2/3}\big) + (1-x)^{5/6}\, D_{1-}^{1/6}\,\big(u(\chi_1(x);t)(1-x)^{-2/3}\big) = 0, \tag{9}$$

где

$$u(\chi_0(x);t) = u\left(x, -\left[\frac{3x}{2}\right]^{\frac{2}{3}}; t\right), 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

$$u(\chi_1(x);t) = u\left(x, -\left[\frac{3(1-x)}{2}\right]^{\frac{2}{3}}; t\right), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1, \qquad 0 < t < T.$$

Операторная запись вышеприведенной задачи (6)-(9) имеет вид

$$Bu(x,y;t) = Au(x,y;t) + f(x,y;t), \qquad (x,y;t) \in Q. \tag{10}$$

Здесь оператор B действует по переменной t и его свойства приведены в пункте 1. Оператор A действует по переменным (x,y) и его спектральные свойства приведены в пункте 2.

В данном пункте докажем критерий единственности решения однородного операторного уравнения (10).

Теорема 5. Пусть выполнено требование I. Тогда однородное операторное уравнение

$$Bu = Au \tag{11}$$

имеет только тривиальное решение $u \in D(B) \cap D(\mathrm{A})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(B) \cap \sigma(A) = \emptyset , \tag{12}$$

где $\sigma(B)$ *и* $\sigma(A)$ *- спектры операторов* B *и* A *соответственно.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP 14869558 МОН РК.

Литература

1. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы[Текст] / Наймарк М.А.. 1969. Наука, Москва. 528 с.

2. Kilbas, A.A. Theory and Applications of fractional differential equations[Текст] / Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.. 2006. Elsevier. 541 p.

3. Кесельман, Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов[Текст] / Кесельман Г.М. // Изв. вузов. матем. 1964. № 2. С. 82-93.

4. Кальменов, Т.Ш. О самосопряженных краевых задачах для уравнения Трикоми[Текст] / Кальменов Т.Ш. //Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, №1. С. 66-75.

УДК 517.956.6

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_121

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Мамажонов Мирза, к.ф.-м.н., доцент
mirzamamajonov@gmail.com
Кокандский государственный педагогический институт,
Коканд, Узбекистан

Аннотация. *В настоящей работе ставится ряд краевых задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида* $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ *в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Сформулирована теорема существования и единственности решения поставленной задачи. Однозначная разрешимость поставленной задачи доказывается с помощью метода построения решения, а также методами интегральных и дифференциальных уравнений*

Ключевые слова. *Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость.*

ON SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF THIRD ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATIONS IN A TRIANGULAR DOMAIN WITH THREE LINES OF TYPE CHANGE

Mamajonov Mirza, Candidate of Physical and
Mathematical Sciences, Associate Professor
mirzamamajonov@gmail.com
Kokand State Pedagogical Institute,
Kokand, Uzbekistan

Abstract. *In the present paper, a number of boundary value problems are posed for a third-order parabolic-hyperbolic type equation of the form* $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ *in a triangular domain with three lines of type change. The theorem of existence and uniqueness of the solution of the stated problem is formulated. The unique solvability of the problem posed is proved using the method of constructing a solution, as well as methods of integral and differential equations.*

Key words: *Differential and integral equations, solution construction method, boundary value problem, parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

В этой работе ставится один класс краевых задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \tag{1}$$

в треугольной области G плоскости xOy, где $a,b,c\in R$, $a^2+b^2\neq 0$,

$$Lu=\begin{cases}u_{1xx}-u_{1y},\ (x,y)\in G_1,\\ u_{ixx}-u_{iyy},\ (x,y)\in G_i\ \ (i=2,3,4),\end{cases}$$

$G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, а G_1 есть прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках A, B, $C(1/2,-1/2)$; G_3- треугольник с вершинами в точках A, $D(-1,1)$, A_0; G_4- треугольник с вершинами в точках B, $E(2,1)$, B_0; J_1- открытый отрезок с вершинами в точках A, B; J_2- открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0; J_3- открытый отрезок с вершинами в точках B, B_0.

Нам следует записать области G_i $(i=3,4)$ в следующем виде (из которых будем пользоваться в дальнейшем): $G_3=G_{31}\cup G_{32}\cup A_0F_1$, $G_4=G_{41}\cup G_{42}\cup B_0F_2$, где G_{31} – треугольник с вершинами в точках A, A_0, $F_1(-1/2,1/2)$; G_{32} – треугольник с вершинами в точках A_0, D, F_1; G_{41} – треугольник с вершинами в точках B, B_0, $F_2(3/2,1/2)$; G_{42} – треугольник с вершинами в точках B_0, E, F_2; A_0F_1- открытый отрезок с вершинами в точках A_0, F_1; B_0F_2- открытый отрезок с вершинами в точках B_0, F_2.

Перед тем, как приступить к постановке краевых задач, запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, из которых будем пользоваться при постановке краевых задач:

Краевые условия:

$$u_2\big|_{AC}=\psi_1(x),\quad 0\le x\le 1/2, \tag{2}$$

$$u_2\big|_{BC} = \psi_1(x), \;\; 1/2 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x), \; 0 \le x \le 1/2, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \; 1/2 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$u_3\big|_{DF_1} = \psi_4(x), -1 \le x \le -1/2, \tag{6}$$

$$u_3\big|_{AF_1} = \psi_3(x), -1/2 \le x \le 0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_3}{\partial n}\right|_{AD} = \psi_5(x), \; -1 \le x \le 0, \tag{8}$$

$$u_4\big|_{BF_2} = \psi_6(x), \; 1 \le x \le 3/2, \tag{9}$$

$$u_4\big|_{EF_2} = \psi_6(x), \; 3/2 \le x \le 2, \tag{10}$$

$$u_3\big|_{y=1} = f_1(x), \; -1 \le x \le 0, \tag{11}$$

$$u_4\big|_{y=1} = f_2(x), \; 1 \le x \le 2, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u_4}{\partial n}\right|_{BE} = \psi_7(x), \; 1 \le x \le 2, \tag{13}$$

$$u_{3y}\big|_{A_0D} = f_3(x), \; -1 \le x \le 0, \tag{14}$$

$$u_{4y}\big|_{B_0E} = f_4(x), \; 1 \le x \le 2; \tag{15}$$

Условия склеивания:

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \tau_1(x), \; 0 \le x \le 1, \tag{16}$$

$$u_{1y}(x,0) = u_{2y}(x,0) = \nu_1(x), \; 0 \le x \le 1, \tag{17}$$

$$u_{1yy}(x,0) = u_{2yy}(x,0) = \mu_1(x), \; 0 \le x \le 1, \tag{18}$$

$$u_1(0,y) = u_3(0,y) = \tau_2(y), \; 0 \le y \le 1, \tag{19}$$

$$u_{1x}(0,y)=u_{3x}(0,y)=\nu_2(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (20)$$

$$u_{1xx}(0,y)=u_{3xx}(0,y)=\mu_2(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (21)$$

$$u_1(1,y)=u_4(1,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (22)$$

$$u_{1x}(1,y)=u_{4x}(1,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (23)$$

$$u_{1xx}(1,y)=u_{4xx}(1,y)=\mu_3(y),\ 0\le y\le 1. \qquad (24)$$

Здесь $\psi_i\left(i=\overline{1,7}\right), f_j\left(j=\overline{1,4}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, а τ_i, ν_i, μ_i $(i=1,2,3)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=0$ или $x-y=1$.

В зависимости от значений коэффициентов a и b, то есть от значений углового коэффициента $\gamma=b/a$ оператора первого порядка уравнения (1), получаются различные случаи. Учитывая это для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$; 2) удовлетворяет уравнению (1) в открытой области G при $x\neq 0,\ y\neq 0$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа, которые указаны в следующей таблице:

№	Значения γ	Краевые условия	Условия склеивания
1.	$\gamma=0$ ($a\neq 0$, $b=0$)	(2), (4), (6), (8), (11), (12), (15) Всего: 24 таких групп условий.	(16), (17), (19)-(24)
2.	$\gamma=\infty$ ($a=0$, $b\neq 0$)	(2), (4), (5), (6), (8), (10), (11), (12), (13) Всего: 18 таких групп условий.	(16)-(20), (22), (23)
3.	$0<\gamma<1$	(2), (4), (6), (8), (11), (12), (15) Всего: 6 таких групп условий.	(16)-(24)
4.	$\gamma=1\,(a=b)$	(2), (4), (6), (8), (9), (11), (12) или (2), (4), (7), (8), (9), (11), (12) или (2), (4), (8), (9), (11), (12), (14).	(16)-(24)

5.	$-1<\gamma<0$	(2), (5), (10), (11), (12), (13), (14) Всего: 6 таких групп условий.	(16)-(24)
6.	$\gamma=-1\left(a=-b\right)$	(3), (5), (10), (11), (12), (13), (14) или (3), (5), (9), (11), (12), (13), (14) или (3), (5), (11), (12), (13), (14), (15).	(16)-(24)
7.	$-\infty<\gamma<-1$ и $1<\gamma<+\infty$	(2), (4), (5), (6), (8), (10), (11), (12), (13) Всего: 18 таких групп условий.	(16)-(24)

Здесь мы укажем решение поставленной задачи лишь в случае 1 с группой условий (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15). В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+c\right)\left(Lu\right)=0 \tag{1'}$$

Имеет место следующая

Теорема. Если $\psi_1\in C^3\left[0,1/2\right]$, $\psi_2\in C^2\left[0,1/2\right]$, $\psi_4\in C^3\left[-1,-1/2\right]$, $f_1\in C^3\left[-1,0\right]$, $\psi_5\in C^2\left[-1,0\right]$, $f_3\in C^3\left[1,2\right]$, $f_4\in C^2\left[1,2\right]$, причем выполняются следующие условия согласования $\tau_1\left(0\right)=\psi_1\left(0\right)$, $\tau_1'\left(0\right)=\frac{1}{2}\psi_1'\left(0\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2\left(0\right)$, $f_1\left(-1\right)=\psi_4\left(-1\right)$, $\psi_5\left(0\right)=\psi_2\left(0\right)$, то задача 1 имеет единственное решение в случае 1 с группой условий (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15).

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1′) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1\left(y\right)e^{-\frac{c}{a}x},\ \left(x,y\right)\in G_1, \tag{25}$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_i\left(y\right)e^{-\frac{c}{a}x},\ \left(x,y\right)\in G_i\quad\left(i=2,3,4\right), \tag{26}$$

где введено обозначение $u\left(x,y\right)=u_i\left(x,y\right)$, $\left(x,y\right)\in G_i$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$, причем $\omega_i\left(y\right)$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Учитывая виды областей G_i $\left(i=3,4\right)$, которые написаны наверху, уравнение (26)

$(i=3,4)$ перепишем в виде

$$u_{ikxx}-u_{ikyy}=\omega_{ik}(y)e^{-\frac{c}{a}x},\ (x,y)\in G_{ik}\quad (i=3,4;\ k=1,2),$$

(27)

где введены обозначения $u_i(x,y)=u_{ik}(x,y)$, $\omega_i(y)=\omega_{ik}(y)$, $(x,y)\in G_{ik}$ $(i=3,4;\ k=1,2)$.

Сначала рассмотрим задачу в области D_{32}. Записываем решение уравнения (27) $(i=3;\ k=2)$, удовлетворяющее условиям (11) и $u_{32y}(x,1)=\nu_4(x)$ ($\nu_4(x)-$ неизвестная пока достаточно гладкая функция, подлежащая определению):

$$u_{32}(x,y)=\frac{f_1(x+y-1)+f_1(x-y+1)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y+1}^{x+y-1}\nu_4(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_1^y\omega_{32}(\eta)d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\exp\left(-\frac{c}{a}\xi\right)d\xi. \qquad (28)$$

Подставляя (28) в условие (8), находим

$$\omega_{32}(y)=\sqrt{2}\psi_5'(-y)\exp\left(-\frac{c}{a}y\right),\ \frac{1}{2}\le y\le 1.$$

А подставляя (28) в условие (6), находим и функцию $\nu_4(x)$:

$$\nu_4(x)=f_1'(x)-\psi_4'\left(\frac{x-1}{2}\right)+\int\limits_1^{-\frac{x-1}{2}}\omega_{32}(\eta)\exp\left[-\frac{c}{a}(x-1+\eta)\right]d\eta\,. \qquad (29)$$

Таким образом, мы определили функцию $u_{32}(x,y)$. Если введем обозначение $u_{32}(x,x+1)=h_1(x)$ (где $h_1(x)$ уже известная функция), то для определения функции $u_{31}(x,y)$ получим условие

$$u_{31}(x,x+1)=h_1(x). \qquad (30)$$

Теперь записываем решение уравнения (27) $(i=3;\ k=1)$, удовлетворяющее условиям (19), (20):

$$u_{31}(x,y)=\frac{\tau_2(y+x)+\tau_2(y-x)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x}\nu_2(t)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{x}\exp\left(-\frac{c}{a}\eta\right)d\eta\int\limits_{y-x+\eta}^{y+x-\eta}\omega_{31}(\xi)\,d\xi. \tag{31}$$

Подставляя (31) в условие (8), находим

$$\omega_{31}(y)=\sqrt{2}\psi_5'(-y)\exp\left(-\frac{c}{a}y\right),\ 0\le y\le\frac{1}{2}. \tag{32}$$

Теперь будем пользоваться из условия

$$\left.\left(\frac{\partial u_{31}}{\partial x}-\frac{\partial u_{31}}{\partial y}\right)\right|_{y=x+1}=\left.\left(\frac{\partial u_{32}}{\partial x}-\frac{\partial u_{32}}{\partial y}\right)\right|_{y=x+1}.$$

Тогда имеем

$$\omega_{31}(y)=\omega_{32}(y)=\sqrt{2}\psi_5'(-y)\exp\left(-\frac{c}{a}y\right),\ \frac{1}{2}\le y\le 1.$$

Из последнего равенства и (32) следует

$$\omega_{31}(y)=\sqrt{2}\psi_5'(-y)\exp\left(-\frac{c}{a}y\right),\ 0\le y\le 1.$$

Теперь подставляя (31) в условие (30), получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$:

$$\nu_2(y)=\beta_1(y)-\tau_2'(y),\ 0\le y\le 1, \tag{33}$$

где

$$\beta_1(y)=h_2'\left(\frac{y-1}{2}\right)-\int\limits_{0}^{\frac{y-1}{2}}\exp\left(-\frac{c}{a}\eta\right)\omega_{31}(y-\eta)\,d\eta.$$

Далее, переходя в уравнениях (25) и (27) $(i=3;\,k=1)$ к пределу при $x\to 0$, получим второе и третье соотношения между неизвестными функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$, $\mu_2(y)$ и $\omega_1(y)$:

$$\mu_2(y)=\tau_2'(y)+\omega_1(y), \tag{34}$$

$$\mu_2(y)=\tau_2''(y)+\omega_{31}(y). \tag{35}$$

Исключая из (34) и (35) функцию $\mu_2(y)$, имеем

$$\omega_1(y)=\tau_2''(y)-\tau_2'(y)+\omega_{31}(y). \tag{36}$$

Теперь переходим в область G_2. Записываем решение уравнения (26) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (16) и (17):

$$u_2(x,y)=\frac{\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu_1(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^y\omega_2(\eta)d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}e^{-\frac{c}{a}\xi}d\xi. \tag{37}$$

Подставляя (37) в условие (4), находим

$$\omega_2(y)=\sqrt{2}\psi_2'(-y)e^{-\frac{c}{a}y},\ -1/2\le y\le 0. \tag{38}$$

Далее, подставляя (37) в условие (2) после некоторых выкладок, имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1'(x)-\nu_1(x)=\alpha_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{39}$$

где $\alpha_1(x)-$ известная функция.

Переходя в (25) к пределу при $y\to 0$, имеем второе соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1''(x)-\nu_1(x)=\omega_1(0)e^{-\frac{c}{a}x},\ 0\le x\le 1, \tag{40}$$

где $\omega_1(0)-$неизвестная пока постоянная.

Исключая из (39) и (40) функцию $\nu_1(x)$, приходим к уравнению

$$\tau_1''(x)-\tau_1'(x)=-\alpha_1(x)+\omega_1(0)e^{-\frac{c}{a}x},\ 0\le x\le 1.$$

Интегрируя это уравнение от 0 до x, имеем

$$\tau_1'(x)-\tau_1(x)=\alpha_2(x)+\omega_1(0)\int_0^x e^{-\frac{c}{a}t}dt+k_1, \tag{41}$$

где $\alpha_2(x)=\int\limits_0^x \alpha_1(t)\,dt$, а k_1 – неизвестная пока постоянная.

Дифференцируя (33) и полагая в полученном равенстве $y=0$, имеем

$$\tau_2''(0)+\nu_2'(0)=\beta_1'(0).$$

Если учитываем условия $\tau_2''(0)=\mu_1(0),\ \nu_2'(0)=\nu_1'(0)$, то получим

$$\mu_1(0)+\nu_1'(0)=\beta_1'(0). \tag{42}$$

Теперь полагая в (26) $x=0$ и $y=0$, имеем

$$\tau_1''(0)-\mu_1(0)=\omega_2(0).$$

Исключая из последнего равенства и (42) число $\mu_1(0)$, имеем соотношение

$$\tau_1''(0)+\nu_1'(0)=\beta_1'(0)+\omega_2(0).$$

Дифференцируя (39), получим

$$\tau_1''(0)-\nu_1'(0)=\alpha_1'(0).$$

Исключая из последних двух равенств $\nu_1'(0)$, находим

$$\tau_1''(0)=\frac{1}{2}\alpha_1'(0)+\frac{1}{2}\beta_1'(0)+\frac{1}{2}\omega_2(0).$$

Решая уравнение (35) при условиях

$$\tau_1(0)=\psi_1(0),\quad \tau_1'(0)=\frac{1}{2}\psi_1'(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0),$$

$$\tau_1''(0)=\frac{1}{2}\alpha_1'(0)+\frac{1}{2}\beta_1'(0)+\frac{1}{2}\omega_2(0),$$

находим

$$\tau_1(x)=\int\limits_0^x \exp(x-t)\alpha_2(t)\,dt+\omega_1(0)\int\limits_0^x\left[\exp(x-t)-1\right]\exp\left(-\frac{c}{a}t\right)dt+$$

$$+k_1\left[\exp(x)-1\right]+k_2\exp(x),$$

где

$$k_2=\psi_1(0),\quad k_1=\frac{1}{2}\psi_1'(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0)-\psi_1(0),$$

$$\omega_1(0)=\psi_1'(0)+\frac{1}{2}\beta_1'(0)+\frac{1}{2}\omega_2(0)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0).$$

Теперь переходим в область D_{42}. Запишем решение уравнения (27) $(i=4;\ k=2)$, удовлетворяющего условиям (12), (15):

$$u_{42}(x,y)=\frac{f_2(x+y-1)+f_2(x-y+1)}{2}+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{x-y+1}^{x+y-1}f_4(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_1^y\omega_{42}(\eta)d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\exp\left(-\frac{c}{a}\xi\right)d\xi. \tag{43}$$

Далее, переходим в область D_{41}. Запишем решение уравнения (27) $(i=4;\ k=1)$, удовлетворяющего условиям (22), (23):

$$u_{41}(x,y)=\frac{\tau_3(y+x-1)+\tau_3(y-x+1)}{2}+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{y-x+1}^{y+x-1}\nu_3(t)dt+\frac{1}{2}\int\limits_1^x\exp\left(-\frac{c}{a}\eta\right)d\eta\int\limits_{y-x+\eta}^{y+x-\eta}\omega_{41}(\xi)d\xi. \tag{44}$$

Будем пользоваться из условия $\left.\left(\frac{\partial u_{42}}{\partial x}+\frac{\partial u_{42}}{\partial y}\right)\right|_{y=2-x}=\left.\left(\frac{\partial u_{41}}{\partial x}+\frac{\partial u_{41}}{\partial y}\right)\right|_{y=2-x}$. Тогда после некоторых преобразований, имеем

$$\omega_{42}(y)=\omega_{41}(y),\ \frac{1}{2}\le y\le 1.$$

Теперь будем пользоваться из условия $u_{41}(x,2-x)=u_{42}(x,2-x)$. Тогда после длинных преобразований приходим к соотношению между неизвестными функциями $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$ и $\omega_{41}(y)$:

$$\tau_3'(y)-\nu_3(y)+\int\limits_1^y\omega_{41}(\eta)e^{-\frac{c}{a}(\eta+1-y)}d\eta=\beta_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{45}$$

где $\beta_2(y)=f_4(2-y)-f_2'(2-y)$.

Теперь переходя в уравнениях (25) и (27) $(i=4;\,k=1)$ при $x\to 1$ получим соотношения

$$\mu_3(y)-\tau_3'(y)=\omega_1(y)e^{-\frac{c}{a}},\ \ \mu_3(y)-\tau_3''(y)=\omega_{41}(y)e^{-\frac{c}{a}}.$$

Исключая из этих соотношений функцию $\mu_3(y)$ в силу (45), находим

$$\omega_{41}(y)=\left[\tau_2''(y)-\tau_2'(y)\right]-\left[\tau_3''(y)-\tau_3'(y)\right]e^{\frac{c}{a}}+\omega_{31}(y). \qquad (46)$$

Подставляя (46) в (45), имеем

$$\begin{gathered}\nu_3(y)=\int_1^y\left\{\left[\tau_2''(\eta)-\tau_2'(\eta)\right]-\left[\tau_3''(\eta)-\tau_3'(\eta)\right]e^{\frac{c}{a}}+\omega_{31}(\eta)\right\}e^{-\frac{c}{a}(\eta+1-y)}d\eta+\\ +\tau_3'(y)-\beta_2(y),\quad 0\le y\le 1.\end{gathered} \qquad (47)$$

Теперь переходим в область D_1. Запишем решение уравнения (25), удовлетворяющего условиям (16), (19), (22):

$$u_1(x,y)=\int_0^y\tau_2(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y\tau_3(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^1\tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-\int_0^y\omega_1(\eta)d\eta\int_0^1 e^{-\frac{c}{a}\xi}G(x,y;\xi,\eta)d\xi,$$

где

$$\left.\begin{matrix}G(x,y;\xi,\eta)\\ N(x,y;\xi,\eta)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\mp\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}$$

– функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (25).

Дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю и к единице с учетом (33), (36) и (47) после длинных вычислений и преобразований, получим систему двух уравнений типа Абеля относительно $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$. Применяя к этим уравнениям обращение Абеля после длинных вычислений, приходим к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$:

$$\tau_2''(y)+\int_0^y K_1(y,\eta)\tau_2''(\eta)d\eta+\int_0^y K_2(y,\eta)\tau_3'(\eta)d\eta=g_1(y), \qquad (48)$$

$$\tau_3'(y)+\int_0^y K_3(y,\eta)\tau_3'(\eta)d\eta+\int_0^y K_4(y,\eta)\tau_2''(\eta)d\eta=g_2(y), \tag{49}$$

где $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – известные функции, причем ядра $K_1(y,\eta)$ и $K_3(y,\eta)$ имеют слабую особенность $(1/2)$, а остальные функции непрерывны. Поэтому система уравнений (48), (49) допускает единственное решение в классе непрерывных функций. Решая эту систему, находим функции $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$ тем самым, и функции $\nu_2(y)$, $\nu_3(y)$, $\omega_1(y)$, $\omega_{41}(y)$, $\omega_{42}(y)$, $u_1(x,y)$, $u_{31}(x,y)$, $u_{41}(x,y)$ и $u_{42}(x,y)$.

Замечание. Аналогичные задачи для уравнений третьего и четвертого порядков параболо-гиперболического типа рассмотрены в работах [1]-[10].

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа [Текст] / Т.Д.Джураев, А.Сопуев, М.Мамажанов -Ташкент: Фан, -1986. -220 с.

2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа / Т.Д.Джураев, М.Мамажанов // Дифференциальные уравнения, -1986, -т.22, -№1, -С. 25-31.

3. Шерматова Х.М. О постановке краевых задач для одного класса параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с двумя линиями изменения типа. / Х.М.Шерматова // Бюллетен института математики. -2018, -№5, -С. 22-29.

4. Шерматова Х.М. Исследование одной краевой задачи для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида $\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ [Текст] / Х.М.Шерматова // Наманган давлат университети илмий ахборотномаси. -2019, -№6. -С. 9-16.

5. Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в смешанной пятиугольной области, когда угловой коэффиsиент характеристики оператора первого порядка меньше минус единицы [Текст] / Х.М.Шерматова // Наманган давлат университети илмий хабарномаси. -2019, -№7, -С. 46-54.

6. Shermatova Kh.M. Investigation of a boundary value problem for a third order parabolic-hyperbolic equation [Текст] / Kh.M.Shermatova // Scientific Bulletin of Namangan State University, 2019, 1(6), -P. 9-16.

7. Шерматова Х.М. Исследование одной краевой задачи для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ [Текст] / Х.М.Шерматова // Наманган давлат университети илмий хабарномаси. -2020, -№4, -С. 44-53.

8. Shermatova Kh.M. Investigation of a boundary-value problem for a third order parabolic hyperbolic equation in the form $\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ [Текст] / Kh.M.Shermatova // “THEORETICAL & APPLIED SCIENCE” Philadelphia, USA. № 7 (87), 2020, -P. 160-165.

9. Mamajonov M. On one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a quadrangular domain with two lines type changes. [Текст] / M.Mamajonov, Yu.Karimova // Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ). 2022, Vol. 10, Issue 12, -P. 68-77.

10. Мамажонов М. Об одной краевой задаче для одного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка в четырехугольной области с двумя линиями изменения типа [Текст] / М.Мамажонов, Х.М.Шерматова, Ю.Х.Каримова // Республиканская научно-практическая конференция на тему «Проблемы науки в интерпретации магистрантов». Коканд, -2022, -С. 107-112.

УДК 517.9

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_134

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИИ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ

Манакова Наталья Александровна, д.ф.-м.н., профессор,
manakovana@susu.ru
Николаева Надежда Геннадьевна, магистрант,
nikolaevang23@yandex.ru
Гаврилова Ольга Витальевна, к.ф.-м.н.,
gavrilovaov@susu.ru
Перевозчикова Ксения Владимировна, ст.преподаватель,
perevozchikovakv@susu.ru
Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск, Российская Федерация

Аннотация. *Работа посвящена численному исследованию вопроса единственности решения задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для уравнения Хоффа на отрезке. Уравнение Хоффа моделирует динамику деформации двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. Для исследования вопроса (не)единственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова будет использован метод фазового пространства, который был разработан Г.А. Свиридюком при исследовании разрешимости уравнений соболевского типа. Ранее было показано, что фазовое пространство исследуемой модели содержит особенности типа 2-сборки Уитни, что влечет за собой возможную неединственность решений. Представлены условия единственности или множественности решений задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле в зависимости от параметров системы, построен алгоритм численного решения задачи на основе метода Галеркина и представлены вычислительные эксперименты.*

Ключевые слова: *уравнения соболевского типа; задача Шоуолтера – Сидорова; уравнение Хоффа; неединственность решений; метод фазового пространства; метод Галеркина.*

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE NON-UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE SHOWALTER-SIDOROV PROBLEM FOR A MATHEMATICAL MODEL OF DEFORMATION OF AN I-BEAM

Natalia A. Manakova, Dr.Sc.,professor,
manakovana@susu.ru
Nadezhda G. Nikolaeva, undergraduate student
nikolaevang23@yandex.ru

Olga V. Gavrilova, Cand. Sc.
gavrilovaov@susu.ru
Ksenia V. Perevozchikova, lecturer,
perevozchikovakv@susu.ru
South Ural State University,
Chelyabinsk, Russian Federation

Abstract. *The paper is devoted to the study of the uniqueness of the solution of the Showalter–Sidorov–Dirichlet problem for the Hoff equation on a segment. The Hoff equation simulates the dynamics of deformation of an I-beam under constant load. To investigate the question of the (non)uniqueness of solutions to the Showalter–Sidorov problem, the phase space method will be used, which was developed by G.A. Sviridyuk in the study of the solvability of Sobolev-type equations. It was previously shown that the phase space of the model under study contains features of type 2-Whitney assembly, which entails a possible non-uniqueness of solutions. The conditions of uniqueness or multiplicity of solutions of the Showalter–Sidorov–Dirichlet problem depending on the system parameters are presented, an algorithm for numerical solution of the problem based on the Galerkin method is constructed and computational experiments are presented.*

Key words*: Sobolev type equations; Showalter–Sidorov problem; the Hoff equation; nonuniqueness of solutions; phase space method; the Galerkin method.*

1. Введение

Подход, предложенный в работе Хоффа [1], для изучения деформации при сжатии (выпучивание) стержня распространяется на случай ползучести начальных неправильностей. Под ползучестью следует понимать деформацию твердого тела, проходящую с течением длительного времени, под действием постоянной нагрузки. Математическая модель деформации двутавровой балки принадлежит к классу полулинейных вырожденных моделей и будет исследована в рамках абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа. В обзорной статье [2] собраны результаты многолетних исследований вопроса (не)единственности задачи Шоуолтера – Сидорова

$$L(u(x,0) - u_0(x)) = 0 \tag{1}$$

для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \ker L \neq \{0\}, \tag{2}$$

приведены примеры математических моделей, у которых возможно существование нескольких решений задачи Шоуолтера – Сидорова. Вопросы (не)единственности решений уравнений и систем уравнений, сводящихся к полулинейным уравнениям вида (2) и связи неединственности решений с существованием в фазовом пространстве уравнений (2) сборок и складок Уитни были освещены в следующих работах: А.Ф. Гильмутдиновой для математической модели Плотникова были выявлены условия существования

неединственности решения задачи [3], Т.А. Бокаревой и Г.А. Свиридюком для модели распространения нервного импульса в мембране и для модели автокаталитической реакции с диффузией показано существование 2-сборки Уитни и 1-сборки Уитни соответственно [4], Н.А. Манаковой и О.В. Гавриловой для модели распространения нервного импульса в мембране были выявлены условия существования неединственности решения задачи [5].
В данной работе будем рассматривать задачу Шоуолтера – Сидорова

$$\lambda(u(x,0)-u_0(x))+(u_{xx}(x,0)-u_0(x))=0,\ x\in(0,l), \tag{3}$$

для уравнение Хоффа

$$\lambda u_t+u_{xxt}=\alpha u+\beta u^3,\ t\in(0,T), \tag{4}$$

с условием Дирихле

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ x\in(0,l), t\in(0,T). \tag{5}$$

Требуется найти условия неединственности решений задачи (3) – (5) в зависимости от значений параметров задачи, построить алгоритм численного решения задачи (3) – (5) с учетом (не)единственности решения в случае $\alpha\beta<0$.
В работе [6] Г.А. Свиридюком и В.О. Казаком было показано, что фазовое пространство уравнения (4) является простым банаховым C^∞-многообразием в случае $\alpha\beta>0$. В случае $\alpha\beta<0$ фазовое пространство уравнения (4) уже не будет простым многообразием, – оно лежит на 2–сборке Уитни как показано в статье [7]. В данной работе для реализации численного решения задачи используется метод Галеркина. Впервые для полулинейных уравнений соболевского типа этот метод был применен Г.А. Свиридюком и Т.Г. Сукачевой [8]. В случае вырожденных полулинейных уравнений для нахождения приближенных решений, метод Галеркина был использован в работах [9–13].

2. Особенности фазового пространства

Редуцируем задачу (3) – (5) к задаче (1), (2). Для этого положим $\mathfrak{U}=L_4(0,l)$, $\mathfrak{h}=\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$. Операторы L,M,N определим формулами

$$\begin{aligned}\langle Lu,v\rangle&=\int_0^l(\lambda uv-u_xv_x)dx,\ \forall u,v\in\mathfrak{h},\\ \langle Mu,v\rangle&=\alpha\int_0^l uv\,dx,\ \ \forall u,v\in\mathfrak{h},\\ \langle N(u),v\rangle&=\beta\int_0^l u^3vdx,\ \forall u,v\in\mathfrak{U},\end{aligned} \tag{6}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $L_2(0,l)$.
Пусть параметр $\lambda\in\sigma(-\Delta)$, тогда $\ker L=span\{\varphi_k:\lambda_k=\lambda\}$, $im\ L=(\ker L)^\perp$, где $\{\varphi_g\}$ – ортонормированное (в смысле $L_2(0,l)$) семейство собственных функций однородной задачи Дирихле на интервале $(0,l)$ для оператора Лапласа $(-\Delta)$, соответствующих

собственным значениям $\{\lambda_g\}$, которые занумерованы по невозрастанию. При этом φ_g, λ_g примут вид

$$\varphi_g = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin gx\,,\ \lambda_g = g^2,\ g = 1,2,\ldots$$

Зададим множество $\mathfrak{B}$ следующим образом:

$$\mathfrak{B} = \{u \in \mathfrak{U}: \langle Mu + N(u), \varphi_k\rangle = 0, \lambda = \lambda_k\}.$$

Считая, что $\alpha\beta < 0$ и $\lambda = \lambda_k$ представим вектор u в виде $u = s_k\varphi_k + u_k^{\perp}$, где $u_k^{\perp} \in \mathfrak{U}_{\mathrm{k}}^{\perp} = \{u_k \in \mathfrak{U}: \langle u_{\mathrm{k}}, \varphi_k\rangle = 0\}$, заметим, что множество $\mathfrak{B}$ C^{∞}-диффеоморно множеству

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} = \{(s_{\mathrm{k}}, u_{\mathrm{k}}^{\perp}) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{U}: s_{\mathrm{k}}^3 \parallel \varphi_{\mathrm{k}} \parallel_{\mathfrak{U}}^4 + 3s_{\mathrm{k}}^2 \int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^3 u_{\mathrm{k}}^{\perp}\ dx + \\ + \ s_{\mathrm{k}}\ (3\int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^2 (u_{\mathrm{k}}^{\perp})^2\ dx + \alpha\beta^{-1} + \int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}\big(u_{\mathrm{k}}^{\perp}\big)^3\ dx = 0\}.\end{aligned} \tag{7}$$

В [7] множество $\mathfrak{B}$ названо 2-сборкой Уитни, в [6] показано, что в случае $\alpha\beta > 0$ при любом векторе $u_k^{\perp} \in \mathfrak{U}_k^{\perp}$ существует точно одно число $s_k \in \mathbb{R}$ такое, что $s_{\mathrm{k}}\varphi_k + u_k^{\perp} \in \mathfrak{B}$. Уравнение, определяющее множество $\mathfrak{B}$, является кубическим уравнением общего вида

$$as_{\mathrm{k}}^3 + bs_{\mathrm{k}}^2 + cs_{\mathrm{k}} + d = 0. \tag{8}$$

Согласно формулам Кардано, любое кубическое уравнение общего вида при помощи замены $s_k = y - \frac{b}{3a}$ может быть приведено к канонической форме

$y^3 + py + q = 0$ с коэффициентами

$$\begin{aligned}
&a = \parallel \varphi_{\mathrm{k}} \parallel_{\mathfrak{U}}^4,\ b = 3\int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^3 u_{\mathrm{k}}^{\perp}\ dx,\\
&c = 3\int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^2 (u_{\mathrm{k}}^{\perp})^2\ dx + \alpha\beta^{-1},\ \ d = \int_0^l \varphi_{\mathrm{k}} (u_{\mathrm{k}}^{\perp})^3 dx,\\
&p = \frac{3ac - b^2}{9a^2},\\
&q = \frac{1}{2}\left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right),\\
&Q_k(s_{\mathrm{k}}, u) = p^3 + q^2,\\
&R_{\mathrm{k}}(s_{\mathrm{k}}, u) = 3s_{\mathrm{k}}^2 \parallel \varphi_{\mathrm{k}} \parallel_{\mathfrak{U}}^4 + 6s_{\mathrm{k}}\int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^3 u_{\mathrm{k}}^{\perp}\ dx + 3\int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^2 (u_k^{\perp})^2\ dx + \alpha\beta^{-1}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Для дальнейшего рассмотрения введем следующие множества

$$\begin{aligned}
(U_{\mathrm{k}})_0^{\perp} &= \{u \in \mathfrak{U}_k^{\perp}: R_{\mathrm{k}}(s_k, u) = 0\},\\
(U_k)_+^{\perp} &= \{u \in \mathfrak{U}_k^{\perp}: Q_{\mathrm{k}}(s_{\mathrm{k}}, u) > 0\},\\
(U_{\mathrm{k}})_-^{\perp} &= \{u \in \mathfrak{U}_k^{\perp}: Q_{\mathrm{k}}(s_{\mathrm{k}}, u) < 0\}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 1 [13]. *Пусть* $\alpha\beta < 0$ *и* $\lambda = \lambda_k$. *Тогда*

- для любого $u_0 \in (U_{\mathrm{k}})^{\perp} \cap (U_{\mathrm{k}})_-^{\perp}$ существует три решения задачи (3) – (5);
- для любого $u_0 \in (U_k)^{\perp} \cap (U_k)_+^{\perp} \cap (U_{\mathrm{k}})_0^{\perp}$ существует два решения уравнения (3) – (5);
- для любого $u_0 \in (U_k)^{\perp} \cap (U_k)_+^{\perp}$ существует одно решение задачи (3) – (5).

3. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим примеры численного исследования вопроса неединственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова для модели деформации двутавровой балки (3) – (5) на основе аналитических результатов, описанных выше. Требуется найти численное решение задачи Шоуолтера – Сидорова

$$(u(x,0)-u_0(x))+\left(u_{xx}(x,0)-u_0(x)\right)=0,\ x\in(0,\pi), \tag{15}$$

для уравнения

$$u_t+u_{xxt}=-u+u^3,\ t\in(0,1), \tag{16}$$

с краевым условием Дирихле

$$u(0,t)=u(\pi,t)=\ 0,\ x\in(0,\pi),\ t\in(0,1), \tag{17}$$

при $u_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)$.

Приближенные решения задачи (15) – (17) на интервале $(0,\pi)$ могут быть представлены в виде $u(x,t)=u_1(t)\varphi_1(x)+u_2(t)\varphi_2(x)$, где $\varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\ kx,\ k=1{,}2$. Так как в условиях данного эксперимента λ совпадает с первым собственным значением $\lambda_1=1$ однородной задачи Дирихле для $(-\Delta)$, для нахождения неизвестных $u_1(t),u_2(t)$ получим систему алгебро-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_1(t)(-3u_1^2(t)-6u_2^2(t)+2\pi)=0 \\ -6u_1^2(t)u_2(t)-3u_2^3(t)+6\pi u_2(t)dt+2\pi u_2(t)=0. \end{cases} \tag{18}$$

Используя формулы (9), найдем $Q=-0{,}0000311696<0$, из чего следует, что данная система уравнений имеет три решения. Разрешив алгебраическое уравнение системы в начальный момент времени, получим три начальных условия $u_1^1(0),u_1^2(0),u_1^3(0)$. Решая получившуюся систему методом Рунге – Кутта, получим три численных решения (рис. 1).

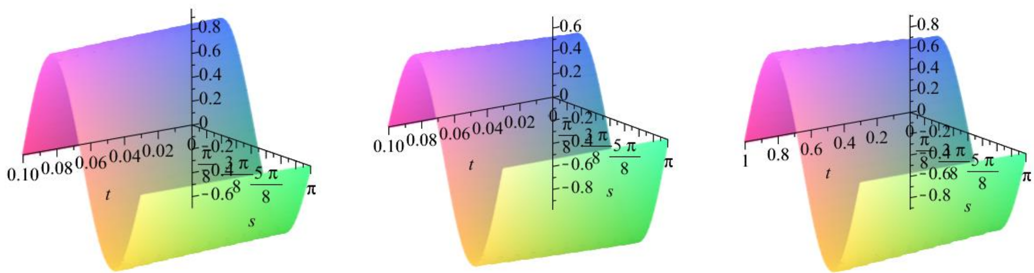

Рис. 1. Численное решение задачи (15) – (17)

Литература

1. Hoff, N.J. Creep Buckling [Text] / N.J. Hoff // Journal of the Aeronautical Science. – 1956. – № 7. – P. 1–20.

2. Манакова, Н.А. Полулинейные модели соболевского типа. Неединственность решения задачи Шоуолтера – Сидорова [Текст] / Н.А. Манакова, О.В. Гаврилова, К.В. Перевозчикова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2022. – Т.15, № 1. – С.84–100.

3. Гильмутдинова, А.Ф. О неединственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова для одной модели Плотникова [Текст] / А.Ф. Гильмутдинова // Вестник СамГУ. – 2007. № 9. – С. 85–90.

4. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева [Текст] / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.

5. Manakova, N.A. About Nonuniqueness of Solutions of the Showalter – Sidorov Problem for One Mathematical Model of Nerve Impulse Spread in Membrane [Текст] / N.A. Manakova, O.V. Gavrilova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 4. – С. 161–168.

6. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа [Текст] / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292–297.

7. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа [Текст] / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54–60.

8. Свиридюк, Г.А. О галеркинских приближениях сингулярных нелинейных уравнений типа Соболева [Текст] / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Известия вузов. Математика. – 1989. № 10. – С. 44–47.

9. Zamyshlyaeva, A.A. Semilinear Sobolev Type Mathematical Models [Текст] / A.A. Zamyshlyaeva, E.V. Bychkov // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2022. – Т. 15, № 1. – С. 43–59.

10. Бычков, Е. В. Сходимость приближенного решения задачи Шоуолтера – Сидорова –Дирихле для модифицированного уравнения Буссинеска [Текст] / Е. В. Бычков // Алгебра, геометрия, дифференциальные уравнения, Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2022. – Т. 217. – С. 11–19.

11. Замышляева, А.А. Обратная задача для уравнения соболевского типа второго порядка [Текст] / А.А. Замышляева, А.С. Муравьев // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 2, № 3. – С. 5–12.

12. Manakova, N.A. Numerical Investigation of the Optimal Measurement for a Semilinear Descriptor System with the Showalter–Sidorov Condition: Algorithm and Computational Experiment [Текст] / N.A. Manakova, O.V. Gavrilova, K.V. Perevozchikova // Differential Equations and Control Processes. – 2020. № 4. – P. 115–126.

13. Гаврилова, О.В. О неединственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова для одной математической модели деформации двутавровой балки [Текст] / О.В. Гаврилова, Н.Г. Николаева, Н.А. Манакова // Южно-Уральская молодежная школа по

математическому моделированию. Сборник трудов IV всероссийской студенческой научно-практической конференции. Челябинск, 15–16 июня 2021 г. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2021. – С. 67–71.

УДК 514.1
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_141

E_6 ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИГИНДЕ f_3^2 БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУСУНУН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШАШЫ ЖӨНҮНДӨ

Матиева Г., ф.-м.и.д., профессор,
Курбанбаева Н.Н., ф.-м.и.к., доцент,
Ошский мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан
Абдуллаева Ч.Х., ф.-м.и.к., доцент,
Б. Сыдыков атындагы Кыргыз-Өзбек Эл аралык университети,
Ош, Кыргызстан,

Аннотация. *Изилдөөнүн предмети катары беш ченемдүү евклиддик E_6 мейкиндикти бөлүктөп чагылтуу маселеси каралат. Изилдөөнүн максаты болуп E_6 мейкиндигин бөлүктөп чагылтуунун квазикошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттарын табуу эсептелинет. Изилдөөлөрдө: Картандын сырткы формалар жана кыймылдуу репер методдору колдонулду.*

Бул жумушта евклиддик алты ченемдүү мейкиндикти бөлүктөп чагылтууга тиешелүү маселе каралган. $\Omega \subset E_6$ аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген: ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бирден гана сызыгы өтөт. Ушул сызык үчүн Френенин репери боло тургандай кыймылдуу репер тандалып алынган. Бул репердин координаталык векторлорунун интегралдык сызыктары Френенин торчосун түзүшөт. Ушул торчонун ω^3 сызыгынын жанымасында F_3^2 чекити инварианттык түрдө аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде F_3^2 чекити өзүнүн $\Omega_3^2 \subset E_6$ аймагын сызып чыгат. Натыйжада $f_3^2(X) = F_3^2$ болгондой $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ бөлүктөп чагылтуусу аныкталат.

Төрт ченемдүү бөлүштүрүүлөргө таандык болушкан сызыктардын f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктар болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары изилденген

Изилдөөнүн жыйынтыгында төрт ченемдүү бөлүштүрүүлөргө таандык болушкан сызыктардын каралып жаткан f_3^2 бөлүктөп чагылтуусу үчүн квазикошмок сызыктар болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары табылган.Төрт ченемдүү бөлүштүрүүлөргө таандык болушкан сызыктардын f_3^2

бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттарын изилдөө макалада алгачкы ирет изилденип жаткандыктан, алынган жыйынтыктар жаңы болуп эсептелинери көрсөтүлгөн. Алынган жыйынтыктар дифференцирленүүчү чагылтуулар теориясында колдонуу үчүн сунушталат.

Ачкыч сөздөр: *евклиддик мейкиндик, Френенин репери, Френенин торчосу, бөлүктөп чагылтуу, бөлүштүрүү, квазикошмок сызык.*

О СУЩЕСТВОВАНИИ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ f_3^2 В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_6

Матиева Г., д.ф.-м.н., профессор,
Курбанбаева Н.Н., к.ф.-м.н, доцент,
Ошский государственный университет,
Кыргызская Республика
Абдуллаева Ч.Х., к.ф.-м.н, доцент,
Кыргызско–Узбекского Международный университет имени Б.Сыдыкова,
Кыргызская Республика,

Аннотация. *В данной работе рассмотрена задача, относящаяся к частным отображениям 6-мерного евклидова пространства.В области* $\Omega \subset E_6$ *задано семейство гладких линий так,что через каждую точку* $X \in \Omega$ *проходит одна линия заданного семейства. Выбран подвижный репер так, чтобы он был репером Френе для линии заданного семейства. Интегральные линии координатныхз векторных полей этого репера образуют сеть Френе. На касательной к линии* ω^3 *этой сети инвариантным образом определяется точка* F_3^2. *Когда точка* X *смещается в области* Ω, *точка* F_3^2 *описывает свою область* $\Omega_3^2 \subset E_6$. *Таким образом получается частичное отображение* $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ *такое, что* $f_3^2(X) = F_3^2$. *Исследованы необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии, принадлежащие трехмерным распределениям, являлись квазидвойными линиями частичного отображения* f_3^2.

Предметом исследования является процесс частичного отображения шестимерного евклидова пространства E_6. *Цель исследования - найти необходимые и достаточные условия существования квазидвойных линий частичного отображения пространства* E_6. *В исследовании использовались: метод внешных форм Картана и метод подвижного репера. В результате исследования были найдены необходимые и достаточные условия существования квазидвойных линий для рассматриваемого частичного отображения* f_3^2 *линий, принадлежащих четырехмерным распределениям.*

Исследования необходимых и достаточных условий для того, чтобы линии, принадлежащие четырехмерным распределениям, являлись квазидвойными линиями частичного отображения f_3^2 рассмотрено впервые, поэтому полученные результаты являются новыми. Полученные результаты рекомендуется для использования в теории дифференцируемых отображений.

Ключевые слова: *евклидово пространство, репер Френе, сеть Френе, частичное отображение, распределение, квазидвойная линия.*

ABOUT EXISTENCE OF A QUASIO-DOUBLE LINES OF THE PARTIAL MAPPING f_3^2 IN SPACE E_6

Matieva G., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Kurbanbayeva N.N., Ph.D., Associate Professor,
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan
Abdullaeva Ch.Kh., Ph.D., Associate Professor,
Kyrgyz-Uzbek International University named after B. Sydykov,
Osh, Kyrgyzstan,

Abstract. *It is considered the problem related to partial mapping of 6- dimensional Euclidean space E_6*

A family of smooth lines is given in the domain $\Omega \subset E_6$ so that through each point $X \in \Omega$ passes one line of a given family. A movable frame is chosen so that it was Frenet's frame for the line of the given family. The integral lines of the coordinate vectors fields of this frame form a Frenet's net. On a tangent to the line ω^3 of this net a point F_3^2 is defined in an invariant way.

When the point X moves in the domain Ω the point F_3^2 describes its domain $\Omega_3^2 \subset E_6$. In this way we get a partial mapping $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ such that $f_3^2(X) = F_3^2$. The necessary and sufficient conditions for the lines belonging to 4-dimensional distributions, were quasi-double lines of the partial mapping f_3^2 .

The subject of research is the process of partial mapping of the six-dimensional Euclidean space E_6 . The purpose of the study is to find the necessary and sufficient conditions for the existence of quasi-double lines of a partial space mapping f_3^2 . The study used: the method of external forms of Cartan and the method of moving reper. As a result of the study, necessary and sufficient conditions for the existence of quasi-double lines for the considered partial mapping of lines belonging to 4-dimensional distributions were found.

The study of necessary and sufficient conditions for lines belonging to 4-dimensional distributions to be quasi-double lines of a partial mapping f_3^2 *is considered for the first time, so the results obtained are new. The results obtained are recommended for use in the theory of differentiable mappings*.

Key words: *euclidean space, Frenet frame, net of Frenet, partial mapping, distribution, quasi-double line.*

Киришүү. $\Omega \subset E_6$ мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген $X \in \Omega$ ар бир чекити аркылуу берилген көптүктүн бирден гана сызыгы өтөт. Ортонормаланган, $\Re = \left(X, \vec{e}_{i,}\right)$ $\left(i, j, k = \overline{1,6}\right)$ реперин Ω аймагында бул репер берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери [1], [2] боло тургандай тандап алабыз. $\Re$ реперинин деривациондук формулалары төмөнкүдөй көрүнүштө болушат:

$$d\overrightarrow{X} = \omega^i \overrightarrow{e_i},\ d\overrightarrow{e_i} = \omega_i^k \overrightarrow{e_k}\ . \tag{1}$$

Мындагы ω^i, ω_i^k дифференциалдык формалары евклиддик мейкиндиктин структуралык теңдемелерин канаатандырышат:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2}$$

$\overrightarrow{e_i}$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин торчосун [1] Σ_6 түзүшөт. $\Re$ репери Σ_6 , торчосунун сызыктарынын жанымаларына тургузулгандыктан, ω_i^k формалары башкы формалар болушат, б.а.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j\ . \tag{3}$$

(2) формулалардын акыркы барбардыгын эске алсак, анда төмөндөгү келип чыгат:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i\ . \tag{4}$$

(3) барабардыкты сырттан дифференцирлеп төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j\ .$$

Мындан, (2) формуланы колдонсок, төмөндөгү келип чыгат:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j\ .$$

(3) формуланын негизинде акыркы барабардык төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

же

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell .$$

(барабардыктын оң жагындагы экинчи мүчөдө жана индекстеринин ордун алмаштырдык). Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

же

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell \right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Акыркы барабардыкка Картандын леммасын [3] колдонуп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

же

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l \right) \omega^m . \qquad (5)$$

Чоңдуктардын $\left\{ \Lambda_{ij}^k , \Lambda_{ijm}^k \right\}$ системасы экинчи тартиптеги геометриялык обьектти түзүшөт.

Берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин формулалары төмөндөгүдөй көрүнүштө болушат:

$$d_1 \overrightarrow{e_1} = \Lambda_{11}^2 \overrightarrow{e_2} ,$$

$$d_1 \overrightarrow{e_2} = \Lambda_{21}^1 \overrightarrow{e_1} + \Lambda_{21}^3 \overrightarrow{e_3} ,$$

$$d_1 \overrightarrow{e_3} = \Lambda_{31}^2 \overrightarrow{e_2} + \Lambda_{31}^4 \overrightarrow{e_4} ,$$

$$d_1 \overrightarrow{e_4} = \Lambda_{41}^3 \overrightarrow{e_3} + \Lambda_{41}^5 \overrightarrow{e_5} ,$$

$$d_1 \overrightarrow{e_5} = \Lambda_{51}^4 \overrightarrow{e_4} + \Lambda_{51}^6 \overrightarrow{e_6} ,$$

$$d_1 \overrightarrow{e_6} = \Lambda_{61}^5 \overrightarrow{e_5} .$$

жана

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^3 = 0, \ \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0, \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{51}^1 = 0, \Lambda_{11}^6 = -\Lambda_{61}^1 = 0 \qquad (6)$$

$$\Lambda_{21}^{5} = -\Lambda_{51}^{2} = 0,\ \Lambda_{21}^{4} = -\Lambda_{41}^{2} = 0,\ \Lambda_{31}^{5} = -\Lambda_{51}^{3} = 0.$$
$$\Lambda_{21}^{6} = -\Lambda_{61}^{2} = 0,\ \Lambda_{31}^{6} = -\Lambda_{61}^{3} = 0.\ \Lambda_{61}^{4} = -\Lambda_{41}^{6} = 0 \tag{7}$$

Мындагы $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = -\Lambda_{51}^4$, $k_5^1 = \Lambda_{51}^6 = -\Lambda_{61}^5$ – ω^1 сызыгынын биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи ийриликтери (тиешелеш түрдө), d_1 – ω^1 сызыгы боюнча дифференцирлөөнүн символу.

Σ_6 торчосунун ω^i сызыгынын жанымасындагы F_i^j $(i \neq j)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус – вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \overrightarrow{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^{j}}\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^{i}}\overrightarrow{e_i} \tag{8}$$

Ар бир $(X, \vec{e}_i)$ жанымасында төрттөн псевдофокус жашайт:

$(X, \vec{e}_1)$ жанымасында – $F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5, F_1^6$;

$(X, \vec{e}_2)$ жанымасында – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5, F_2^6$;

$(X, \vec{e}_3)$ жанымасында – $F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5, F_3^6$;

$(X, \vec{e}_4)$ жанымасында – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_4^5, F_4^6$;

$(X, \vec{e}_5)$ жанымасында – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4, F_5^6$;

$(X, \vec{e}_6)$ жанымасында – $F_6^1, F_6^2, F_6^3, F_6^4, F_6^5$.

$\Omega \subset E_6$ аймагындагы Σ_6 торчосу Френенин циклдик торчосу деп аталат, эгерде төмөндөгү реперлер бир учурда ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5, ω^6 сызыктары үчүн (тиешелеш түрдө) Френенин реперлери болушса: $\Re_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$, $\Re_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\Re_5 = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

Σ_6 торчосу Френенин циклдик торчосу болсун деп эсептейли жана аны $\tilde{\Sigma}_6$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

Изилдөөнүн материалдары.

$F_3^2 \in \left(X, \vec{e}_3\right)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_3^2} = \overrightarrow{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\overrightarrow{e_3}\,. \qquad (9)$$

X чекити $\Omega \subset E_6$ аймагында кыймылга келгенде, F_3^2 чекити өзүнүн $\Omega_3^2 \subset E_6$ аймагын "сызып" чыгат Натыйжада $f_3^2(X) = F_3^2$ боло тургандай $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз.

(9) барабардыкты дифференцирлеп жана (1), (2), (3) формулаларды колдонуп төмөндөгүнү алабыз :

$$d\overrightarrow{F_3^2} = d\overrightarrow{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\right)\overrightarrow{e_3} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}d\overrightarrow{e_3} = \omega^i\overrightarrow{e_i} + \frac{d\Lambda_{32}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\overrightarrow{e_i}$$

же

$$d\overrightarrow{F_3^2} = \omega^m\overrightarrow{e_m} + \frac{C_{32m}^2\,\omega^m}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{3m}^i\omega^m}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i}\ ,$$

мында $d\Lambda_{32}^2 = \left(\Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell\right)\omega^m = C_{32m}^2\,\omega^m$.

Акыркы барабардыктан:

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{F_3^2} = &\left[\overrightarrow{e_1} + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^1 + \left[\overrightarrow{e_2} + \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^2 \\ &+ \left[\overrightarrow{e_3} + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^3 + \left[\overrightarrow{e_4} + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^4 + \\ &+ \left[\overrightarrow{e_5} + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{35}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^5 + \left[\overrightarrow{e_6} + \frac{C_{326}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{36}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^6 \end{aligned}$$

келип чыгат. Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизебиз:

$$\overrightarrow{c_1} = \overrightarrow{e_1} + \frac{C_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{c_2}=\overrightarrow{e_2}+\frac{C^{\,2}_{\,322}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\,i}_{\,32}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{c_3}=\overrightarrow{e_3}+\frac{C^{\,2}_{\,323}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\,i}_{\,33}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{c_4}=\overrightarrow{e_4}+\frac{C^{\,2}_{\,324}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\,i}_{\,34}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{c_5}=\overrightarrow{e_5}+\frac{C^{\,2}_{\,325}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\,i}_{\,35}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_i}\ .$$

$$\overrightarrow{c_6}=\overrightarrow{e_6}+\frac{C^{\,2}_{\,326}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\,i}_{\,36}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_i}\ .$$

$\tilde{\Sigma}_6$ торчосу Френенин циклдик торчосу болгондуктан $\overrightarrow{c_i}$ векторлоу төмөндөгү көрүнүштө болушат:

$$\overrightarrow{c_1}=\overrightarrow{e_1}-\frac{\Lambda^{\,2}_{\,31}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_2}+\frac{C^{\,2}_{\,321}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,31}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{c_2}=\overrightarrow{e_2}+\frac{C^{\,2}_{\,322}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,32}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{c_3}=\left[1+\frac{C^{\,2}_{\,323}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\right]\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,33}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_4}; \tag{10}$$

$$\overrightarrow{c_4}=-\frac{\Lambda^{\,2}_{\,34}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_2}+\frac{C^{\,2}_{\,324}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{c_5}=-\frac{\Lambda^{\,2}_{\,35}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_2}+\frac{C^{\,2}_{\,325}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,35}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_4}+\overrightarrow{e_5}\ .$$

$$\overrightarrow{c_6}=-\frac{\Lambda^{\,2}_{\,36}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_2}+\frac{C^{\,2}_{\,326}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,36}}{\Lambda^{\,2}_{\,32}}\overrightarrow{e_4}+\overrightarrow{e_6}\ .$$

$\Omega^{\,2}_{\,3}$ аймагына кыймылдуу $\Re'=\left(F^2_3,\overrightarrow{c_i}\right)$ реперин бириктиребиз. Жалпы учурда (10) векторлор сызыктуу көз каранды болушпайт.

Төрт ченемдүү $\Delta_4 = \left(X, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5}\right)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон δ сызыгын карайбыз. Анын жаныма вектору $\overrightarrow{\delta} = \delta^2 \overrightarrow{e_2} + \delta^3 \overrightarrow{e_3} + \delta^4 \overrightarrow{e_4} + \delta^5 \overrightarrow{e_5}$ көрүнүшүндө болот. $\overline{\delta} = f_3^2(\delta)$ сызыгына жаныма вектору $\overrightarrow{\overline{\delta}}$ төмөндөгүдөй аныкталат: $\overrightarrow{\overline{\delta}} = \delta^2 \overrightarrow{c_2} + \delta^3 \overrightarrow{c_3} + \delta^4 \overrightarrow{c_4} + \delta^5 \overrightarrow{c_5}$.

(10) формулаларды эске алсак:

$$\overrightarrow{\overline{\delta}} = \left(\delta^2 + \delta^4 c_4^2 + \delta^5 c_5^2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\delta^2 c_2^3 + \delta^3 c_3^3 + \delta^4 c_4^3 + \delta^5 c_5^3\right)\overrightarrow{e_3} + \left(\delta^2 c_2^4 + \delta^3 c_3^4 + \delta^4 + \delta^5 c_5^4\right)\overrightarrow{e_4} + \delta^5 \overrightarrow{e_5}$$

келип чыгат, мында мында δ_i^j – $\overrightarrow{c_i}$ векторунун j – координатасы

$\overrightarrow{\delta}, \overrightarrow{\overline{\delta}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_4$ экендигин көрөбүз, демек, δ сызыгы ар дайым $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыгы болот экен.

Жогорудагыга окшош эле $\Delta'_4 = \left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\right)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон γ сызыгы ар дайым f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыгы боло тургандыгы келип чыгат.

Эми $\Delta''_4 = \left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5}\right)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон β сызыгын карайбыз. Анын жаныма вектору $\overrightarrow{\beta} = \beta^1 \overrightarrow{e_1} + \beta^3 \overrightarrow{e_3} + \beta^4 \overrightarrow{e_4} + \beta^5 \overrightarrow{e_5}$ болот. $\overline{\beta} = f_3^2(\beta)$ сызыгынын жаныма вектору $\overrightarrow{\overline{\beta}}$ төмөндөгүдөй аныкталат:

$\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^1 \overrightarrow{c_1} + \beta^3 \overrightarrow{c_3} + \beta^4 \overrightarrow{c_4} + \beta^5 \overrightarrow{c_5}$ (10) формулаларды колдонуу менен төмөнкүнү алабыз:

$$\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^1 \overrightarrow{e_1} + \left(\beta^1 c_1^2 + \beta^4 c_4^2 + \beta^5 c_5^2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\beta^1 c_1^3 + \beta^3 c_3^3 + \beta^4 c_4^3 + \beta^5 c_5^3\right)\overrightarrow{e_3} +$$
$$+ \left(\beta^1 c_1^4 + \beta^3 c_3^4 + \beta^4 + \beta^5 c_5^4\right)\overrightarrow{e_4} + \beta^5 \overrightarrow{e_5}.$$

$\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\overline{\beta}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta''_4$ шартынан төмөндөгү келип чыгат:

$$\beta^1 c_1^2 + \beta^4 c_4^2 + \beta^5 c_5^2 = 0 .$$

Мындан (10) формулаларды эске алуу менен төмөндөгү барабардыкка ээ болобуз:

$$\varLambda^{2}_{31}\beta^{1}+\varLambda^{2}_{34}\beta^{4}+\varLambda^{2}_{35}\beta^{5}=0 \qquad (11)$$

Тескерисинче, эгерде $\varDelta''_4$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон β сызыгынын жаныма векторунун координаталары (11) шартты канааттандырышса, анда β сызыгы f^2_3 бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыгы болот.

Төрт ченемдүү ($\Delta'''_4=\left(X,\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_5},\overrightarrow{e_6}\right)$) бөлүштүрүүсүнө таандык болгон ρ сызыгын карайлы. Анын жаныма вектору $\overrightarrow{\rho}=\rho^2\overrightarrow{e_2}+\rho^3\overrightarrow{e_3}+\rho^5\overrightarrow{e_5}+\rho^6\overrightarrow{e_6}$ көрүнүшүндө болот. $\overline{\rho}=f^2_3(\rho)$ сызыгынын жаныма вектору төмөндөгүдөй табылат. $\overrightarrow{\overline{\rho}}=\rho^2\overrightarrow{c_2}+\rho^3\overrightarrow{c_3}+\rho^5\overrightarrow{c_5}+\rho^6\overrightarrow{c_6}$ көрүнүшүндө издейбиз

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{\rho}}&=\left(\rho^5c^2_5+\rho^6c^2_6\right)\overrightarrow{e_2}+\left(\rho^2c^3_2+\rho^3c^3_3+\rho^5c^3_5+\rho^6c^3_6\right)\overrightarrow{e_3}+\\&+\left(\rho^2c^4_2+\rho^3c^4_3+\rho^5c^4_5+\rho^6c^4_6\right)\overrightarrow{e_4}+\rho^5\overrightarrow{e_5}+\rho^6\overrightarrow{e_6}.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\rho},\overrightarrow{\overline{\rho}},\overrightarrow{XF^2_3}\in\varDelta'''_4$ шартынан төмөндөгүнү алабыз:

$\rho^2c^4_2+\rho^3c^4_3+\rho^5c^4_5+\rho^6c^4_6=0$. Мындан, . (10) формулаларды пайдаланып төмөндөгүнү алабыз:

$$\Lambda^{4}_{32}\rho^2+\Lambda^{4}_{33}\rho^3+\Lambda^{4}_{35}\rho^5+\Lambda^{4}_{36}\rho^6=0\ . \qquad (12)$$

Тескерисинче, эгерде Δ'''_4 бөлүштүрүүсүнө таандык болгон ρ сызыгынын $\overrightarrow{\rho}$ жаныма векторунун координаталары (12) канааттандырышса, анда ρ сызыгы f^2_3 бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыгы болот.

Жыйынтык.

Жогорудагы изилдөөлөрдүн негизинде төмөндөгүдөй теорема далилденди.

Теорема

а) ($\varDelta'_4=\left(X,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}\right)$)бөлүштүрүүсүнө таандык болгон $\delta(\gamma)$ сызыгы ар дайым f^2_3 бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыгы болот;

б) $\Delta_4'' = \left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5}\right)$ ($\Delta_4''' = \left(X, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_5}, \overrightarrow{e_6}\right)$) бөлүштүрүүсүнө таандык болгон $\beta(\rho)$ сызыгы $f\,_3^2$ бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыгы болушу үчүн (11) ((12)) шарттын орун алышы зарыл жана жетиштүү.

Беш ченемдүү евклиддик мейкиндикти $f\,_3^2$, $f\,_2^1$, $f\,_5^4$, $f\,_1^5$, бөлүктөп чагылтууларынын квазикошмок сызыктарынын жашашы [8], [9], [10], [11] макалаларда изилденген

Адабияттар

1. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст]/ П.К.Рашевский// М. Наука.1967.-С.481-482.
2. Схоутен, И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст]/ И.А.Схоутен, Д.Дж.Стройк. // М. ИЛ.1948.Т.II-348.
3. Фиников, С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст]/ С.П. Фиников // М-Л.: Госттехиздат,.1948.- 432.
4. Базылев, В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст]/ В.Т Базылев // Литовский математический сборник,1966.VI.№4.-С.475-491.
5. Матиева, Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст]/ Г.Матиева // Монография. Ош,2003.-С.212-219.
6. Базылев, В.Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей [Текст]/ В.Т Базылев // / Известия ВУЗов Математика, 1967. – С. 3-11.
7. Абдуллаева, Ч.Х. Е6 евклиддик мейкиндигинде ($\left(f\,_1^5, \Delta_4\right)$ түгөйүнүн квази-кошмок сызыгынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [Текст] / [Ч.Х. Абдуллаева, М.Х.Абдулазизова, Б.Т.Адиева и др.] // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2021. - №2. -С. 13- 20.
8. Абдуллаева, Ч.Х. Төрт ченемдүү Е4 евклиддик мейкиндикте (f,Δ3) түгөйүнүн квазикошмок сызыктарынын жашашы жөнүндө [Текст] / [Ч.А. Мустапакулова, Ж.Алимова, Жакыпбек к.А..] // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2022. - №1. -С. 52- 58.
9. Абдуллаева, Ч.Х. Е5 евклиддик мейкиндигинде $f\,_2^1$ бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [Текст] / [Г.Матиева, Н.Т.Нышанбаева] // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2022. - №3(75). -С. 32- 39

10. Абдуллаева, Ч.Х. Е5 евклиддик мейкиндигинде f_5^4 бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашы жөнүндө [Текст] / [Г.Матиева, Н.О.Рустамова] // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2022. - №3(75). -С. 39- 49

11. Gulbadan Matieva , Existence of quasidouble lines of a pair (f_1^5)in Euclidean space E5 Journal of Physics: / [Cholpon Abdullayeva, , Zhyldyz Artykova] // Conference Series , Volume 1988 , Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke-28 (SKSM28), 28-29 июля 2021 г., Куантан, Паханг https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1988/1/ 012082

УДК 519.63

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_153

АНАЛИЗ БИГАРМОНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ИТЕРАЦИОННЫХ РАСШИРЕНИЙ

Мельцайкин Евгений Андреевич,

e.meltsaykin@gmail.com

Ушаков Андрей Леонидович

ushakoval@susu.ru

Южно-Уральский государственный университет,

г. Челябинск, Российская Федерация

Аннотация. *В статье приводится описание анализа бигармонических моделей методами итерационных расширений. Различные стационарные физические системы в механике моделируются с помощью краевых задач для неоднородных уравнений Софи Жермен. Используя бигармоническую модель, т.е. краевую задачу для неоднородного уравнения Софи Жермен, описывают прогибание пластин, потоки при течениях жидкостей. С помощью разработанных методов итерационных расширений получаются эффективные алгоритмы решения рассматриваемых задач.*

Ключевые слова: *бигармонические модели; методы итерационных расширений.*

ANALYSIS OF BIHARMONIC AND HARMONIC MODELS BY THE METHODS OF ITERATIVE EXTENSIONS

Meltsaykin Evgeniy Andreevich,

e.meltsaykin@gmail.com

Ushakov Andrey Leonidovich

ushakoval@susu.ru

South Ural State University,

Chelyabinsk, Russian Federation

Abstract. *The article describes the analysis of biharmonic models by iterative extension methods. Various stationary physical systems in mechanics are modeled using boundary value problems for inhomogeneous Sophie Germain. Using the biharmonic model, i.e. boundary value problem for the inhomogeneous Sophie Germain equation, describe the deflection of plates, flows during fluid flows. With the help of the developed methods of iterative extensions, efficient algorithms for solving the problems under consideration are obtained.*

Key words: *biharmonic models; methods of iterative extensions.*

Введение

Рассматривается бигармоническая модель, т.е. смешанную краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения в ограниченной области на плоскости $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\Delta^2 \breve{u} = \breve{f} \qquad (1)$$

с краевыми условиями четырех типов

$$\breve{u} = \frac{\partial \breve{u}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_0} = 0, \breve{u} = l_1\breve{u}\bigg|_{\Gamma_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \breve{u}}{\partial n} = l_1\breve{u}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, l_1\breve{u} = l_2\breve{u}\bigg|_{\Gamma_3} = 0,$$

где

$$\partial\Omega = \bar{s}, s = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \Gamma_i \cup \Gamma_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 0,1,2,3,$$

$$l_1\breve{u} = \Delta\breve{u} + (1-\sigma)n_1n_2\breve{u}_{xy} - n_2^2\breve{u}_{xx} - n_1^2\breve{u}_{yy},$$

$$l_2\breve{u} = \frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left(n_1n_2\left(\breve{u}_{yy} - \breve{u}_{xx}\right) + (n_1^2 - n_2^2)\breve{u}_{xy}\right),$$

$$n_1 = -\cos(n, x)\,, n_2 = -\cos(n, y)\,, \sigma \in (0; 1).$$

Бигармоническую модель можно сформулировать как скалярную модель, задачу представления функционала в форме скалярного произведения

$$\breve{u} \in \breve{H}: [\breve{u}, \breve{v}] = F(\breve{v}) \forall \breve{v} \in \breve{H}, F \in \breve{H}', \qquad (2)$$

где соболевское пространство

$$\breve{H} = \breve{H}(\Omega) = \left\{\breve{v} \in W_2^2(\Omega): \breve{v}\bigg|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \frac{\partial \breve{v}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0\right\},$$

билинейная форма, скалярное произведение

$$[\breve{u}, \breve{v}] = \Lambda(\breve{u}, \breve{v}) = \int\limits_\Omega (\sigma\Delta\breve{u}\Delta\breve{v} + (1-\sigma)(\breve{u}_{xx}\breve{v}_{xx} + 2\breve{u}_{xy}\breve{v}_{xy} + \breve{u}_{yy}\breve{v}_{yy}))d\Omega, \sigma \in (0; 1),$$

если $\breve{f}$ – заданная функция, то функционал

$$F(\breve{v}) = (\breve{u}, \breve{v}) = \int\limits_\Omega \breve{f} v d\Omega.$$

Для задачи (2) следующее предположение обеспечивает существование и единственность ее решения [1, 4]

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): c_1\left|\left|\breve{v}\right|\right|^2_{W_2^2(\Omega)} \leq \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \leq c_2\left|\left|\breve{v}\right|\right|^2_{W_2^2(\Omega)} \forall \breve{v} \in \breve{H}.$$

Такие задачи в рамках изучаемого направления методы фиктивной области исследовали, например, А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих [3], С.Б. Сорокин [5], Г.И. Марчук, Ю.А. Кузнецов, А.М. Мацокин [2] и др. При решении приведенных задач имеются проблемы. Перспективное направление методы фиктивной области по решению этих задач также имеет проблемы. Будем, использовать, что, если задачи, рассматриваемые как системы аналогичны, то они имеют аналогичные свойства, а методы решения этих задач будут также аналогичны между собой. Для разработки новых эффективных методов будем применять обобщения метода фиктивной области, т.е. методы итерационных расширений. В методе фиктивной области на примере механики увеличиваем реакцию опоры и жесткость материала на фиктивном продолжении, т.е. дополнительно используем выбор двух параметров. Минимизируем ошибку в норме более сильной, чем энергетическая норма возникающей задачи. Применяем метод минимальных невязок с указанием условий достаточных для его сходимости. При этом новом подходе относительные ошибки предлагаемых итерационных процессов мажорируются бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями. Основной целью описываемых работ являлась разработка асимптотически оптимальных методов решения приведенных задач [6–9].

1. Анализ бигармонической модели

1.1. Бигармоническая модель

Приведем решаемую задачу при $\omega = 1$ и фиктивную задачу при $\omega = II$

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega : \Lambda_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = F_\omega(\breve{v}_\omega) \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega, F_\omega \in \breve{H}'_\omega \qquad (3)$$

где используем Соболевские пространства

$$\breve{H}_\omega = \breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \left\{ \breve{v}_\omega \in W_2^2(\Omega_\omega) : \breve{v}_\omega \Big|_{\Gamma_{\omega,0} \cup \Gamma_{\omega,1}} = 0, \frac{\partial \breve{v}_\omega}{\partial n_\omega} \Big|_{\Gamma_{\omega,0} \cup \Gamma_{\omega,2}} = 0 \right\}$$

на ограниченных областях $\Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2$ с границами

$$\partial\Omega_\omega = \bar{s}_\omega, s_\omega = \Gamma_{\omega,0} \cup \Gamma_{\omega,1} \cup \Gamma_{\omega,2} \cup \Gamma_{\omega,3},$$
$$\Gamma_{\omega,i} \cap \Gamma_{\omega,j} = \emptyset, \text{ если } i \neq j, i, j = 0,1,2,3,$$

n_ω – внешние нормали у $\partial\Omega_\omega$, билинейные формы при $\breve{a}_\omega \in [0; +\infty), \sigma_\omega \in (0; 1)$

$$\Lambda_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} (\sigma_\omega \Delta\breve{u}_\omega \Delta\breve{v}_\omega + (1 - \sigma_\omega)(\breve{u}_{\omega xx}\breve{v}_{\omega xx} + 2\breve{u}_{\omega xy}\breve{v}_{\omega xy} + \breve{u}_{\omega yy}\breve{v}_{\omega yy})) d\Omega_\omega.$$

У каждой из задач в (3) существует и единственное решение при выполнении предположений [1, 4]

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty) : c_1 \|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^2(\Omega_\omega)} \leq \Lambda_\omega(\breve{v}_\omega, \breve{v}_\omega) \leq c_2 \|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^2(\Omega_\omega)} \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega.$$

Если $\breve{f}_\omega$ – заданная функция, то

$$F_\omega(\breve{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega.$$

В решаемой задаче при $\omega = 1, a_1 = 0, \Gamma_{1,0} \neq \emptyset$. В фиктивной задаче при $\omega =$

$II, \breve{f}_{II} = 0, \breve{u}_{II} = 0.$

1.2. Продолженная бигармоническая модель и ее аналитическое исследование

Приведем продолженную задачу

$$\breve{u} \in \breve{V}: \Lambda_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \Lambda_{II}(\breve{u}, \breve{v}) = F_1(I_1\breve{v}) \forall \breve{v} \in \breve{V}, \quad (4)$$

где используем расширенное пространство решений

$$\breve{V} = \breve{V}(\Pi) = \left\{\breve{v} \in W_2^2(\Pi): \breve{v}\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \frac{\partial \breve{v}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0\right\}.$$

Полагаем, что область решения у исходной задачи дополняется до прямоугольника

$$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_{II} = \overline{\Pi}, \Omega_1 \cup \Omega_{II} = \emptyset, \Omega_1, \Omega_{II} \subset \mathbb{R}^2,$$

граница у прямоугольной области

$$\partial\Pi = \bar{s}, s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

Считаем, что границы первой области и второй области пересекаются

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{II} = \bar{S}, S = \Gamma_{1,0} \cap \Gamma_{II,3} \neq \emptyset,$$

n – внешняя нормаль у $\partial\Pi$. Подпространство решений продолженной задачи

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Pi) = \left\{\breve{v}_1 \in \breve{V}: \breve{v}_1\Big|_{\Pi\backslash\Omega_1} = 0\right\}.$$

В формулировке продолженной задачи применяем оператор проектирования

$$I_1: \breve{V} \to \breve{V}_1, \breve{V}_1 = imI_1, I_1 = I_1^2.$$

Введем подпространства

$$\breve{V}_3 = \breve{V}_3(\Pi) = \left\{\breve{v}_3 \in \breve{V}: \breve{v}_3\Big|_{\Pi\backslash\Omega_{II}} = 0\right\}, \breve{V}_0 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_3,$$

$$\breve{V}_2 = \breve{V}_2(\Pi) = \{\breve{v}_2 \in \breve{V}: \Lambda(\breve{v}_2, \breve{v}_0) = 0, \forall\, \breve{v}_0 \in \breve{V}_0\},$$

$$\breve{V} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_{II}, \breve{V}_1 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2, \breve{V}_{II} = \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3$$

Прямые суммы рассматриваются, используя скалярное произведение, порождаемое билинейной формой

$$\Lambda(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_1(\breve{u}, \breve{v}) + \Lambda_{\text{II}}(\breve{u}, \breve{v})\ \forall\, \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

Предполагается, что билинейная форма такова, что

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): c_1||\breve{v}||^2_{W_2^2(\Pi)} \leq\ \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \leq c_2||\breve{v}||^2_{W_2^2(\Pi)} \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Используем положение о возможности продолжения функций

$$\exists \breve{\beta}_1 \in (0; 1], \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1; 1]: \breve{\beta}_1\Lambda(\breve{v}_2, \breve{v}_2) \leq \Lambda_{\text{II}}(\breve{v}_2, \breve{v}_2) \leq \breve{\beta}_2\Lambda(\breve{v}_2, \breve{v}_2)\ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Заметим, что

$$\breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \breve{V}_\omega(\Omega_\omega), \omega \in \{1, \Pi\}.$$

Исследование продолженной бигармонической модели проводится модифицированным методом фиктивных компонент [6, 7, 9]:

$$\breve{u}^k \in \breve{V}: \Lambda(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau_{k-1}\Big(\Lambda_1(\breve{u}^{k-1}, I_1\breve{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}) - F_1(I_1, \breve{v})\Big)$$

$$\forall \breve{v} \in \breve{V}, \tau_0 = 1, \tau_{k-1} = \tau = \tfrac{2}{\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2}, k \in N \setminus \{1\}, \forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_1 \subset \breve{V} \qquad (5)$$

Введем норму

$$\big||\breve{v}|\big|_{\breve{V}} = \sqrt{\Lambda(\breve{v}, \breve{v})}.$$

Теорема 1. *Выполняются оценки сходимости*

$$\Big||\breve{u}^k - \breve{u}|\Big|_{\breve{V}} \le \varepsilon\big||\breve{u}^0 - \breve{u}|\big|_{\breve{V}}, k \in N,$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1}, \delta_1 = \sqrt{\big||I_1|\big|_{\breve{V}}^2 - 1}, 0 \le q = \frac{(\breve{\beta}_2 - \breve{\beta}_1)}{\breve{\beta}_2 + \breve{\beta}_1} < 1.$$

1.3. Продолженная бигармоническая модель при дискретизации и ее численный анализ

Проведем дискретизацию продолженной модели, когда

$$\Pi = (0; b_1) \times (0; b_2), \Gamma_1 = \{b_1\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{b_2\},$$

$$\Gamma_2 = \{0\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{0\}, b_1, b_2 \in (0; +\infty).$$

Введем сетку

$$(x_i; y_j) = \big((i - 1{,}5)h_1; (j - 1{,}5)h_2\big),$$

$$h_1 = \frac{b_1}{m - 1{,}5}, h_2 = \frac{b_2}{n - 1{,}5}, i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n, m - 2, n - 2 \in N.$$

Рассматриваем сеточные функции в узлах сетки

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R},\ i = 1,2 \dots, m,\ j = 1,2 \dots, n,\ m - 2, n - 2 \in \mathbb{N}.$$

Используем восполнение для сеточных функций

$$\Phi^{i,j}(x; y) = \Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i = 2, \dots, m-1,\ j = 2, \dots, n-1,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x) = [2/i]\Psi(x/h_1 - i + 4) + \Psi(x/h_1 - i + 3) - [(i+1)/m]\Psi(x/h_1 - i + 1),$$

$$\Psi^{2,j}(y) = [2/j]\Psi(y/h_2 - j + 4) + \Psi(y/h_2 - j + 3) + [(j+1)/n]\Psi(y/h_2 - j + 1),$$

$$\Psi(z)=\begin{cases}0,5z^2, & z\in[0;1],\\ -z^2+3z-1,5, & z\in[1;2],\\ 0,5z^2-3z-4,5, & z\in[2;3],\\ 0, & z\notin(0;3).\end{cases}$$

Определяем, что базисные функции вне прямоугольника равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x;y)=0,\ (x;y)\notin\Pi,\ i=2...,m-1,\ j=2...,n-1,\ m-2,n-2\in\mathbb{N}.$$

Линейные комбинации из базисных функций дают конечномерное подпространство в расширенном пространстве

$$\tilde{V}=\left\{\tilde{v}=\sum_{i=2}^{m-1}\sum_{j=2}^{n-1}v_{i,j}\Phi^{i,j}(x;y)\right\}\subset\breve{V}.$$

Рассмотрим продолженную модель в матричной форме

$$\overline{u}\in\mathbb{R}^N:\ B\overline{u}=\overline{f},\ \overline{f}\in\mathbb{R}^N, \tag{6}$$

полагая, что оператор проектирования зануляет коэффициенты при базисных функциях носители, у которых не лежат целиком в первой области, а продолженная матрица и продолженная правая часть у системы определяются равенствами

$$\left\langle B\overline{u},\overline{v}\right\rangle=\Lambda_1(\tilde{u},I_1\tilde{v})+\Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V},\ \left\langle\overline{f},\overline{v}\right\rangle=F_1(I_1\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V},$$

$$\left\langle\overline{f},\overline{v}\right\rangle=(\overline{f},\overline{v})h_1h_2=\overline{f}\,\overline{v}h_1h_2,\ \overline{v}=(v_1,v_2,...,v_N)'\in\mathbb{R}^N,N=(m-2)(n-2).$$

При этом занумеруем первыми коэффициенты при базисных функциях с носителями, целиком лежащими внутри первой области. Далее занумеруем коэффициенты при базисных функциях носители, которых пересекают границу и первой, и второй области. Закончим нумерацию на коэффициентах при базисных функциях с носителями, целиком лежащими внутри второй области. Тогда векторы имеют следующую структуру

$$\overline{v}=(\overline{v}_1',\overline{v}_2',\overline{v}_3')',\ \overline{u}=(\overline{u}_1',\overline{0}',\overline{0}')',\ \ \overline{f}=(\overline{f}_1',\overline{0}',\overline{0}')'.$$

Матрица имеют структуру

$$B=\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0\\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23}\\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33}\end{bmatrix}.$$

Определим матрицы

$$\left\langle\Lambda_{\mathrm{I}}\overline{u},\overline{v}\right\rangle=\Lambda_1(\tilde{u},\tilde{v}),\ \left\langle\Lambda_{\mathrm{II}}\overline{u},\overline{v}\right\rangle=\Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V}.$$

Матрицы имеют структуру

$$\Lambda_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Зададим расширенную матрицу

$$\Lambda = \Lambda_{\mathrm{I}} + \Lambda_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Введем соответствующие подпространства

$$\bar{V}_1 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_2 = \bar{0},\ \bar{v}_3 = \bar{0} \right\},$$

$$\bar{V}_3 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_1 = \bar{0},\ \bar{v}_2 = \bar{0} \right\}, \bar{V}_0 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_3,$$

$$\bar{V}_2 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \Lambda_{11}\bar{v}_1 + \Lambda_{12}\bar{v}_2 = \bar{0},\ \Lambda_{32}\bar{v}_2 + \Lambda_{33}\bar{v}_3 = \bar{0} \right\}.$$

Имеют место разложения

$$\mathbb{R}^N = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_{\mathrm{II}}, \bar{V}_{\mathrm{I}} = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2, \bar{V}_{\mathrm{II}} = \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3.$$

Приведем предположения о продолжении в матричной форме

$$\exists \beta_1 \in (0;+\infty),\ \beta_2 \in [\beta_1;+\infty) : \beta_1 \left\langle \Lambda\bar{v}_2, \bar{v}_2 \right\rangle \le \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \bar{v}_2 \right\rangle \le \beta_2 \Lambda \left\langle \Lambda\bar{v}_2, \bar{v}_2 \right\rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Продолженная бигармоническая модель в матричной форме

$$B\bar{u} = \bar{f}, \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Исходная задача в матричной форме, фиктивная задача в матричной форме

$$\Lambda_{11}\bar{u}_1 = \bar{f}_1, \begin{bmatrix} \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

При исследовании продолженной бигармонической модели в матричной форме, зададим расширенную матрицу по-новому

$$C = \Lambda_{\mathrm{I}} + \gamma\Lambda_{\mathrm{II}}, \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}, \gamma \in (0;+\infty).$$

Используем выполнение положений о продолжении функций следующей форме

$$\exists\gamma_1 \in (0;+\infty),\, \gamma_2 \in [\gamma_1;+\infty) : \gamma_1^2 \left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \right\rangle \le \left\langle \Lambda\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2 \right\rangle \le \gamma_2^2 \left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \right\rangle \;\forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2,$$

$$\exists\alpha \in (0;+\infty) : \left\langle \Lambda_{\mathrm{I}}\bar{v}_2, \Lambda_{\mathrm{I}}\bar{v}_2 \right\rangle \le \alpha^2 \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2 \right\rangle \;\forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Для решения задачи (6) как обобщение модифицированного метода фиктивных компонент применим метод итерационных расширений [8, 9]:

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),\, k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\, \gamma > \alpha,\, \tau_0 = 1,\, \tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где соответственно вычисляются невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\, \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1},\, \bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\, k \in \mathbb{N}.$$

Определим норму

$$\|\bar{v}\|_{C^2} = \sqrt{\left\langle C^2\bar{v}, \bar{v} \right\rangle} \;\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема 2. *Для процесса (7) выполняется такая оценка*

$$\left\|\bar{u}^k - \bar{u}\right\|_{C^2} \le \varepsilon \left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{C^2},\, \varepsilon = 2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1},\, k \in \mathbb{N}.$$

Приведем алгоритмическую реализацию метода итерационных расширений для бигармонической модели. Используем метод минимальных невязок для решения задачи (6).

I. Начальное приближение, итерационный параметр

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\, \tau_0 = 1.$$

II. Невязка

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\, k \in \mathbb{N}.$$

III. Квадрат нормы абсолютной ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}.$$

IV. Поправка

$$\bar{w}^{k-1} : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

V. Эквивалентная невязка

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VI. Итерационный параметр

$$\tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VII. Очередное приближение

$$\bar{u}^{k} = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

VIII. Критерий остановки итераций

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}_0 \mathrm{E}^2,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \mathrm{E} \in (0;1).$$

Литература

1. Aubin, J.-P. Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems[Text] / Aubin J.-P. //New York: Wiley-Interscience, 1972. – 360 p.
2. Marchuk, G.I. Fictitious Domain and Domain Decomposion Methods. Russian Journal Numerical Analysis and MathematicalModelling, [Text] / Marchuk G.I., Kuznetsov Yu.A., Matsokin A.M. // 1986, vol. 1, № 1. P. 3–35.
3. Matsokin, A.M. The Fictitious-Domain Method and Explicit Continuation Operators. Computational Mathematics and Mathematical Physics[Text] / Matsokin A.M., Nepomnyaschikh S.V.// 1993, vol. 33, № 1. P. 52–68.
4. Oganesyan, L.A. Variation-Difference Methods for solving Elliptic Equations. Erevan[Text] /, Izd-vo AN ArmSSR, 1979. – 235 p.
5. Sorokin, S.B. Analytical Solution of Generalized Spectral Problem in the Method of Recalculating Boundary Conditions for a Biharmonic Equation[Text] / Oganesyan L.A., Rukhovets L.A. // Siberian Journal Numerical Mathematics, 2013, vol. 16, № 3. P. 267–274.
6. Ushakov, A.L. About Modeelling of Deformations of Plates[Text] / Ushakov A.L.// Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2015, vol. 8, № 2. P. 138–142.
7. Ushakov, A.L. Investigation of a Mixed Boundary Value Proble for the Poisson Equation[Text] / Ushakov A.L. // 2020. – Proceedings – 2020 International Russian Automation Conference, RusAutoCon 2020, article ID 9208198, P 273–278.

8. Ushakov, A.L. Numerical Anallysis of the Mixed Boundary Value Problem for the Sophie Germain Equation. [Text] / Ushakov A.L. // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2021, vol. 8, № 1. P. 46–59.

9. Ushakov, A.L. Analysis of the Mixed Boundary Value Problem for the Poisson's Equation[Text] / Ushakov A.L.// Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics, 2021, vol. 13, № 1. P. 29–40.

УДК 517.9

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_163

ТРЕХСКОРОСТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ИНТЕРГАЛОМ СТОЛКНОВЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Омуров Таалайбек Дардайылович, д.ф.-м.н., профессор,

Саркелова Жылдыз Жанышевна, ст. преподаватель,

sjjyldyzaa@gmail.com

Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына,

Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *В данной статье исследуется многоскоростная сингулярно-возмущенная обратная задача переноса в неограниченной области. В работах [1, 2] и др., множителем интеграла столкновений в обычных задачах переноса было максвелловское распределение или максвелловское распределение умноженное на частоту столкновения. В отличии от указанной задачи, здесь рассматривается нелинейное сингулярно-возмущенное интегро-дифференциальное уравнение переноса второго порядка, причем нарушение малости погранслойной функции относительно малого параметра носит нелокальный характер, в чем и заключается актуальность исследования указанной сингулярно-возмущенной обратной задачи.*

Результаты исследуемой сингулярно-возмущенной обратной задачи, получены на основе представления асимптотического характера.

Ключевые слова: *сингулярно-возмущенная обратная задача переноса, уравнение переноса, представление асимптотического характера, вырожденная обратная задача, малый параметр.*

ЧЕКСИЗ АЙМАКТА КАГЫЛЫШУУ ИНГЕРАЛЫ МЕНЕН ЖҮКТӨЛГӨН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ЖЫЛЫШУУ ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН ҮЧ ЫЛДАМДЫКТАГЫ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕ

Омуров Таалайбек Дардайылович, ф.-м.и.д., профессор,

Саркелова Жылдыз Жанышевна, ага окутуучу,

sjjyldyzaa@gmail.com

Ж.Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университет,

Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Бул макалада биз чексиз аймакта көп ылдамдыктагы сингулярдуу козголгон тескери* *жылышуу маслесин изилдейбиз. [1, 2] жана башка илимий эмгектерде кадимки жылышуу маслеси кагылышуунун интегралдык фактору Максвеллдик бөлүштүрүү же кагылышуу жыштыгына көбөйтүлгөн Максвеллдик бөлүштүрүү болгон.*

Көрсөтүлгөн маселеден айырмаланып, бул жерде биз экинчи даражадагы сызыктуу эмес сингулярдуу козголгон интегро-дифференциалдык жылышуу теңдемесин изилдейбиз, ал эми чек ара катмар функциясынын кичинекей параметрге карата аздыгынын бузулушу локалдык эмес болгон үчүн, бул көрсөтүлгөн сингулярдуу козголгон тескери маселени изилдөө актуалдуу болуп саналат.

Изилденген сингулярдуу козголгон тескери маселенин натыйжалары асимптотикалык көрүнүштүн негизинде алынат.

Ачкыч сөздөр: *сингулярдуу козголгон тескери жылышуу маселеси, жылышуу теңдеме, асимптотикалык көрсөтүү, тескери маселе, кичинекей параметр.*

THREE-VELOCITY INVERSE PROBLEM FOR A LOADED SINGULARLY PERTURBED TRANSPORT EQUATION WITH A COLLISION INTEGRAL IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Omurov Taalaibek Dardaiylovich, Dr Sc, professor,

Sarkelova Zhyldyz Zhanyshevna, teacher,

sjjyldyzaa@gmail.com

Kyrgyz National University J. Balasagyn,

Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *In this article, we study a multivelocity singularly perturbed inverse transport problem in an unbounded domain. In [1, 2] and others, the factor of the collision integral in conventional transport problems was the Maxwellian distribution or the Maxwellian distribution multiplied by the collision frequency. In contrast to the specified problem, here we consider a nonlinear singularly perturbed integro-differential transfer equation of the second order, and the violation of the smallness of the boundary layer function with respect to a small parameter is non-local, which is the relevance of studying the indicated singularly perturbed inverse problem.*

The results of the studied singularly perturbed inverse problem are obtained on the basis of an asymptotic representation.

Key words: *singularly perturbed inverse transport problem, transport equation, asymptotic representation, degenerate inverse problem, small parameter.*

Рассмотрим трехскоростную коэффициентно-обратную задачу переноса вида:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{\beta}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(E^{1,1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}U_{\varepsilon}\right)+U^2_{\varepsilon}(t,x,y,z)\right]+\lambda E^{1,1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}U_{\varepsilon}+h_0(x,y,z)U_{\varepsilon}=\\&=Z_{\varepsilon}(x,y,z)f(t)+\varepsilon U_{\varepsilon}(t,x,y,z_0)(KU_{\varepsilon})(t,x,y,z),\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

$$\begin{cases} (U_{\varepsilon t}^{(i)}(t,x,y,z)\,|_{t=0} = V_t^{(i)}(0,x,y,z) + (2a_1x\varepsilon^{-1} + 2a_2y\varepsilon^{-1} + 2a_2z\varepsilon^{-1})^i \exp\left(-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{\varepsilon} \right), \\ V_t^{(i)}(0,x,y,z) = \varphi_i(x,y,z,),\ (i=0,1),\ \ \forall (x,y,z) \in R^3, \end{cases} \tag{2.4.2}$$

$$\begin{cases} (U_{(a_1,a_2,a_3)}^{1,1,1,1})\,|_{t=T} \equiv (U_{\varepsilon t} + a_1U_{\varepsilon x} + a_2U_{\varepsilon y} + a_3U_{\varepsilon z})\,|_{t=T} = g_0(x,y,z) + g_\varepsilon(x,y,z), \\ (V_t + a_1V_x + a_2V_y)_{t=T} = g_0(x,y,z),\ \ \forall (x,y,z) \in R^3, \end{cases} \tag{2.4.3}$$

при этом вводится информация относительно исходных данных в виде:

$$\begin{cases} \| g_\varepsilon \|_{L^p(R^3)} = \left(\iiint\limits_{R^3} | g_\varepsilon(x,y,z) |^p \, dxdydz \right)^{\frac{1}{p}} \le \Delta_1(\varepsilon), \\ \| g_\varepsilon(x - a_1(t-s), y - a_2(t-s), z - a_3(t-s)) \|_{L^p(0,T)} = \\ = \left(\sup\limits_{\bar{\Omega}_0} \int\limits_0^t | g_\varepsilon(x - a_1(t-s), y - a_2(t-s), z - a_3(t-s)) |^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \le \Delta_2(\varepsilon), \\ (\Delta_1, \Delta_2 \le \Delta_0(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0), \\ \| U_\varepsilon(0,x,y,z) - V(0,x,y,z) \|_{L^p(R^3)} \le \left(\dfrac{\pi}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{p}} = \gamma_0 \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \\ \mathrm{E}_{(a_1,a_2,a_3)}^{1,1,1,1} = \dfrac{\partial}{\partial t} + a_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + a_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + a_3 \dfrac{\partial}{\partial z}, \end{cases} \tag{2.4.4}$$

где $(U_\varepsilon, Z_\varepsilon)$ - являются неизвестными функциями. В указанных условиях требуется показать близости решений сингулярно-возмущенной обратной задачи и вырожденной обратной задачи в классе функций $W_h^p(\Omega_0)$, здесь: $0 < h_0(x,y,z),\ f(t),\ \varphi_i(x,y,z),\ 0 \le K(.)$, $g_0(x,y,z,),\ g_\varepsilon(x,y,z),\ 0 < a_i,\ \lambda = const,\ (i = \overline{1,3}),\quad 0 < \beta < \dfrac{1}{2}$ - являются известными, причем

$$\begin{cases} KU_\varepsilon \equiv \int\limits_{R^3} K(x,y,z,x',y',z')\,h(x',y',z')\,U_\varepsilon(t,x',y',z')\,d\Omega, (d\Omega = dxdydz), \\ \int\limits_{R^3} K(x,y,z,x',y',z')\,d\Omega = 1; h_0 \equiv h_1(x) + h_2(y) + h_3(z) + h(x,y,z), \\ 0 \le h \le \tilde{h} = const, 0 \le h_0 \le \tilde{h}_0 = const, \forall (x,y,z) \in R^3, \\ \left(\int\limits_{R^3} h(x,y,z)dxdydz \right)^{\frac{1}{p}} \le \gamma_1 = const; \sup\limits_{[0,T]} | f^{(i)}(t) | \le f_0 = const, (i = 0,1), \\ f(0) = 0;\ f(T) \ne 0;\ f(T) - \int\limits_0^T \exp\left(-\dfrac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(T-s) \right) f'(s)ds = M_0(T,\lambda,\varepsilon^\beta) \ne 0, \\ \forall \varepsilon \in (0,1), (\varepsilon = 0); 0 < \dfrac{1}{\lambda} = const << 1. \end{cases} \tag{2.4.5}$$

1. Известно, что при $\varepsilon=0$ из коэффициентно-обратной задачи (2.4.1) - (2.4.3) следует:

$$E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}V+\frac{1}{\lambda}h_0(x,y,z)V=\frac{1}{\lambda}\tilde{Z}(x,y,z)\,f(t), \qquad (2.4.6)$$

$$V_t^{(i)}(0,x,y,z)=\varphi_i(x,y,z),\ (i=0,1),\ \forall(x,y,z)\in R^2, \qquad (2.4.7)$$

$$\left(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}V\right)|_{t=T}=g_0(x,y,z),\ \forall(x,y,z)\in R^2, \qquad (2.4.8)$$

где задача (2.4.6) - (2.4.8) называется вырожденной обратной задачей переноса, причем $\left(V,\tilde{Z}\right)$– неизвестные функции.

Видно, что из вырожденной обратной задачи в условиях (2.4.5), (2.4.7), (2.4.8) из уравнения (2.4.6) следует система:

$$\begin{cases} E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}V+\frac{1}{\lambda}h_0(x,y,z)V=(f(T))^{-1}f(t)\left[g_0(x,y,z)+\frac{1}{\lambda}h_0V\right]\equiv\left(B_0V\right)(t,x,y,z),\\ \tilde{Z}(x,y,z)=(f(T))^{-1}\left[\lambda g_0(x,y,z)+h_0V(t,x,y,z)\right]. \end{cases} \qquad (2.4.9)$$

Следовательно, на основе

$$V=Q(t,x,y,z)\exp\left[\left(\tfrac{1}{\lambda a_1}\int_{-\infty}^{x}h_1(\tau_1)d\tau_1+\tfrac{1}{\lambda a_2}\int_{-\infty}^{y}h_2(\tau_2)d\tau_2+\tfrac{1}{\lambda a_3}\int_{-\infty}^{z}h_3(\tau_3)d\tau_3\right)\right], \qquad (2.4.10)$$

с условием

$$Q|_{t=0}=\varphi_0(x,y,z)\exp\left[\tfrac{1}{\lambda a_1}\int_{-\infty}^{x}h_1(\tau_1)d\tau_1+\tfrac{1}{\lambda a_2}\int_{-\infty}^{y}h_2(\tau_2)d\tau_2+\tfrac{1}{\lambda a_3}\int_{-\infty}^{z}h_3(\tau_3)d\tau_3\right]\equiv$$
$$\equiv\psi_0(x,y,z),\ \forall(x,y,z)\in R^2, \qquad (2.4.11)$$

из (2.4.6) имеем уравнение вида:

$$E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_2)}Q=\left\{-\frac{1}{\lambda}h(x,y,z)V+(B_0V)(t,x,y,z)\right\}\exp\left(\frac{1}{\lambda a_1}\int_{-\infty}^{x}h_1(\tau_1)d\tau_1+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\lambda a_2}\int_{-\infty}^{y}h_2(\tau_2)d\tau_2+\frac{1}{\lambda a_3}\int_{-\infty}^{z}h_3(\tau_3)d\tau_3\right), \qquad (2.4.12)$$

т.е. (2.4.11), (2.4.12) - являются задачей Коши относительно функции $Q(t,x,y,z)$. Тогда из (2.4.2) следует:

$$Q=\psi_0(x-a_1t,y-a_2t,z-a_3t)+$$
$$+\int_0^t\left(\exp\left(\frac{1}{\lambda a_1}\int_{-\infty}^{x-a_1(t-s)}h_1(\tau_1)d\tau_1+\frac{1}{\lambda a_2}\int_{-\infty}^{y-a_2(t-s)}h_2(\tau_2)d\tau_2+\frac{1}{\lambda a_3}\int_{-\infty}^{z-a_3(t-s)}h_3(\tau_3)d\tau_3\right)\right)\times$$
$$\times\left\{-\frac{1}{\lambda}h(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))V(s,x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-\right.$$
$$\left.-a_3(t-s))+(B_0V)(s,x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))\right\}ds. \qquad (2.4.13)$$

Поэтому, подставляя (2.4.13) в (2.4.10), имеем

$$V = \varphi_0(x-a_1t, y-a_2t, z-a_3t)\exp\left[-\left(\frac{1}{\lambda a_1}\int\limits_{x-a_1t}^{x} h_1(\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{\lambda a_2}\int\limits_{y-a_2t}^{y} h_2(\tau_2)d\tau_2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\lambda a_3}\int\limits_{z-a_3t}^{z} h_3(\tau_3)d\tau_3\right)\right] + \int\limits_0^t\left(\exp\left[-\left(\frac{1}{\lambda a_1}\int\limits_{x-a_1(t-s)}^{x} h_1(\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{\lambda a_2}\int\limits_{y-a_2(t-s)}^{y} h_2(\tau_2)d\tau_2 + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{1}{\lambda a_3}\int\limits_{z-a_3(t-s)}^{z} h_3(\tau_3)d\tau_3\right)\right]\right)\left\{-\frac{1}{\lambda}h(x-a_1(t-s), y-a_2(t-s), z-a_3(t-s))\times\right. \tag{2.4.14}$$
$$\times V(s, x-a_1(t-s), y-a_2(t-s), z-a_3(t-s)) + (B_0V)\times$$
$$\left.\times(s, x-a_1(t-s), y-a_2(t-s), z-a_3(t-s))\right\} ds \equiv (BV)(t,x,y,z),$$

где (2.4.14) является нагруженным интегральным уравнением второго рода относительно функции $V(t,x,y,z)$. Так как $0 < \frac{1}{\lambda} = const << 1,$ то оператор B допускает условия принципа Банаха [3], т.е. уравнение (2.4.14) разрешимо в $C(\bar{\Omega}_0)$. А это означает, что функция $V \in C^{1,1,1}(\bar{\Omega}_0)$ является известной. Тогда, с учетом (2.4.9), и функция $\tilde{Z}(x,y,z)$ считается известной. В этом случае предположим, что функции: $(V_t)_t, (V_x)_t, (V_y)_t, (V_z)_t \in L^p(0,T)$ для всех фиксированных $(x,y,z) \in R^2$, т.е.:

$$\begin{cases} \| V_{t^2} \|_{L^p} = \left(\int\limits_0^T | V_{t^2}(t,x,y,z)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le C_{01}, \\ \| V_{tx} \|_{L^p} = \left(\int\limits_0^T | V_{tx}(t,x,y,z)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le C_{02}, \\ \| V_{ty} \|_{L^p} = \left(\int\limits_0^T | V_{ty}(t,x,y,z)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le C_{03}, \\ \| V_{tz} \|_{L^p} = \left(\int\limits_0^T | V_{tz}(t,x,y,z)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le C_{04}, \forall (x,y,z) \in R^2, \\ C_0 = \max(C_{01}, C_{02}, C_{03}, C_{04}). \end{cases} \tag{2.4.15}$$

Лемма 2.4.1. При выполнении условий (2.4.5), (2.4.7), (2.4.8) вырожденное уравнение (2.4.6) разрешимо в $C^{1,1,1}(\bar{\Omega}_0)$, причем допускается условие (2.4.15) для функций $V_{t^2}, V_{tx}, V_{ty}, V_{tz}$.

2. Далее, чтобы выяснить разрешимость сингулярно-возмущенной обратной задачи переноса, применим представление асимптотического характера, т.е.:

$$
\begin{cases} U_\varepsilon(t,x,y,z) = V + \xi_\varepsilon + \exp\left(-\dfrac{(x-a_1t)^2 + (y-a_2t)^2 + (x-a_3t)^2}{\varepsilon} \right), \\ Z_\varepsilon(x,y,z) = \tilde{Z} + \eta_\varepsilon(x,y,z). \end{cases} \tag{2.4.16}
$$

Тогда из (2.4.1), с учетом (2.4.6), (2.4.16) вытекает:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^\beta \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon \right) + \left[V + \xi_\varepsilon + \exp\left(-\frac{(x-a_1t)^2 + (y-a_2t)^2 + (z-a_3t)^2}{\varepsilon} \right) \right]^2 \right\} + \\
&+\lambda E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon + h_0(x,y,z)\left(\xi_\varepsilon + \exp\left(-\frac{(x-a_1t)^2 + (y-a_2t)^2 + (z-a_3t)^2}{\varepsilon} \right) \right) = \\
&= \eta_\varepsilon(x,y,z) f(t) - \varepsilon^\beta \left(V_{t^2} + a_1V_{tx} + a_2V_{ty} + a_3V_{tz} \right),
\end{aligned} \tag{2.4.17}
$$

где $\left(V,\tilde{Z}\right)$- решение вырожденной обратной задачи (2.4.6) - (2.4.8), $\left(\xi_\varepsilon,\eta_\varepsilon\right)$- остаточные функции, которые содержатся в уравнении (2.4.17) с условиями:

$$
\xi_t^{(i)}(t,x,y,z)\,|_{t=0} = 0,\ (i=0,1), \tag{2.4.18}
$$

$$
\left(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon \right)|_{t=T} = g_\varepsilon(x,y,z),\ \ \forall (x,y,z)\in R^2. \tag{2.4.19}
$$

Фактически остаточные функции $\left(\xi_\varepsilon,\eta_\varepsilon\right)$ определяются из обратной задачи (2.4.17) - (2.4.19), где (2.4.19) является дополнительной информацией для этой задачи. Поэтому, чтобы выяснить разрешимость обратной задачи относительно остаточных функций, сначала, (2.4.17) преобразуем к виду:

$$
\begin{aligned}
&E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s) \right)\left\{ -h_0(x,y,z)\xi_\varepsilon(s,x,y,z) + \eta_\varepsilon(x,y,z) f(s) - \right. \\
&-\varepsilon^\beta \left[2\xi_\varepsilon(s,x,y,z)\left(V(s,x,y,z) + \exp\left(-\frac{(x-a_1s)^2 + (y-a_2s)^2 + (z-a_3s)^2}{\varepsilon} \right) \right) + \right. \\
&\left.\left. +\xi_\varepsilon^2(s,x,y,z) \right] \right\} ds + Y_1(t,x,y,z,\varepsilon) \equiv \left(H_0\xi_\varepsilon \right)(t,x,y,z) + \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s) \right) f(s)ds \times \\
&\times \eta_\varepsilon(x,y,z) + Y_1(t,x,y,z,\varepsilon),
\end{aligned} \tag{2.4.20}
$$

где функция $Y_1(t,x,y,\varepsilon)$ определяется по формуле:

$$\begin{cases} Y_1 \equiv \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)\Big\{-\big(V_{s^2}(s,x,y,z)+a_1V_{sx}(s,x,y,z)+a_2V_{sy}(s,x,y,z)+ \\ +a_3V_{sz}(s,x,y,z)\big)-\left(V(s,x,y,z)+\exp\left(-\frac{(x-a_1s)^2+(y-a_2s)^2+(z-a_3s)^2}{\varepsilon}\right)\right)^2\Big\}ds, \\ |Y_1| \le \varepsilon^{\frac{\beta}{q}}\left(C_0+C_0(a_1+a_2+a_3)\right)\left(\frac{1}{\lambda q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(T_0+1\right)^2\frac{1}{\lambda}\varepsilon^\beta=\delta_1(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0;\ \frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1, \\ \sup\limits_{\bar{\Omega}_0}|V| \le T_0. \end{cases} \tag{2.4.21}$$

Из уравнения (2.4.20), на основе (2.4.19) следует уравнение:

$$\eta_\varepsilon(x,y,z)=M_0^{-1}(T,\lambda,\varepsilon^\beta)\left\{g_\varepsilon(x,y,z)-Y_1(T,x,y,z,\varepsilon)+\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(T,x,y,z)\right\}. \tag{2.4.22}$$

Следовательно, подставляя (2.4.22) в (2.4.20) получим:

$$\begin{gathered} E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon=-\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(t,x,y,z)+\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int\limits_0^t\exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)f(s)ds\times \\ \times M_0^{-1}\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(T,x,y,z)+Y_2(t,x,y,z,\varepsilon), \end{gathered} \tag{2.4.23}$$

где

$$Y_2\equiv Y_1+\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int\limits_0^t\exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)f(s)ds\times M_0^{-1}\left\{g_\varepsilon(x,y,z)-Y_1(T,x,y,z,\varepsilon)\right\}. \tag{2.4.24}$$

Поэтому, с учетом (2.4.18) из (2.4.23) имеем:

$$\begin{gathered} \xi_\varepsilon(t,x,y,z)=\int\limits_0^t\Big\{-\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(s,x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))+ \\ +\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int\limits_0^s\exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')f(s')ds'\times M_0^{-1}\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(T,x-a_1(t-s),y-a_2(t-\right. \\ \left.-s),z-a_3(t-s))\right)\Big\}ds+Y(t,x,y,z,\varepsilon)\equiv(P\xi_\varepsilon)(t,x,y,z), \end{gathered} \tag{2.4.25}$$

здесь

$$\begin{cases} Y\equiv\int\limits_0^t\Big\{Y_1(s,x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s),\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int\limits_0^s\exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right)f(s')ds'\times \\ \times M_0^{-1}\left[g_\varepsilon(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))-Y_1(T,x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s),\varepsilon)\right]\Big\}ds, \\ |Y|\le\delta_1(\varepsilon)\left(T+|M_0^{-1}|\,f_0\frac{1}{\lambda}\right)+|M_0^{-1}|\,f_0\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t|g_\varepsilon(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))|\,ds\le \\ \le\gamma_2\delta_1(\varepsilon)+\gamma_3\left(\int\limits_0^t|g_\varepsilon|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\le\gamma_2\delta_1(\varepsilon)+\gamma_3\Delta_0(\varepsilon)=\delta_2(\varepsilon),\gamma_2=T+|M_0^{-1}|\,f_0\frac{1}{\lambda};\ \gamma_3=|M_0^{-1}|\,f_0\frac{1}{\lambda}(T)^{\frac{1}{q}}. \end{cases} \tag{2.4.26}$$

Лемма 2.4.2. В условиях леммы 2.4.1 и системы

$$
\begin{cases}
L_P < 1, \\
P : S_{r_0} \to S_{r_0}, \ \left(S_{r_0} = \left\{ \xi_\varepsilon : | \xi_\varepsilon | \le r_0 = const, \forall (t,x,y,z) \in \bar{\Omega}_0 \right\} \right),
\end{cases} \tag{2.4.27}
$$

уравнение (2.4.25) разрешимо в $C\left(\bar{\Omega}_0\right)$, причем

$$
\| \xi_\varepsilon \|_C \le \left(1 - L_p\right)^{-1} \delta_2(\varepsilon). \tag{2.4.28}
$$

Следовательно, на основе (2.4.22) имеет место:

$$
\begin{cases}
\| \eta_\varepsilon(x,y,z) \|_{L_h^p(R^2)} \le | M_0^{-1} | \left(\tilde{h}\right)^{\frac{1}{p}} \Delta_0(\varepsilon) + | M_0^{-1} | \delta_0(\varepsilon)\gamma_1 + \gamma_1 | M_0^{-1} | \gamma_4 (1 - L_p)^{-1} \times \\
\times \delta_2(\varepsilon) = \delta_3(\varepsilon), \\
\dfrac{1}{\lambda}\left(\tilde{h}_0 + 2(T_0 + 1) + (1 - L_p)^{-1} \delta_2(\varepsilon) \right) \le \gamma_4, \\
\| Z_\varepsilon - \tilde{Z} \|_{L_h^p(R^2)} = \| \eta_\varepsilon \|_{L_h^p(R^2)}.
\end{cases} \tag{2.4.29}
$$

В самом деле, результаты леммы 2.4.2 очевидны, так как при выполнении (2.4.27) для оператора P реализуются условия принципа Банаха, а это означает, что уравнение (2.4.25) имеет единственное и непрерывное решение в $C(\bar{\Omega}_0)$. Тогда, с учетом (2.4.22) имеем оценку вида (2.4.29). ЧиТД.

Так как относительно всех слагаемых функций (2.4.16) выполняются выводы лемм 2.4.1, 2.4.2, и на основе (2.4.16) следует оценка вида:

$$
| U_\varepsilon - V | \le \| \xi_\varepsilon \|_C + \exp\left(-\frac{(x - a_1 t)^2 + (y - a_2 t)^2 + (z - a_3 t)^2}{\varepsilon} \right). \tag{2.4.30}
$$

Поэтому, учитывая условия лемм 2.4.1; 2.4.2 и оценивая (2.4.30) в смысле нормы $L_h^p(\Omega_0)$, получим:

$$
\| U_\varepsilon - V \|_{L_h^p} \le (1 - L_p)^{-1} \delta_2(\varepsilon) \gamma_1 (T)^{\frac{1}{p}} + (\tilde{h}T)^{\frac{1}{p}} \gamma_0 \varepsilon^{\frac{1}{p}} = \delta_4(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0. \tag{2.4.31}
$$

Далее, рассматривая совокупности результатов (2.4.29) и (2.4.31), и учитывая

$$
\psi = \left(U_\varepsilon - V; Z_\varepsilon - \tilde{Z} \right),
$$

имеем оценку:

$$
\begin{cases}
W_h^p(\Omega_0) = \left\{ (t,x,y,z) \in \Omega_0 : \psi_1(t,x,y,z) \in L_h^p(\Omega_0), \psi_2(x,y,z) \in L_h^p(R^2) \right\}, \\
\| \psi \|_{W_h^p(\Omega_0)} = \| U_\varepsilon - V \|_{L_h^p(\Omega_0)} + \| Z - \tilde{Z} \|_{L_h^p(R^2)} \le \delta_\varepsilon(\varepsilon) + \delta_4(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.
\end{cases} \tag{2.4.32}
$$

Теорема 2.4.1. В условиях лемм 2.4.1, 2.4.2 и (2.4.32) сингулярно-возмущенная обратная задача (2.4.1) - (2.4.4) имеет единственное решение по правилу (2.4.16), причем допустимая погрешность между решениями сингулярно-возмущенной обратной задачи и вырожденной обратной задачи в $W_h^p(\Omega_0)$ будет порядка $\Delta(\varepsilon)$.

Литература

1. Омуров Т.Д. Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса[Текст]/ Т.Д. Омуров, М.М. Туганбаев. – Бишкек: Илим, 2010. – 116 с.

2. Туганбаев М.М. Прямые и обратные задачи для многоскоростных уравнений типа [Текст]/ Каца – Больцмана/ М.М. Туганбаев. – Бишкек, 2011. – 122 с.

3. Треногин В.А. Функциональный анализ [Текст]/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 196 с.

УДК 517
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_172

О ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Отелбаев М.
otelbaevm@mail.ru.
Международный университет информационных технологий,
Институтматематики и математического моделирования,
Кошанов Б.Д.
koshanov@list.ru
Казахский национальный университет имени Аль-Фараби,
Международный университет информационных технологий,
Алматы, Казахстан
Кожобекова П.Ж.
Ошский Государственный университет, Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В работах [1]-[5] мы рассматриваем возможность использования лазерного источника тепла для создания в заданных участках тела необходимого теплового поля. Такая необходимость возникает в связи с тем, что раковые клетки при температуре приблизительно равном 460 по С умирают, а большинство обычных клеток остаются живыми.*

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, электромагнитные поля, лазерный источник тепла*

Известно, что тепловое поле удовлетворяет параболическому уравнению, для которого выполняется принцип максимума – согласно которому максимум и минимум достигаются на границе. Этот принцип, который хорошо служит при решении математических проблем, порождает очень трудную проблему при попытке убить раковые клетки с помощью создания теплового поля. Чтобы обойти принцип максимума можно использовать "внесение тепла" во внутреннюю область тела с помощью тонких игл и управлять "внесением тепла".

Так как уравнение диффузии также является параболическим (таким же как и уравнение теплопроводности), то возможно успешно управлять "внесением химии" в тело. Такие задачи могут быть решены при участии врачей. Математический алгоритм решения этих задач таковы (с незначительными изменениями), каким является алгоритм из работ М. Отелбаева, А. Гасанова [5]. Для численной реализации этого алгоритма можно использовать "метод дополнительных областей" из работы М. Отелбаева, Ш. Смагулова [8].

Хотелось бы какие-то молодые люди взялись за реализацию сказанной (один математик и один медик).

Мы со своей стороны готовы консультировать. Использование "игл вносящих тепло или ядохимию" в организм для убивания раковых клеток безусловно требует вхождения во внутрь.

Но возможно использовать электромагниты и создавать нужное тепловое поле. Для этого запишем нужную нам систему уравнений электромагнитной гидродинамики.

Полная система уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости в векторной форме состоит из уравнения движения

$$\rho \frac{d\overrightarrow{W}}{dt} = R - gradP + \mu\Delta\overrightarrow{W} + \frac{1}{\mu B}\left[\left(rot\vec{B}\right) \times \vec{B}\right], \tag{1}$$

из уравнения энергии

$$\begin{cases} \rho c\frac{dT}{dt} = \lambda\Delta T \ + \ \mu\Phi + \frac{j^2}{\sigma_R}, \\ \Phi(\cdot) = 2[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \vartheta}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial x})^2 + \\ (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \vartheta}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \vartheta}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \vartheta}{\partial y})^2 - (div\overrightarrow{W})^2, \end{cases} \tag{2}$$

уравнения магнитной индукции

$$\frac{d\vec{\mathrm{B}}}{dt} = rot\left[\overrightarrow{W} \times \vec{B}\right] + \frac{1}{\mu_R\sigma_R}\Delta\overrightarrow{W} \tag{3}$$

уравнения неразрывности

$$\mathrm{div}\overrightarrow{W} = 0. \tag{4}$$

Здесь T –температура, ρ– плотность, j– ток, $\overrightarrow{W}$= (u, v, ω)– вектор скорости, $\frac{dT}{dt}$ – означает полную производную.

В (1)-(4) скаляр P – давление, $\vec{B}$ – магнитная индукция, × – означает обычное векторное произведение.

Для получения замкнутой системы нужно добавить уравнение закона Ома

$$j = \sigma_R E + \left[\overrightarrow{W} \times \vec{B}\right] \tag{5}$$

уравнения Максвелла:

$$rot\,\vec{H} \ = j,\ div\,\vec{D} = \mu_{v0}, \tag{6}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial T}{\partial t},\ div\,\vec{B} = 0, \tag{7}$$

$$rot\,\vec{B} = \mu_B j \tag{8}$$

Нас будет особо интересовать уравнение (2), так как управляя Φ можно создавать внутри области участки, где температура выше, чем в остальных участках. Но для управления Φ(·)

$$\Phi(\cdot) = 2[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \vartheta}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial x})^2] +$$
$$(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x})^2 - (div\overrightarrow{W})^2$$

будет необходимо управлять граничными значениями для −W→ и для →−B .

Выпишем нужное нам тепловое поле. Пусть T – температурная функция равная t0 в окрестности области Ω0, содержащих раковые клетки, в остальной части области Ω равна t1,

t1 ≤ T ≤ t0, Ω0 ⊆ Ω,

где t0– температура вызывающий гибель раковых клеток, но не убивающая здоровые клетки задается врачами. t1– нормальная температура клиента. Вне некоторой области Ω0 берем T равным t1. Функцию T берем достаточно гладким, имеющим производные до порядка 2. Функцию T подставим в (2). Тогда получим

$$\mu\Phi + \frac{j^2}{\sigma_R} = M_0 \tag{9}$$

где функционал Φ(·) зависит только от −W→ (вектора скорости и его производных). Для j справедлива закон Ома (5). Мы пользуемся формулой (8)

$$\mu_B j = rot\vec{B} \text{ или } j = \mu_B^{-1} rot\vec{B}. \tag{10}$$

Теперь для M0 имеем

$$\mathrm{M}_0 = \mu\,\Phi + \sigma_B^{-1}\,\mu_B^{-1}\,rot\left|\vec{B}\right|^2. \tag{11}$$

Нас теперь устраивает любое решение системы (1), (3) и (4) для которого выполнено (11). То есть нас устраивает любое решение системы

$$\begin{cases} \rho\frac{d\overrightarrow{W}}{dt} = R - gradP + \mu\Delta\overrightarrow{W} + \frac{1}{\mu B}\left[\left(rot\vec{B}\right)\times\vec{B}\right], \\ \frac{\partial\boldsymbol{\vec{B}}}{\partial t} = rot\left[\overrightarrow{W}\times\vec{B}\right] + \frac{1}{\mu R\sigma R}\Delta\overrightarrow{B}, \\ div\overrightarrow{W} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

которое таково, что

$$\mu\,\Phi + \sigma_B^{-1}\,\mu_B^{-1}\,rot\left|\vec{B}\right|^2 = M_0,$$

где M0– вычисляется явно формулой (9), когда берется нужная (заказанное врачом) температурное поле. Система (12) состоит из семи уравнений, неизвестных W1, W2, W3, B1, B2, B3, ρ, P – восемь. Но если учесть уравнением состояния, то неизвестных тоже окажется семь. Такая задача имеет континуум решений. Поэтому можно управлять начальными и граничными условиями. Математически такая задача вполне разрешима.

Использование электромагнитных полей для создания теплового поля не требует вхождения во внутрь тела (для внесения тепла или "химии" во внутрь).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP 14869558 КН МНВО РК.
2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K05, 49N45, 47A05

Литература

1. Отелбаев, М. Об одной задаче управления точечным источником тепла[Текст]/ Отелбаев М., Гасанов А., Акпаев Б. // Доклады РАН. - 2010. - Т. 435. - С. 317- 319.

2. Гаджиев, А.М. Математическое моделирование[Текст]/ Гаджиев А.М., Гасанов А.И., Фатуллаев А.Г. // 1991. 3(1). - С. 18-24.

3. Отелбаев М., Молдабеков С.М. Об управлении линейным операторным уравнениям[Текст]/. В сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения. Алма-Ата: КазГУ, 1982. - С. 6-9.

4. Отелбаев, М. Одна задача управления операторным уравнением[Текст]/ Отелбаев М., Молдабеков С.М.// Известия НАН РК. Серия физико-математическая. - 1994. No.3. - С. 46-51.

5. Otelbaev, M. Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data[Text]/ Otelbaev M., Hasanov A., Akpayev B.// Inverse Problems in Science and Engineering. - 2011. - V. 19, No.7. - P. 985-1006.

6. Смагулов, Ш.С. Метод дополненных областей для уравнений Навье-Стокса[Text]/ Смагулов Ш.С., Балдыбек Ж.А., Отелбаев М.О.// Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 1993. - С. 15-24.

7. Смагулов, Ш.С. Об одном новом приближенном методе решения нелинейных краевых задач. [Текст]/ Смагулов Ш.С., Отелбаев М.О., Мухаметжанов А.Т. // Препринт ИА РК. - 1997. - No. 21. - 34с.

8. Смагулов, Ш.С. О новом методе приближенных решений краевых задач в произвольной области[Текст]/ Смагулов Ш.С., Отелбаев М.О. // Известия НАН РК. - 1998. - Т. 7, No.6. - С. 452-455.

УДК 517.51, 517.98

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_176

ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТС-SOS

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович, д.ф.-м.н., профессор,

mrahmatullaev@rambler.ru

Расулова Мухайё Акбаржон кизи, старший научный сотрудник,

m_rasulova_a@rambler.ru

Институт Математики имени В.И. Романовского

Академии Наук Республики Узбекистан,

Наманган, Узбекистан

Аннотация. *Для модели Поттс-SOS на дереве Кэли порядка два доказано, что при выполнении найденных условий существует не более семи трансляционно-инвариантных мер Гиббса.*

Ключевые слова: *дерево Кэли, модель Поттса, модель SOS, модель Поттс-SOS, основные состояния, меры Гиббса, трансляционно-инвариантные меры Гиббса.*

TRANSLATION-INVARIANT GIBBS MEASURES FOR THE POTTS-SOS MODEL

Raxmatullayev MuzaffarMuxammadjanovich, Dr Sc, professor,

mrahmatullaev@rambler.ru

Rasulova Muhayyo Akbarjon qizi, PhD,

m_rasulova_a@rambler.ru

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky

of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,

Namangan, Uzbekistan

Abstract. *The translation-invariant Gibbs measures for the Potts-SOS model on the Cayley tree of order two are described.*

Key words: *Cayley tree, Potts model, SOS model, Potts-SOS model, Gibbs measures, translation-invariant Gibbs measures.*

Теория гиббсовских мер представляет собой сравнительно новую область теории мер, хотя сами эти меры являются главным объектом изучения в статистической физике и квантовой евклидовой теории.

Основная проблема равновесной статистической физики – описать для данного гамильтониана все отвечающие ему предельные меры Гиббса. Эта проблема полностью решается лишь в отдельных сравнительно простых случаях.

Множество всех гиббсовских состояний с данным гамильтонианом является непустым компактным выпуклым подмножеством множества всех распределений, так что естественно возникновение задачи изучения крайних гиббсовских мер. Эта задача весьма за труднительная. Поэтому естественно, по крайней мере в самом начале, следует найти для гамильтониана трансляционно-инвариантные предельные меры Гиббса.

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{0, 1, 2, ..., m\}$, $m \geq 1$.

Гамильтониан модели Поттс-SOS определяется следующем образом (см. [4]):

$$H(\sigma) = -J_s \sum_{\langle x,y\rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| - J_p \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{1}$$

где J_s, $J_p \in R$, $\langle x, y\rangle -$ ближайшие соседи, $\delta_{uv} -$ символ Кронекера.

В случае $J_p = 0$, $J_s \neq 0$ модель (1) совпадает с моделью SOS. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели SOS были изучены в [3]. В случае $J_s = 0$, $J_p \neq 0$ модель (1) совпадает с моделью Поттса. Для модели Поттса трансляционно-инвариантные меры Гиббса описаны в [2].

В [4] изучены трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели Поттс-SOS на дереве Кэли произвольного порядка, доказано существование не менее трех трансляционно-инвариантных мер Гиббса при некоторых условиях параметров.

В данной работе рассматривается модель Поттс-SOS с тремя состояниями на дереве Кэли. Для этой модели на дереве Кэли порядка два изучаются множество всех трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Известно [4], что каждой мере Гиббса для модели Поттс-SOS на дереве Кэли порядка $k \geq 1$ можно сопоставить совокупность векторов

$$h_x^* = \left(h_{0,x}, \quad h_{1,x}, ..., \quad h_{m-1,x}\right), \quad x \in G_k,$$

удовлетворяющих уравнению

$$h_x^* = \sum_{y \in S(x)} F\left(h_y^*, m, \theta, r\right), \tag{2}$$

где $S(x) -$ множество прямых потомков точки $x \in G_k$ и

$\theta = \exp(J_s\beta),\ r = \exp(J_p\beta),\ \beta = \frac{1}{T},\ T > 0,$ функция $F(\cdot, m, \theta, r): R^m \to R^m$ определена следующим образом: $F(h,m,\theta,r) = (F_0(h,m,\theta,r),\dots,F_{m-1}(h,m,\theta,r))$ с

$$F_i(h,m,\theta,r) = \ln\left(\frac{\sum_{j=0}^{m-1}\theta^{|i-j|}r^{\delta_{ij}}\exp(h_j) + \theta^{m-i}r^{\delta_{mi}}}{\sum_{j=0}^{m-1}\theta^{m-j}r^{\delta_{mj}}\exp(h_j) + r}\right), \tag{3}$$

где $h = (h_0, h_1, \dots, h_{m-1}),\ i = 0, 1, 2, \dots, m-1.$

Пусть $G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, \dots, H_{r'}\}$ – фактор группа, где G_k^* — нормальный делитель индекса $r' \geq 1$.

Определение 1. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется G_k^* - периодической, если $h_x = h_i$ при $x \in H_i$ для любого $x \in G_k$. G_k -периодическая совокупность векторов называется трансляционно-инвариантной.

Определение 2. Мера μ называется трансляционно-инвариантной, если она соответствует трансляционно-инвариантной совокупности векторов h.

Теорема 1. [4] Пусть $m = 2$. Для модели Поттс-SOS на дереве Кэли, определенной в (1), справедливы следующие утверждения:

а) пусть $J_s,\ J_p < 0$. Тогда существует единственная симметричная трансляционно-инвариантная мера Гиббса (СТИМГ) для всех r, θ;

б) пусть $J_s,\ J_p \geq 0,\ k \geq 2$:

б.1) если $0 < r < r_c^1$, то существует только одна СТИМГ;

б.2) если $r > r_c^1$, то существуют ровно три СТИМГ,

где $r_c^1 = \frac{\theta}{2}\left(\sqrt{\theta^2 + 8\frac{(k+1)^2}{(k-1)^2}} - \theta\right).$

Количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттс-SOS, возможно, может быть больше, чем найденно в [4]. В этой работе доказано, что возможное количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттс-SOS на дереве Кэли порядка два может достигать семи.

Пусть $m = 2$, т.е. $\Phi = \{0, 1, 2\}$. В этом случае уравнение (2) для трансляционно-инвариантных мер Гиббса имеет вид

$$h = kF(h,\, \theta,\, r),$$

где $h = (h_0,\, h_1)$. Вводя обозначения $l_0 = e^{h_0}$, $l_1 = e^{h_1}$, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} l_0 = \left(\dfrac{r\,l_0 + \theta\, l_1 + \theta^2}{\theta^2\, l_0 + \theta\, l_1 + r} \right)^k, \\ l_1 = \left(\dfrac{\theta\, l_0 + r\, l_1 + \theta}{\theta^2\, l_0 + \theta\, l_1 + r} \right)^k. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $k = 2$. Обозначим $\sqrt{l_0} = x,\ \ \sqrt{l_1} = y.$ Тогда из (4) получим

$$\begin{cases} x = \dfrac{r\,x^2 + \theta\, y^2 + \theta^2}{\theta^2\, x^2 + \theta\, y^2 + r}, \\ y = \dfrac{\theta\, x^2 + r\, y^2 + \theta}{\theta^2\, x^2 + \theta\, y^2 + r}. \end{cases} \tag{5}$$

Система уравнений (5) сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \theta^2\, x^3 - r\, x^2 + (\theta\, y^2 + r)\, x - \theta\, y^2 - \theta^2 = 0, \\ \theta\, y^3 - r\, y^2 + (\theta^2\, x^2 + r)\, y - \theta\, x^2 - \theta = 0, \end{cases} \tag{6}$$

которая может быть переписана в виде:

$$\begin{cases} (x-1)(\theta^2\, x^2 + \theta^2\, x + \theta^2 - r\, x + \theta\, y^2) = 0, \\ \theta\, y^3 - r\, y^2 + (\theta^2\, x^2 + r)\, y - \theta\, x^2 - \theta = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно, что решения системы уравнений (7) являются решениями следующих систем уравнений

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ \theta\, y^3 - r\, y^2 + (\theta^2\, x^2 + r)\, y - \theta\, x^2 - \theta = 0 \end{cases} \tag{8}$$

или

$$\begin{cases} \theta^2\, x^2 + \theta^2\, x + \theta^2 - r\, x + \theta\, y^2 = 0, \\ \theta\, y^3 - r\, y^2 + (\theta^2\, x^2 + r)\, y - \theta\, x^2 - \theta = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим сначала систему уравнений (8). Подставив $x = 1$ во второе уравнение системы уравнений (8), получим

$$\theta\, y^3 - r\, y^2 + (\theta^2 + r)\, y - 2\theta = 0. \tag{10}$$

Введем обозначение

$$y = z + \frac{r}{3\theta}. \tag{11}$$

Тогда уравнение (10) можно свести к уравнению

$$z^3 + pz + q = 0, \tag{12}$$

где

$$p = \frac{r}{\theta} + \theta - \frac{r^2}{3\theta^2}, \quad q = \frac{r}{3} + \frac{r^2}{3\theta^2} - \frac{2r^3}{27\theta^3} - 2. \tag{13}$$

Решив уравнение $p = 0$ относительно r, имеем решения $r_{1,\,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+12\theta}}{2}\theta$. Так как $r > 0,\ \theta > 0,$ то получаем $r_1 = \frac{3+\sqrt{9+12\theta}}{2}\theta$. Подставляя r_1 в выражение q в (13) и решив уравнение $q = 0$ относительно θ, получаем решение $\theta_1 = 3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2} - 1)$. Подставив $r_1,\ \theta_1$ в выражения $p,\ q$ в (13), затем $p,\ q$ в уравнение (12), получим уравнение $z^3 = 0$. Отсюда следует, что уравнение (10) имеет один положительный корень $y = \frac{r_1}{3\theta_1}$.

Из (13) получаем

$$Q(r,\,\theta) = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{1}{27}\left(-\frac{1}{3}\frac{r^2}{\theta^2} + \frac{r}{\theta} + \theta\right)^3 + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{27}\frac{r^3}{\theta^3} + \frac{1}{3}\frac{r^2}{\theta^2} + \frac{1}{3}r - 2\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{108\,\theta^4}(r^4 + 2\,r^3\theta^2 + r^2\theta^4 - 12\,r^3\theta - 12\,r^2\theta^3 - 12\,\theta^5 r - 4\,\theta^7 + 36\,\theta^2 r^2 + \tag{14}$$

$$+36\,\theta^4 r - 108\,\theta^4).$$

Для $\theta = \theta_1 = 3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2} - 1)$ имеем $Q(r,\,\theta_1) = \frac{116 + 73\sqrt[3]{4} + 92\sqrt[3]{2}}{34992}\cdot$

$$\cdot\left(-r^2 + 36\left(1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)r + 324\left(13 - 4\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{4}\right)\right)\left(r - 18 + 9\sqrt[3]{4}\right)^2.$$

Используя формулу Кардано, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\theta = 3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2} - 1)$. Существует $r_c\left(\approx 4.221293186\right)$ такое, что

- Если $r \in (0,\ r_c)$, то уравнение (10) имеет одно положительное решение.
- Если $r = r_c$, то уравнение (10) имеет два положительных решения.
- Если $r \in (r_c;\ \infty)$, то уравнение (10) имеет три положительных решения.

Теперь рассмотрим систему уравнений (9). Из (9) получим

$$x = \frac{\theta\, y\left(\theta^2 - y + r\, y - r\right)}{-\theta^3 y + \theta^2 + \theta\, r\, y - r}. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в первое уравнение системы уравнений (9), получим

$$\theta^2(\theta+1)\left(r^2 - 2\theta r + \theta^3 - \theta^2 + \theta\right)y^4 - \theta\left(r-\theta^2\right)\left(r^2 + \left(\theta^2+1\right)r - 3\theta^2\right)y^3 +$$
$$+\left((\theta+1)r + \theta^3\right)\left(r-\theta^2\right)^2 y^2 - \left(r+\theta^2\right)\left(r-\theta^2\right)^2 y + \theta\left(r-\theta^2\right)^2 = 0. \qquad (16)$$

В уравнении (16) введем следующие обозначения:

$$f(y,\ r,\ \theta) = \theta^2(\theta+1)\left(r^2 - 2\theta r + \theta^3 - \theta^2 + \theta\right)y^4 - \theta\left(r-\theta^2\right)\left(r^2 + \left(\theta^2+1\right)r - 3\theta^2\right)y^3 +$$
$$+\left((\theta+1)r + \theta^3\right)\left(r-\theta^2\right)^2 y^2 - \left(r+\theta^2\right)\left(r-\theta^2\right)^2 y + \theta\left(r-\theta^2\right)^2. \qquad (17)$$

Функцию (17) можно переписать в виде

$$f(y,\ r,\ \theta) = \left(a\, y^2 + b\, y + c\right)\left(d\, y^2 + e\, y + f\right),$$

где

$$a\, d = \theta^2(\theta+1)\left(r^2 - 2\theta r + \theta^3 - \theta^2 + \theta\right),$$

$$a e + b d = -\theta\left(r-\theta^2\right)\left(r^2 + \left(\theta^2+1\right)r - 3\theta^2\right),$$

$$a\, f + b e + c d = \left((\theta+1)r + \theta^3\right)\left(r-\theta^2\right)^2,$$

$$b\, f + c e = -\left(r+\theta^2\right)\left(r-\theta^2\right)^2,$$

$$c\, f = \theta\left(r-\theta^2\right)^2.$$

Пусть $D_1(r,\ \theta) = b^2 - 4ac$ и $D_2(r,\ \theta) = e^2 - 4d\, f$.

Обозначим следующие множества:

$$B_1 = \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : D_1(r,\ \theta) > 0,\ D_2(r,\ \theta) > 0\right\},$$

$$B_2 = \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : D_1(r,\ \theta) > 0,\ D_2(r,\ \theta) = 0\ \vee\ D_1(r,\ \theta) = 0,\ D_2(r,\ \theta) > 0\right\},$$

$$B_3 = \{(r,\ \theta) \in R_+^2 : D_1(r,\ \theta) = 0,\ D_2(r,\ \theta) = 0\ \vee\ D_1(r,\ \theta) > 0,\ D_2(r,\ \theta) < 0\ \vee$$

$$\vee\ D_1(r,\ \theta) < 0,\ D_2(r,\ \theta) > 0\},$$

$$B_4 = \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : D_1(r,\ \theta) = 0,\ D_2(r,\ \theta) < 0\ \vee\ D_1(r,\ \theta) < 0,\ D_2(r,\ \theta) = 0\right\},$$

$$B_5 = \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : D_1(r,\ \theta) < 0,\ D_2(r,\ \theta) < 0\right\}.$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. Пусть $\theta = 3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2} - 1)$, тогда справедливы следующие утверждения:

- Если $(r,\ \theta) \in B_1$, то уравнение (16) имеет четыре положительных решения.
- Если $(r,\ \theta) \in B_2$, то уравнение (16) имеет три положительных решения.
- Если $(r,\ \theta) \in B_3$, то уравнение (16) имеет два положительных решения.
- Если $(r,\ \theta) \in B_4$, то уравнение (16) имеет одно положительное решение.
- Если $(r,\ \theta) \in B_5$, то уравнение (16) не имеет решения.

Введем следующие обозначения:

$$A_1 = \left\{(r,\theta) \in R_+^2 : r \le 3\theta^2,\ Q > 0\right\} \cup \left\{(r,\theta) \in R_+^2 : p = 0,\ q = 0\right\},$$

$$A_2 = \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : r \le 3\theta^2,\ Q = 0\right\} \cap \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : p \ne 0 \vee q \ne 0\right\},$$

$$A_3 = \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : r \le 3\theta^2,\ Q < 0\right\},$$

$$A_4 = \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : r > 3\theta^2,\ Q > 0\right\},$$

$$A_5 = \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : r > 3\theta^2,\ Q = 0\right\} \cap \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : p \ne 0 \vee q \ne 0\right\},$$

$$A_6 = \left\{(r,\ \theta) \in R_+^2 : r > 3\theta^2,\ Q < 0\right\}.$$

Пусть $N -$ количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттс-SOS.

Теорема 2. Пусть $k = 2,\ m = 2.$ Следующие отношения справедливы для N:

$$N=\begin{cases}1, \text{ если } (r,\theta)\in A_1,\\ 2, \text{ если } (r,\theta)\in A_2\cup(A_4\cap B_4)\cup(A_5\cap B_5),\\ 3, \text{ если } (r,\theta)\in A_3\cup(A_4\cap B_3)\cup(A_5\cap B_4),\\ 4, \text{ если } (r,\theta)\in(A_4\cap B_2)\cup(A_5\cap B_3)\cup(A_6\cap B_4),\\ 5, \text{ если } (r,\theta)\in(A_4\cap B_1)\cup(A_5\cap B_2)\cup(A_6\cap B_3),\\ 6, \text{ если } (r,\theta)\in(A_5\cap B_1)\cup(A_6\cap B_2),\\ 7, \text{ если } (r,\theta)\in A_6\cap B_1.\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы уравнений (9). Запишем это в следующем виде

$$\theta^2 x^2+(\theta^2-r)x+\theta^2=-\theta y^2. \qquad (18)$$

Правая часть (18) отрицательна, поэтому

$$\theta^2 x^2+(\theta^2-r)x+\theta^2<0. \qquad (19)$$

Для левой части (19) вычислим ее дискриминант $D=(\theta^2-r)^2-4\theta^4$. Если дискриминант положителен, то неравенство (19) имеет действительные решения. Поэтому мы должны решить следующее неравенство:

$$(-r-\theta^2)(3\theta^2-r)>0.$$

Поскольку $-r-\theta^2<0$, то $r>3\theta^2$.

Неравенство (19) имеет положительное решение, как только $\theta^2-r<0$ или $r>\theta^2$. Если $r>3\theta^2$, то также выполняется $r>\theta^2$. Если $r>3\theta^2$, то решение неравенства (19) состоит из следующего интервала:

$$\left(\frac{r-\theta^2-\sqrt{D}}{2\theta^2},\ \frac{r-\theta^2+\sqrt{D}}{2\theta^2}\right).$$

Кроме того, в этом интервале уравнение (18) имеет смысл.

Следовательно, если $r>3\theta^2$, то первое уравнение системы уравнений (9) имеет положительное действительное решение. Если $r\le 3\theta^2$, то первое уравнение системы уравнений (9) не может иметь положительного решения, т.е. для любой положительной действительной пары (x, y), являющейся решением первого уравнения системы уравнений

(9), не выполняется неравенство $r \le 3\theta^2$. Тогда трансляционно-инвариантные меры Гиббса, соответствующие корням уравнения (9), не существуют при условии $r \le 3\theta^2$.

По теореме Декарта, количество положительных корней уравнения (10) не меньше 1 и не больше 3.

Если $Q > 0$, то уравнение (12) имеет один положительный действительный корень и два сопряженных комплексных корня. Если $Q = 0$, то все корни уравнения (12) вещественные положительные и два из них равны, или если $p = q = 0$, то (12) имеет один положительный действительный корень (один нуль кратности три). Если $Q < 0$, то уравнение (12) имеет три различных положительных действительных корня. Следовательно, можно говорить о количестве трансляционно-инвариантных мер Гиббса, соответствующих положительным корням уравнения (10).

Таким образом, из лемм 1 и 2 видно, что множество $A_6 \cap B_1$ не пусто, т.е. количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса, соответствующих положительным решениям системы уравнений (6), для модели Поттс-SOS достигает семи. Теорема доказана.

Замечание 1. Заметим, что теорема 1 (при $k=m=2$) обобщает результаты исследований [2], [3].

Если $J_s = 0$, то модель Поттс-SOS совпадает с моделью Поттса. В этом случае теорему 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3. Пусть $k = m = 2$. Следующие утверждения справедливы для количества трансляционно-инвариантных мер Гиббса $(n_П)$ для модели Поттса

$$n_П = \begin{cases} 1, & \text{если } r \in \left(0, 1+2\sqrt{2}\right), \\ 4, & \text{если } r = 1+2\sqrt{2} \text{ или } r = 4, \\ 7, & \text{если } r \in \left(1+2\sqrt{2}, 4\right) \cup (4, \infty) \end{cases}$$

(см. [2] для более подробной информации).

Если $J_p = 0$, то гамильтониан (1) модели Поттс-SOS совпадает с гамильтонианом модели SOS. В этом случае теорему 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4. Пусть $k = 2, m = 2.$ Следующие утверждения справедливы для количества трансляционно-инвариантных мер Гиббса (n_S) для модели SOS

$$n_S = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta \in (\theta_2, \infty), \\ 3, & \text{если } \theta = \theta_2, \\ 5, & \text{если } \theta \in (\theta_1, \theta_2), \\ 6, & \text{если } \theta = \theta_1, \\ 7, & \text{если } \theta \in (0, \theta_1), \end{cases}$$

где $\theta_1 \approx 0.1414$ и $\theta_2 \approx 0.2956$ (см. [3] для более подробной информации).

Литература

1. Rozikov, U. A. Gibbs measures on Cayley trees. [Text]/ Rozikov U. A. // World scientific. 2013.
2. Kuelske, C.. Description of the translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. [Text]/ Kuelske C., Rozikov U. A., Khakimov R. M. // Jour. Stat. Phys. – 2014. Том 156. № 1. – С. 189–200.
3. Kuelske, C.Extremality of translation-invariant phases for a three-state SOS-model on the binary tree. [Text]/ Kuelske C., Rozikov U. A. // Jour. Stat. Phys. – 2015. Том 160. № 3. – С. 659–680.
4. Saygili, H. Gibbs measures for the Potts-SOS model with three states of spin values. [Text]/ Saygili H. // Asian Journal of Current Research. – 2017. Том 1. № 3. – С. 114–121.
5. Рахматуллаев, М. М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса-SOS на дереве Кэли. [Текст]/ Рахматуллаев М. М., Расулова М. А. // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – 2018. № 1. – С. 15-17.
6. Расулова, М. А. О периодических мерах гиббса для модели Поттса–SOS на дереве Кэли. [Текст]/ Расулова М. А. // Теоретическая и Математическая Физика. – 2019. Том 199. № 1. – С. 134-141.
7. Rahmatullaev, M. M. Extremality of translation-invariant Gibbs measures for the Potts-SOS model on the Cayley tree. [Text]/ Rahmatullaev M. M., Rasulova M. A. // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – 2021. № 7. – С. 1-18.
8. Rasulova, M. A. Periodic Gibbs measures for the three-state Potts-SOS model on a Cayley tree. [Text]/ Rasulova M. A. // Uzbek Mathematical Journal. – 2022. Том 66. № 2. – С. 150-155.

УДК 519.683.5

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_187

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА ТИПА ФРЕДГОЛЬМА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИИ

Саадабаев Аскербек, д.ф.-м.н, профессор,
Caadabaev@mail.ru
Усенов Изат Абдраевич, к.ф.-м.н., доцент
iausen@mail.ru
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына,
Кыргызстан, Бишкек

Аннотация. *Рассматривается метод регуляризации решения нелинейного интегрального уравнения типа Фредгольма в пространстве непрерывных функции. На основе метода лежит метод Лаврентьева М.М. Построен регуляризирующий оператор. Выбрана зависимость параметра регуляризации от погрешности. Получена скорость сходимости приближенного решения к точному решению исходного уравнения.*

Ключевые слова*: нелинейное интегральное уравнение, регуляризирующий оператор, уравнение типа Фредгольма, регуляризация Лаврентьева, пространство непрерывных функции.*

ФРЕДГОЛЬМ ТИБИНДЕГИ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫН ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ФУНКЦИЯЛАР МЕЙКИНДИГИНДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО

Саадабаев Аскербек, ф.-м.и.д., профессор,
Caadabaev@mail.ru
Усенов Изат Абдраевич, ф.-м.и.к., доцент
iausen@mail.ru
Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети,
Кыргызстан, Бишкек

Аннотация. *Фредгольм тибиндеги сызыктуу эмес интегралдык теңдемени чыгарылышын регуляризация ыкмасы үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде каралат. Методдун негизинде М.М. Лаврентьевдин ыкмасы турат. Регуляризация параметринин каталыктан көз карандылыгы аныкталды. Берилген теңдеменин так чыгарылышына жакындаштырылган чыгарылыштын жыйналуучулугунун ылдамдыгы алынды.*

Ачкыч сөздөр: *сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, регуляризациялоочу оператор, Фредгольм тибиндеги теңдеме, Лаврентьев регуляризациясы, үзгүлтүксүз функциялар мейкиндик.*

REGULARIZATION OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND OF FREDHOLM TYPE IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

Saadabaev Askerbek, Dr.Sc, Professor,
Caadabaev@mail.ru
Usenov Izat Abdraevich, Ph.D., Associate Professor
iausen@mail.ru
Kyrgyz National University named after J. Balasagyn,
Kyrgyzstan, Bishkek

Abstract. *The method of regularization of the solution of a nonlinear integral equation of Fredholm type in the space of continuous functions is considered. The method is based on the method of Lavrentiev M.M. A regularizing operator is constructed. The dependence of the regularization parameter on the error is chosen. The rate of convergence of the approximate solution to the exact solution of the original equation is obtained.*

Key words: *nonlinear integral equation, regularizing operator, Fredholm type equation, Lavrentiev regularization, space of continuous functions.*

1. Введение

Линейное интегральное уравнение первого рода и его регуляризируемость исследованы в работах Лаврентьева М.М. [1]. Регуляризирующий оператор для решения интегрального уравнения построен впервые Лаврентьевым М.М. как решение интегрального уравнения второго рода с малым параметром.

В данной работе рассматривается нелинейное интегральное уравнение первого рода вида

$$\int_0^1 К(t,s)M\big(s,z(s)\big)ds = u(t), \quad t \in [0,1], \qquad (1)$$

где $K(t,s)$ ядро интегрального уравнения определено в квадрате $0 \le t,s \le 1$ и непрерывно в этой области, $M(t,s)$ нелинейная функция определенная в полосе $-\infty < z \le +\infty,\ 0 \le s \le 1$, функция непрерывна в этой полосе и удовлетворяет условию Липшица по z, $z(s)$-искомая, $u(t) -$ заданная непрерывные функции.

Допустим, что при $u(t) = u_0(t)$ уравнение имеет единственное решение $z_0(t)$.

Решение уравнения (1) принадлежит существенно некорректно поставленным задачам, т.е. нарушаются все три условия Адамара:

1) решение уравнения (1) существует не для всех $u(t) \in C_{[0,1]}$;
2) решение не является единственным;

3) решение не является устойчивым от правой части $u(t)$, т.е. малое изменение правой части по метрике пространства $C_{[0,1]}$ приводит к большому изменению решения $z(s)$ по метрике $C_{[0,1]}$.

2. Регуляризация

Для построения регуляризирующего оператора наряду с уравнением (1) введем уравнение второго рода

$$\alpha z(t) + \int_0^1 К(t,s) M\big(s, z(s)\big) ds = u(t), \tag{2}$$

где $\alpha > 0$- малый параметр и называется параметром регуляризации.

Покажем, что нелинейное интегральное уравнение при некоторых условиях на функции $M(t,s)$ и для любой заданной функции $u(t) \in C_{[0,1]}$ при $\alpha > 0$ имеет единственное решение $z_\alpha(t) \in C_{[0,1]}$.

Пусть ядро $K(t,s)$ положительно определено.

Уравнение (2) запишем в виде

$$\alpha z(t) + \int_0^1 К(t,s) z(s) ds + \int_0^1 К(t,s) \Big(M\big(s, z(s)\big) - z(s)\Big) ds = u(t). \tag{3}$$

Введем обозначения

$$Кz = \int_0^1 К(t,s) z(s) ds\,, Вz = \int_0^1 К(t,s) \Big(M\big(s, z(s)\big) - z(s)\Big) ds. \tag{4}$$

В этих обозначениях уравнение запишется в виде

$$\alpha z(t) + Kz + Bz = u(t). \tag{5}$$

Функция $M(t,s)$ по аргументу z удовлетворяет условию Липшица

$$|М(s, z_1(s) - М(s, z_2(s)| \le N|z_1(s) - z_2(s)|.$$

Тогда нелинейный оператор Bz отображает пространство $C_{[0,1]}$ в себя и удовлетворяет условию Липшица по z. Действительно

$$|Bz_1 - Bz_2| = \left|\int_0^1 К(t,s) \Big(M\big(s, z_1(s)\big) - M\big(s, z_2(s)\big) - z_1(s) + z_2(s)\Big) ds\right| \le$$

$$\le K_0(N+1)|z_1 - z_2|, \tag{6}$$

где $K_0 = max_{0 \le t,s \le 1}|K(t,s)|$.

Линейный оператор Kz действует из пространства $C_{[0,1]}$ в $C_{[0,1]}$ и является положительным оператором.

В работе [3] показано, что оператор $\alpha\text{Е} + \text{К}$ в пространстве имеет обратный оператор т.е. уравнение $(\alpha E + K)z = u$ имеет единственное решение в пространстве $C_{[0,1]}$.

В этой же работе доказано, что норма оператора $(\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}{}_{C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}}$ удовлетворяет неравенству

$$\|(\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}\|_{C_{[0,1]}\to C_{[0,1]}} \le \frac{\text{C}_0}{\alpha^2}. \qquad (7)$$

Введем обозначение

$$B_1 z = u(t) - Bz. \qquad (8)$$

Тогда нелинейное интегральное уравнение эквивалентно следующему интегральному уравнению

$$z = (\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}u(t) - (\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}Bz. \qquad (9)$$

Рассмотрим нелинейный интегральный оператор

$$(\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}Bz = (\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}K\left(M\big(s,z(s)\big) - z(s)\right). \qquad (10)$$

В силу (4) интегральный оператор $(\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}K$ действует из пространства $L_2[0,1]$ в $L_2[0,1]$ является ограниченным оператором и норма этого оператора ограничена, т.е. справедливо неравенство

$$\|(\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}K\|_{L_2[0,1]\to L_2[0,1]} \le 1. \qquad (11)$$

В данной работе доказано, что норма оператора $(\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}K$ из пространства ${C^2}_{[0,1]}$ в $C_{[0,1]}$ ограничена, т.е. имеет место неравенство

$$\|(\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}K\|_{{C^2}_{[0,1]}\to C_{[0,1]}} \le K_1, \qquad (12)$$

где K_1- некоторая постоянная.

Нелинейный оператор $(\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}K\left(M\big(s,z(s)\big) - z(s)\right)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left\|(\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}K\left(M\big(s,z_1(s)\big) - z_1(s)\right) - (\alpha\text{E}+\text{K})^{-1}K\left(M\big(s,z_2(s)\big) - z_2(s)\right)\right\|$$
$$\le K_1(N+1)\|z_1 - z_2\|. \qquad (13)$$

Допустим, что постоянная Липшица $K_1(N+1)$ удовлетворяет условию

$$N_1 = K_1(N+1) < 1. \qquad (14)$$

При выполнении условия (14) нелинейное уравнение (9) в силу теоремы Банаха имеет единственное решение представимое в виде

$$z_\alpha = (E - (\alpha E + K)^{-1}K(M(s,.) - E))^{-1}(\alpha E + K)^{-1}u(t). \qquad (15)$$

Обозначим решение уравнения (9) при $u(t) = u_0(t)$ через z_α^0. Покажем, что решение уравнения (9) $z_\alpha^0(t)$ при $\alpha \to 0$ по норме пространства $C_{[0,1]}$ сходится к точному решению уравнения (1) при $u(t) = u_0(t)$.

Действительно из (1) получаем тождество

$$u_0(t) = Kz_0 + K(M(s,z_0) - z_0). \qquad (16)$$

Тогда из (15) учитывая тождество (16) получаем

$$z_\alpha^0 - z_0 = (E - (\alpha E + K)^{-1}K(M(s,\cdot) - E))^{-1}(\alpha E + K)^{-1}(Kz_0 + K(M(s,z_0) - z_0) - z_0 =$$

$$= (E - (\alpha E + K)^{-1} K(M(s,\cdot) - E))^{-1} \alpha (\alpha E + K)^{-1} z_0 \qquad (17)$$

Предположим, что точное решение $z_0(t) \in C^{2+\sigma}{}_{[0,1]}$, где $0 < \sigma < 1$.

Тогда из (17) получаем оценку

$$\|z_\alpha^0 - z_0\|_{C[0,1]} \le \frac{\alpha^\sigma}{1 - N_1} K_2, \qquad (18)$$

где K_2 - некоторая постоянная, зависящая от ядра $K(t,s)$.

Таким образом, доказано

Теорема 1. Пусть выполнены условия: 1) ядро $K(t,s)$ симметрично, непрерывно в квадрате $0 \le t,s \le 1$ и положительно определено; 2) нелинейная функция $M(s,z)$ определена и непрерывна в полосе $-\infty < z < \infty$, $0 \le s \le 1$ и удовлетворяет условию Липшица по z; 3) пусть при $u(t) = u_0(t)$ уравнение (1) имеет единственное решение $z_0(t) \in C^{2+\sigma}{}_{[0,1]}$, где $0 < \sigma < 1$; 4) постоянная N_1 удовлетворяет условию $N_1 = K_1(N + 1) < 1$.

Тогда: а) при выполнении условий 1), 2), 4) уравнение (2) при любом $u(t) \in C_{[0,1]}$ и любой $\propto > 0$ имеет единственное решение $z_\alpha(t) \in C_{[0,1]}$б) при выполнении условий 1), 2), 3), 4) решение уравнения (2) $z_\alpha^0(t)$ при $u(t) = u_0(t)$ сходится по норме пространства $C_{[0,1]}$ при $\propto \to 0$ к точному решению уравнения (1), причем скорость сходимости удовлетворяет неравенству (18).

Покажем, что решение уравнения (2) является устойчивым от правой части $u(t)$ при согласовании параметра регуляризации α от погрешности правой части δ.

Допустим, что вместо правой точной правой части $u_0(t)$ задана приближенная правая часть $u_\delta(t) \in C_{[0,1]}C[0,1]$, удовлетворяющая неравенству

$$\|u_0(t) - u_\delta(t)\| \le \delta. \qquad (19)$$

В силу теоремы 1 уравнение (2) при $u(t) = u_\delta(t)$ имеет единственное решение $z_\alpha^\delta(t) \in C_{[0,1]}$.

Это решение в силу формулы (15) представимо в виде

$$z_\alpha^\delta(t) = (E - (\alpha E + K)^{-1} K(M(s,\cdot) - E))^{-1} (\alpha E + K)^{-1} u_\delta(t). \qquad (20)$$

Оценим разность $z_\alpha^\delta(t) - z_0(t)$ по норме пространства $C_{[0,1]}$

Тогда используя неравенство треугольника для разности $z_\propto^\delta(t) - z_0(t)$ получаем

$$\left\|z_\alpha^\delta - z_0(t)\right\|_{C_{[0,1]}} \le \left\|z_\alpha^\delta(t) - z_\alpha^0(t)\right\|_{C_{[0,1]}} + \|z_\alpha^0(t) - z_0(t)\|_{C_{[0,1]]}} \qquad (21)$$

Вычитая из (20), (15) при $u(t) = u_0(t)$, получаем

$$z_\alpha^\delta(t) - z_\alpha^0(t) = (E - (\alpha E + K)^{-1} K(M(s,\cdot) - E))^{-1} (\alpha E + K)^{-1} u_\delta -$$
$$-(E - (\alpha E + K)^{-1} K(M(s,\cdot) - E))^{-1} (\alpha E + K)^{-1} u_0(t). \qquad (22)$$

Далее используя, что нелинейный оператор $(E - (\alpha E + K)^{-1} K(M(s,\cdot) - E))^{-1}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $N_1 < 1$, из (22), получаем

$$\left\|z_\alpha^\delta(t) - z_\alpha^0(t)\right\|_{C_{[0,1]}} \le \frac{1}{1 - N_1} \|(\alpha E + K)^{-1}\| \|u_\delta(t) - u_0(t)\|. \qquad (23)$$

Далее используя неравенства (7) и (19) из неравенства (23) приходим к неравенству

$$\left\|z_\alpha^\delta(t) - z_\alpha^0(t)\right\|_{C_{[0,1]}} \le \frac{1}{1-N_1}\frac{\delta C_0}{\alpha^2}. \tag{24}$$

Второе слагаемое в неравенстве (21) удовлетворяет оценке (18).

Из неравенства (21) учитывая неравенства (24) и (18), получаем

$$\left\|z_\alpha^\delta(t) - z_0\ (t)\right\|_{C_{[0,1]}} \le \frac{C_0}{1-N_1}\frac{\delta}{\alpha^2} + \frac{K_2}{1-N_1}\alpha^\sigma = \frac{C_0}{1-N_1}\left(\frac{\delta}{\alpha^2} + c_1\alpha^\sigma\right), \tag{25}$$

где $c_1 = \frac{K_2}{C_0}$.

Рассмотрим выражение в скобке в правой части (25) как функцию от α:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\delta}{\alpha^2} + c_1\alpha^\sigma. \tag{26}$$

Эта функция в некоторой точке α_0 имеет минимальное значение, т.е. оценка (25) в этой точке имеет оптимальное значение.

Чтобы найти критическую точку, производную приравниваем к нулю

$$\varphi'(\alpha) = -2\delta\alpha^{-3} + c_1\sigma\alpha^{\sigma-1} = 0.$$

Отсюда

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{2\delta}{c_1\sigma}\right)^{\frac{1}{2+\sigma}}. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26) получаем

$$\varphi\big(\alpha(\delta)\big) = \delta^{\frac{\sigma}{2+\sigma}}\, c_3, \tag{28}$$

где c_3 - некоторая постоянная, зависящая от постоянной c_1, σ.

Таким образом, учитывая (28) из неравенства (25) получаем оценку

$$\left\|z_\alpha^\delta(t) - z_0\ (t)\right\|_{C_{[0,1]}} \le \frac{C_0}{1-N_1} c_3 \delta^{\frac{\sigma}{\sigma+2}}. \tag{29}$$

Доказана

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) функция $u_\delta(t)$ удовлетворяет неравенству (19); 3) параметр регуляризации $\alpha(\delta)$ выбрана по формуле (27).

Тогда решение уравнения (2) при $u(t) = u_\delta(t)$ при $\delta \to 0$ сходится по норме пространства $C_{[0,1]}$ к точному решению (1). Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (29).

Литература

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики [Текст]/ Лаврентьев М.М. -Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962г.

2. Саадабаев А. Построение регуляризирующего оператора для решения нелинейных операторных и интегральных уравнений первого рода [Текст]/ Саадабаев А. -Диссер. на соиск.уч. степени доктора физика-математических наук. Новосибирск 1993г.

3. Усенов И.А. Регуляризирующий оператор для решения нелинейного интегрального уравнения первого рода [Текст]/ Усенов И.А.- Проблемы современной науки и образования, 2016, №3(45), с.30-35.

4. Саадабаев А. Регуляризирующий оператор для решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода[Текст]/ Саадабаев А., Усенов И.А.- Вестник ОшМУ, 2020, №1-1, с. 147-154.

5. Колмогоров А.Н. Элементы теории функции и функционального анализа[Текст]/ Колмогоров А.Н., Фомин С.В.- Москва., Наука,1972г.

6. Канторович Л.В. Функциональный анализ [Текст]/ Канторович Л.В., Акилов Г.П. -Москва, Наука, 1972г.

УДК 517.95

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_194

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

Сабитов Камиль Басирович, д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. АН РБ,

sabitov_fmf@mail.ru

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, г. Уфа, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий,

г. Стерлитамак, Россия

Аннотация. *В работе для уравнения смешанного типа в прямоугольной области исследована на корректность постановки первой граничной задачи. Установлен критерий единственности. Решение задачи Дирихле построено в виде суммы ряда Фурье.*

Ключевые слова: *уравнение смешанного типа, задача Дирихле, критерий единственности, ряд, существование, малые знаменатели, устойчивость.*

THE DIRICHLET PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH THE LAVRENT'EV–BITSADZE OPERATOR

Sabitov Kamil Basirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Bashkortostan

sabitov_fmf@mail.ru

Institute of Mathematics with Computing Center UFITS, UFA,

Sterlitamak Branch of the State University of Science and Technology,

Sterlitamak, Russia

Abstract. *In this paper, for a mixed-type equation in a rectangular domain, the correctness of the formulation of the first boundary value problem is investigated. A uniqueness criterion is established. The solution of the Dirichlet problem is constructed as the sum of a Fourier series.*

Key words: *mixed type equation, Dirichlet problem, uniqueness criterion, series, existence, small denominators, stability.*

Рассмотрим уравнение смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе

$$\mathcal{L}u \equiv u_{xx} + (\mathrm{sgn}\, y)u_{yy} - bu = F(x,y) \qquad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\quad 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β, l – заданные положительные числа, b – любое действительное число, и поставим следующую краевую задачу.

Задача Дирихле. *Найти в области* D *функцию* $u(x,y)$ *, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$\mathcal{L}u(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(l,y) = 0, \qquad -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{5}$$

где $F(x,y)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возникло после опубликования работы Франкля Ф.И. [1], где впервые было отмечено, что задачи трансзвуковой газовой динамики сводятся к этой задаче. Бицадзе А.В. [2] доказал некорректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева, т.е. для уравнения (1) при $b = 0$. После этой статьи возникла потребность поиска смешанных областей для которых задача Дирихле поставлена корректно. В дальнейшем изучением задача Дирихле для уравнения (1) при $b = 0$ занимались Шабат Б.В. [3], Вахания Н.Н. [4], Cannon J.R.[5], Нахушев А.М. [6], Солдатов А.П. [7], Хачев М.М. [8], Сохадзе Р.С. [9], Сабитов К.Б. [10] и его ученики.

В данной работе методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения задачи (2) – (5). Решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей относительно отношения α/l. В связи с чем установлены оценки малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. На основании этих оценок накладывая определенные условия на граничные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и на правую часть $F(x,y)$ доказана теорема существования в классе регулярных решений (2).

Литература

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике [Текст]/ Ф.И. Франкль. – М.: Наука, 1973. – 711 с.

2. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа [Текст]/ А.В. Бицадзе // ДАН СССР. 1953. Т. 122. 32. С. 167 – 170.

3. Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа [Текст]/ Б.В. Шабат // ДАН СССР. 1957. Т. 112. 3. С. 383 – 389.

4. Вахания Н.Н. Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа [Текст]/ Н.Н. Вахания // Тр. АН ГрузССР. 1963. Т.3. С. 69 – 80.

5. Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinius coefficient // J.R. Cannon // Ann. Math. pura ed Appl. 1963. V. 62. P. 371 – 377.

6. Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области [Текст]/ А.М. Нахушев. // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. 1. С. 190 – 191.

7. Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. I., II. [Текст]/ А.П. Солдатов. // ДАН. 1993. Т. 332. 6. С. 696 – 698; Т. 333. 1. С. 16 – 18.

8. Хачев М.М. Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике[Текст]/ М.М. Хачев // Дифференц. уравнения. 1975. Т.11. 1. С. 151 – 160.

9. Сохадзе Р.С. О первой краевой задаче для уравнения смешанного типа в прямоугольнике [Текст]/ Р.С. Сохадзе // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. 1. С. 127 – 133.

10. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области [Текст]/ К.Б. Сабитов // ДАН. 2007. Т.413. 1. С. 23 – 26.

УДК 517.926

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_197

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРЕ

Уринов Ахмаджон Кушакович, д.ф.-м.н., профессор,
urinovak@mail.ru
Усмонов Дониёр Абдумутолиб угли, исследователь
usmonov-doniyor@inbox.ru
Ферганский государственный университет,
Фергана, Узбекистан

Аннотация. *В данной работе исследуется задача Коши для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего дробный дифференциальный оператор в смысле Римана-Лиувилля с функцией Бесселя в ядре. Поставленная задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Методом последовательных приближений найдено решение интегрального уравнения. Доказано, что найденное решение действительно удовлетворяет условиям поставленной задачи. Получена оценка найденного решения. При выводе формулы для решения поставленной задачи выведена новая специальная функция, которая в частном случае следует функция Миттага – Леффлера. Изучено свойства введенной функции, в частности, выписаны формулы дифференцирования для неё.*

Ключевые слова: *функция Бесселя, дробный дифференциальный оператор, задача Коши, интегральное уравнение, метод последовательных приближений.*

ON A CAUCHY PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION CONTAINING A RIEMANN-LIOUVILLE DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A BESSEL FUNCTION IN THE KERNEL

Urinov Akhmadzhon Kushakovich, Dr Sc, professor,
urinovak@mail.ru
Usmonov Doniyor Abdumutolib ugli, researcher
usmonov-doniyor@inbox.ru
Ferghana State University,
Fergana, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we study the Cauchy problem for an inhomogeneous ordinary differential equation containing a fractional differential operator in the sense of Riemann-Liouville with a Bessel function in the kernel. The considered problem is equivalently reduced to a Volterra integral equation of the second kind. The solution of the integral equation is found by the method of successive approximations. It has been proved that the obtained* *solution really satisfies the conditions of the problem. An estimate for the solution is obtained. When deriving a formula for solution to the problem, a new special function was derived, which in a particular case follows the Mittag-Leffler function. The properties of the introduced function are studied, in particular, differentiation formulas for it are written out.*

Key words: *Bessel function, fractional differential operator, Cauchy problem, integral equation, successive approximation method.*

1. Введение. Известно, что теория дробного интегрирования и дифференцирования является одним из новых разделов математической науки [1], [2], [3]. К настоящему времени дробные интегро-дифференциальные операторы в смысле Римана-Лиувилля и Капуто, а также дифференциальные уравнения, в которых они участвуют, изучены многими исследователями [4] - [8]. В последнее время наблюдается повышенный интерес к изучению дробных интегро-дифференциальных операторов со специальными функциями в ядрах [9], [10], [11]. В данной работе рассматривается задача Коши для одного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего дифференциальный оператор Римана-Лиувилля с функцией Бесселя в ядре и исследуется существование её решения.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha,\gamma}y(x)+\lambda y(x)=f(x),\ x\in(0,T), \tag{1}$$

где $y(x)$ - неизвестная функция, а $f(x)$ - заданная функция; α,γ,λ,T - заданные действительные числа, причем $1<\alpha<2,\ T>0$;

$$D_{0x}^{\alpha,\gamma}y(x)=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\gamma^2\right)I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y(x), \tag{2}$$

$$I_{0x}^{\beta,\gamma}y(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x(x-t)^{\beta-1}\,\overline{J}_{(\beta-1)/2}\left[\gamma(x-t)\right]y(t)dt, \tag{3}$$

$\overline{J}_\nu(z)$ -функция Бесселя - Клиффорда, определяемая равенствами

$$\overline{J}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{k!(\nu+1)_k} \tag{4}$$

$(z)_k$ - символ Похгаммера, $\Gamma(x)$- гамма-функция Эйлера [12], $J_\nu(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν [13].

Отметим, что операторы $D_{0x}^{\alpha,\gamma}y(x)$ и $I_{0x}^{\beta,\gamma}y(x)$ введены и изучены в работе [11].

Они являются обобщениями операторов дробного дифференцирования и интегрирования Римана – Лиувилля соответственно.

Задача Коши. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям

$$\lim_{x\to 0} I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) = A_1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{d}{dx} I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) = A_2, \tag{5}$$

где A_1, A_2 - заданные действительные числа.

3. Исследование задачи Коши. Применяем к уравнению (1) оператор $I_{0x}^{\alpha,\gamma}$. Затем, учитывая равенство [11]

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma} D_{0x}^{\alpha,\gamma} y(x) =$$

$$= y(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{(\alpha-1)/2}[\gamma x] \lim_{x\to 0} \frac{d}{dx} I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) - \frac{x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \bar{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x] \lim_{x\to 0} I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x)$$

и условие (2), получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$y(x) + \lambda I_{0x}^{\alpha,\gamma} y(x) = I_{0x}^{\alpha,\gamma} f(x) + A_1 \frac{x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \bar{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x] + A_2 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{(\alpha-1)/2}[\gamma x]. \tag{6}$$

Для решения интегрального уравнения (6) применим метод последовательных приближений [14]:

$$y_0(x) = I_{0x}^{\alpha,\gamma} f(x) + A_1 \frac{x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \bar{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x] + A_2 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{(\alpha-1)/2}[\gamma x],$$

$$y_m(x) = y_0(x) - \lambda I_{0x}^{\alpha,\gamma} y_{m-1}(x), m \in \mathbb{N}.$$

Используя формулу [11] $I_{ax}^{\alpha,\gamma} I_{ax}^{\beta,\gamma} \varphi(x) = I_{ax}^{\beta,\gamma} I_{ax}^{\alpha,\gamma} \varphi(x) = I_{ax}^{\alpha+\beta,\gamma} \varphi(x)$, вычисляем $y_m(x)$:

$$y_m(x) = y_0(x) - \lambda I_{0x}^{\alpha,\gamma} y_0(x) + \lambda^2 I_{0x}^{2\alpha,\gamma} y_0(x) - \lambda^3 I_{0x}^{3\alpha,\gamma} y_0(x) + \ldots + (-\lambda)^m I_{0x}^{\alpha m,\gamma} y_0(x). \tag{7}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в (7) и подставляя выражение $y_0(x)$, получим решение уравнения (6) в виде

$$y(x) = \frac{A_1}{\Gamma(\alpha-1)} \sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n I_{0x}^{\alpha n,\gamma} \left\{ x^{\alpha-2} \bar{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x] \right\} +$$

$$+\frac{A_2}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\lambda)^n I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-1}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}[\gamma x]\right\}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-\lambda)^n I_{0x}^{\alpha n+\alpha,\gamma} f(x). \quad (8)$$

Вычислим интегралы $I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x]\right\}$, $I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-1}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}[\gamma x]\right\}$ и $I_{0x}^{\alpha n+\alpha,\gamma} f(x)$. Сначала рассмотрим интеграл $I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x]\right\}$. Согласно равенству (3), имеем

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x]\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_0^x (x-t)^{\alpha n-1} t^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha n-1)/2}\left[\gamma(x-t)\right]\overline{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma t]dt. \quad (9)$$

Заменяя функцию $\overline{J}_\nu(x)$ по формуле (4), получим

$$\overline{J}_{(\alpha n-1)/2}\left[\gamma(x-t)\right]\overline{J}_{(\alpha-3)/2}\left[\gamma(t)\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}(x-t)^{2m}}{m!\left((\alpha n+1)/2\right)_m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\gamma/2)^{2k}t^{2k}}{k!\left((\alpha-1)/2\right)_k}.$$

Отсюда, применяя правило Коши об умножении сходящихся рядов, имеем

$$\overline{J}_{(\alpha n-1)/2}\left[\gamma(x-t)\right]\overline{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma t]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(\gamma/2)^{2k}(x-t)^{2k}}{k!\left((\alpha n+1)/2\right)_k}\frac{(-1)^{m-k}(\gamma/2)^{2m-2k}t^{2m-2k}}{(m-k)!\left((\alpha-1)/2\right)_{m-k}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\gamma/2)^{2m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(x-t)^{2k}t^{2m-2k}}{k!(m-k)!\left((\alpha n+1)/2\right)_k\left((\alpha-1)/2\right)_{m-k}}.$$

Подставляя это в интеграл (9), поменяв порядок интегрирования и суммирования, имеем

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x]\right\}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}}{\Gamma(\alpha n)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!(m-k)!\left((\alpha n+1)/2\right)_k\left((\alpha-1)/2\right)_{m-k}}\int_0^x(x-t)^{\alpha n+2k-1}t^{2m-2k+\alpha-2}dt. \quad (10)$$

В интеграле выполним замену переменной по формуле $t=xs$:

$$\int_0^x(x-t)^{\alpha n+2k-1}t^{2m-2k+\alpha-2}dt=x^{\alpha n+2m+\alpha-2}\int_0^1(1-s)^{\alpha n+2k-1}s^{2m-2k+\alpha-2}ds. \quad (11)$$

Принимая во внимание интегральное представление бета-функции и её связь с гамма-функцией [12], находим

$$\int_0^x(x-t)^{\alpha n+2k-1}t^{2m-2k+\alpha-2}dt=x^{\alpha n+2m+\alpha-2}B\left(2m-2k+\alpha+1,\alpha n+2k\right)=$$

$$=x^{\alpha n+2m+\alpha-2}\Gamma\left(2m-2k+\alpha-1\right)\Gamma\left(\alpha n+2k\right)/\Gamma\left(\alpha n+2m+\alpha-1\right).$$

Подставляя это в (10) и применяя последовательно следующие равенства [12]

$$\Gamma\left(a+n\right)=\left(a\right)_n\Gamma\left(a\right),\ \left(a\right)_{2n}=2^{2n}\left(\frac{a}{2}\right)_n\left(\frac{a+1}{2}\right)_n, \tag{12}$$

имеем

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}\left[\gamma x\right]\right\}=$$

$$=\Gamma\left(\alpha-1\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m\left(\gamma/2\right)^{2m}x^{\alpha n+2m+\alpha-2}}{\Gamma\left(\alpha n+2m+\alpha-1\right)}\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(\alpha n\right)_{2k}\left(\alpha-1\right)_{2m-2k}}{k!\left(m-k\right)!\left(\left(\alpha n+1\right)/2\right)_k\left(\left(\alpha-1\right)/2\right)_{m-k}}=$$

$$=\Gamma\left(\alpha-1\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m\left(\gamma/2\right)^{2m}2^{2m}x^{\alpha n+2m+\alpha-2}}{\Gamma\left(\alpha n+2m+\alpha-1\right)}\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(\left(\alpha n\right)/2\right)_k\left(\alpha/2\right)_{m-k}}{k!\left(m-k\right)!}.$$

Учитывая следующее известное равенство,

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(\delta\right)_k\left(\gamma\right)_{m-k}}{k!\left(m-k\right)!}=\frac{\left(\delta+\gamma\right)_m}{m!}, \tag{13}$$

из последнего получим

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}\left[\gamma x\right]\right\}=\Gamma\left(\alpha-1\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m\gamma^{2m}\left(\left(\alpha n+\alpha\right)/2\right)_m x^{\alpha n+2m+\alpha-2}}{m!\Gamma\left(\alpha n+2m+\alpha-1\right)}.$$

Отсюда, применяя последовательно равенства (12) к $\Gamma\left(\alpha n+2m+\alpha-1\right)$, находим

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}\left[\gamma x\right]\right\}=\frac{\Gamma\left(\alpha-1\right)}{\Gamma\left(\alpha n+\alpha-1\right)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m\left(\gamma/2\right)^{2m}x^{\alpha n+2m+\alpha-2}}{m!\left(\left(\alpha n+\alpha-1\right)/2\right)_m}.$$

Тогда, согласно обозначению (4), имеем

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}\left[\gamma x\right]\right\}=\frac{x^{\alpha n+\alpha-2}\Gamma\left(\alpha-1\right)}{\Gamma\left(\alpha n+\alpha-1\right)}\overline{J}_{(\alpha n+\alpha-3)/2}\left[\gamma x\right]. \tag{14}$$

Аналогичным методом находим

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-1}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma x\right]\right\}=\frac{x^{\alpha n+\alpha-1}\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha n+\alpha\right)}\overline{J}_{(\alpha n+\alpha-1)/2}\left[\gamma x\right]. \tag{15}$$

На основании формулы (3)

$$I_{0x}^{\alpha n+\alpha,\gamma} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}\int_0^x (x-z)^{\alpha n+\alpha-1}\bar{J}_{(\alpha n+\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-z)\right] f(z)dz. \qquad (16)$$

Подставляя (14), (15) и (16) в (8), находим решение уравнения (6):

$$y(x)=A_1x^{\alpha-2}\mathbb{E}_{\alpha,\,\alpha-1,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]+A_2x^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]+$$

$$+\int_0^x (x-z)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda(x-z)^{\alpha};\gamma(x-z)\right] f(z)dz, \qquad (17)$$

где

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[x;y]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\bar{J}_{\alpha n/2+\theta}(y). \qquad (18)$$

Очевидно, что (18) есть функция типа функции Миттага - Леффлера [15]:

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}. \qquad (19)$$

Нетрудно показать, что при $\alpha>0,\beta>0$ ряд (18) сходится абсолютно и равномерно при $-\infty<x,\,y<+\infty$.

Для функции (18) справедливы следующие равенства

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[x;0]=E_{\alpha,\beta}(x),\ \mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[0;y]=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\bar{J}_{\theta}(y),\ \mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[0;0]=\frac{1}{\Gamma(\beta)}$$

и следующие формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dx}\mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]=-\lambda x^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]-\gamma^2x\mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right], \qquad (20)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\beta-1}\mathbb{E}_{\alpha,\beta,(\beta-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]\right\}=x^{\beta-2}\mathbb{E}_{\alpha,\beta-1,(\beta-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right],\beta\neq 1. \qquad (21)$$

4. Основные результаты

Теорема. *Если* $f(x)=x^{-p}f_1(x),\ f_1(x)\in C[0,T],0\le p<\alpha-1$, *то решение задачи Коши* $\{(1),(5)\}$ *существует и определяется формулой (17).*

Доказательство. С этой целью функцию $y(x)$, определяемую формулой (17), запишем в виде $y(x)=y_1(x)+y_2(x)+y_3(x),$ где

$$y_1(x)=A_1x^{\alpha-2}\mathbb{E}_{\alpha,\,\alpha-1,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right],$$

$$y_2(x)=A_2x^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right],$$

$$y_3(x)=\int_0^x(x-z)^{\alpha-1}\,\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda(x-z)^{\alpha};\gamma(x-z)\right]f(z)dz,$$

Рассмотрим функцию $y_1(x)$. Сначала вычисляем $I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y_1(x)$:

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y_1(x)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^x(x-z)^{1-\alpha}\,\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left[\gamma(x-z)\right]y_1(z)dz=$$

$$=\frac{A_1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^x(x-z)^{1-\alpha}\,z^{\alpha-2}\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left[\gamma(x-z)\right]\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda z^{\alpha};\gamma z\right]dz=$$

$$=A_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^x(x-z)^{1-\alpha}\,z^{\alpha n+\alpha-2}\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left[\gamma(x-z)\right]\bar{J}_{(\alpha n+\alpha-3)/2}[\gamma z]dz.$$

Если ввести обозначение

$$H(\alpha,n,\gamma;x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)\Gamma(2-\alpha)}\int_0^x(x-z)^{1-\alpha}\,z^{\alpha n+\alpha-2}\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left[\gamma(x-z)\right]\bar{J}_{(\alpha n+\alpha-3)/2}[\gamma z]dz, \quad (22)$$

то последнее равенство запишется в виде:

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y_1(x)=A_1\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n H(\alpha,n,\gamma;x). \quad (23)$$

Вычислим интеграл $H(\alpha,n,\gamma;x)$. С этой целью, заменяя функцию $\bar{J}_{\nu}(x)$ по формуле (4) и применяя правило Коши об умножении сходящихся рядов, имеем

$$\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left[\gamma(x-z)\right]\bar{J}_{(\alpha n+\alpha-3)/2}[\gamma z]=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(\gamma/2)^{2k}z^{2k}}{k!\left((\alpha n+\alpha-1)/2\right)_k}\frac{(-1)^{m-k}(\gamma/2)^{2m-2k}(x-z)^{2m-2k}}{(m-k)!\left((3-\alpha)/2\right)_{m-k}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\gamma/2)^{2m}\sum_{k=0}^{m}\frac{z^{2k}(x-z)^{2m-2k}}{\left((\alpha n+\alpha-1)/2\right)_k\left((3-\alpha)/2\right)_{m-k}k!(m-k)!}.$$

Подставляя это в интеграл (22), поменяв порядок интегрирования и суммирования, получим

$$H(\alpha,n,\gamma;x)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=0}^{m}\frac{H_1(\alpha,n,m,k;x)}{((\alpha n+\alpha-1)/2)_k((3-\alpha)/2)_{m-k}k!(m-k)!}, \quad (24)$$

где

$$H_1(\alpha,n,m,k;x)=\int_0^x(x-z)^{1+2m-2k-\alpha}\,z^{\alpha n+2k+\alpha-2}dz.$$

Интеграл $H_1(\alpha,n,m,k;x)$ вычисляется аналогично интегралу (11):

$$H_1(\alpha,n,m,k;x)=x^{2m+\alpha n}\frac{\Gamma(2m-2k+2-\alpha)\Gamma(\alpha n+2k+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha n+2m+1)}.$$

Подставляя это в (24) и применяя последовательно формулу (12) к функциям $\Gamma(2m-2k+2-\alpha)$ и $\Gamma(\alpha n+2k+\alpha-1)$, имеем

$$H(\alpha,n,\gamma;x)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}x^{2m+\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+2m+1)}\sum_{k=0}^{m}\frac{(2-\alpha)_{2m-2k}(\alpha n+\alpha-1)_{2k}}{((\alpha n+\alpha-1)/2)_k((3-\alpha)/2)_{m-k}k!(m-k)!}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\gamma^{2m}x^{2m+\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+2m+1)}\sum_{k=0}^{m}\frac{((2-\alpha)/2)_{m-k}((\alpha n+\alpha)/2)_k}{k!(m-k)!}.$$

Если учесть равенство (13), то функция $H(\alpha,n,\gamma;x)$ принимает вид

$$H(\alpha,n,\gamma;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\gamma^{2m}((\alpha n+2)/2)_m x^{2m+\alpha n}}{m!\Gamma(\alpha n+2m+1)}.$$

Подставляя это выражение функции $H(\alpha,n,\gamma;x)$ в (23), получим

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y_1(x)=A_1\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n(-1)^m\gamma^{2m}((\alpha n+2)/2)_m x^{2m+\alpha n}}{m!\Gamma(\alpha n+2m+1)}.$$

Далее, применяя последовательно равенство (13) к $\Gamma(\alpha n+2m+1)$, имеем

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y_1(x) = A_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n (-1)^m (\gamma/2)^{2m} x^{2m+\alpha n}}{m!\Gamma(\alpha n+1)((\alpha n+1)/2)_m}.$$

Отсюда, принимая во внимание обозначения (19), находим

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y_1(x) = A_1 \mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right]. \tag{25}$$

Аналогичным методом находим

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y_2(x) = A_2 x \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right], \tag{26}$$

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y_3(x) = \int_0^x (x-z) \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda (x-z)^{\alpha}; \gamma (x-z)\right] f(z) dz. \tag{27}$$

Складывая равенства (25), (26) и (27), получим

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) = A_1 \mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right] + A_2 x \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right] +$$

$$+\int_0^x (x-z) \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda (x-z)^{\alpha}; \gamma (x-z)\right] f(z) dz. \tag{28}$$

Отсюда, используя формулы (20), (21) и $\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[0;0] = \frac{1}{\Gamma(\beta)}$, находим

$$\frac{d^2}{dx^2} I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) = -\lambda A_1 x^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right] - \gamma^2 A_1 \mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right] -$$

$$-\lambda A_2 x^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right] - \gamma^2 A_2 x \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right] -$$

$$+ f(x) - \lambda \int_0^x (x-z)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda (x-z)^{\alpha}; \gamma (x-z)\right] f(z) dz -$$

$$-\gamma^2 \int_0^x (x-z) \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda (x-z)^{\alpha}; \gamma (x-z)\right] f(z) dz. \tag{29}$$

Тогда, из равенств (28) и (29) следует, что

$$D_{0x}^{\alpha,\gamma} y(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \gamma^2\right) I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) =$$

$$= -\lambda A_1 x^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right] - \lambda A_2 x^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right] +$$

$$f\left(x\right)-\lambda\int_0^x\left(x-z\right)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda\left(x-z\right)^{\alpha};\gamma\left(x-z\right)\right]f\left(z\right)dz\,. \tag{30}$$

Сопоставляя (17) и (29) придем, к выводу, о том что функция $y\left(x\right)$, определяемая формулой (17), удовлетворяет уравнению (1).

Теперь покажем, что она удовлетворяет условиям (5).

Из равенства (28), в силу $f\left(x\right)=x^{-p}f_1\left(x\right)$, сразу следует, что $\lim\limits_{x\to0}I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y\left(x\right)=A_1$.

Дифференцируем равенство (28). Тогда, согласно (20), (21), получим

$$\frac{d}{dx}I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y\left(x\right)=-A_1\lambda x^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]-A_1\gamma^2x\mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]+$$

$$+A_2\mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]+\int_0^x\left(x-z\right)^{\alpha-2}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda\left(x-z\right)^{\alpha};\gamma\left(x-z\right)\right]f\left(z\right)dz.$$

Отсюда, в силу $\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}\left[0;0\right]=\Gamma^{-1}\left(\beta\right)$, $1<\alpha<2$ и $f(x)=x^{-p}f_1\left(x\right)$, следует, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{d}{dx}I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y\left(x\right)=A_2$.

Теорема доказана.

Лемма. *Если* $\lambda>0$*, то для решения (17) справедливо неравенство*

$$\left|x^{2-\alpha}y\left(x\right)\right|\le\left|A_1\right|C_1+\left|A_2\right|C_2+C_3\int_0^T\left|f\left(z\right)\right|dz,$$

где C_1, C_2 *и* C_3 *- некоторые положительные постоянные.*

Доказательство. Учитывая (4) и (18), запишем функцию $x^{2-\alpha}y\left(x\right)$ в виде

$$x^{2-\alpha}y\left(x\right)=$$

$$=A_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\lambda x^{\alpha}\right)^n}{\Gamma\left(\alpha n+\alpha-1\right)}+A_1\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha-1}{2}\right)\left(-1\right)^{m+1}\left(-\lambda x^{\alpha}\right)^n\left(\gamma/2\right)^{2m+2}x^{2m+2}}{\Gamma\left(\alpha n+\alpha-1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha-1}{2}+m+1\right)\left(m+1\right)!}+$$

$$+A_2x\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^m\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha+1}{2}\right)\left(\gamma/2\right)^{2m}x^{2m}\left(-\lambda x^{\alpha}\right)^n}{\Gamma\left(\alpha n+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha-1}{2}+m+1\right)m!}+$$

$$+x^{2-\alpha}\int_0^x (x-z)^{\alpha-1} f(z)\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha+1}{2}\right)\left[-\lambda(x-z)^{\alpha}\right]^n\left[\gamma(x-z)\right]^{2m}}{\Gamma(\alpha n+\alpha)m!\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha-1}{2}+m+1\right)}dz. \quad (31)$$

Используя равенства

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)}=\frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^1 \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1}d\xi, \qquad \Gamma(a+1)=a\Gamma(a),$$

и учитывая $\Gamma(a+1)=a!$ при $a\in N$, перепишем (30) в виде

$$x^{2-\alpha}y(x)=$$

$$=A_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\lambda x^{\alpha}\right)^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)}-A_1\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}\left(-\lambda x^{\alpha}\right)^n(\gamma/2)^{2m+2}x^{2m+2}}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)\Gamma(m+1)\Gamma(m+2)}\int_0^1 \xi^m(1-\xi)^{\frac{\alpha n+\alpha-3}{2}}d\xi+$$

$$+\frac{A_2 x}{2}\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}x^{2m}\left(-\lambda x^{\alpha}\right)^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)\Gamma^2(m+1)}\int_0^1 \xi^m(1-\xi)^{\frac{\alpha n+\alpha-3}{2}}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}x^{2-\alpha}\int_0^x (x-z)^{\alpha-1}f(z)\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\left[-\lambda(x-z)^{\alpha}\right]^n\left[\gamma(x-z)\right]^{2m}}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)\Gamma^2(m+1)}\int_0^1 \xi^m(1-\xi)^{\frac{\alpha n+\alpha-3}{2}}d\xi dz.$$

Отсюда, принимая во внимание обозначения (4) и (19), имеем

$$x^{2-\alpha}y(x)=A_1E_{\alpha,\alpha-1}\left(-\lambda x^{\alpha}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}(\gamma x)^2A_1\int_0^1(1-\xi)^{\frac{\alpha-3}{2}}E_{\alpha,\alpha-1}\left(-\lambda x^{\alpha}(1-\xi)^{\alpha/2}\right)\bar{J}_1\left(\gamma x\sqrt{\xi}\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}A_2x\int_0^1(1-\xi)^{\frac{\alpha-3}{2}}E_{\alpha,\alpha-1}\left(-\lambda x^{\alpha}(1-\xi)^{\alpha/2}\right)\bar{J}_0\left(\gamma x\sqrt{\xi}\right)d\xi+$$

$$+\frac{x^{2-\alpha}}{2}\int_0^x(x-z)^{\alpha-1}f(z)\int_0^1(1-\xi)^{\frac{\alpha-3}{2}}E_{\alpha,\alpha-1}\left[-\lambda(x-z)^{\alpha}(1-\xi)^{\alpha/2}\right]\bar{J}_0\left[\gamma(x-z)\sqrt{\xi}\right]d\xi dz.$$

Известно, что при $\nu>(-1/2)$ справедливо неравенство [13] $\left|\bar{J}_{\nu}(\gamma z)\right|\le 1$, а при $\alpha,\beta>0,\ z\ge 0$ - неравенство [15] $\left|E_{\alpha,\beta}(-z)\right|\le C_0$, где C_0 - некоторое положительное число. Если учесть эти неравенства и $1<\alpha<2$, то из последнего равенства легко следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Литература

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. [Текст]/ Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. // – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение [Текст]/ Нахушев А.М.. – Москва, Физматлит, 2003. – 272 с.

3. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations. [Text]/ Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. – Amsterdam, North-Holland. Mathematics Studies 204, Elsevier, 2006. – 522 p.

4. Джрбашян, М.М., Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка [Текст]/ Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. // Изв. АН АрмССР. Mat. – 1968. – 3 (1), – С. 3-29.

5. Джрбашян, М. М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма – Лиувилля[Текст]/ Джрбашян М. М. // Изв. АН АрмССР. Mat. – 1970. – 5 (2), – С. 71-96.

6. Нахушев, А. М. Задача Штурма – Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах[Текст]/ Нахушев А. М. // Докл. АН СССР. – 1977. – 234 (2). – С. 308-311.

7. Алероев, Т. С. К проблеме о нулях функции Миттага – Леффлера и спектре одного дифференциального оператора дробного порядка[Текст]/ Алероев Т. С. // Дифференц. уравнения. – 2000. – 36 (9). – С. 1278-1279.

8. Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка [Текст]/ Псху А. В. – Москва. Наука, 2005. – 199 с.

9. Prabhakar, T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag - Leffler function in the kernel[Text]/ Prabhakar T.R. //. 1969.

10. Liguo, Y. Comparison theorems of tempered fractional differential equations[Text]/ Liguo Y., Song Z., Zhouchao W. // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2022. – 231. pp. 2477-2485.

11. Уринов, А.К. Обобщение интегралов и производных дробного порядка Римана - Лиувилля с помощью функции Бесселя[Текст]/ Уринов А.К. // Бюллетень Института математики. – 2022. – 5(1). – С. 108-155.

12. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра[Текст]/ Бейтмен Г., Эрдейи А.// – Москва. Наука, – 1965. – 296 с.

13. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены[Текст]/ Бейтмен Г., Эрдейи А.//

Москва. Наука, – 1966. – 296 с.

14. Михлин, С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. [Текст]/ Михлин С. Г. // Москва. Физматлит, – 1959. – 232 с.

15. Бейтмен, Г., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Ортогональные полиномы. [Текст]/ Бейтмен Г., Эрдейи А. // – Москва. Наука, – 1967. – 300 с.

УДК 517.957

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_210

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СИНУС-ГОРДОНА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., профессор,
ahasanov2002@mail.ru.
Нормуродов Хожимурод Нормуминович, аспирант,
normurodov.96@bk.ru.
Самаркандского государственного университета,
г. Самарканд (Узбекистан),
Худаёров Улугбек Обилмаликович, преподаватель
xudayorov.2022@bk.ru
Самаркандского государственного архитектурно-строительного университета, г. Самарканд (Узбекистан).

Аннотация. *В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного уравнения типа синус-Гордона в классе периодических бесконечнозонных функций. Вводится эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением нелинейного уравнения типа синус-Гордона. Доказано разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина в классе три раза непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формула первого следа, удовлетворяет уравнению типа синус-Гордона.*

Ключевые слова. *Уравнения типа синус-Гордона, оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.*

THE CAUCHY PROBLEM FOR A NONLINEAR SINE-GORDON TYPE EQUATION IN THE CLASS OF PERIODIC FUNCTIONS

Khasanov Aknazar Bekdurdiyevich, Dr Sc, professor,
ahasanov2002@mail.ru.
Normurodov Khojimurod Normuminovich, PhD student,
normurodov.96@bk.ru.
Samarkand State University, Samarkand city (Uzbekistan),
Xudayorov Ulugbek Obilmalikovich , teacher,
xudayorov.2022@bk.ru
Samarkand State Architectural and
Construction University, Samarkand (Uzbekistan).

Abstract. *In this paper, the inverse spectral problem method is used to integrate a nonlinear sine-Gordon type equation in the class of periodic infinite-gap functions. The evolution of the spectral data of the periodic Dirac operator is introduced, the coefficient of which is the solution of a nonlinear equation of the sine-Gordon type. The solvability of the Cauchy problem for an infinite system of Dubrovin differential equations in the class of three times continuously differentiable periodic infinite-gap functions is proved. It is shown that the sum of a uniformly convergent functional series constructed by solving the system of Dubrovin's equations and the first trace formula satisfies a sine-Gordon type equation.*

Key words: *Sine-Gordon type equations, Dirac operator, spectral data, Dubrovin's system of equations, trace formulas.*

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения типа синус-Гордона вида:

$$q_{xt} = a(t)e^{mq} + b(t)e^{-mq},\ \ q = q(x,t),\ x \in R,\ t > 0,\ \ m \in Z \setminus \{0\} \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(R) \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π-периодических по x функций:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t), \quad q(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(t>0) \cap C(t \ge 0)\,. \tag{3}$$

Здесь $a(t),\, b(t) \in C\big([0,\infty)\big)$–заданные непрерывные ограниченные функции.

Нетрудно убедиться, что условия совместности линейных уравнений

$$y_x = \begin{pmatrix} \frac{m}{2}q'_x(x,t) & -\lambda \\ \lambda & -\frac{m}{2}q'_x(x,t) \end{pmatrix} y\,,\ \ y_t = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 0 & a(t)e^{mq(x,t)} \\ b(t)e^{-mq(x,t)} & 0 \end{pmatrix} y\,,$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

эквивалентны уравнению (1) для функции $q = q(x,t),\ x \in R,\ t > 0$.

Хорошо известно, что нахождение явной формулы для решения нелинейного эволюционного уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ), модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ), нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), синус-Гордона (сГ), уравнения Хирота и т.д. в классе периодический функций существенно зависит от количества нетривиальных лакун в спектре периодического оператора Штурма-Лиувилля и Дирака.

С помощью метода обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля и Дирака с периодическим потенциалом, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун, в работах Итса-Матвеева [3], Дубровина-Новикова [4], Итса-Котлярова [5], Смирнова [6], Матвеева-Смирнова [7], была установлена полная интегрируемость нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордон, Хироты и т.д.) в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Кроме того, для конечнозонных решений нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордон и др.) была выведена явная формула через тета-функции Римана.

Таким образом, в этих работах (см. [3-8]) была доказана разрешимость задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордон и др.) при любых конечнозонных начальных данных. Более подробно эта теория изложена в монографиях [9-10], а также в работе [11].

В связи с этим класс периодических функций удобно разбить на два множества:

1. Класс периодических конечнозонных функций;
2. Класс периодических бесконечнозонных функций.

Известно [12], что если $q(x)=2a\cos 2x,\ a\neq 0$, то в спектре оператора Штурма-Лиувилля $Ly\equiv -y''+q(x)y,\ x\in R$ открыты все лакуны, иначе говоря, $q(x)$ – периодический бесконечнозонный потенциал. Аналогичные примеры имеются для периодического оператора Дирака [13].

В данной работе предлагается алгоритм построения периодических бесконечнозонных решений $q(x,t),\ x\in R,\ t>0,$ задачи (1)-(3) сведением ее к обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega(x+\tau,t)y=\lambda y,\ x\in R,\ t>0,\ \tau\in R, \qquad (4)$$

где

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x,t)=\begin{pmatrix} P(x,t) & Q(x,t) \\ Q(x,t) & -P(x,t) \end{pmatrix}, \quad P(x,t)\equiv 0,\ Q(x,t)=\frac{m}{2}\ {}'_{x}\ q\ (x$$

.

2. Эволюция спектральных данных

Обозначим через $c(x,\lambda,\tau,t)=(c_1(x,\lambda,\tau,t),c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ и $s(x,\lambda,\tau,t)=(s_1(x,\lambda,\tau,t),s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t)=(1,0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau,t)=(0,1)^T$. Функция $\Delta(\lambda,\tau,t)=c_1(\pi,\lambda,\tau,t)+s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Спектр оператора Дирака $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L)=\left\{\lambda\in R:|\Delta(\lambda)|\le 2\right\}=R\setminus\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\left(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}\right)\right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}),\ n\in Z\setminus\{0\}$ называются лакунами, где λ_n, корни уравнения $\Delta(\lambda)\mp 2=0$. Они совпадают с собственными значениями периодической или антипериодической $y(0,\lambda,\tau,t)=\pm y(\pi,\lambda,\tau,t)$ задачи для уравнения (4). Нетрудно доказать, что $\lambda_{-1}=\lambda_0=0$, т.е. $\lambda=0$ является двукратным собственным значением периодической задачи для уравнения (4).

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t)=0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t),n\in Z\setminus\{0\}$ и при этом $\xi_n(\tau,t)\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}],n\in Z\setminus\{0\}$. Так как коэффициент в уравнении (4) имеет вид $P(x,t)\equiv 0,\ Q(x,t)=\dfrac{m}{2}q_x'(x,t)$, то справедливо $\lambda_{-1}=\lambda_0=\xi_0=0$, т.е. $\xi=0$ является собственным значением задачи Дирихле.

Числа $\xi_n(\tau,t),n\in Z\setminus\{0\}$, и знаки $\sigma_n(\tau,t)=sign\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t)-c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\}$, $n\in Z\setminus\{0\}$ называются спектральными параметрами оператора $L(\tau,t)$. Спектральные параметры $\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm 1,n\in Z\setminus\{0\}$ и границы спектра $\lambda_n(\tau,t),n\in Z\setminus\{0\}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$.

Задача восстановление коэффициента $\Omega(x,t)$ оператора $L(\tau,t)$ по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент $\Omega(x,t)$ оператора $L(\tau,t)$ определяются однозначно по спектральным данным $\left\{\lambda_n(\tau,t),\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm 1\right\},n\in Z\setminus\{0\}$.

Если с помощью начальной функции $q_0(x+\tau), \tau\in R,$ построим оператор Дирака $L(\tau,0)$ вида

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega_0(x+\tau)y=\lambda y,\ x\in R,\ \tau\in R \tag{5}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \Omega_0(x)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2}q_0'(x)\\ \frac{m}{2}q_0'(x) & 0\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix},$$

то мы увидим, что границы спектра $\lambda_n(\tau),\ n\in Z$, полученной задачи не зависят от параметра $\tau\in R,$ т.е. $\lambda_n(\tau)=\lambda_n,\ n\in Z$, а спектральные параметры от параметра τ зависят: $\xi_n^0=\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0=\sigma_n^0(\tau)=\pm1,\ n\in Z,$ и являются периодическими функциями:

$$\xi_n^0(\tau+\pi)=\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau+\pi)=\sigma_n^0(\tau),\ \tau\in R,\ n\in Z.$$

Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\left\{\lambda_n,\ \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau),\ n\in Z\setminus\{0\}\right\}$ оператора $L(\tau,0)$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $q(x,t),\ x\in R, t>0,$ решение задачи (1)-(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(\tau,t), n\in Z\setminus\{0\},$ оператора $L(\tau,t)$ не зависят от параметров τ и t т.е. $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n,\ n\in Z\setminus\{0\},$ а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z\setminus\{0\}$ удовлетворяют соответственно первой и второй системе дифференциальных уравнений Дубровина:

1. $$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n\left(\xi(\tau,t)\right)\xi_n(\tau,t),\ n\in Z\setminus\{0\}; \tag{6}$$

2. $$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)h_n\left(\xi(\tau,t)\right)g_n\left(\xi(\tau,t)\right),\ n\in Z\setminus\{0\}. \tag{7}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm1, n\in Z\setminus\{0\}$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t), n\in Z\setminus\{0\}$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau),\ n \in Z \setminus \{0\}, \tag{8}$$

где $\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau) = \pm 1,\ n \in Z \setminus \{0\}$ –спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$.

Последовательности $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi),\ n \in Z \setminus \{0\}$ участвующие в уравнении (7) определяется по формулам:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t,\tau))} \times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}}, \tag{9}$$

$$g_n(\xi) = \frac{ma(t)}{2\xi_n(\tau,t)} \exp\{mq(\tau,t)\}.$$

Лемма 1. Справедливы следующие формулы следов

$$q'_\tau(\tau,t) = \frac{2}{m} \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k\neq 0}}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau,t) h_k(\xi(\tau,t)), \tag{10}$$

$$\left(\frac{m}{2} q_\tau(\tau,t)\right)^2 + \frac{m}{2} q_{\tau\tau}(\tau,t) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t)\right). \tag{11}$$

Далее, учитывая формулы следов (10), систему (7) можно переписать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t,\tau))} \cdot f_n(\xi) \cdot g_n(\xi), \tag{12}$$

где

$$g_n(\xi) = \frac{ma(t)}{2\xi_n(\tau,t)} \exp\left\{ mC(t) + 2\int_0^\tau \left(\sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(s,t) h_k(\xi(s,t)) \right) ds \right\} \tag{13}$$

Здесь $C(t)$ –некоторая ограниченная непрерывная функция.

В результате замены переменных

$$\xi_n(\tau,t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau,t),\ n \in Z \setminus \{0\} \tag{14}$$

систему дифференциальных уравнений Дубровина (12) и начальные условия (8) можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt} = H(x(\tau,t)), \quad x(\tau,t)\big|_{t=0} = x^0(\tau) \in K\,, \tag{15}$$

где

$$K = \left\{ x(\tau,t) = (..., x_{-1}(\tau,t), x_1(\tau,t),...): \ \|x(\tau,t)\| = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left(\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}\right) |x_n(\tau,t)| < \infty \right\},$$

$$H(x) = (..., H_{-1}(x), H_1(x),...),$$

$$H_n(x) = (-1)^n \sigma_n(0) \cdot g_n(..., \lambda_1 + \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\sin^2 x_1(\tau,t),...) \times$$

$$\times f_n(..., \lambda_1 + \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\sin^2 x_1(\tau,t),,...) = (-1)^n \sigma_n(0) g_n\left(x(\tau,t)\right) f_n\left(x(\tau,t)\right).$$

Известно, что если $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(R)$, то $\left(q_0(x)\right)' \in C^2(R).$ Поэтому для длины лакун оператора $L(\tau,0)$, имеет место оценка (см. [15], стр. 98):

$$\gamma_k \equiv \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{|q_{2k}^2|}{2|k|^2} + \frac{\delta_k}{|k|^3}\,, \tag{16}$$

где

$$\lambda_{2k} = k + \sum_{j=1}^{3} c_j k^{-j} + 2^{-2} |k|^{-2} |q_{2k}^2| + |k|^{-3} \varepsilon_k^{+},$$

$$\lambda_{2k} = k + \sum_{j=1}^{3} c_j k^{-j} - 2^{-2} |k|^{-2} |q_{2k}^2| + |k|^{-3} \varepsilon_k^{-},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |q_{2k}^2|^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty, \quad \delta_k = \varepsilon_k^{+} - \varepsilon_k^{-}.$$

Отсюда, учитывая $\xi_n(\tau,t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, получим

$$\inf_{k\neq n} |\xi_n(\tau,t) - \xi_k(\tau,t)| \geq a > 0.$$

Теперь, пользуясь этим неравенством и (16), оценим функции

$$\left| f_n\left(x(\tau,t)\right)\right|, \left|\frac{\partial f_n\left(x(\tau,t)\right)}{\partial x_m}\right| \text{ и } \left|g_n\left(x(\tau,t)\right)\right|, \left|\frac{\partial g_n\left(x(\tau,t)\right)}{\partial x_m}\right|.$$

Лемма 2. Справедливы следующие оценки:

$$C_1 \le \left| f_n\left(x(\tau,t)\right) \right| \le C_2, \quad \left| \frac{\partial f_n\left(x(\tau,t)\right)}{\partial x_m} \right| \le C_3 \gamma_m, \tag{17}$$

$$\left| g_n\left(x(\tau,t)\right) \right| \le \frac{C_4}{|n|}, \quad \left| \frac{\partial g_n\left(x(\tau,t)\right)}{\partial x_m} \right| \le C_5 \frac{\gamma_m}{n}, \quad m,n \in Z \setminus \{0\}, \tag{18}$$

где $C_j > 0,\ j = 1,2,3,4,5,$ не зависят от параметра m и n.

Лемма 3. Если $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(R)$, то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липщица в банаховом пространстве K, т.е. существует константа $L > 0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t), y(\tau,t) \in K$ выполняется следующее неравенство

$$\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\| \le L \|x(\tau,t) - y(\tau,t)\|,$$

где

$$L = C \sum_{\substack{n=-\infty, \\ n \ne 0}}^{\infty} \frac{\gamma_n}{|n|} < \infty. \tag{19}$$

Замечание 1. Теорема 1 и лемма 3 дает метод нахождения решения задачи (1)-(3). Сначала найдем спектральные данные $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1,\ n \in Z \setminus \{0\}$ оператора Дирака $L(\tau,0)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau,t)$ через $\lambda_n,\ \xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t) = \pm 1,\ n \in Z \setminus \{0\}$. Решая задачу Коши (12), (8) при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t),\ n \in Z \setminus \{0\}$. Из формулы следов (10) определим функцию $q_\tau(\tau,t)$, т.е. найдем решение задачи (1)-(3).

Замечание 2. Функция $q_\tau(\tau,t)$ построенная с помощью системы уравнений Дубровина (7), (8) и формулы следа (10) действительно удовлетворяет уравнение (1).

Замечание 3. Равномерная сходимость рядов в (10), (11), (14) и (19) следует из равенств (16) и оценки (17).

Теорема 2. Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию

$$q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(R),$$

то существует решение $q'_x(x,t),\ x \in R,\ t > 0$ задачи (1)-(3), которое однозначно задается формулой (10) и принадлежит классу $C^{1,1}_{x,t}(t > 0) \bigcap C(t \ge 0).$

Литература

1. Жибер, А.В. Характеристическое кольцо Ли и нелинейные интегрируемые уравнения[Текст]/ Жибер А.В., Муртозина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. // Москва, Ижевск, 2012.

2. Жибер, А. В. “Уравнения типа Лиувилля” [Текст]/ Жибер А. В., Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б. // Докл. АН СССР, 249:1 (1979), 26–29.

3. Итс, А.Р. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза [Текст]/ Итс А.Р., Матвеев В.Б. // ТМФ, 23:1(1975), с.51-68.

4. Дубровин, Б.А. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза [Текст]/ Дубровин Б.А., Новиков С.П. //ЖЭТФ, 67:12(1974), 2131-2143.

5. Итс, А.Р. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера[Текст]/ Итс А.Р., Котляров В.П. // Докл. АНУССР. Сер. А, 1976, №11, 965-968.

6. Смирнов, А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. [Текст]/ Смирнов А.О. //Матем. сб., 185:8 (1994), с.103-114

7. Матвеев, В.Б. Решения типа «волнубийц» уравнений иерархии Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сигура: единый подход. [Текст]/ Матвеев В.Б., Смирнов А.О. //ТМФ, 2016, Т.186, №2, с. 191-220.

8. Матвеев, В.Б. Двухфазные периодические решения уравнений из АКНС иерархии [Текст]/ Матвеев В.Б., Смирнов А.О. // Зап. научн. Сем. ПОМИ, 2018, том 473, 205-227.

9. Митрапольский, Ю.А. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. [Текст]/ Митрапольский Ю.А., Боголюбов Н.Н (мл), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г// Киев: Наукова думка, 1987.

10. Захаров, В.Е. Теория солитонов: метод обратной задачи. [Текст]/ Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. // Наука, М., 1980.

11. Matveev, V.B. 30 years of finite-gap integration theory[Text]/ Matveev V.B. // Phil. Trans. R Soc. A (2008) 366, p. 837-875.

12. Ince, E.L. Ordinary Differential Equations [Text]/ Ince E.L. // New York: Dover, 1956.

13. Джаков, П.Б. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака. [Текст]/ Джаков П.Б., Митягин Б.С. // УМН. 2006, т.61, №4(370), стр. 77-182.

14. Маннонов, Г.А. Задача Коши для нелинейного уравнения Хирота, в классе периодических бесконечнозонных функций. [Текст]/ Маннонов Г.А., Хасанов А.Б. // Алгебра и анализ. Том 34(2022), No5, с.139-172.

15. Мисюра, Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I, Теория функцией, функциональный анализ и их приложения [Текст]/ Мисюра Т.В. // 30, ред. В.А. Марченко, Вища школа, Харьков, 1978, с.90-101; Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака II, 31, 1979, с. 102-109.

УДК 519.254, 004.852, 620.92

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_220

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РЕСУРСОВ

Хуснутдинов Александр Олегович, магистрант,

evolext@gmail.com

Карманов Виталий Сергеевич, к.т.н.,

karmanov@corp.nstu.ru

Новосибирский государственный технический университет,

Новосибирск, Российская Федерация

Аннотация. *В статье рассматривается актуальная проблема прогнозирования потребления энергетических ресурсов, в частности, объемов потребления тепловой энергии для жилых домов. Приведены основные аспекты выбора прогнозной модели в зависимости от постановки задачи и характера прогнозируемых данных. Рассмотрены несколько современных методов прогнозирования многомерных временных рядов и проведено исследование точности прогнозных моделей на реальных данных, также проведено сравнение точности с моделями, основанными на классических статистических методах прогнозирования.*

Ключевые слова: *прогнозирование, многомерные временные ряды, планирование энергопотребления, машинное обучение, глубокое обучение, интервальное прогнозирование.*

APPLICATION OF MACHINE LEARNING METHODS FOR TIME SERIES FORECASTING IN ENERGY RESOURCE CONSUMPTION PLANNING

Khusnutdinov Alexander Olegovich, Master's student,

evolext@gmail.com

Karmanov Vitaly Sergeevich, Candidate of Technical Sciences,

karmanov@corp.nstu.ru

Novosibirsk State Technical University,

Novosibirsk, Russian Federation

Abstract. *The article deals with the actual problem of forecasting the consumption of energy resources, in particular, the volume of thermal energy consumption for residential buildings. The main aspects of choosing a forecasting model depending on the formulation of the problem and the nature of the forecasted data are presented. Several modern methods of predicting multidimensional time series are considered and the accuracy of forecast models based on real practical data is studied, and the precision is compared with models based on classical statistical forecasting methods.*

Key words: *forecasting, multivariate time series, energy consumption planning, machine learning, deep*

learning, interval forecasting.

1. Введение (Introduction) Топливно-энергетические ресурсы (ТЭР) – это природные и искусственные запасы, используемые для производства и потребления энергии. Традиционно к ним относят: нефть, газ, уголь, воду, а также электрическую и тепловую энергию, получаемые из различных источников. В настоящее время существует несколько причин, по которым необходимо работать в направлении экономии ТЭР, прежде всего это связано с возможностью возникновения мирового энергетического кризиса, вызываемого ограниченностью ресурсов и непрекращающимся ростом потребления энергии, что ведет к нестабильности на энергетическом рынке и росту цен. Кроме того, экономия ТЭР может оказывать влияние на экономические, экологические, политические и другие аспекты жизни социума, например, снижение вредного воздействия на окружающую среду или уменьшения риска конфликтов, связанных с доступом к источникам этих ресурсов.

Прогнозирование объемов потребления энергоресурсов в натуральном выражении является важным инструментом для управления и оптимизации потребления. Прогнозирование потребления ТЭР позволяет оценить ожидаемый рост или снижение потребления в будущем, что может помочь определить необходимые меры по сокращению потребления или реорганизации производственных процессов. Прогнозирование также помогает в планировании инвестиций в новые источники энергии и создании инфраструктуры для энергетических систем, что в конечном итоге может привести к сокращению потребления энергоресурсов и более эффективному использованию доступных источников энергии.

Цель настоящей работы заключается в рассмотрении современных методов прогнозирования объемов потребления энергоресурсов, основанных на методологии машинного обучения. Данная работа продолжает серию публикаций о результатах исследований в указанной области [1-4].

2. Постановка задачи прогнозирования (Forecasting problem) Динамика потребления ТЭР представляет собой последовательность значений объемов потребления в разные моменты времени, т.е. представляет собой временной ряд $y_0, y_1, \dots, y_t, \dots$, где $y_i \in \mathbb{R}$. Основная цель анализа временного ряда состоит в выявлении закономерностей в его компонентах для составления прогнозной модели:

$$y_{t+d}(\omega) = f_{t,d}(y_0,...,y_t;\omega) \quad (1)$$

где y_{t+d} – прогноз модели на шаг d, ω – вектор параметров модели, $f_{t,d}(\cdot;\cdot)$ – прогнозная модель ряда, построенная на основе t наблюдений.

Выбор прогнозной модели временного ряда – сложная и актуальная задача, ее решение требует учета различных факторов. Рассмотрим некоторые из них.

1) Характер прогнозируемых данных: можно выявлять закономерности в предыдущие моменты времени и на их основе строить прогнозы, а можно дополнительно с этим использовать вспомогательные (экзогенные) переменные для учета дополнительных зависимостей. В настоящее время подгон прогнозной модели под одномерный временной ряд перестает быть актуальным – в эпоху больших данных есть возможность дополнительно к исследуемой величине измерять десятки различных характеристик, включая и нечисловые, с различных приборов учета, датчиков и устройств с требуемой периодичностью, получая в результате многомерные временные ряды (МВР). В связи с этим к алгоритмам выдвигается дополнительное требование – как можно более эффективно обрабатывать весь набор данных. Выбор экзогенных переменных является отдельной важной задачей, поскольку добавление одних переменных может привести к повышению точности прогнозирования, а других – к переобучению модели [5].

На выбор прогнозной модели также может повлиять наличие трендовых и сезонных составляющих в данных, некоторые методы прогнозирования способны автоматически выявлять эти закономерности, а другие требуют отдельного покомпонентного рассмотрения.

2) Итоговый результат, который дает модель на выходе в качестве прогноза: это может быть либо конкретные значение в каждый момент времени горизонта планирования (точечное прогнозирование), либо диапазоном значений, которые может принимать исследуемая величина в каждый момент времени горизонта планирования (интервальное прогнозирование) [6], во втором случае модель на вход принимает еще один параметр:

$$y_{t+d}(\omega,\alpha) = f_{t,d}(y_0,...,y_t;\omega,\alpha) \quad (2)$$

где α – вероятность реализации прогноза.

3) Продолжительность горизонта планирования: одни модели временных рядов могут составлять точные прогнозы на короткие промежутки и сильно расходиться на последующих шагах, а другие – иметь немного хуже точность на тех же коротких шагах, но сохранять одинаковый уровень точности при прогнозировании на длительные

промежутки, выбор модели в этом случае зависит от специфики задачи.

3. Описание методов прогнозирования (Review of forecasting methods) До появления методов машинного и глубокого обучения, в области прогнозирования временных рядов изучались и использовались статистические методы прогнозирования, включающие в себя, например, процессы авторегрессии (AR), процессы скользящей средней (MA) и авторегрессионной скользящей средней (ARMA) и др. [7, 8].

Модель VARMA – это векторная форма модели ARMA, которая учитывает значения и данные об ошибках для нескольких переменных одновременно [9]. VARIMA – наиболее общая модель, является расширением комбинированной модели VARMA для нестационарных временных рядов, алгебраическая форма представления которой может выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered} Y_t = (I + \Phi_1)Y_{t-1} + (\Phi_2 - \Phi_1)Y_{t-2} + \ldots + \\ +(\Phi_p - \Phi_{p-1})Y_{t-p} - \Phi_p Y_{t-p-1} + \varepsilon_t - \Theta_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \Theta_q\varepsilon_{t-q} \end{gathered} \quad (3)$$

где Y_t – вектор размерности $(n \times 1)$ значений n переменных в t момент времени, I – единичная матрица размерности n, Φ_i – матрица коэффициентов авторегрессии размерности $(n \times n)$, p – порядок векторной авторегрессии, ε_t – вектор ошибок размерности $(n \times 1)$, Θ_i – матрица коэффициентов скользящего среднего размерности $(n \times n)$, q – порядок векторного скользящего среднего.

Модели AR, MA и их всевозможные модификации по-прежнему обеспечивают точность, близкую к современным моделям машинного обучения, особенно на небольших наборах данных, где вторые работают не наилучшим образом; но, несмотря на простоту этих моделей, они подвержены переобучению.

Среди известных методов машинного обучения, применяемых для прогнозирования временных рядов, выделяется группа методов, основанных на механизме boosting [10], суть которого заключается в агрегировании (ансамблировании) нескольких предсказательных моделей таким образом, чтобы при добавлении новой модели общая ошибка уменьшалась:

$$F_M(x) = \sum_{m=1}^{M} b_m h(x; a_m) \quad (4)$$

где $F_M(x)$ – объединенная модель из M базовых моделей, b_m – весовой коэффициент базовой модели, $h(x;a_m)$ – базовая предсказательная модель, характеризующаяся некоторым вектором параметров a_m.

В качестве базовой предсказательной модели может быть любая прогнозная модель, но чаще всего объединяют модели, основанные на решающих деревьях из-за простоты их построения [10].

Существует несколько способов добавления моделей в ансамбль, основной из них – gradient boosting, заключается в конструировании модели таким образом, чтобы они были максимально коррелированы с отрицательным градиентом функции потерь всего ансамбля:

$$F_M = F_{M-1} - b_M \nabla Q, \tag{5}$$

где Q – вещественная функция, имеющая вид:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} L(y_i, F_M(x_i)), \tag{6}$$

где $L(y_i, F_M(x_i))$ $i = \overline{1, N}$ – функция потерь, N – размер набора данных. Функция потерь позволяет количественно измерить, насколько предсказанный ответ $F_M(x_i)$ отличается от истинного значения y_i.

На данный момент существует несколько реализаций механизма gradient boosting: Extreme Boosting (XGBoost), Light Gradient Boosting (LightGBM) и CatBoost [11].

Другой класс современных методов прогнозирования МВР основан на моделях глубокого обучения. Рекуррентные нейронные сети (RNN), такие как Elman network [12] и Long Short-Term Memory (LSTM) [13], были первыми моделями для прогнозирования временных рядов, однако в настоящее время все активнее используются другие архитектуры, использующие в своей основе сверточные нейронные сети (CNN) и Transformers.

Transformers является структурой нейронной сети, которая использует механизм Attention [14] для обработки задач машинного перевода и позволяет модели использовать информацию из других слов во входной последовательности. Multi-Head Attention (MHA) - это метод, встроенный в структуру Transformers, позволяющий модели одновременно сфокусироваться на нескольких аспектах входной последовательности, что помогает создавать более точные прогнозы. MHA является ключевым фактором в достижении новых высот моделями Transformers в задачах обработки естественного языка и последовательностей, таких как временные ряды. Архитектура Temporal Fusion Transformers (TFT) [15], которая была изначально разработана для создания интервальных прогнозов многомерных временных рядов, объединяет собой блоки LSTM и механизм Transformers, что позволяет ей быть одной из самых производительных в настоящее время.

Архитектура Temporal Convolution Networks (TCN) [16] – это архитектура нейронных сетей, используемых для анализа временных данных, таких как речь, музыка, финансовые данные и другие временные ряды. TCN использует в своей основе блоки сверточных слоев, которые обрабатывают фрагменты временного ряда как изображение и позволяют выявлять зависимости между разными переменными, тренды и циклы. Блоки свертки ранее применялись только в задачах компьютерного зрения (CV), за счет их применения можно распараллеливать вычисления и получать быструю производительную модель, обученную на больших наборах данных.

4. Способ исследования (Research method) Для проведения исследования точности и выбора наилучшей прогнозной модели рассмотрим следующие: TFT, TCN, gradient boosting в реализации CatBoost, а также сравним их с классической моделью VARIMA в реализации AutoARIMA [17], позволяющей выбирать автоматически коэффициенты модели под указанные данные.

Подбор весовых коэффициентов современных моделей (TFT, TCN, CatBoost) будет проводиться по схеме, представленной на Рис. 1

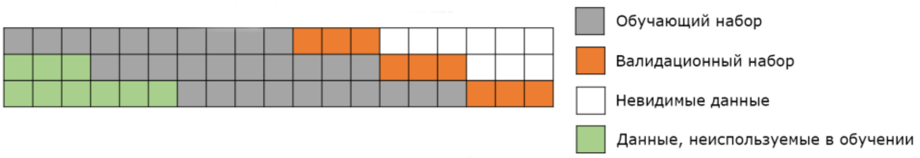

Рисунок 1. Схема валидации моделей при обучении, где одна клетка соответствует одному наблюдению

Подбор оптимальных коэффициентов модели AutoARIMA будет осуществляться сразу на обучающем и валидационном наборе.

Для определения наилучшей из возможных конфигураций каждой из современных моделей, будем варьировать их основные гиперпараметры и определять точность прогнозирования на одних и тех же тестовых данных. Схема определения точности прогнозной модели на тестовых данных представлена на Рис. 2.

Рисунок 2. Схема определения точности модели на тестовых данных, где одна клетка соответствует одному наблюдению

Кроме варьирования гиперпараметров, будем также изменять число последних наблюдений, используемых современными моделями для составления прогноза – это поможет выявить, как меняется точность модели при уменьшении или при увеличении числа входных данных. Таким образом мы сможем сравнить множество реализаций моделей TFT, TCN и CatBoost с оптимальными весовыми коэффициентами и классической моделью AutoARIMA.

Определять точность прогнозирования моделей будем по значению метрики «Среднеквадратическая ошибка», Root Mean Squared Error (RMSE):

$$RMSE(y, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - y_i)^2}{n}}, \tag{7}$$

а также по значению метрики «Средняя абсолютная ошибка», Mean Absolute Error (MAE):

$$MAE(y, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - y_i \right|, \tag{8}$$

где n – число точек тестового периода, y – истинные значения временного ряда, y – прогнозные значения модели.

Также, для тех моделей, которые поддерживают прогнозирование диапазонов, в качестве третьей метрики выберем процент покрытия истинных значений временного ряда доверительным интервалом, образованным квантилями уровня 0.05 и 0.95, метрики RMSE и MAE для таких моделей будут вычисляться для медиан от интервальных прогнозных значений.

5. Используемые данные (Data used) Большая часть актуальных исследований, связанных с прогнозированием МВР, использует данные по потреблению электрической энергии как основу для обучения и определения точности моделей. Причиной этого является большая доступность таких данных с разной периодичностью (ежедневные, почасовые и др.), набором вспомогательных характеристик и продолжительностью. В то же время исследования по прогнозированию других, например, по потреблению тепловой энергии, практически не приводятся, поскольку таких данных в открытом доступе значительно меньше, они меньше по объему и практически не содержат значения вспомогательных характеристик, изменяющихся во времени. Редко они дополнительно содержат метеорологические параметры: температура наружного и внутреннего воздуха, атмосферное давление, влажность и т.п., а также статические характеристики (площадь помещения, состав оборудования, материалы стен и др.), которые являются малополезными для прогнозирования.

Однако прогнозирование потребления других ТЭР также остается актуальным. В качестве данных для исследования был выбран набор данных с информацией по потреблению тепловой энергии жилыми домами города Томска (Россия). Данные размещены в открытом доступе на портале IEEE DataPort [18] с лицензией Creative Commons Attribution, позволяющей использовать их в подобного рода исследованиях при указании источника.

Данные в наборе представляют собой ежесуточные значения потребления с прибора учета тепловой энергии (в Гкал) для жилых домов различной конфигурации за 4 неполных отопительных сезона за период 01/01/2014 по 10/05/2017 гг.

Проведем исследование на одном объекте – жилом девятиэтажном кирпичном доме, данные по потреблению тепловой энергии которого разделим на три набора:

- Обучающий: данные с 01/01/2014 по 30/09/2015, содержит 638 значений;
- Валидационный: данные с 01/10/2015 по 30/09/2016, содержит 342 значения;
- Тестовый: данные с 01/10/2016 по 30/04/2017, содержит 212 значений.

Обучающий и валидационный наборы необходимы для определения оптимальных параметров прогнозных моделей, тестовый – для сравнения качества прогнозирования моделей между собой и определения наилучшей. На Рис. 3 представлена динамика изменения значений потребления для целевого объекта.

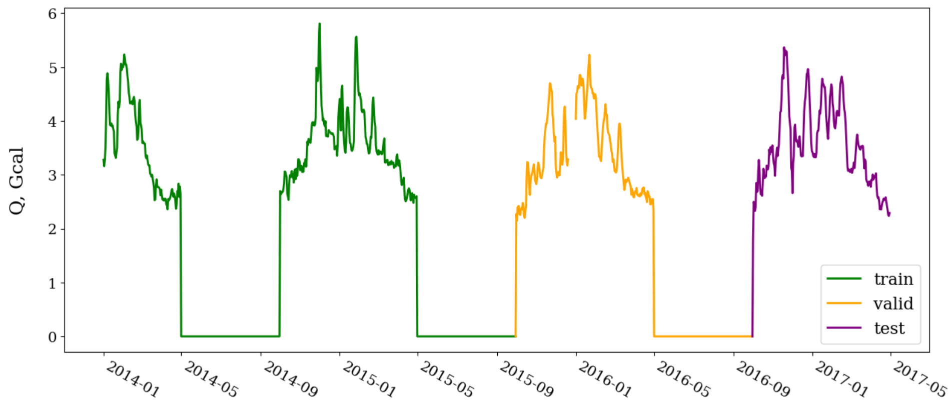

Рисунок 3. Динамика потребления тепловой энергии для целевого объекта, где цветами обозначены обучающая (train), валидационная (valid) и тестовая выборки (test)

Как видно на графике, часть данных валидационного набора отсутствует и, поскольку они содержатся внутри отопительного периода, то в качестве метода восстановления недостающих значений выберем кубический сплайн [19].

Также в качестве внешней учитываемой переменной будем использовать среднесуточную температуру наружного воздуха в соответствующие даты потребления тепловой энергии, на Рис. 4 представлено корреляционное поле внешней и прогнозируемой переменной.

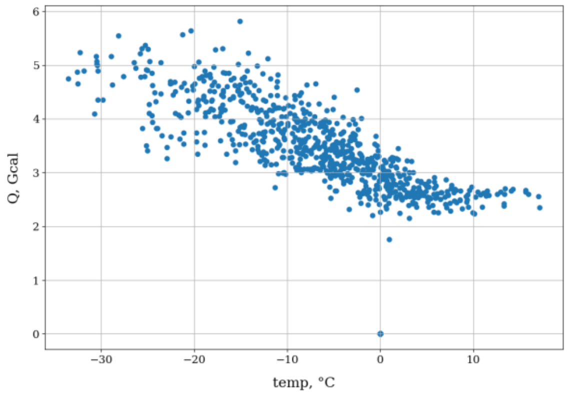

Рисунок 4. Корреляционная карта для температуры наружного воздуха и объема потребления тепловой энергии

Из характера расположения точек на корреляционном поле можно сделать вывод, что между выбранной и целевой переменной существует отрицательная корреляционная зависимость, которая в первом приближении может считаться линейной.

6. Результаты и заключение (Results and conclusion) В Таблице 1 представлены полученные значения метрик на тестовом наборе для выбранных методов при различных значениях гиперпараметров.

Таблица 1. Рассчитанные значения метрик прогнозных моделей на тестовых данных. Красным и зеленым цветом выделены наихудшие и наилучшие модели интервального прогнозирования соответственно.

Методы и значения гиперпараметров	**Метрики**	**Число входных наблюдений**			
		7	**15**	**30**	**45**
AutoARIMA	RMSE, Гкал	2.214			
	MAE, Гкал	2.102			
	Покрытие, %	0			
TCN (kernel_size: 3, num_filters: 3)	RMSE, Гкал	1.266	1.398	1.079	1.141
	MAE, Гкал	0.933	1.277	0.905	0.964
	Покрытие, %	73.11	32.08	60.38	58.49

TCN (kernel_size: 5, num_filters: 5)	RMSE, Гкал	1.972	1.452	1.560	1.571
	MAE, Гкал	1.918	1.335	1.433	1.451
	Покрытие, %	31.60	68.40	57.08	57.08
TFT (dropout: 0.1, full_attention: True)	RMSE, Гкал	0.840	1.116	1.161	1.195
	MAE, Гкал	0.416	1.022	1.071	1.102
	Покрытие, %	81.60	75.94	73.11	71.23
TFT (dropout: 0.25, full_attention: False)	RMSE, Гкал	1.145	1.154	1.241	1.253
	MAE, Гкал	1.049	1.063	1.154	1.165
	Покрытие, %	75.00	75.94	77.36	71.70
CatBoost (l2_lead_reg: 1, depth: 2)	RMSE, Гкал	0.905	0.957	1.214	1.288
	MAE, Гкал	0.503	0.560	0.779	0.827
	Покрытие, %	94.34	85.38	84.43	74.06
CatBoost (l2_lead_reg: 1, depth: 3)	RMSE, Гкал	0.871	0.888	1.105	1.073
	MAE, Гкал	0.497	0.516	0.711	0.708
	Покрытие, %	93.87	91.51	84.43	90.57
CatBoost (l2_lead_reg: 2, depth: 2)	RMSE, Гкал	0.994	0.918	1.166	1.115
	MAE, Гкал	0.575	0.520	0.749	0.722
	Покрытие, %	91.04	93.40	86.79	76.42

Анализ результатов показывает, что классическая модель ARIMA в реализации AutoARIMA показывает наихудшие результаты среди рассмотренных моделей, к тому же совсем не покрывает прогнозируемым доверительным интервалом истинные значения ряда. Наихудшие результаты современными моделями получены для TCN, как с точки зрения точности прогноза, так и с точки зрения стабильности результатов: при одних и тех же гиперпараметрах, процент покрытия моделью истинных значений ряда может изменяться от 32.08% до 73.11%. Изменение числа входных данных меньше всего влияет на модель TFT, а наилучшие результаты прогнозирования получены моделью CatBoost при значениях гиперпараметров l2_lead_reg=1 и depth=2 [20] и использующая 7 последних наблюдений на входе, для которой процент покрытия в наилучшем случае составляет 94.34%, данный результат может быть улучшен добавлением большего числа внешних переменных в набор данных, а наихудший – не менее 80%, что значительно лучше современных моделей глубокого обучения TCN и TFT.

На Рис. 5 наглядно представлены истинные значения тестового периода и прогнозные значения оптимальной модели CatBoost в виде доверительного интервала и его медианы.

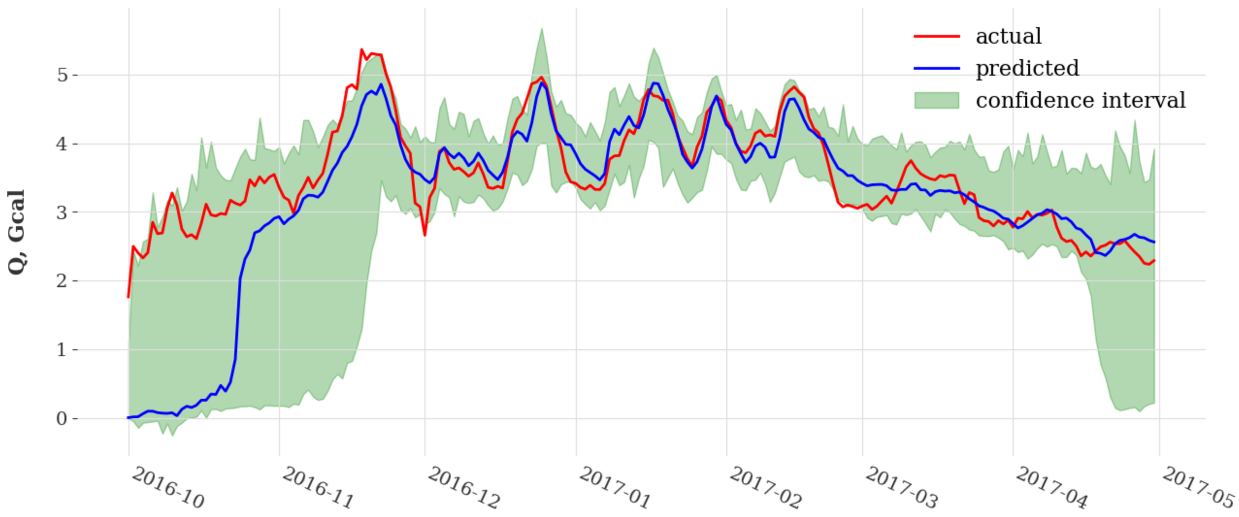

Рисунок 5. Сравнение фактических значений тестового периода и прогнозов модели CatBoost. Цветами выделены фактические (actual), прогнозные (predicted) значения и доверительный интервал (confidence interval)

В работе была рассмотрена задача прогнозирования объемов потребления ТЭР на продолжительные горизонты планирования, в частности, прогнозирование современными методами глубокого и машинного обучения. В работе приведены исследования точности прогнозных моделей на реальных данных при различных настройках и размерах входных данных.

Разработанный подход и полученные оптимальные модели можно рекомендовать к использованию в реальных практических задачах для прогнозирования объемов потребления ТЭР при небольших объемах обучающих данных.

Литература

1. Manusov, V. Analysis of electricity consumption forecasting methods for the coal industry [Text]/ V. Manusov, D. Orlov, V. Karmanov [et al.] // Przeglad Elektrotechniczny. – 2022. – Vol. 98, iss. 9. – P. 26-31. DOI 10.15199/48.2022.09.05
2. Manusov, V. Forecasting Electricity Consumption of Electrical Machines of a Coal Industry Enterprise Using the Wavelet Transform [Text]/ V. Manusov, D. Orlov, V. Karmanov [et. al.]. // IEEE 23 International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM) to the 100th anniversary of the legendary NETI rector Georgy Lyshchinsky : IEEE, 2022. – 4 p. – ISBN 978-1-6654-9804-3. DOI 10.1109/EDM55285.2022.9855175
3. Manusov, V. Investigation of Load Schedules of Electrical Machines of a Mining Enterprise Using Wavelet Analysis [Text]/ V. Z. Manusov, D. V. Orlov, P. V. Matrenin [et al.] // IEEE 23 International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM) to the 100th anniversary of the legendary NETI rector Georgy Lyshchinsky : IEEE, 2022.

– 4 p. – ISBN 978-1-6654-9804-3. DOI: 10.1109/EDM55285.2022.9855045

4. Manusov, V. Predictive Control and Production Process Forecasting Under Deterministic Chaos [Text]/ V. Manusov, D. Orlov, V. Karmanov [et. al.] // IEEE 23 International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM) to the 100th anniversary of the legendary NETI rector Georgy Lyshchinsky : IEEE, 2022. – 5 p. – ISBN 978-1-6654-9804-3. DOI: 10.1109/EDM55285.2022.9855192

5. Hastie, T. The Elements of Statistical Learning [Text]/T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. – Springer, 2017. – 763 p.

6. Brownlee, J. Introduction to Time Series Forecasting with Python [Text]/ J. Brownlee. – Machine learning mastery, 2020. – 364 p.

7. Manusov, V. Analysis of methods of electricity consumption forecasting for a coal industry enterprise [Text]/V. Manusov, D. Orlov, V. Karmanov [et al.] // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – 2022. – Vol. 1045, iss. 1 : Ensuring sustainable development in the context of agriculture, green energy, ecology and earth science (ESDCA–2022): 2 International scientific and practical conference, Smolensk, 23–27 Jan. 2022. – Art. 012035 (11 p.). DOI 10.1088/1755-1315/1045/1/012035.

8. Айвазян, С. А. Прикладная статистика. Основы эконометрики : учебник для вузов : в 2-х т. [Text]/ С. А. Айвазян. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – Т. 2. – 432 с.

9. Rusyana, A. Application of Clustering and VARIMA for Rainfall Prediction [Text]/A. Rusyana, N. Tatsara // IOP Conference Series Materials Science and Engineering. 2020. 796(1):012063. DOI:10.1088/1757-899X/796/1/012063

10. Natekin, A. Gradient boosting machines, a tutorial [Text]/ A. Natekin, A. Knoll // Front. Neurorobot. 2013. Vol. 7. № 21. DOI: 10.3389/fnbot.2013.00021

11. Anghel, A. Benchmarking and optimization of gradient boosting decision tree algorithms [Text]/ A. Anghel, N. Papandreou, T. Parnell [et al.] – URL: https://arxiv.org/abs/1809.04559 (дата обращения – 30.03.2023 г.)

12. Elman, J. Finding Structure in Time [Text]/ J. Elman // Cognitive Science. 1990. 179-211 pp.

13. Hochreiter, S. Long Short-Term Memory [Text]/S. Hochreiter, J. Schumidhuber // Neural Computation. 1997. Vol. 9. № 8. 1735-1780 pp. DOI: 10.1162/neco.1997.9.8.1735

14. Vaswani, A. Attention Is All You Need [Text]/ A. Vaswani, N. Shazeer, N. Parmar [et al.] – URL: https://arxiv.org/abs/1706.03762 (дата обращения – 30.03.2023 г.)

15. Lim, B. Temporal Fusion Transformers for Interpretable Multi-horizon Time Series Forecasting[Text]/B. Lim, S. Arik, N. Loeff [et al.] – URL: https://arxiv.org/abs/1912.09363 (дата обращения – 30.03.2023 г.)

16. Bai, S. An Empirical Evaluation of Generic Convolutional and Recurrent Networks for Sequence Modeling [Text]/ S. Bai, J. Kolter, V. Koltun – URL: https://arxiv.org/abs/1803.01271 (дата обращения – 30.03.2023 г.)

17. Сапрыкин, К. Автоматизация процесса анализа временных рядов с

использованием модели AUTO.ARIMA в R [Текст]/ К. Сапрыкин // Научный журнал. 2019. №5 (39). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/avtomatizatsiya-protsessa-analiza-vremennyh-ryadov-s-ispolzovaniem-modeli-auto-arima-v-r (дата обращения: 30.03.2023 г.)

18. Zorin, P. Data of heating meters from residential buildings in Tomsk (Russia) for statistical modeling of the thermal characteristics of buildings [Text]/ P. Zorin, O. Stukach – URL: https://ieee-dataport.org/documents/data-heating-meters-residential-buildings-tomsk-russia-statistical-modeling-thermal (дата обращения – 30.03.2023 г.)

19. Biloš, M. Irregularly-Sampled Time Series Modeling with Spline Networks[Text]/M. Biloš, E. Ramneantu, S. Günnemann– URL: https://arxiv.org/abs/2210.10630 (дата обращения – 30.03.2023 г.)

20. CatBoost [Electronic resource] / URL: https://catboost.ai/docs/ (date of the application: 01.03.2023).

УДК 517.946

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_233

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Эргашев Тухтасин Гуламжанович, д.ф.-м.н., профессор,
ergashev.tukhtasin@gmail.com
Национальный исследовательский университет «ТИИИМСХ»,
Ташкент, Узбекистан
Холмирзаев Мамиржон Ахунжанович, ст.преподаватель,
mamirjonkholmirzayev@gmail.com
Al Fraganus University (негосударственное ВУЗ),
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В научной литературе вырождающиеся гиперболические уравнения принято делить на два вида: уравнения первого и второго родов. Для уравнений первого рода линия параболического вырождения является геометрическим местом точек возврата семейств характеристик, а для уравнений второго рода прямая параболического вырождения является особой характеристикой – огибающей семейства характеристик, что усложняет исследование уравнений второго рода, поэтому вырождающиеся гиперболические уравнения второго рода во всех отношениях сравнительно мало изучены чем уравнения первого рода. В настоящей работе доказывается, что решение задачи Коши для одного уравнения второго рода, найденное методом Римана, действительно является дважды непрерывно дифференцируемым решением поставленной задачи в замкнутой области.*

Ключевые слова: *вырождающееся гиперболическое уравнение, уравнение второго рода, задача Коши, метод Римана.*

ON THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A DEGENERATING HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND KIND

Ergashev Tuhtasin, Dr Sc, professor,
ergashev.tukhtasin@gmail.com
National Research University "TIIAME", Tashkent, Uzbekistan
Khalmirzayev Mamirjan, teacher,
mamirjonkholmirzayev@gmail.com
Al-Fraganus University, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *In the scientific literature, degenerate hyperbolic equations are usually divided into two types: equations of the first and second kind. For equations of the first kind, the line of parabolic degeneracy is the locus of* *cusp points of families of characteristics, and for equations of the second kind, the line of parabolic degeneracy is a special characteristic - the envelope of a family of characteristics, which complicates the study of equations of the second kind, so degenerate hyperbolic equations of the second kind are relatively little studied in all respects than equations of the first kind. In this paper, we prove that the solution of the Cauchy problem for a single equation of the second kind, found by the Riemann method, is indeed a twice continuously differentiable solution of the problem in a closed domain.*

Key words: *degenerate hyperbolic equation, equation of the second kind, Cauchy problem, Riemann method.*

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv u_{xx} - y^m u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области $D,$ ограниченной характеристиками

$$x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} = 0, \quad x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} = 1$$

и $y = 0$ уравнения (1) при $y \geq 0,$ где $m -$действительное число, причем $0 < m < 1.$

Для уравнения (1) прямая параболического вырождения, т.е. $y = 0$, является особой характеристикой – огибающей обоих семейств характеристик. Такие вырождающиеся гиперболические уравнения в литературе принято называть уравнениями второго рода.

Известно, что решение уравнения (1) с начальными данными

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{2}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad 0 < x < 1 \tag{3}$$

имеет вид [1, с.258]:

$$u(x,y) = \gamma_1 \int_0^1 s^{\beta} (1-s)^{\beta} \tau(t) ds -$$

$$- \frac{\gamma_1}{1-m} y^{\frac{2-m}{2}} \int_0^1 s^{\beta} (1-s)^{\beta} (1-2s) \tau'(t) ds + \gamma_2 y \int_0^1 s^{-\beta} (1-s)^{-\beta} \nu(t) ds, \tag{4}$$

где

$$\beta = -\frac{m}{2(2-m)}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0, \quad t = x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (1-2s$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Если* $\tau \in C^3[0,1]$ *и* $\nu \in C^2[0,1]$, *то функция* $u(x,y)$, *определенная формулой (4), является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (2) и (3) в области* D.

Доказательство. Функцию $u(x,y)$ запишем в виде

$$u(x,y) = \gamma_1 u_1(x,y) + \gamma_2 u_2(x,y)$$

где

$$u_1(x,y) = \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta \tau(t)ds - \frac{1}{1-m} y^{\frac{2-m}{2}} \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta (1-2s)\tau'(t)ds,$$

$$u_2(x,y) = y\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\nu(t)ds.$$

В начале доказательства покажем выполнение начальных условий (2) и (3). Так как $u_1(x,0) = \tau(x)$, $u_2(x,0) = 0$, то выполнение условия (2) очевидно. Вычислим теперь первую производную по y от функции u_1:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{m}{2(1-m)} y^{-\frac{m}{2}} \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta (1-2s)\,\tau'(t)ds +$$

$$+\frac{1}{1-m} y^{1-m} \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta (1-2s)^2\,\tau''(t)ds\,.$$

Первый интеграл интегрируем по частям, после чего u_{1y} принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{4m}{(1-m)(4-3m)} y^{1-m} \int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\,\tau''(t)ds +$$

$$+\frac{1}{1-m} y^{1-m} \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta (1-2s)^2\,\tau''(t)ds\,.$$

Отсюда легко следует, что $\lim\limits_{y\to+0} \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$. Далее, очевидно, что

$$\lim_{y\to+0} \frac{\partial u_2}{\partial y} = \nu(x).$$

Таким образом, начальное условие (3) выполняется.

Займёмся с функцией $u_1(x,y)$. Вычислив её вторые производные

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta\tau''(t)ds-\frac{1}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)\tau'''(t)ds,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=\frac{(4-3m)m}{4(1-m)}y^{-\frac{m}{2}-1}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)\tau'(t)ds+$$

$$+\frac{6-5m}{2(1-m)}y^{-m}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)^2\tau''(t)ds-$$

$$-\frac{1}{1-m}y^{1-\frac{3m}{2}}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)^3\tau'''(t)ds$$

и подставив их в уравнение (1), получаем:

$$L(u_1)\equiv\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-y^m\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=\sum_{i=1}^4\Omega_i(x,y),,$$

$$\Omega_1(x,y)=-\frac{1}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta\left[1-(1-2s)^2\right]\tau'''(t)ds,$$

$$\Omega_2(x,y)=-\frac{6-5m}{2(1-m)}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)^2\tau''(t)ds,$$

$$\Omega_3(x,y)=\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta\tau''(t)ds,$$

$$\Omega_4(x,y)=-\frac{(4-3m)m}{4(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)\tau'(t)ds.$$

Учитывая равенство

$$1-(1-2s)^2=4s(1-s) \tag{5}$$

первое слагаемое Ω_1 можно привести к виду

$$\Omega_1=-\frac{4}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}(1-2s)\tau'''(t)ds,$$

Осуществляя здесь интегрирование по частям, имеем

$$\Omega_1=-\frac{2(2-m)}{1-m}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\tau''(t)ds+\frac{4-3m}{2(1-m)}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)^2\tau''(t)ds$$

Рассмотрим сумму $\Omega_{123}=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3$. Учтя равенство (5) найдем формулу для Ω_{123} в виде

$$\Omega_{123}=-\frac{2m}{1-m}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\tau''(t)ds.$$

Опять интегрируя по частям, получаем

$$\Omega_{123}=-\frac{m(2-m)}{2(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\frac{d}{ds}[\tau'(t)]=$$

$$=\frac{m(2-m)(1+\beta)}{2(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}(1-2s)\tau'(t)ds=$$

$$\Omega_{123}=\frac{(4-3m)m}{4(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)\tau'(t)ds.$$

Теперь нетрудно заметить, что $\Omega_{123}+\Omega_4=0$, тем самим доказано, что $L(u_1)\equiv 0$.

Далее рассмотрим функцию $u_2(x,y)$. Вычислив её вторые производные

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\nu''(t)ds,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=-\frac{4-m}{2}y^{-\frac{m}{2}}\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\nu'(t)ds+y^{1-m}\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}(1-2s)^2\nu''(t)ds$$

и подставив их в уравнение (1), с учетом равенства (5), получаем:

$$L(u_2)=4y\int_0^1 s^{1-\beta}(1-s)^{1-\beta}\nu''(t)ds+\frac{4-m}{2}y^{\frac{m}{2}}\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}(1-2s)\nu'(t)ds.$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части $L(u_2)$. После интегрирования по частям оно принимает вид

$$\frac{4-m}{2}y^{\frac{m}{2}}\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}(1-2s)\nu'(t)ds=-4y\int_0^1 s^{1-\beta}(1-s)^{1-\beta}\nu''(t)ds.$$

Теперь уже стало очевидным, что $L(u_2)\equiv 0$.

Теорема доказана.

Литература

1. Уринов, А.К. К теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу[Текст]/ Уринов А.К. // Изд. «Фергана», 2015. 216 с.

УДК 517.91

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_239

ОБ ОДНОЙ ОДНОРОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Юлдашев Турсун Камалдинович, д.ф.-м.н., профессор

tursun.k.yuldashev@gmail.com

Ташкентский государственный экономический университет,

Ташкент, Узбекистан

Артыкова Жылдыз Абдисаламовна, к.ф.-м.н.

jartykova@oshsu.kg

Ошский государственный университет

Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Рассмотрены вопросы существования и построения нетривиальных решений одной однородной нелокальной краевой задачи для однородного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром и двумя действительными параметрами. Был развит метод вырожденного ядра. Изучены особенности, возникшие при построении решений и связанные с определением коэффициентов интегрирования. Вычислены значения спектральных параметров, для которых устанавливаются разрешимость краевой задачи и строятся соответствующие решения.*

Ключевые слова: *Интегро-дифференциальное уравнение, нелокальная задача, вырожденное ядро, разрешимость, регулярные и иррегулярные значения параметров.*

ON A HOMOGENEOUS NONLOCAL PROBLEM FOR A SECOND-ORDER INTEGRO-DIFFERENTIAL FREDHOLM EQUATION

Yuldashev Tursun Kamaldinovich, Dr Sc, professor,

tursun.k.yuldashev@gmail.com

Tashkent State University of Economics,

Tashkent, Uzbekistan

Artykova Zhyldyz Abdisalamovna, candidate Sc,

jartykova@oshsu.kg

Osh State University,

Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The existence and construction of nontrivial solutions of a homogeneous nonlocal boundary value problem for a second order homogeneous integro-differential Fredholm equation with a degenerate kernel and two real parameters are considered. The degenerate kernel method was developed. The features that have arisen in the construction of solutions and are associated with the determination of the integration coefficients are studied. The values of the spectral parameters are calculated, for which the solvability of the boundary value problem is established*

and the corresponding solutions are constructed.

Key words: *Integro-differential equation, nonlocal problem, degenerate kernel, solvability, regular and irregular values of parameters.*

1. Постановка задачи. Изучение спектральных свойств и построение решений для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений со спектральными параметрами представляют большой теоретический и практический интерес. Различные спектральные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений рассматривались в [1-7]. Интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром рассматривались ранее в [8-12]. В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме.

В настоящей работе изучается нелокальная спектральная задача для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром и двумя спектральными параметрами. Вычисляются регулярные и иррегулярные значения спектральных параметров, при которых устанавливается разрешимость рассматриваемой задачи и строятся соответствующие решения в случае их существования.

Задача. Требуется найти функцию $u(t)$, удовлетворяющую на интервале $(0,T)$ уравнению

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_0^T K(t,s)\left[s\,u(s)+(T-s)u'(s)\right]d\,s \tag{1}$$

со следующими однородными интегральными условиями

$$u(T)-\int_0^T s\,u(s)\,d\,s=0,\; u'(T)-\int_0^T (T-s)u'(s)\,d\,s=0, \tag{2}$$

где $T>\sqrt{2}$, $\lambda-$ положительный параметр, $\nu-$ действительный параметр, отличный от нуля, $K(t,s)=\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)\neq 0,\quad a_i(t),b_i(s)\in C\,[0,T].$ Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Поскольку краевые условия (2) однородны, однородное интегро-дифференциальное уравнение (1) всегда имеет тривиальные решения. Мы исследуем существование нетривиальных решений. Устанавливаем единственность решения или строим бесконечное множество решений. Определим, что при каких значениях параметров λ и ν задача имеет нетривиальных решений и строим эти решения.

Данная работа отличается от работы [13] не только по методу исследования, но и по содержанию полученных результатов.

2. Интегрирование краевой задачи (1), (2). С учетом вырожденности ядра уравнение (1) записывается в следующем виде

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_0^T\sum_{i=1}^k a_i(t)b_i(s)\left[s\,u(s)+(T-s)u'(s)\right]d\,s. \tag{3}$$

С помощью обозначения

$$\tau_i=\int_0^T b_i(s)\left[s\,u(s)+(T-s)u'(s)\right]d\,s \tag{4}$$

уравнение (3) перепишется в следующем виде

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\sum_{i=1}^k a_i(t)\,\tau_i$$

и решается методом вариации произвольных постоянных

$$u(t)=A_1\cos\lambda t+A_2\sin\lambda t+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^k\tau_i\int_0^t\sin\lambda(t-s)\,a_i(s)\,d\,s, \tag{5}$$

где A_1, A_2 – пока произвольные постоянные интегрирования. Путем дифференцирования из (5) получаем

$$u'(t)=-\lambda A_1\sin\lambda t+\lambda A_2\cos\lambda t+\nu\sum_{i=1}^k\tau_i\int_0^t\cos\lambda(t-s)\,a_i(s)\,d\,s. \tag{6}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 в (5) используем однородные интегральные условия (2) и приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_1\chi_{11}(\lambda)+A_2\chi_{12}(\lambda)=\chi_{13}(\lambda),\\ A_1\chi_{21}(\lambda)+A_2\chi_{22}(\lambda)=\chi_{23}(\lambda),\end{cases} \tag{7}$$

где

$$\chi_{11}(\lambda) = \cos\lambda T - \frac{T}{\lambda}\sin\lambda T + \frac{1}{\lambda^2}(1-\cos\lambda T), \quad \chi_{12}(\lambda) = \sin\lambda T + \frac{T}{\lambda}\cos\lambda T - \frac{1}{\lambda^2}\sin\lambda T,$$

$$\chi_{21}(\lambda) = -\lambda\sin\lambda T - T - \frac{1}{\lambda}\sin\lambda T, \quad \chi_{22}(\lambda) = \lambda\cos\lambda T - \frac{1}{\lambda}(1-\cos\lambda T),$$

$$\chi_{13}(\lambda) = -\eta(T,\lambda) + \int_0^T s\cdot\eta(s,\lambda)\,ds, \quad \chi_{23}(\lambda) = -\eta'(T,\lambda) + \int_0^T (T-s)\cdot\eta'(s,\lambda)\,ds,$$

$$\eta(t,\lambda) = \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i h_i(t,\lambda), \quad h_i(t,\lambda) = \int_0^t \sin\lambda\,(t-s)\,a_i(s)\,d\,s,\ i=\overline{1,k}.$$

В следующих двух случаях

1) $\chi_{11}(\lambda) = \chi_{12}(\lambda) = 0$, 2) $\chi_{21}(\lambda) = \chi_{22}(\lambda) = 0$

следует дополнительно проверять корректность поставленной задачи (1), (2). Если задача корректно поставлена, то строить все решения этой задачи. Если задача не поставлена корректно, то существуют только тривиальные решения.

Исследуем, что в следующих трех случаях

3) $\chi_{11}(\lambda) = \chi_{21}(\lambda) = 0$, 4) $\chi_{12}(\lambda) = \chi_{22}(\lambda) = 0$,

5) $\chi_{11}(\lambda)\chi_{22}(\lambda) - \chi_{12}(\lambda)\chi_{21}(\lambda) = 0$

нарушается единственность решения поставленной задачи.

Выясняем, что в следующих трех случаях

6) $\chi_{11}(\lambda) = \chi_{21}(\lambda) \neq 0$, 7) $\chi_{12}(\lambda) = \chi_{22}(\lambda) \neq 0$,

8) $\chi_{11}(\lambda)\chi_{22}(\lambda) - \chi_{12}(\lambda)\chi_{21}(\lambda) \neq 0$.

не нарушается единственность решения поставленной задачи (1), (2). В данных случаях находим достаточные условия существования единственного решения и строим это решение.

В данной работе исследуются и другие случаи, связанные с регулярными и иррегулярными значениями второго параметра ν.

Сначала анализируем разрешимость следующих четырех трансцендентных уравнений: $\chi_{ij}(\lambda) = 0, \quad i,j = 1,2.$

1.Совокупность решений уравнений $\chi_{11}(\lambda)=0$ совпадает с решениями уравнения

$$(4x^2-2T^2)tg^2\,x+4T^2x\cdot tg\,x=4x^2,\ x=\frac{\lambda}{2}T>0. \qquad (8)$$

2. Совокупность решений уравнений $\chi_{12}(\lambda)=0$ совпадает с решениями уравнения

$$tg\,y=\frac{T^2y}{T^2-y^2},\ y=\lambda T>0. \qquad (9)$$

3. Совокупность решений уравнений $\chi_{21}(\lambda)=0$ совпадает с решениями уравнения

$$\sin y=-\frac{yT^2}{T^2+y^2},\ y=\lambda T>0. \qquad (10)$$

4. Совокупность решений уравнений $\chi_{22}(\lambda)=0$ совпадает с решениями уравнения

$$\cos y=-\frac{T^2}{T^2+y^2},\ y=\lambda T>0. \qquad (11)$$

Множества решений трансцендентных уравнений (8)-(11) обозначим через $\Im_i\ (i=1,2,3,4)$, соответственно. Теперь примем обозначения $\Lambda_i=(0,\infty)\setminus\Im_i,\ i=1,2,3,4.$

Первый случай: $\chi_{11}(\lambda)=\chi_{12}(\lambda)=0.$ Определим при каких значениях параметра λ имеет место данный случай. Действительно, если этот случай имеет место, то алгебраическое уравнение

$$\chi_{11}^2(\lambda)+\chi_{12}^2(\lambda)=0 \qquad (12)$$

имеет решение. Уравнение (12) эквивалентно следующему трансцендентному уравнению

$$\cos(\lambda T+\varphi)=-\frac{\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}}, \qquad (13)$$

где $\varphi=\arccos\dfrac{\lambda^2-1}{\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}}.$

Уравнение (13) имеет решение, если её правая часть принадлежит отрезку $[-1,1].$ Если предположим

$$\frac{\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}}\geq 1,$$

то получаем

$$\left(\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}-1\right)^2\geq 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (13) имеет решение только при $\lambda=\sqrt{2-T^2}$. Поскольку $\lambda-$ положительный параметр и $T>\sqrt{2},$ то первый случай невозможен.

Второй случай. Рассмотрим случай $\chi_{21}(\lambda)=\chi_{22}(\lambda)=0.$ Определим при каких значениях параметра λ имеет место данный случай. Если этот случай имеет место, то алгебраическое уравнение

$$\chi_{21}^2(\lambda)+\chi_{22}^2(\lambda)=0 \tag{14}$$

имеет решение. Уравнение (14) эквивалентно следующему трансцендентному уравнению

$$\cos(\lambda T+\varphi)=\frac{(\lambda^2+1)^2+1+\lambda^2T^2}{2(\lambda^2+1)\sqrt{1+\lambda^2T^2}}, \tag{15}$$

где $\varphi=\arccos\frac{1}{1+\lambda^2T^2}.$

Уравнение (15) имеет решение, если её правая часть принадлежит отрезку $[-1,1].$ Если предположим

$$\frac{(\lambda^2+1)^2+1+\lambda^2T^2}{2(\lambda^2+1)\sqrt{1+\lambda^2T^2}}\geq 1,$$

то получаем

$$\left(\lambda^2+1-\sqrt{1+\lambda^2T^2}\right)^2\geq 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (15) имеет решение только при $\lambda=\sqrt{T^2-2}.$ Корректность задачи (1), (2) в данном случае сводится одновременному выполнению следующих двух условий

$$\int_0^T\cos\left[\sqrt{T^2-2}\,(T-s)\right]ds=0,$$

$$\int_0^T (T-t)\int_0^t \cos\left[\sqrt{T^2-2}\,(t-s)\right]ds = 0.$$

Легко проверить, что эти условия не выполняются. Следовательно, в данном случае задача не разрешима, т.е. не существуют нетривиальные решения.

Третий случай: $\chi_{11}(\lambda) = \chi_{21}(\lambda) = 0.$ Определим при каких значениях параметра λ имеет место данный случай. Действительно, если этот случай имеет место, то алгебраическое уравнение

$$\chi_{11}^2(\lambda) + \chi_{21}^2(\lambda) = 0 \tag{16}$$

имеет решение. Уравнение (16) эквивалентно следующему трансцендентному уравнению

$$T^2(y^2-T^2)^2\cos^2 y + y^2\left[T^6+(y^2+T^2)^2\right]\sin^2 y - yT^4(y^2-T^2)\sin 2y +$$

$$+2T^4(y^2-T^2)\cos y + yT^2\left[-T^4+2y^4+2y^2T^2\right]\sin y + y^4T^4 = 0. \tag{17}$$

Это уравнение имеет счетное число решений.

Четвертый случай: $\chi_{12}(\lambda) = \chi_{22}(\lambda) = 0.$ Определим при каких значениях параметра λ имеет место данный случай. Действительно, если этот случай имеет место, то алгебраическое уравнение

$$\chi_{12}^2(\lambda) + \chi_{22}^2(\lambda) = 0 \tag{18}$$

имеет решение. Уравнение (18) эквивалентно следующему трансцендентному уравнению

$$T^2(y^2-T^2)^2\sin^2 y + y^2\left[T^6y^2+y^6+2y^4T^2+y^2T^4)\right]\cos^2 y +$$

$$+yT^4(y^2-T^2)\sin 2y - 2y^2T^2(y^2+T^2)\cos y + y^2T^4 = 0. \tag{19}$$

Это уравнение имеет счетное число решений.

Пятый случай. Это - тот случай, когда основной определитель обращается в нуль: $\Delta = \chi_{11}(\lambda)\cdot\chi_{22}(\lambda) - \chi_{12}(\lambda)\cdot\chi_{21}(\lambda) = 0.$ Определим при каких значениях параметра λ имеет место данный случай. Действительно, если этот случай имеет место, то алгебраическое уравнение

$$\chi_{11}(\lambda)\cdot\chi_{22}(\lambda) - \chi_{12}(\lambda)\cdot\chi_{21}(\lambda) = 0 \tag{20}$$

имеет решение. Уравнение (20) эквивалентно сводится к решению следующего трансцендентного уравнения

$$T^4(2+y^2)\cos y + y^3T^2\sin y + y^4 - 2T^4 = 0,\ \ y = \lambda T > 0. \qquad (21)$$

Решения этого уравнения (21) существуют.

Множество значений параметра λ, при котором уравнения (17), (19) и (21) имеют решения обозначим через $\Im_5, \Im_6, \Im_7$, соответственно. С помощью этих обозначений примем новые обозначения

$$\Lambda_5 = \left(\Lambda_2 \cup \Lambda_4\right) \cap \Im_5, \quad \Lambda_6 = \left(\Lambda_1 \cup \Lambda_3\right) \cap \Im_6, \quad \Lambda_7 = \cup_{i=1}^{4} \Lambda_i \setminus \Im_7.$$

Для значений параметра λ из множеств Λ_5 и Λ_6 построим бесконечное множество решений поставленной задачи (1), (2). Для значений параметра λ из множества Λ_7 исследуем влияние второго параметра ν на разрешимость задачи (1), (2) и при определенных значениях этого параметра построим единственное решение поставленной задачи (1), (2). Значения параметра λ из множеств Λ_5 и Λ_6 назовем иррегулярными, а значения параметра λ из множества Λ_7 назовем регулярными.

Иррегулярные значения параметра λ

Сначала рассмотрим случай значений параметра λ из множества Λ_5. В данном случае, $\chi_{11}(\lambda) = \chi_{21}(\lambda) = 0$. Множества Λ_5 разделим на два множества

$$\Lambda_5 = \Lambda_{5,1} \cup \Lambda_{5,2}, \quad \Lambda_{5,1} = \Lambda_2 \cap \Im_5, \ \ \Lambda_{5,2} = \Lambda_4 \cap \Im_5.$$

Тогда из системы уравнений (7) определим, что $A_1 -$ произвольное постоянное и A_2 имеет два разные значения

$$A_2 = \begin{cases} \dfrac{\chi_{13}(\lambda)}{\chi_{12}(\lambda)}, & \lambda \in \Lambda_{5,1}, \\[2ex] \dfrac{\chi_{23}(\lambda)}{\chi_{22}(\lambda)}, & \lambda \in \Lambda_{5,2}. \end{cases} \qquad (22)$$

Подставляя значения A_2 из (22) в представлению (5), получим

$$u(t,\lambda) = A_1 \cos\lambda t + \frac{\chi_{13}(\lambda)}{\chi_{12}(\lambda)}\sin\lambda t + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i \int_0^t \sin\lambda(t-s)\, a_i(s)\, d\,s, \quad \lambda \in \Lambda_{5,1}, \qquad (23)$$

$$u(t,\lambda) = A_1 \cos\lambda t + \frac{\chi_{23}(\lambda)}{\chi_{22}(\lambda)}\sin\lambda t + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i \int_0^t \sin\lambda(t-s)\, a_i(s)\, d\,s, \quad \lambda \in \Lambda_{5,2}, \qquad (24)$$

где $A_1 -$ произвольное постоянное.

$$u'(t,\lambda)=-\lambda A_1\sin\lambda t+\lambda\frac{\chi_{13}(\lambda)}{\chi_{12}(\lambda)}\cos\lambda t+\nu\sum_{i=1}^{k}\tau_i\int_0^t\cos\lambda(t-s)a_i(s)\,ds,\ \ \lambda\in\Lambda_{5,1},\quad (25)$$

$$u'(t,\lambda)=-\lambda A_1\sin\lambda t+\lambda\frac{\chi_{23}(\lambda)}{\chi_{22}(\lambda)}\cos\lambda t+\nu\sum_{i=1}^{k}\tau_i\int_0^t\cos\lambda(t-s)a_i(s)\,ds,\ \ \lambda\in\Lambda_{5,2}.$$

(26)

Подставляя представления (23) и (25) в обозначение (4), приходим к однородной системе алгебраических уравнений (ОСАУ)

$$\tau_i^{\Lambda_{5,m}}-\frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j^{\Lambda_{5,m}}\Phi_{ij}=\Psi_i^{\Lambda_{5,m}},\ \ m=1,2,\ i=\overline{1,k},\qquad (27)$$

где верхний индекс $\Lambda_{5,m}$ означает множество, которому принадлежат значения параметра λ,

$$\Phi_{ij}=\int_0^T b_i(s)\left[\int_0^s\left[s\cdot\sin\lambda(s-\theta)+\lambda(T-s)\cos\lambda(s-\theta)\right]a_j(\theta)\,d\theta\right]ds,$$

$$\Psi_i^{\Lambda_{5,1}}=\int_0^T b_i(s)\left[s\left(A_1\cos\lambda s+\frac{\chi_{13}(\lambda)}{\chi_{12}(\lambda)}\sin\lambda s\right)-\lambda(T-s)\left(A_1\sin\lambda t-\frac{\chi_{13}(\lambda)}{\chi_{12}(\lambda)}\cos\lambda t\right)\right]ds,$$

$$\Psi_i^{\Lambda_{5,2}}=\int_0^T b_i(s)\left[s\left(A_1\cos\lambda s+\frac{\chi_{23}(\lambda)}{\chi_{22}(\lambda)}\sin\lambda s\right)-\lambda(T-s)\left(A_1\sin\lambda t-\frac{\chi_{23}(\lambda)}{\chi_{22}(\lambda)}\cos\lambda t\right)\right]ds.$$

Исследуя ОСАУ (27), будем находить достаточные условия существования решений задачи (1), (2) для случая иррегулярных значений параметра λ. Далле, рассмотрим регулярные значения этого параметра λ. Тогда относительно второго параметра ν возможны много случаев. В данной работе строится теория, которая позволяет исследовать разрешимость задачи (1), (2).

Литература

1. Смирнов, Ю.Г. Задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ- и ТМ-волн в двухслойных неоднородных анизотропных цилиндрических и плоских волноводах. [Текст]/ Смирнов Ю.Г. //*Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 2015. № 3. –С. 460–468.

2. Завизион, Г.В. Асимптотические решения систем линейных интегро-дифференциальных уравнений с вырождениями. [Текст]/ Завизион Г.В. // Укр. мат. журн.

2003. № 4.–С. 435–445.

3. Смирнов, Ю.Г. Об эквивалентности электромагнитной задачи дифракции на неоднородном ограниченном диэлектрическом теле объемному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению. [Текст]/ Смирнов Ю.Г. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2016. № 9. –С. 1657–1666.

4. Фалалеев, М.В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения. [Текст]/ Фалалеев М.В. //Изв. ИркутскГУ. Серия «Математика». 2012. № 2. –С. 90–102.

5. Юрко, В.А. Обратные задачи для интегро-дифференциальных операторов первого порядка. [Текст]/ Юрко В.А.//Матем. заметки. 2016. № 6. –С. 939–946.

6. Юлдашев, Т. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка. [Текст]/ Юлдашев Т. К. // Изв. вузов. Математика. 2015. № 9. –С. 74–79.

7. Юлдашев, Т.К. Нелокальная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром. [Текст]/ Юлдашев Т.К. //Укр. мат. журн. 2016. № 8. –С. 1115–1131.

8. Юлдашев, Т.К. Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром. [Текст]/ Юлдашев Т. К. //Дифференц. уравнения. 2017. 53. № 1. –С. 101–110.

9. Yuldashev, T. K. Spectral features of the solving of a Fredholm homogeneous integro-differential equation with integral conditions and reflecting deviation, [Text]/ Yuldashev T. K. // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, 12,–С. 2116–2123.

10. Cetinkaya, F. A. A boundary value problem with retarded argument and Discontinuous coefficient in the differential equation. [Text]/ Cetinkaya F. A., Mamedov K. R. // Azerbaijan journal of Mathematics. 2017. № 1. –С. 130–141.

11. Бободжанов, А. А. Регуляризованные асимптотические решения начальной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. [Текст]/ Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. //Матем. заметки. 2017. № 1.–С. 28–38.

12. Бойчук, А. А. Нетеровы краевые задачи для систем линейных интегро-динамических уравнений с вырожденным ядром на временной шкале. [Текст]/ Бойчук А. А., Страх А. П. // Нелинейные колебания. 2014. №1. –С. 32–38.

13. Джумабаев, Д. С. Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. [Текст]/

Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А.   // Нелинейные колебания. 2015. № 4. –С. 489–506.

УДК 517
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_250

INVERSE PROBLEMS FOR FRACTIONAL SCHRÖDINGER AND SUBDIFFUSION EQUATIONS

Ashurov Ravshan Radjabovich, Dr Sc., professor,
ashurovr@gmail.com
Shakarova Marjona Dilshod qizi.
shakarova2104@gmail.com
Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky,
Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *The inverse problems of determining the right-hand side of the Schrödinger and the sub-diffusion equations with the fractional derivative is considered. In the problem 1, the time-dependent source identification problem for the Schrödinger equation , in a Hilbert space* H *is investigated. To solve this inverse problem, we take the additional condition* $B[u(\cdot,t)]=\psi(t)$ *with an arbitrary bounded linear functional* B. *In the problem 2, we consider the subdiffusion equation with a fractional derivative of order* $\rho\in(0,1]$, *and take the abstract operator as the elliptic part. The right-hand side of the equation has the form* $g(t)f$, *where* $g(t)$ *is a given function and the inverse problem of determining element* f *is considered. The condition* $u(t_0)=\psi$ *is taken as the over-determination condition, where* t_0 *is some interior point of the considering domain and* ψ *is a given element. Obtained results are new even for classical diffusion equations. Existence and uniqueness theorems for the solutions to the problems under consideration are proved.*

Key words: *Schrödinger and subdiffusion equation, equation, the Caputo derivatives, Fourier method.*

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА И СУБДИФФУЗИИ

Ашуров Равшан Раджабович, д.ф.-м.н., профессор,
ashurovr@gmail.com
Шакарова Маржона Дилшод қизи.
shakarova2104@gmail.com
Институт математики имени В.И. Романовский,
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *Рассмотрены обратные задачи определения правой части уравнения Шредингера и уравнения субдиффузии с дробной производной. В задаче 1 исследуется нестационарная задача идентификации источника для уравнения Шрёдингера , в гильбертовом пространстве* H. *Для решения этой обратной задачи возьмем дополнительное условие* $B[u(\cdot,t)]=\psi(t)$ *с произвольным ограниченным линейным функционалом* B. *В задаче 2 мы рассматриваем уравнение субдиффузии с дробной производной*

порядка $\rho \in (0,1]$ *, а в качестве эллиптической части берем абстрактный оператор. Правая часть уравнения имеет вид* $g(t)f$ *, где* $g(t)$ *- заданная функция и рассматривается обратная задача определения элемента* f *. В качестве условия переопределенности принимается условие* $u(t_0)=\psi$ *, где* t_0 *- некоторая внутренняя точка рассматриваемой области,* ψ *- заданный элемент. Полученные результаты являются новыми даже для классических уравнений диффузии. Доказаны теоремы существования и единственности решений рассматриваемых задач.*

Ключевые слова: *уравнение Шредингера и субдиффузии, уравнение, производные Капуто, метод Фурье.*

Introduction

The fractional integration of order $\sigma<0$ of the function $h(t)$ defined on $[0,\infty)$ has the form (see, [1]):

$$J_t^\sigma h(t)=\frac{1}{\Gamma(-\sigma)}\int_0^t \frac{h(\xi)}{(t-\xi)^{\sigma+1}}d\xi, \quad t>0,$$

provided the right-hand side exists. Here $\Gamma(\sigma)$ is Euler's gamma function. Using this definition one can define the Caputo fractional derivative of order ρ,

$$D_t^\rho h(t)=J_t^{\rho-1}\frac{d}{dt}h(t).$$

If we first integrate and then differentiate, then we get the Riemann-Liouville derivative.

Let H be a separable Hilbert space. Let $A: H\to H$ be an arbitrary unbounded positive selfadjoint operator in H.

Let τ be an arbitrary real number. We introduce the power of operator A, acting in H according to the rule

$$A^\tau h=\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\tau h_k v_k.$$

Obviously, the domain of definition of this operator has the form

$$D(A^\tau)=\{h\in H: \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{2\tau}|h_k|^2<\infty\}.$$

For elements $h\in D(A^\tau)$ we introduce the norm:

$$\|h\|_\tau^2=\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{2\tau}|h_k|^2=\|A^\tau h\|^2$$

and together with this norm $D(A^\tau)$ turns into a Hilbert space.

Problem 1. Let $\rho\in(0,1)$ be a fixed number. Consider the following Cauchy problem

$$\begin{cases} iD_t^\rho u(t)+Au(t)=p(t)q+f(t), \quad 0<t\le T, \\ u(0)=\varphi, \end{cases} \tag{1.1}$$

where a part of the source function $p(t)$ is a scalar function, $f(t) \in C(H)$ and $\varphi, q \in H$ are known elements of H.

To solve this time-dependent source identification problem one needs an extra condition. Following the papers of A. Ashyralyev et al. [2] we consider the additional condition in a rather general form:

$$B[u(t)] = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

where $B: H \to R$ is a given bounded linear functional, and $\psi(t)$ is the given scalar function. We call the Cauchy problem (1.1) together with additional condition (1.2) the inverse problem.

Problem 2. Let $\rho \in (0,1]$ be a fixed number. Consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + Au(t) = g(t) f, & 0 < t \le T, \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{1.3}$$

Here $\varphi, f \in H$ are known elements of H and a part of the source function $g(t)$ is a scalar function.

To solve the inverse problem of determining the right-hand side of the equation, we use the following additional condition:

$$u(t_0) = \psi, \tag{1.4}$$

where t_0 is a given fixed point of the segment $(0,T]$.

Main results for the Problem 1

Theorem 1. Let $Bq \ne 0$, $\varphi \in H$ and $D_t^\rho \psi(t) \in C[0,T]$. Further, let $\epsilon \in (0,1)$ be any fixed number and $q \in D(A^{1+\epsilon})$ and $f(t) \in C([0,T]; D(A^\epsilon))$. Then the inverse problem has a unique solution $\{u(t), p(t)\}$.

Theorem 2. Let assumptions of Theorem 1 be satisfied and let $\varphi \in D(A)$. Then the solution to the inverst problem obeys the stability estimate

$$\| D_t^\rho u \|_{C(H)} + \| Au \|_{C(H)} + \| p \|_{C[0,T]} \le C_{\rho,q,B,\epsilon} \left[\| \varphi \|_1 + \| \psi \|_{C[0,T]} + \max_{0 \le t \le T} \| f(t) \|_\epsilon \right],$$

where $C_{\rho,q,B,\epsilon}$ is a constant, depending only on ρ, q, B and ϵ.

Similar results hold for the Riemann-Liouville fractional derivative.

Main results for the Problem 2

Lemma 1. Let $\rho = 1$, $g(t) \in C^1[0,T]$ and $g(t_0) \ne 0$. Then there exists a number k_0 such that, starting from the number $k \ge k_0$, the following estimates hold:

$$\frac{C_0}{\lambda_k} \le | b_{k,1}(t_0) | \le \frac{C_1}{\lambda_k},$$

where

$$b_{k,1}(t_0) = \int_0^{t_0} e^{-\lambda_k s} g(t_0 - s) ds$$

and constants C_0 and $C_1 > 0$ depend on k_0 and t_0.

Lemma 2. Let $\rho \in (0,1)$, $g(t) \in C^1[0,T]$ and $g(0) \neq 0$. Then there exist numbers $m_0 > 0$ and k_0 such that, for all $t_0 \leq m_0$ and $k \geq k_0$, the following estimates hold:

$$\frac{C_0}{\lambda_k} \leq | b_{k,\rho}(t_0) | \leq \frac{C_1}{\lambda_k},$$

where

$$b_{k,\rho}(t_0) = \int_0^{t_0} g(t_0 - s) s^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\lambda_k s^\rho) ds$$

and constants C_0 and $C_1 > 0$ depend on m_0 and k_0.

Let $\mathbb{N} = K_\rho \cup K_{0,\rho}$, where $\mathbb{N}$ is the set of all natural numbers. K_ρ and $K_{0,\rho}$ are sets such that: if $b_{k,\rho}(t_0) \neq 0$, $k \in K_\rho$, otherwise, if $b_{k,\rho}(t_0) = 0$, then $k \in K_{0,\rho}$.

Theorem 3. Let $\rho \in (0,1]$, $\varphi \in H$, $\psi \in D(A)$. Moreover let function $g(t) \in C[0,T]$ and $g(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$. Then there exists a unique solution of the inverse problem (1.3)-(1.4).

Theorem 3 proves the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem (1.3)-(1.4) under condition $g(t) \in C[0,T]$ and $g(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$, i.e., $g(t)$ does not change sign. Article [3], Example 3.1, shows the non-uniqueness result if $g(t)$ changes its sign. It is proved that if function $g(t)$ does not change sign, then the solution of the inverse problem is unique. Naturally, questions arise: if $g(t)$ changes sign, is uniqueness always violated? What can be said about the existence of a solution? How many solutions can there be?

It should be emphasized that the answers to these questions were not known even for the classical diffusion equation (i.e. $\rho = 1$).

Lemmas 1 and 2 proved above allow us to answer these questions. Let us formulate the corresponding result.

Theorem 4. Let $\varphi \in H$, $\psi \in D(A)$. Further, we will assume that for $\rho = 1$ the conditions of Lemma 1 are satisfied, and for $\rho \in (0,1)$, the conditions of Lemma 2 are satisfied and t_0 is sufficiently small. If set $K_{0,\rho}$ is empty, i.e. $b_{k,\rho}(t_0) \neq 0$, for all k, then there exists a unique solution of the inverse problem (1.3)-(1.4). If set $K_{0,\rho}$ is not empty, then for the existence of a solution to the inverse problem, it is necessary and sufficient that the following conditions

$$\psi_k = \varphi_k E_\rho(-\lambda_k t_0), \quad k \in K_{0,\rho}, \tag{3.1}$$

be satisfied. In this case, the solution to the problem (1.3)-(1.4) exists, but is not unique.

Remark. For conditions (3.1) to be satisfied, it suffices that the following orthogonality conditions hold:

$$\varphi_k = (\varphi, v_k) = 0, \psi_k = (\psi, v_k) = 0, k \in K_{0,\rho}.$$

References

1. Pskhu, A.V. Fractional Differential Equations. [Text]/ Pskhu A.V. // Moscow: NAUKA. 2005 [in Russian].
2. Ashyralyev, A. Time-dependent source identification problem for the Schrodinger equation with nonlocal boundary conditions, [Text]/ Ashyralyev.A., Urun.M. // In: AIP Conf. Proc, V:2183, 2019.
3. Slodichka, M. Uniqueness for an inverse source problem of determining a space dependent source in a time-fractional diffusion equation[Text]/ Slodichka M., Sishskova K., Bockstal V. //Appl. Math. Letters, V. 91, pp. 15-21, 2019.

УДК 536.2.023

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_255

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELSOF SCIENTIFIC NOTIONS

Bayachorova Batyigul Jumadylovna, Cand. Sci., professor,

bayachorova@gmail.com

Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn,

Pankov Pavel Sergeevich, Doct. Sci., professor, KR NAS corresponding member

pps5050@mail.ru

Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic

Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *Supra, the authors proposed independent computer interactive presentation of notions (without using other languages). In this method, feedback confirms mastering of the notion. Such presentation may be "with avatar" or "without avatar". They developed mathematical and computer models for some verbs, nouns and adjectives, proposed new classification of verbs and new "grammar" for notions. They with coauthors implemented some notions of Kyrgyz and English on computer. In the paper mathematical models for some notions in various sciences are described. It can be used for further development of such computer presentations and learning languages.*

Key words: *mathematical model, language, computer model, relation, independent presentation, learning.*

ИЛИМИЙ ТҮШҮНҮКТӨРДҮН МАТЕМАТИКАЛЫК ЖАНА КОМПЬЮТЕРДИК МОДЕЛДЕРИ

Баячорова Батыйгуль Жумадыловна, ф.-м.и.к., профессор

bayachorova@gmail.com

Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук университети,

Панков Павел Сергеевич, ф.-м.и.д., профессор, КР ИУА корреспондент-мүчөсү

pps5050@mail.ru

Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институту,

Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Буга чейин авторлор түшүнүктөрдүн компьютерде көз карандысыз түрдө (башка тилдерди колдонбостон) чагылдырылышын сунуштаашкан.*

Бул ыкмада компьютер өз тарабынан колдонуучу аталган түшүнүктү өздөштүргөнүн тастыктайт. Мындай аракет "аватардык" же "аватардык эмес" түрдө болушу мүмкүн. Авторлор кээ бир *этиштердин, зат атоочтордун жана сын атоочтордун математикалык жана компьютердик моделдерин иштеп чыгышты, этиштердин жаңы классификациясын жана түшүнүктөрдүн жаңы “грамматикасын” сунушташты. Авторлоштору менен бирге алар кыргыз жана англис тилдериндеги айрым түшүнүктөрдү компьютерде чагылдырууну ишке ашырышкан. Бул макалада ар кандай илимдердеги кээ бир түшүнүктөрдүн математикалык моделдери баяндалат. Аталган жыйынтыктарды түшүнүктөрдү компьютерде көз карандысыз чагылдыруу ыкмасын өнүктүрүүгө жана тилдерди өздөштүрүү үчүн колдонууга болот.*

Ачкыч сөздөр: *математикалык модель, тил, компьютердик модель, байланыш, көз карандысыз чагылдыруу, өздөштүрүү.*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ НАУЧНЫХ ПОНЯТИЙ

Баячорова Батыйгуль Жумадыловна, к.ф.-м.н., профессор

bayachorova@gmail.com

Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына

Панков Павел Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. НАН КР

pps5050@mail.ru

Институт математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики,

Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Ранее авторы предложили независимое компьютерное представление понятий (без использования других языков). По этому методу, обратная связь подтверждает, что пользователь овладел понятием. Такое представление может быть «аватарным» или «неаватарным». Авторы разработали математические и компьютерные модели для некоторых глаголов, существительных и прилагательных, предложили новую классификацию глаголов и новую «грамматику» для понятий. Вместе с соавторами они реализовали некоторые понятия кыргызского и английского языков на компьютере. В статье описаны математические модели для некоторых понятий в различных науках. Это может быть использовано для дальнейшего развития таких представлений и изучения языков.*

Ключевые слова: *математическая модель, язык, компьютерная модель, отношение, независимое представление, обучение.*

1. Introduction

The general task of present-day informatics is developing of interactive computer presentations of known or invented real and virtual objects to offer the user the opportunity to master them safely and effectively before real treating. If such computer presentation does not depend on the user’s knowledge and skills on similar objects then we call it independent. Such presentations are more effective because the user can learn without referencing other objects in mind. In regards with learning a language, the user begins to thinking in it, without translation in mind.

Survey. Earlier, investigating and learning a living language were implemented with the assistance (including bilingual dictionaries and text-books) of persons who had a complete command of it. Invention of recording sounds gave possibility to fix examples of an oral language objectively. Invention of talking pictures fixed examples of phrases with connection to situations and actions. Computer games gave the user the opportunity to choose actions with corresponding phrases. Existing software to learn languages base on languages native to the user, nevertheless some notions are presented independently. This survey demonstrates that there were not completely independent presentations of natural languages before our publications.

Using ideas [1-3] we [4-10] gave definitions and developed elements of such presentations. Some scientific notions are described in [11] and [12]. We shall consider also feedback for checking-up knowledge. We propose to use random generation of tasks and situations for independent presentation of notions and objective estimation of understanding level.

2. Definitions for independent presentation

Definition 1. If low energetic outer influences can cause sufficiently various reactions and changing of the inner state of the object (by means of inner energy of the object or of outer energy entering into object besides of commands) at any time then such (permanently unstable) object is an affectable object, and such outer influences are commands. A system of commands such that any subject can achieve desired efficiently various consequences from other one is a language.

Hypothesis 1. A human's genuine understanding of a notion can be clarified by means of observing the human's actions in real life situations corresponding to this notion.

Remark. Simple mathematical models consist of fixed (F_i) and movable (M_j) sets and temporal sequence of conditions of types $(M_j \subset F_i)$, $(M_j \cap F_i = \varnothing)$, $(M_j \cap F_i \neq \varnothing)$. More complex models include transformations of sets (see below).

Computer interactive presentations are built on the base of mathematical models.

Definition 2. Let any notion be given. If an algorithm acting at a computer: generates (randomly) a sufficiently large amount of instances covering all essential aspects of the *notion* to the user, gives a command related to this notion in each situation, perceives the user's actions and performs their results clearly on a display, detects whether a result fits the command, then such algorithm is said to be a computer interactive presentation of the notion.

Certainly, commands are to contain other notions too. But these words must not give any definitions or explanations of the notion.

Definition 3. If all words and actions being used in Definition 3 are unknown to the user nevertheless s/he is be able to fulfil the meant action (because it is the only natural one in this situation) then the notion is said to be primary. If the user has to know supplementary words to complete the action then the notion is said to be secondary. Thus, there arises a natural hierarchy of notions.

Using this method, we can present not only real notions (objects and actions) but also notions which have imaginary concepts.

Hypothesis 2. A person learning a natural language without references to any other ones, hearing a notion in various situations begins to form a kind of mathematical model in mind corresponding to this notion by means of trial and error method and attempts to fulfill operations similar to mathematical ones: closing and compactification. After successful completing such operations, the human feels "mastering" this notion.

Hypothesis 3. Any notion has a minimalistic mathematical model (involving minimal number of entities in Occam's sense).

3. Models for some scientific notions

For uniformity and convenience of the user.

Background is in the spectrum from white till black; sometimes chess color (light grey and dark grey) for 2D-spaces is used.

Avatar object (A-object) is green. Function, or result of A-object is red and is denoted as F-object below. Target for F-object is yellow and is denoted as T-object below.

Approaching T-object is accompanied by signals of "hot-cold" type too. Tracks of A-object (light green) and F-object (light red) can also stay while 2D-motion.

Example 1. Solving of the equation $F(x) = 0$. A-point can move along the abscissa axis only. T-object is the abscissa axis.

Example 2. Searching for $\min F(x)$. A-point can move along the abscissa axis only. T-object is gradient of yellow color down.

Example 3. Solving of the system of equations $F(x, y) = u$, $G(x, y) = v$ (firstly, linear ones; the user discovers linearity). A-point is (x, y), F-point is (F, G), T-point is (u, v).

Example 4 [12]. Solving of the equation $\sqrt{z} = w$ for complex numbers. The origin z = 0 repels A-point. The user discovers the following: to reach T-point going around the origin is necessary.

Notions (measures) as invariants.

Example 5. Length of a curve. A-object with F-object is a red curve with the leading green endpoint. While pulling its length preserves. T-objects are several curves of various lengths. The user is to detect the T-object with corresponding length and pull A-object on this T-object.

Example 6. Area of a figure. A-object with F-object is a red rounded figure with the green boundary. While pulling its area preserves. T-objects are several figures of various areas. The user is to detect the T-object with corresponding area and pull A-object on this T-object.

General example 7 [14]. Presentations of non-Euclidean spaces filled with T-objects and brown Obstacles. The user drives a “green car”, with additional possibilities to put marks etc. The screen is the windshield of the car. The task is to find and erase T-objects without breaking Obstacles.

Examples:

- Moebius band: the user can verify that a right boot left on a street will be met as a left boot after passing half of the street;

- Topological torus is a square with opposite sides glued. (This space used to be discovered by many programmers independently). Motion in arbitrary direction will led to the initial position someday.

- Riemann surface of the function $\sqrt{z}$, with the third coordinate up.

- Riemann surface of the function $\sqrt{(z^2 - a^2)}$, with the third coordinate up. Passing between two unbreakable pillars only leads to another part of the space.

- Motion with creating the Riemann surface of the implicit function $H(z, w) = 0$, H is a given polynomial. This is the only way to investigate its branching points and general structure.

- Projective plane with the third coordinate up. While motion along the street “trees” on this side move to us as usually but “trees” on the opposite side move from us.

- Presentations for 4D-space filled with 4D-solids. The 3D-coordinates are presented as usually, the fourth coordinate (call it <u>deep</u>) is denoted with continuous darkening of the environment. We look at the space through 3D-slit and can <u>deep</u> and <u>undeep</u>. The task is to detect 4D-solids. For instance, the 4D-deep-directed cone is seen as the sequence "little ball" - "enlarging ball" - "none" while motion "deep".

Physics:

Example 8. Trajectory of thrown ball. The red ball (A-object) flies off the gun about 70^0 to a horizontal yellow line (T-object) with light green track and stops. If the user does nothing then the red ball flies off again. The user is to drag the red ball and continue the trajectory until the yellow line.

Example 9. Center of gravitation of a triangle. Given a triangle with horizontal base. "Where must a support be put for equilibrium?"

4. Conclusion

We hope that successful implementation of proposed and other such presentations of mathematical objects would distinguish new essential features of various mathematical objects and be interesting both for programmers and for users regardless their relation to mathematics.

References

1. Выготский, Л.С. Исследование формирования понятий: методология двойного стимулирования [Текст]/ Л.С.Выготский, Л.С. Сахаров // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления. – Москва: изд. МГУ, 1981.

2. J. The strategy of total physical response: An application to learning Russian[Text]/ J. Asher // International Review of Applied Linguistics. 1965, no. 3.

3. T. Understanding Natural Language [Text]/ T. Winograd. - Massachusetts Institute of Technology, New York, 1972.

4. Pankov, P.S. Active English on computer [Text]/ P.S.Pankov, J.Sh.Aidaraliyeva, V.S.Lopatkin. - Conference "Improving Content and Approach in the Teaching of English Language in the Context of Educational Reform", Kyrgyz State Pedagogical University, Bishkek, 1996. - pp. 25-27.

5. Pankov, P.S. Virtual Environment for Interactive Learning Languages [Text]/ P.S.Pankov, E.Alimbay. - Human Language Technologies as a Challenge for Computer Science and Linguistics: Proceedings of 2nd Language and Technology Conference, Poznan, Poland, 2005. – Pp. 357-360.

6. Bayachorova, B.J. Independent Computer Presentation of a Natural Language [Text]/ B.J.Bayachorova, P. Pankov // Varia Informatica. – Lublin: Polish Information Processing Society, 2009. – Pp. 73-84.

7. Панков, П. Кыргыз тилин компьютерде чагылдыруу [Текст]/ П.Панков, Б.Баячорова, М.Жураев. – Бишкек: Турар, 2010.

8. Pankov, P. Software for Complex Examination on Natural Languages[Text]/ P. Pankov, P. Dolmatova // Human Language Technologies as a Challenge for Computer Science and Linguistics: Proceedings of 4th Language and Technology Conference, 2009, Poznan, Poland. – P. 502-506.

9. Pankov, P.S. Mathematical Models for Independent Computer Presentation of Turkic Languages [Text]/ P.S.Pankov, B.J. Bayachorova, M. Juraev // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 3, No.1, 2012. – Pp. 92-102.

10. Pankov, P.S. Mathematical models of human control, classification and application [Text]/ P.S.Pankov, B.J.Bayachorova, S.Zh. Karabaeva // Herald of Institute of Mathematics of

NAS of KR, 2020, No. 1. - Pp. 88-95.

11. Pankov, P.S. Interactive presentation of mathematical objects [Text]/ P.S.Pankov, E.S. Burova // Computer tools in education, 2021, No. 2, pp. 58–65.

12. Борубаев, А.А. Компьютерное представление кинематических топологических пространств [Текст]/ А.А.Борубаев, П.С.Панков. - Бишкек: КГНУ, 1999.

УДК 517.912
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_262

INTEGRATION OF A THIRD-ORDER ODE VIA ANALYTICAL AND GEOMETRICAL METHODS

Beltrán de la Flor, Master's Degree, Ph. D. Student,
beltran.delaflor@uca.es
Concepción Muriel, Ph. D., Full Professor,
concepcion.muriel@uca.es
Adrián Ruiz, Ph. D., Assistant Professor,
adrian.ruiz@uca.es
Universidad de Cádiz, Facultad de Ciencias, 11510, Puerto Real, Spain.

Abstracts. *Analytical and geometrical methods are applied to integrate an ordinary differential equation of third order. The main objective is to compare both approaches and show the possibilities that each one of them offers in the integration process of the considered equation, specially when not only Lie point symmetries but also generalized symmetries are involved. The analytical method of order reduction by using a generalized symmetry provides the general solution of the equation but in terms of a primitive that cannot be explicitly evaluated. On the other hand, the application of geometrical tools previously reported in the recent literature leads to two functionally independent first integrals of the equation without any kind of integration. In order to complete the integration of the given third-order equation, a third independent first integral arises by quadrature as the primitive of a closed differential one-form. From these first integrals, the expression of the general solution of the equation can be expressed in parametric form and in terms of elementary functions.*

Key words: *Lie symmetries, first-order symmetries, first integrals, involutive distributions.*

1. Introduction.

The Lie symmetry approach for reducing the order and integrating ordinary differential equations (ODEs) is one of the most powerful and used tools available for handling ODEs and their exact solutions. It is well known that an n^{th}-order equation admitting an r-dimensional algebra of Lie point symmetries can be reduced to an $(n-r)^{th}$-order equation in terms of the common differential invariants of the symmetries. Furthermore, if this algebra is solvable then one can recover the solution of the original equation by solving the reduced ODE and carrying out r consecutive quadratures [1, 2, 3, 4, 5]. In this paper, we will refer to these procedures of order reduction or integration of ODEs as analytical (or classical) methods. This method can be extended to use higher-order symmetries to reduce the order of the equation [3, 6, 7], although in this case the calculation of the differential invariants gets more complicated since, in general, it is not possible to obtain a complete set of differential invariants by derivation of lower order invariants.

Furthermore, the reduction process in this situation for an n^{th}-order ODE leads to a system of $n-1$ first-order ODEs that is not equivalent to an $(n-1)^{th}$-order ODE.

In the last decade of the past century, P. Basarab-Horwath [8], J. Sherring and G. Prince [9], T. Hartl and C. Athorne [10] and M. A. Barco and G. Prince [11] obtained powerful geometrical results regarding the integration by quadratures of involutive distributions of vector fields. Such results are based on the concept of solvable structure, an object that generalizes the notion of solvable Lie algebra of symmetries of an involutive distribution. These geometrical results can be applied to integrate ODEs by quadratures by considering the involutive distribution generated by the vector associated to the equation and determining a solvable structure for it. Remarkably, the vector fields involved in a solvable structure are not necessarily Lie point nor generalized symmetries of the equation. Once a solvable structure is known, the equation can be integrated by quadratures by following a procedure that has been studied, applied and generalized by many authors over the years since its introduction [10, 11, 12, 13].

In particular, in the general setting of an n-dimensional manifold, it was developed a procedure to integrate by quadratures involutive distributions of vector fields of dimension r admitting an $(n-r)$-dimensional solvable structure ([8, prop. 3], [9, prop. 4.6 and 4.7]). This method works by constructing $n-r$ closed differential 1-forms which belong to the annihilator of the distribution and which can be integrated successively. This procedure generalizes a classical result known as Lie-Bianchi's Theorem [14, th. 1.7.2], which uses solvable Lie algebras of symmetries instead of solvable structures. We will refer to the application of these last procedures to the involutive distribution associated to an ODE as the geometrical method of integration of the equation.

In the present paper we aim to perform a comparison of the results obtained when both the analytical and the geometrical methods are applied to integrate a third-order ODE. The considered equation can be found in [3, eq. (3.245)], where the authors proved that the equation admits three Lie point symmetries and seven first-order symmetries. The analytical method of reduction of order is applied using one of the first-order symmetries. We will review this procedure and its flaws, and we will see how the geometrical method can give us some advantages in this situation.

The work is organized as follows. In Section 2 the basics definitions and results regarding the method of solvable structures to integrate involutive distributions of vector fields are briefly introduced. In Section 3, with the aim of being self-contained, we describe the reduction of order of ODEs via Lie point symmetries and generalized symmetries, as well as the application of the geometrical methods in the particular case of ODEs. In Section 4, we introduce the ODE under study and the Lie point and generalized symmetries admitted by the equation. We also review the analytical method of reduction of order described in [3], showing some of the problems that may appear when using generalized symmetries. As a consequence, an implicit expression for the general solution of the ODE in terms of a primitive that cannot be evaluated is obtained. In Section 5 we apply geometrical tools to the study of the third-order ODE. It is proved that at least two functionally independent first integrals can be obtained without any kind of integration. A third functionally independent first integral can be obtained by quadrature as a primitive of certain 1-form. The geometric approach allows us to give the general solution of the ODE in parametric form and expressed in terms of elementary functions, greatly improving the results obtained by the analytical method.

2. Preliminaries.

Consider an n-dimensional differentiable manifold M. Given a connected, open set $U \subseteq M$, the real vector space of smooth functions defined on U will be denoted as $\mathcal{C}^\infty(U)$. The $\mathcal{C}^\infty(U)$-module of smooth vector fields defined on U will be denoted as $\mathfrak{X}(U)$. The $\mathcal{C}^\infty(U)$-module of differential p-forms in U will be denoted as $\Omega^p(U)$ [15, def. 2.15], and the exterior algebra will be denoted as $\Omega^*(U)$ [15, def. 2.14]. The exterior product of differential forms will be denoted by $\wedge$. The contraction of a p-form ω by a vector field X [16, pg. 72 (d)] will be written as $i_X\omega$, while the exterior derivative of a p-form ω [16, pg. 70 (b)] will be represented by $d\omega$.

A collection of r vector fields $A_1, \dots, A_r \in \mathfrak{X}(U)$ will be pointwise linearly independent on U (or simply independent) if the vectors $A_1(p), \dots, A_r(p)$ are linearly independent for each $p \in U$. The same applies for a collection of r differential p-forms.

The $\mathcal{C}^\infty(U)$-module generated by $A_1, \dots, A_r \in \mathfrak{X}(U)$ will be called the r-dimensional **distribution** $\mathcal{D}$ generated by the vector fields (see [15, def. 1.56], [13, sec. 2.2]) and will be denoted by

$$\mathcal{D} = \langle A_1, \dots, A_r \rangle. \tag{1}$$

We will say that $X \notin \mathcal{D}$ or that X is transversal to $\mathcal{D}$ if the vector fields $X, A_1, \dots, A_r$ are pointwise linearly independent in U.

An r-dimensional distribution $\mathcal{D}$ is said to be **involutive** if it is closed under the Lie bracket [15, def. 1.56]. This condition guarantees, via the well-known Frobenius theorem, the local existence of $n-r$ functionally independent first integrals $I_1, \dots, I_{n-r} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, in which case

$$N = \{p \in U : I_j(p) = C_j, j = 1, \dots, n-r\} \tag{2}$$

are integral manifolds of $\mathcal{D}$ for $C_1, \dots, C_{n-r} \in \mathbb{R}$ [15, th. 1.60]. Nevertheless, Frobenius theorem does not provide a procedure to compute these first integrals. In order to find them, the concept of symmetry of a distribution [9, p. 441] is useful, as we will shortly see:

Definition 1. Let $U \subseteq M$ be an open set, and $\mathcal{D}$ an r-dimensional distribution. A vector field Y is a **symmetry** of $\mathcal{D}$ if for every $A \in \mathcal{D}$ it is $[Y, A] \in \mathcal{D}$. A symmetry of $\mathcal{D}$ is called non-trivial if it is transversal to $\mathcal{D}$.

The set of symmetries of $\mathcal{D}$ will be denoted by $\mathrm{Sym}\,\{\mathcal{D}\}$. Using Jacobi's identity, it can be proved that $\mathrm{Sym}\,\{\mathcal{D}\}$ is a Lie algebra, that is, it is a real vector space and $[X, Y] \in \mathrm{Sym}\,\{\mathcal{D}\}$ whenever $X, Y \in \mathrm{Sym}\,\{\mathcal{D}\}$. Nevertheless, in general, $\mathrm{Sym}\,\{\mathcal{D}\}$ is not a $\mathcal{C}^\infty(U)$-module, since the product of a symmetry by a smooth function which does not vanish on U generally is not a symmetry.

The knowledge of an $(n-r)$-dimensional solvable Lie algebra of symmetries of an r-dimensional involutive distribution allows the computation of $n-r$ functionally independent first integrals of the distribution by quadratures alone, a result known in the literature as Lie-Bianchi's theorem [14, th. 1.7.2].

The next concept generalizes the notion of solvable Lie algebra of symmetries of an r-dimensional distribution [8, def. 4]:

Definition 2. Let $\mathcal{D} = \langle A_1, \dots, A_r \rangle$ be an r-dimensional distribution and let $\{Y_1, \dots, Y_{n-r}\}$ be an ordered set of pointwise linearly independent vector fields on U. We will say that the previous ordered set is a **solvable structure** for $\mathcal{D}$ if:

- $\{Y_1, \dots, Y_{n-r}, A_1, \dots, A_r\}$ are pointwise linearly independent in U.
- Y_{n-r} is a symmetry of $\mathcal{D} = \langle A_1, \dots, A_r \rangle$.
- Y_j is a symmetry of $\mathcal{D}_j = \langle Y_{j+1}, \dots, Y_{n-r}, A_1, \dots, A_r \rangle$ for every $j = 1, \dots, n-r-1$.

Observe that, as we announced, an $(n-r)$-dimensional solvable Lie algebra of symmetries of an r-dimensional distribution is a particular case of a solvable structure, as according to [17, prop 1.23] there exists a basis of the Lie algebra, $Y_1, \dots, Y_{n-r} \in \mathfrak{X}(U)$, such that

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{j-1} c_{ij}^k Y_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < j \leq n-r. \tag{3}$$

The next result, whose proof can be found, for instance, in [9, prop. 4.6 and 4.7] or in [8, prop. 3], allows us to integrate by $n - r$ successive quadratures any r-dimensional distribution admitting a solvable structure. It generalizes Lie-Bianchi's theorem by requiring the knowledge of a solvable structure instead of an $(n-r)$-dimensional solvable Lie algebra of symmetries. Before proceeding let us introduce the following notation: given $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega^p(U)$ pointwise linearly independent,

$$\mathcal{I}(\omega_1, \dots, \omega_r) \tag{4}$$

will be the ideal generated by the previous p-forms undertaking exterior products [16, lemma 2.19 (ii)].

<u>Theorem 1</u>. Let $\mathcal{D} = \langle A_1, \dots, A_r \rangle$ be an r-dimensional, involutive distribution. Let $\Omega \in \Omega^n(U)$ be a non-zero n-form. Suppose that $\{Y_1, \dots, Y_{n-r}\}$ is a solvable structure of $\mathcal{D}$ and define the following 1-forms, where the hat denotes omission of the element:

$$\omega_j = \frac{1}{i_{Y_1} \dots i_{Y_{n-r}} i_{A_1} \dots i_{A_r} \Omega} \left(i_{Y_1} \dots \widehat{i_{Y_j}} \dots i_{Y_{n-r}} i_{A_1} \dots i_{A_r} \Omega \right), \quad j = 1, \dots, n-r. \tag{5}$$

Then the previous 1-forms are pointwise linearly independent in U and satisfy

$$d\omega_1 = 0, d\omega_j \in \mathcal{I}(\omega_1, \dots, \omega_{j-1}), \text{ for } j = 2, \dots, n-r. \tag{6}$$

Expressions (6) imply the local existence of a function I_1 such that

$$\omega_1 = dI_1. \tag{7}$$

By construction of ω_1 (see equation (5) for $j = 1$), we have that

$$i_{A_j} \omega_1 = i_{Y_k} \omega_1 = 0, \text{ for } j = 1, \dots, r, k = 2, \dots, n-r. \tag{8}$$

From (7) and (8) it follows that I_1 is a first integral of the involutive distribution $\mathcal{D}_1$, and in particular, of $\mathcal{D}$. The restriction of ω_2 to the submanifold defined by keeping I_1 constant is closed, because according to (6), $d\omega_2 \in \mathcal{I}(dI_1)$. Therefore, there exists a function I_2 such that, locally,

$$\omega_2 = dI_2 - Y_1(I_2) dI_1. \tag{9}$$

We can continue in this way until we have finally found a complete set of functionally independent first integrals $\{I_1, \dots, I_{n-r}\}$ of the distribution $\mathcal{D}$. More details and examples on the theory of solvable structures and its generalizations can be consulted in [8, 9, 10, 11, 12, 13] and the references therein.

3. Geometrical and analytical methods of reduction of order for ODEs.

In this section we first review the main aspects of the analytical methods of reduction of order of ODEs via Lie (point and generalized) symmetries [1, 2, 3, 4].

3.1 Symmetry methods for ODEs.

Let us consider an n^{th}-order ordinary differential equation of the form

$$u_n = F(x, u, u_1, \dots, u_{n-1}), \tag{10}$$

where F is a smooth function defined on an open set $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ and

$$u_j = \frac{d^j u}{dx^j}, j = 1, \dots, n. \tag{11}$$

In what follows, $A \in \mathfrak{X}(M)$ will be the restriction of the total derivative operator

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \cdots + u_{n-1} \frac{\partial}{\partial u_{n-2}} + u_n \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} + \cdots \tag{12}$$

to the submanifold defined by equation (10):

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \cdots + u_{n-1} \frac{\partial}{\partial u_{n-2}} + F \frac{\partial}{\partial u_{n-1}}. \tag{13}$$

It can be checked that the graph of the $(n-1)^{th}$-order prolongation of any solution of (10) is an integral curve of the distribution $\langle A \rangle$. Conversely, any integral curve of this distribution can be locally written as the graph of the $(n-1)^{th}$-order prolongation of a solution of (10) [14, ex. 1.1.2].

Following [2, sec. 3.4], the Lie point symmetries of (10) can be characterized as the vector fields

$$\boldsymbol{v} = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} \tag{14}$$

such that

$$\left[\boldsymbol{v}^{(n-1)}, A\right] = -A(\xi) A, \tag{15}$$

where $\boldsymbol{v}^{(n-1)}$ denotes the $(n-1)^{th}$-order prolongation of $\boldsymbol{v}$ (see [2, sec. 4.1] and [1, th. 2.36]).

It is well-known that the knowledge of a Lie point symmetry (14) of an n^{th}-order ODE (10) leads to reducing the equation to an $(n-1)^{th}$-order ODE plus a quadrature. This can be done through canonical coordinates or differential invariants (see, for instance, [3, sec. 3.3.1 and sec 3.3.2]):

1. Canonical coordinates: let $r = r(x, u)$ and $s = s(x, u)$ be corresponding canonical coordinates for $\boldsymbol{v}$ satisfying $\boldsymbol{v}(r) = 0$ and $\boldsymbol{v}(s) = 1$. Then equation (10) reduces to an $(n-1)^{th}$-order ODE

$$\frac{d^{n-1}z}{dr^{n-1}} = G\left(r, z, \frac{dz}{dr}, \dots, \frac{d^{n-2}z}{dr^{n-2}}\right), \tag{16}$$

where $z = \frac{ds}{dr}$.

In the particular case when $n = 1$, then (16) can be written as

$$\frac{ds}{dr} = G(r), \tag{17}$$

which can be integrated by a single quadrature.

2. Differential invariants: The first step is to find two functionally independent invariants $y = y(x,u)$ and $m = m(x,u,u_1)$ of the first-order prolongation of $\boldsymbol{v}$, through the characteristic equations of $\boldsymbol{v}^{(\mathbf{1})}$ (see [3, eq. (3.102)]). Then by successive derivations

$$m_1 \coloneqq \frac{dm}{dy} = \frac{A(m)}{A(y)}, \quad m_j \coloneqq \frac{dm_{j-1}}{dy} = \frac{A(m_{j-1})}{A(y)}, \quad j = 2, \dots, n-1, \tag{18}$$

we obtain invariants for the n^{th}-order prolongation of $\boldsymbol{v}$. Moreover, it can be checked that the invariants $\{y, m, m_1, \dots, m_{n-1}\}$ are functionally independent, i.e., $\{y, m, m_1, \dots, m_{n-1}\}$ is a complete set of invariants for $\boldsymbol{v}^{(\mathrm{n})}$. Then equation (10) can be written in terms of these invariants as an $(n-1)^{th}$-order ODE

$$\Delta(y, m, m_1, \dots, m_{n-1}) = 0, \tag{19}$$

where y is the independent variable and m is the dependent variable. If $m = G(y; C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$, where $C_1, C_2, \dots, C_{n-1} \in \mathbb{R}$, denotes the general solution of equation (19), then the general solution of (10) arises from the first-order ODE:

$$m(x,u,u_1) = G(y(x,u); C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) \tag{20}$$

which reduces to a quadrature because it admits $\boldsymbol{v}$ as a Lie point symmetry.

When, for $n \geq 2$, the infinitesimals ξ and η of a vector field (14) are allowed to depend on derivatives of u with respect to x up to some order $l \leq n-1$, we get an extension of the notion of symmetry, known in the literature with the name of generalized symmetries [1] (also higher-order symmetries [3] or dynamical symmetries [2]). A generalized vector field [1, def. 5.1]

$$\boldsymbol{v} = \xi(x,u,u_1,\dots,u_i)\frac{\partial}{\partial x} + \eta\big(x,u,u_1,\dots,u_j\big)\frac{\partial}{\partial u} \tag{21}$$

can be prolonged in accordance with the prolongation formula [1, th. 2.36] and generalized symmetries can be characterized through the condition (15).

In the calculation and use of generalized symmetries it is very convenient to consider the evolutionary (or characteristic) form of the generalized vector field (21), which takes the form

$$\boldsymbol{v}_Q = Q\frac{\partial}{\partial u}, \tag{22}$$

where $Q = \eta(x, u, u_1, \dots, u_j) - \xi(x, u, u_1, \dots, u_i)u_1$ denotes the characteristic of (21). The generalized vector field (21) is a generalized symmetry of equation (10) if and only if its evolutionary representative (22) is [1, prop. 5.5]. This permits to consider generalized symmetries of the form

$$\boldsymbol{v} = \eta(x, u, u_1, \dots, u_l)\frac{\partial}{\partial u}, \quad l \leq n-1, \tag{23}$$

whose prolongations take a particularly simple form:

$$\boldsymbol{v}^{(n)} = \eta\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n} A^k(\eta)\frac{\partial}{\partial u_k}. \tag{24}$$

The determination of a generalized symmetry in the form (23) is done through the condition (15) or equivalently, through the invariance criterion [3, th. 3.5.1-1], which provides a symmetry determining equation for the infinitesimal η (see [3, eq. (3.239)]). In general, it is quite complicated to find solutions for such determining equation. It is usual to try to find some particular solutions by some *ad hoc ansatz*, assuming that η has a special dependency on one or more of its arguments.

The independent variable x is always a zeroth-order invariant of a generalized symmetry of the form (23). A system of higher-order invariants $\{w^1, \dots, w^{n-1}\}$ for $\boldsymbol{v}^{(n)}$ can be determined by solving the characteristic system associated to (24), where x is considered as a constant (see [3, eq. (3.298)]).

The symmetry condition (15) implies that, for $j = 1, \dots, n-1$, $A(w^j)$ is also an invariant of $\boldsymbol{v}^{(n)}$, that can therefore be expressed in terms of the complete set of invariants $\{x, w^1, \dots, w^{n-1}\}$ in the form

$$A(w^j) = G^j(x, w^1, \dots, w^{n-1}), \quad j = 1, \dots, n-1. \tag{25}$$

In this way we get a reduction of ODE (10) to a system of $(n-1)$ first-order ODEs:

$$\begin{cases} \dfrac{dw^1}{dx} = G^1(x, w^1, \dots, w^{n-1}), \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dw^{n-1}}{dx} = G^{n-1}(x, w^1, \dots, w^{n-1}). \end{cases} \tag{26}$$

The details about this procedure can be consulted, for instance, in [3, sec. 3.5.4] and [2]. As far as we are concerned, there are few references that actually present examples of equations admitting higher-order symmetries and use them to reduce the order of the equation. One of these examples, taken from [3], will be analyzed in the Section 4.

3.2 Geometrical methods of reduction for ODEs.

The problem of reducing or integrating the n^{th}-order ordinary differential equation (10) can be formulated in terms of the geometric notions of symmetry and Frobenius integrability [15]. The vector field (13) associated with equation (10) generates a trivially involutive distribution $\mathcal{D} = \langle A \rangle$, that by Frobenius Theorem [15, prop. 1.59 and th. 1.60] is completely integrable.

The $(n-1)^{th}$-order prolongation of a Lie (point or generalized) symmetry $\boldsymbol{v}$ defines a symmetry of the distribution $\mathcal{D} = \langle A \rangle$ in the sense of Definition 1, because the vector field $Y := \boldsymbol{v}^{(n-1)}$ satisfies relation (15).

If equation (10) admits an n-dimensional solvable symmetry algebra of Lie point or generalized symmetries, the procedure described in Theorem 1 can be used to find by quadratures a complete set $\{I_1, \dots, I_n\}$ of first integrals of equation (10), because such symmetry algebra is a particular case of a solvable structure (see also [9, prop. 5.5]).

In order to do that, since the symmetry algebra is solvable, we can choose a basis such that the $(n-1)^{th}$-order prolongations $Y_1, \dots, Y_n$ satisfy (3). Let $\Omega = dx \wedge du \wedge \cdots \wedge du_{n-1}$ be the volume form and denote

$$\Delta = i_{Y_1} \cdots i_{Y_n} i_A \Omega. \tag{27}$$

Observe that Δ is the determinant formed by the coordinates of the vector fields $A, Y_1, \dots, Y_n$, which are pointwise linearly independent. The corresponding 1-form in (5) for $j = 1$ becomes

$$\omega_1 = \frac{1}{\Delta} i_{Y_2} \cdots i_{Y_n} i_A \Omega. \tag{28}$$

By Theorem 1, ω_1 is closed and hence locally exact. A corresponding primitive I_1 arises by quadrature, and it is a first integral of A. Next, we construct the corresponding 1-form in (5) for $j = 2$. The restriction of such 1-form ω_2 to the submanifold defined by $I_1 = C_1$, where $C_1 \in \mathbb{R}$, is closed, and hence, locally exact. This permits to determine a primitive

$$\widehat{I_2} = \widehat{I_2}(x, u, u_1 \dots, u_{n-1}; C_1) \tag{29}$$

by quadrature. Replacing C_1 by $I_1(x, u, u_1, \dots, u_{n-1})$ in (29), we get a function I_2 satisfying (9), which is a first integral of A. Clearly the process is inductive, and it can be continued until we have calculated a complete system $\{I_1, \dots, I_n\}$ of first integrals for A.

Moreover, when more symmetries than the order of the equation are known, the following result can be really powerful, because it allows to obtain first integrals algebraically, without any kind of integration [9, prop. 5.6]:

Proposition 1. Let $A \in \mathfrak{X}(M)$ be the vector field associated with equation (10). Let $\mathcal{E}$ be an involutive distribution containing A. Suppose that $X, Y \in \mathrm{Sym}\{\mathcal{E}\}$ are transversal to $\mathcal{E}$ and that we can write $Y = \alpha X + Z$ for some $Z \in \mathcal{E}$. Then the function α is a (possibly trivial) first integral of A.

As a natural consequence, the knowledge of more extra symmetries may provide several first integrals without integration [9, cor. 5.7]:

Proposition 2. Let $A \in \mathfrak{X}(M)$ be the vector field associated with equation (10) and assume that $X_1, \dots, X_j$ are independent, non-trivial symmetries of $\mathcal{D} = \langle A \rangle$. If Y is an additional non-trivial symmetry of $\mathcal{D}$ such that $Y = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_j X_j + \beta A$, then $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ are (possibly trivial) first integrals of A.

In Section 5, we will apply these geometrical tools and results to derive new strategies of integration of a third-order ODE that has been studied in [3] by analytical methods based on generalized symmetries.

4. The ODE and its general solution via the analytical method.

We consider the third-order equation

$$u_3 = 6 \frac{u_2^2}{u_1} \left(x \frac{u_2}{u_1} + 1 \right). \tag{30}$$

This equation was introduced by G. W. Bluman and S. C. Anco in [3, eq. (3.245)] as an example of how to determine generalized symmetries and use them to reduce the equation.

The corresponding vector field $A \in \mathfrak{X}(M)$ associated to equation (30) becomes

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \cdots + u_{n-1} \frac{\partial}{\partial u_{n-2}} + 6 \frac{u_2^2}{u_1} \left(x \frac{u_2}{u_1} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial u_{n-1}}, \tag{31}$$

which is defined on the open set:

$$M = \{(x, u, u_1, u_2) \in \mathbb{R} \colon u_1 \neq 0\}. \tag{32}$$

In the cited reference, the authors prove that (30) admits seven generalized symmetries (of first order) given, in evolutionary form, by

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial u}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{u_1^2} \frac{\partial}{\partial u}, \quad \boldsymbol{v}_3 = x u_1^2 \frac{\partial}{\partial u}, \quad \boldsymbol{v}_4 = x^2 u_1^4 \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\boldsymbol{v}_5 = (9x^2 u_1^2 - 12 x u u_1 + 4u^2) \frac{\partial}{\partial u}, \quad \boldsymbol{v}_6 = \left(3x - \frac{2u}{u_1} \right) \frac{\partial}{\partial u}, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{v}_7 = (3x^2u_1^3 - 2xuu_1^2)\frac{\partial}{\partial u}.$$

In addition, in [3] was also proved that equation (30) admits the following three independent Lie point symmetries:

$$\boldsymbol{v}_8 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \boldsymbol{v}_9 = u\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad \boldsymbol{v}_{10} = x\frac{\partial}{\partial x}, \tag{34}$$

which span a three-dimensional, solvable Lie algebra because the respective commutations relationships become

$$[\boldsymbol{v}_8, \boldsymbol{v}_9] = \boldsymbol{v}_8, [\boldsymbol{v}_8, \boldsymbol{v}_{10}] = [\boldsymbol{v}_9, \boldsymbol{v}_{10}] = 0. \tag{35}$$

In [3, p. 179-181] the generalized symmetry $\boldsymbol{v_1}$ defined in (33) was used to reduce equation (30) to a system of two first-order ODEs. The first step is to calculate a complete set of second-order differential invariants of $\boldsymbol{v_1}$. As we said in Section 3, x is already a zeroth-order invariant. For the remaining ones, G. W. Bluman and S. C. Anco solved the characteristic equations for the corresponding second-order prolongation (24) of $\boldsymbol{v}_1$. By choosing u_1 as the independent variable, such characteristic system becomes [3, eq. (3.304)]:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{du_1} = 6x\dfrac{u_2^2}{u_1^2} + 4\dfrac{u_2}{u_1}, \\ \dfrac{du_2}{du_1} = -\dfrac{u_1}{u_2}. \end{cases} \tag{36}$$

After using symmetry methods for system (36), the authors found the following second-order invariants of $\boldsymbol{v_1}$:

$$\mathrm{w}^1 = 2\mathrm{x}\mathrm{u}_1^3 + \frac{\mathrm{u}_1^4}{\mathrm{u}_2}, \quad \mathrm{w}^2 = \mathrm{u} - \frac{1}{2\mathrm{u}_1^2}\mathrm{w}^1 - 2\mathrm{x}\mathrm{u}_1. \tag{37}$$

It can be checked that, in this case, $A(w^1) = A(w^2) = 0$. Therefore, according to (26), the corresponding reduced system of two first-order equations becomes

$$\begin{cases} \dfrac{dw^1}{dx} = 0, \\ \dfrac{dw^2}{dx} = 0. \end{cases} \tag{38}$$

System (38) is trivial and its general solution is $w^1 = C_1$, $w^2 = C_2$, where $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Substituting the expressions (37) and eliminating u_2, they obtain the first-order ODE

$$2xu_1^3 + (C_2 - u)u_1^2 + \frac{C_1}{2} = 0. \tag{39}$$

Solving this ODE yields the general solution of (30). Equation (39) can be written in explicit form as

$$u_1 = G(x, u; C_1, C_2), \tag{40}$$

and it inherits a Lie point symmetry from the first-order symmetry $\boldsymbol{v}_1$ of (30),

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_1 = \frac{1}{G(x,u;C_1,C_2)} \frac{\partial}{\partial u}. \tag{41}$$

However, working with this symmetry is not really convenient, since the expression $G(x, u; C_1, C_2)$ requires to solve (39) as a cubic equation in u_1. In order to avoid this difficulty, Bluman and Anco determined a new Lie point symmetry for equation (39):

$$\widetilde{\boldsymbol{v}} = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{3}(u - C_2) \frac{\partial}{\partial u}. \tag{42}$$

Applying the method of canonical coordinates, equation (39) is reduced to a quadrature. In particular, we can choose

$$\begin{cases} r(x, u) = -\frac{2}{3} \frac{C_2 - u}{x^{\frac{2}{3}}}, \\ s(x, u) = ln\, x, \end{cases} \tag{43}$$

so that

$$\widetilde{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial}{\partial s}. \tag{44}$$

Writing now (39) in terms of (r, s), carrying out the quadrature and writing the resulting expression back to the original coordinates, the general solution of (39), and thus of (30), is obtained in implicit form:

$$u = C_2 + \left(\frac{u - C_2}{x^{\frac{2}{3}}}\right) \exp\left(\frac{2}{3} H\left(\frac{u - C_2}{x^{\frac{2}{3}}}\right) + C_3\right), \tag{45}$$

where H is a function such that

$$H'(z) = \frac{6p(z)}{z^2 - 3zp(z) + p(z)^2}, \text{ where } p(z) = \left(z^3 + 3\sqrt{3C_1(27C_1 - 2z^3)} - 27C_1\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{46}$$

In the integration procedure that has been applied in this section, several analytical methods based on symmetries have been successively used. First, the generalized symmetry $\boldsymbol{v}_1$ given in (33) has been determined. Second, in order to find second-order differential invariants for $\boldsymbol{v}_1$, symmetry methods have been used to find a particular solution of the characteristic system (36). Luckily, in this example, the reduced system (38) can be trivially integrated; however, in general, additional symmetries might be necessary to solve the reduced system. Third, a new symmetry

(42) has been determined in order to solve the first-order ODE (39). Finally, the method of canonical coordinates has been used to integrate equation (39). As a result, the general solution of the ODE has been obtained in (45), although it is expressed in implicit form and in terms of a primitive that cannot be explicitly evaluated (see equation (46)).

In the following section, we investigate if the application of geometrical methods to equation (30) can improve the results that have been obtained so far by using only analytical methods.

5. Integration by geometrical methods.

In this section we apply the geometric tools described in Section 3.2 with the aim of providing a more convenient expression for the general solution of equation (30):

$$u_3 = 6\frac{u_2^2}{u_1}\left(x\frac{u_2}{u_1}+1\right). \tag{47}$$

As in Section 4, we consider the associated vector field (31),

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial u} + \cdots + u_{n-1}\frac{\partial}{\partial u_{n-2}} + 6\frac{u_2^2}{u_1}\left(x\frac{u_2}{u_1}+1\right)\frac{\partial}{\partial u_{n-1}}, \tag{48}$$

defined on the open set $M \subseteq \mathbb{R}^4$ introduced in (32),

$$M = \{(x,u,u_1,u_2) \in \mathbb{R}\colon\ u_1 \neq 0\}. \tag{49}$$

In order to achieve our objective of obtaining the general solution of (47) by geometrical methods, we can use some of the Lie point and first-order symmetries of the ODE given in (33) and (34). The integration procedure that will be presented in this section does not need to calculate any differential invariants nor canonical coordinates at all.

First, we observe that among the symmetries (33) and (34) it is possible to select three pointwise independent symmetries satisfying the hypothesis of Theorem 1. This can be done, for instance, by considering the second-order prolongations of the symmetries (34) because, according to (35), they span a three-dimensional, solvable Lie algebra, which is a particular case of a solvable structure of the distribution $\mathcal{D} = \langle A \rangle$. However, since for equation (47) we know an oversupply of symmetries, in the next section we will apply the theoretical results presented in Section 3.2, in order to obtain first integrals algebraically, without any kind of integration (see Proposition 1 and Corollary 1). This will be done by conveniently choosing the symmetries that will be used in the integration process. With this aim, we choose the following symmetries (in the sense of Definition 1) of the distribution $\mathcal{D}$:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \boldsymbol{v}_8^{(2)} = \frac{\partial}{\partial u},\\
Y_2 &= \boldsymbol{v}_9^{(2)} = u\frac{\partial}{\partial u} + u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2},\\
Y_3 &= \boldsymbol{v}_{10}^{(2)} = x\frac{\partial}{\partial x} - u_1\frac{\partial}{\partial u_1} - 2u_2\frac{\partial}{\partial u_2},\\
Y_4 &= \boldsymbol{v}_2^{(2)} = \frac{1}{u_1^2}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{2u_2}{u_1^3}\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{6u_2^2(2xu_2+u_1)}{u_1^5}\frac{\partial}{\partial u_2}.
\end{aligned} \tag{50}
$$

It can be checked that the commutator relationships become

$$
\begin{gathered}
[Y_1, A] = [Y_2, A] = [Y_3, A] = [Y_4, A] = 0,\\
[Y_1, Y_2] = Y_1,\ \ [Y_1, Y_3] = [Y_1, Y_4] = [Y_2, Y_3] = 0,\ \ [Y_2, Y_4] = -3Y_4,\ \ [Y_3, Y_4] = 2Y_4.
\end{gathered} \tag{51}
$$

5.1 Two first integrals without integration.

In this section we aim to apply the theoretical results presented in Section 3.2 in order to obtain two first integrals of A by an algebraic procedure, without any kind of integration.

It can be checked that the set $\{A, Y_1, Y_3, Y_4\}$ is linearly independent on the open set

$$V = \{(x, u, u_1, u_2) \in M\colon\ u_2(3\mathrm{xu}_2 + \mathrm{u}_1) \neq 0\}. \tag{52}$$

This implies that Y_1, Y_3, Y_4 are pointwise linearly independent and transversal symmetries of the distribution $\mathcal{D} = \langle A \rangle$ on V. Consequently, they can be used as the non-trivial symmetries X_i $(i = 1, 2, 3)$ required in Corollary 1.

Since $\{A, Y_1, Y_3, Y_4\}$ is a basis of $\mathfrak{X}(V)$, any additional non-trivial symmetry of $\mathcal{D}$ can be expressed in terms of Y_1, Y_3, Y_4 and A. For instance, the symmetry Y_2 given in (50) is a transversal symmetry of $\mathcal{D}$ that can be written as follows:

$$Y_2 = -\frac{6xu_1u_2 - 2uu_2 + u_1^2}{2u_2}Y_1 - 2Y_3 + \frac{u_1^3(2xu_2+u_1)}{2u_2}Y_4 + 2xA. \tag{53}$$

As a direct consequence of Corollary 1 we conclude that the following functions, corresponding to the coefficients of Y_1 and Y_4 in (53), are non-trivial first integrals of A:

$$I_1 = 6xu_1 - 2u + \frac{u_1^2}{u_2}, \quad I_2 = 2xu_1^3 + \frac{u_1^4}{u_2}. \tag{54}$$

These functions are defined on the open set

$$U = \{(x, u, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^4\colon u_1u_2 \neq 0\} \subseteq M, \tag{55}$$

and it can be checked that $dI_1 \wedge dI_2$ does not vanish on U, so I_1 and I_2 are functionally independent first integrals of A on U.

Since the coefficient of Y_3 in (53) is constant, the application of Corollary 1 by using the symmetries Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 only provides two functionally independent first integrals of A. In order to complete the integration of the distribution $\mathcal{D} = \langle A \rangle$, one more functionally independent first integral is required. Although Corollary 1 could be applied by using other sets of symmetries of the equation, there is not a criterion to know *a priori* which ones will produce non-trivial and functionally independent first integrals. In the worst case, it might happen that none of the admitted symmetries gave rise to the remaining first integral. In this situation, an alternative strategy must be followed. In the next subsection we illustrate how Theorem 1 can be applied to overcome this possible obstacle.

5.2 A remaining first integral and the general solution of equation (47).

Besides the first integrals I_1 and I_2 given in (54), one more functionally independent first integral of A is required in order to complete the integration of equation (47). In order to determine such first integral, we first observe that the distribution $\mathcal{E} = \langle Y_3, Y_4, A \rangle$ is involutive by commutator relationships (51). Moreover, since

$$\mathrm{A}(\mathrm{I}_1) = \mathrm{Y}_3(\mathrm{I}_1) = \mathrm{Y}_4(\mathrm{I}_1) = 0, \tag{56}$$

we conclude that I_1 is a first integral of $\mathcal{E}$.

Consider the following local change of variables on the open set U defined in (55),

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{U} & \longrightarrow & \varphi(\mathrm{U}) \\ & (\mathrm{x}, \mathrm{u}, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2) & \longmapsto & (\mathrm{u}, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{I}_1). \end{array} \tag{57}$$

By means of the push-forward by φ (see [18, pg. 46]), the vector fields $\mathrm{A}, \mathrm{Y}_4, \mathrm{Y}_3$ are expressed in terms of local coordinates $(\mathrm{u}, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{I}_1)$ as follows:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{A}} &= \varphi_* \mathrm{A} = \mathrm{u}_1 \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}} + \mathrm{u}_2 \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}_1} + \frac{\mathrm{u}_2^2 (2\mathrm{u}\mathrm{u}_2 + \mathrm{I}_1 \mathrm{u}_2 + 5\mathrm{u}_1^2)}{\mathrm{u}_1^3} \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}_2}, \\ \widehat{\mathrm{Y}_3} &= \varphi_* \mathrm{Y}_3 = -\mathrm{u}_1 \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}} - 2\mathrm{u}_2 \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}_2}, \\ \widehat{\mathrm{Y}_4} &= \varphi_* \mathrm{Y}_4 = \frac{1}{\mathrm{u}_1^2} \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}} - \frac{2\mathrm{u}_2}{\mathrm{u}_1^3} \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}_1} - \frac{2\mathrm{u}_2^2 (2\mathrm{u}\mathrm{u}_2 + \mathrm{I}_1 \mathrm{u}_2 + 2\mathrm{u}_1^2)}{\mathrm{u}_1^6} \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}_2}. \end{aligned} \tag{58}$$

We can restrict each one of the previous vector fields to the submanifold defined by the level set $\mathrm{I}_1 = \mathrm{C}_1$, where $\mathrm{C}_1 \in \mathbb{R}$, by substituting I_1 by C_1 in (58). We keep denoting the restricted vector fields by $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{Y}_3}$ and $\widehat{\mathrm{Y}_4}$ respectively.

By using (51), it can be checked that $\widehat{\mathrm{Y}_3}$ and $\widehat{\mathrm{Y}_4}$ span a 2-dimensional, solvable Lie algebra of symmetries of the distribution $\widehat{\mathcal{D}} = \langle \widehat{\mathrm{A}} \rangle$. In particular, they generate a solvable structure for $\widehat{\mathcal{D}}$. In order to apply Theorem 1, we consider the non-zero 3-form $\Omega = \mathrm{du} \wedge \mathrm{du}_1 \wedge \mathrm{du}_2$ and construct the corresponding 1-form given by (5) for $j = 1$:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{i_{Y_4} i_{Y_3} i_A \Omega} i_{Y_3} i_A \Omega = \\ &= -\frac{1}{2uu_2 + C_1 u_2 + u_1^2}\left(2u_2 du + \frac{2uu_2 + C_1 u_2 + 3u_1^2}{u_1} du_1 - \frac{u_1^2}{u_2} du_2\right).\end{aligned} \tag{59}$$

Theorem 1 ensures that (59) is closed and, therefore, locally exact. A primitive of ω_1, and hence a first integral of $\widehat{A}$, can be obtained by quadratures:

$$\widehat{J_3} = \ln\left(\frac{u_2}{(2uu_2 + C_1 u_2 + u_1^2)u_1}\right), \tag{60}$$

Thus, the following function

$$J_3 = \exp(-\hat{J}_3) = \left(\frac{u_1^2}{u_2} + 2u + C_1\right) u_1 \tag{61}$$

is also a first integral of $\widehat{A}$. Substituting now C_1 by I_1 in (61) and writing the obtained expression back in terms of (x, u, u_1, u_2), we obtain a function $I_3 \in \mathcal{C}^\infty(U)$ given by

$$I_3 = 3xu_1^2 + \frac{u_1^3}{u_2}, \tag{62}$$

which is a first integral of A. It can be checked that I_1, I_2 (defined in (54)) and I_3 are functionally independent on U, since $dI_1 \wedge dI_2 \wedge dI_3$ does not vanish on U.

Therefore, the general solution of ODE (47) can be implicitly defined by equations $I_1 = C_1, I_2 = C_2, I_3 = C_3$, where $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 6xu_1 - 2u + \frac{u_1^2}{u_2} = C_1, \\ 2xu_1^3 + \frac{u_1^4}{u_2} = C_2, \\ 3xu_1^2 + \frac{u_1^3}{u_2} = C_3. \end{cases} \tag{63}$$

In order to obtain a parametric expression for the general solution of ODE (47), we eliminate u_2 from the last equation in (63) and choose $u_1 = t$ as a parameter:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{C_3 t - C_2}{t^3}, \\ u(t) = \frac{-C_1 t^2 + 4C_3 t - 3C_2}{2t^2}. \end{cases} \tag{64}$$

We depict the graphs of two of the solutions in Figures 1 and 2, obtained by setting different values to the integration constants.

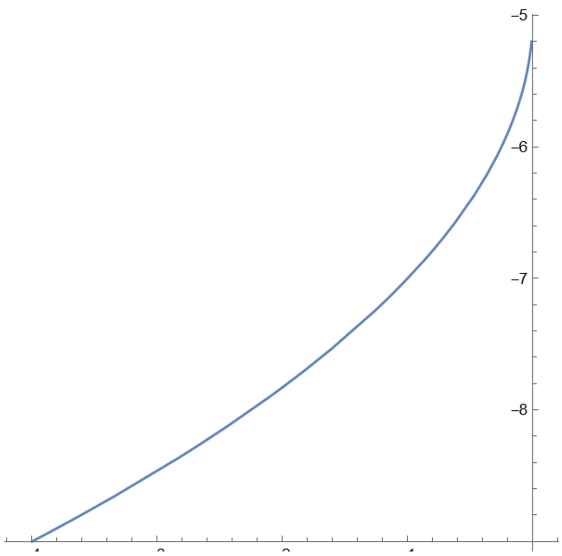

Figure 1:

$C_1 = 10, C_2 = 0, C_3 = -1, 0.5 \leq t \leq 10.$

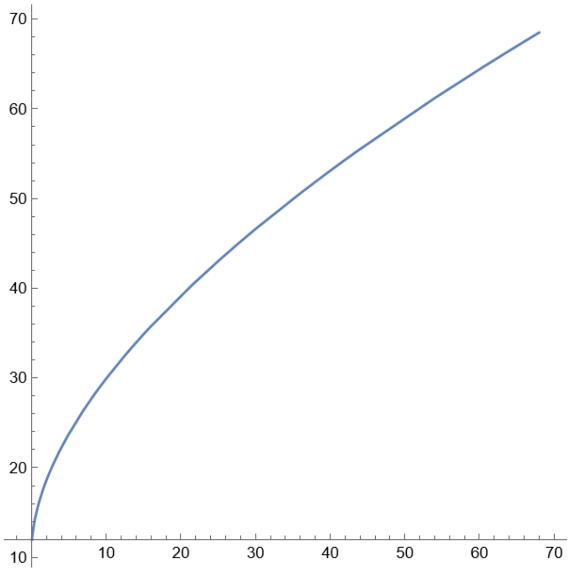

Figure 2:

$C_1 = -21, C_2 = -5, C_3 = 7, 0.5 \leq t \leq 10.$

6. Concluding remarks.

Different analytical and geometrical methods have been applied in the study of a third-order ODE for which abundant Lie point and generalized symmetries had been previously reported.

Regarding analytical methods, a generalized symmetry of the equation had been used in the previous literature to reduce the given ODE to a system of two first-order ODEs. In this reduction process, additional symmetry methods had been necessary to determine differential invariants for the generalized symmetry. After solving the reduced system, it remains the problem of reconstruction of the solution for the original equation. Although theoretically this can be done by a quadrature, the difficulty of obtaining an explicit expression for the underlying symmetry (41) forced the search of a new symmetry (42). After application of the canonical coordinates method, the implicit general solution (45) was finally obtained. However, this expression involves a primitive that cannot be explicitly evaluated.

In this work we have shown that the application of geometrical methods greatly simplifies the integration of the given third-order ODE. Remarkably, two functionally independent first integrals of the equation have been calculated by simple algebraic manipulations, avoiding the use of differential invariants, canonical coordinates or any kind of integration. Moreover, a remaining first integral has been calculated by quadrature, as a primitive of a 1-form defined in an open set of a three-dimensional space. From the complete system of first integrals of the equation derived by using these geometrical tools we have obtained the general solution of the equation in parametric form (see equation (64)). The obtained solution is given in terms of simple rational expressions, greatly improving the solution (45) derived via the analytical procedures.

It can be concluded that the geometrical approach to integrating ODEs is a powerful alternative to the classical approach of differential invariants or canonical coordinates, specially when there are higher-order symmetries involved. An additional advantage that must be taken into account is that the geometrical methods allow us to use not only symmetries of the associated distribution, i.e., not only prolongations of Lie (point or generalized) symmetries of the equation. In a solvable structure, only the first element must be a symmetry of the associated distribution while, in general, the remaining vector fields are not symmetries of the equation. This fact greatly expands the strategies that can be followed to find exact solutions of differential equations.

7. Acknowledgements.

B. de la Flor acknowledges the financial support from the Ministry of Universities of Spain (FPU grant FPU21/01046). A. Ruiz and C. Muriel thank the financial support from *Junta de Andalucía* (Spain) by means of the project ProyExcel_00780. The authors also appreciate the funding support from *Junta de Andalucía* (Spain) to the research group FQM-377.

References

1. P. J. Olver. Applications of Lie groups to differential equations. [Text]/ P. J. Olver. // Graduate Texts in Mathematics. Springer US, 2nd edition, 1986.
2. Stephani Differential equations: their solution using symmetries. [Text]/ Stephani and M. MacCallum. // Cambridge University Press, 1989.
3. G. W. Bluman Symmetry and integration methods for differential equations. [Text]/ G. W. Bluman and S. C. Anco //Applied Mathematical Science. Springer New York, 2nd edition, 2002.
4. P. E. Hydon. Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide. [Text]/ P. E. Hydon. // Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2000.
5. L.V. Ovsiannikov, editor. Group Analysis of Differential Equations. [Text]/ L.V. Ovsiannikov // Academic Press, 1982.
6. P. E. Hydon. Self-invariant first-order symmetries. [Text]/ P. E. Hydon. // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 11(2):233–242, 2004.
7. E. Pucci. First-order symmetries and solutions by reduction of partial differential equations. [Text]/ E. Pucci and G. Saccomandi. // Journal of Physics A: Mathematical and General, 27(1):177–184, 1994.

8. P. Basarab-Horwath. Integrability by quadratures for systems of involutive vector fields. [Text]/ P. Basarab-Horwath. // Ukrainian Math. Zh., 43:1330–1337, 1991.

9. G. Prince Geometric aspects of reduction of order. [Text]/ G. Prince and J. Sherring. // Trans. Amer. Math. Soc., 334 (1):433–453, 1992.

10. M. A. Barco Solvable symmetry structures in differential form applications. [Text]/ M. A. Barco and G. E. Prince. // Acta Applicandae Mathematica, 66:89–121, 2001.

11. T. Hartl. Solvable structures and hidden symmetries. [Text]/ T. Hartl and C. Athorne. // Journal of Physics A: Mathematical and General, 27(10):34–63, 1994.

12. D. C. Ferraioli Local and nonlocal solvable structures in the reduction of odes. [Text]/ D. C. Ferraioli and P. Morando// Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 42(3):035210, 2008.

13. P. Morando. Reduction by μ–symmetries and σ–symmetries: a Frobenius approach. [Text]/ Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 22(1):47–59, 2015.

14. A. Kushner, V. Lychagin and V. Rubtsov. First-order geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. [Text]/ Cambridge University Press, 2007.

15. F. Warner. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. [Text]/ Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1971.

16. S. Morita. Geometry of differential forms. Translations of mathematical monographs, [Text]/ Iwanami series in modern mathematics 201. American Mathematical Society, 2001.

17. A. W. Knapp. Lie groups beyond an introduction. [Text]/ Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2002.

18. J. M. Lee. Introduction to smooth manifolds. [Text]/ Graduate Texts in Mathematics 218. Springer New York, 2003.

УДК 515.12
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_281

SOME PROPERTIES UNIFORM SPACE AND ITS HYPERSPACE

Beshimov Ruzinazar Bebutovich, Dr Sc, professor,
rbeshimov@mail.ru
Safarova Dilnora Teshaboevna, teacher,
safarova.dilnora87@mail.ru
National University of Uzbekistan
Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we will study the connection between a uniformly connected, uniformly pseudocompact, $P-$precompact and its hyperspace. It is proved that if a uniform space $(X,\mathcal{U})$ is uniformly pseudocompact iff $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ is uniformly pseudocompact. It is also shown that if a uniform space $(X,\mathcal{U})$ is $P-$precompact, then a uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ is $P-$precompact.*

Key words: *Hyperspace, uniformity, uniform space, uniformly connected, uniformly pseudocompact, $P-$precompact.*

НЕКОТОРОЕ СВОЙСТВА РАВНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ЕГО ГИПЕРПРОСТРАНСТВО

Бешимов Рузиназар Бебутович, д.ф.-м.н., профессор,
rbeshimov@mail.ru
Сафарова Дилнора Тешабоевна, преподаватель,
safarova.dilnora87@mail.ru
Национальный университет Узбекистана
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В этой статье мы изучим связь между равномерно связным, равномерно псевдокомпактным, $P-$ предкомпактом и его гиперпространством. Доказано, что если равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ равномерно псевдокомпактно тогда и только тогда, когда $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ равномерно псевдокомпактно. Также показано, что если равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ $P-$ предкомпактно, то равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ $P-$предкомпактно.*

Ключевые слова: *гиперпространство, равномерное пространство, равномерность, равномерное связное пространство, равномерное псевдокомпактное пространство, $P-$прекомпактное пространство.*

Introduction (Введение)

In [1], the connection between a finally compact, pseudocompact, extremely disconnected, $\aleph$-space and its hyperspace is studied. It is proved: if the uniform space $(X,\mathcal{U})$ is uniformly paracompact, then $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ is uniformly paracompact, if the uniform space $(X, \mathcal{U})$ is uniformly R-paracompact, then uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ is uniformly R-paracompact. In [2] the properties of space of the G-permutation degree, like: weight, uniform connectedness and index boundedness are studied. It was proved the G-permutation degree proserves the uniformly connected and index bounded. In the work [3] are established that the functor of idempotent probability measures with a compact support transforms open maps into open maps and preserves the weight and the completeness index of uniform spaces.

Definition 1 [4]. Let X be a nonempty set. A family $\mathcal{U}$ of coverings of a set X is called uniformity on X if the following conditions are satisfied:

(P1) If $\alpha \in \mathcal{U}$ and α is inscribed in some cover β of the set X, then $\beta \in \mathcal{U}$.

(P2) For any $\alpha_1 \in \mathcal{U}$, $\alpha_2 \in \mathcal{U}$ there exists $\alpha \in \mathcal{U}$, which is inscribed in α_1 and α_2.

(P3) For any $\alpha \in \mathcal{U}$, there exists $\beta \in \mathcal{U}$ strongly star inscribed in α.

(P4) For any x, y of a pair of different points of X, there exists $\alpha \in \mathcal{U}$ such that no element of α contains both x and y.

A family $\mathcal{U}$ consisting of a set X satisfying conditions (P1) - (P3) is called a pseudo-uniformity on X; and the pair $(X, \mathcal{U})$ is a pseudo-uniform space.

A family $\mathcal{U}$ consisting of a set X satisfying conditions (P1) - (P4) is called a uniformity on X; and the pair $(X, \mathcal{U})$ is a uniform space.

Proposition 1 [4]. For any uniformity of $\mathcal{U}$ on X, the family $\tau_{\mathcal{U}} = \{O \subset X : \text{for each } x \in O \text{ exists } \alpha \in \mathcal{U} \text{ such that } \alpha(x) \subset O\}$ is a topology on X and the topological space $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ is a T_1-space.

The topology of $\tau_{\mathcal{U}}$ is called the topology generated or induced by the uniformity of $\mathcal{U}$.

Let $(X, \mathcal{U})$ be a uniform space and $\exp X$ the set of all nonempty closed subsets of the space $(X, \tau_{\mathcal{U}})$. For each $\alpha \in \mathcal{U}$, put $P(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha\}$, where $\langle \alpha' \rangle = \{F \in \exp X : F \subseteq \cup \alpha' \text{ and } F \cap A \neq \varnothing \text{ for each } A \in \alpha'\}$.

Proposition 2 [8]. If $\mathcal{B}$ is the base of a uniform space $(X, \mathcal{U})$, then

$P(\mathscr{B})=\{P(\alpha):\alpha\in\mathscr{B}\}$ forms a base of some uniformity $\exp\mathscr{U}$ on $\exp X$.

A uniform space $(\exp X,\ \exp\mathscr{U})$ is called a hyperspace of closed subsets of a uniform space $(X,\mathscr{U})$, and uniformity $\exp\mathscr{U}$ is called Hausdorff uniformity on $\exp X$.

Remark 1 [8]. Let $\exp_c X$ be the set of all nonempty compact subsets of the uniform space $(X,\mathscr{U})$. For each $\alpha\in\mathscr{U}$, put $K(\alpha)=\{\langle\alpha'\rangle:\alpha'\subseteq\alpha \text{ and } \alpha'-\text{finite}\}$.

Note that $K(\alpha)$ is the cover of the set $\exp_c X$.

Corollary 1 [5]. Let $(X,\mathscr{U})$ be a uniform space. Then $w(\mathscr{U})=w(\exp\mathscr{U})$.

Corollary 2 [5]. If the uniform space $(X,\mathscr{U})$ is metrizable, then its hyperspace $(\exp X,\exp\mathscr{U})$ is also metrizable.

Theorem 1. If $(X,\mathscr{U})$ is a uniform space and $\alpha\in\mathscr{U}$ is a cover of $(X,\mathscr{U})$. Then the following equality is true $[\langle\alpha'\rangle]=\langle[\alpha']\rangle$, where $\langle\alpha'\rangle\in P(\alpha)$ and $P(\alpha)\in\exp_c\mathscr{U}$.

A uniform space $(X,\mathscr{U})$ is called uniformly connected, and uniformity $\mathscr{U}$ is connected if any uniformly continuous mapping $f:(X,\mathscr{U})\to(D,\mathscr{U}_D)$ of the uniform space $(X,\mathscr{U})$ into any discrete uniform space $(D,\mathscr{U}_D)$ is constant.

A finite sequence $\{A_1,A_2,...,A_n\}$ of subsets of a set X is called linked if $A_i\cap A_{i+1}\neq\varnothing$ of each $i=1,2,...,n-1$.

Definition 2 [4]. A uniform space $(X,\mathscr{U})$ is called uniformly linked if for any cover $\alpha\in\mathscr{U}$ there exists a natural number n, such that to any points $x,y\in X$ one can choose a linked sequence $\{A_1,A_2,...,A_k\}\subset\alpha$, such that $k\le n$, $x\in A_1$, $y\in A_k$.

Proposition 3 [4]. For a uniform space $(X,\mathscr{U})$, the following conditions are equivalent:

(1) The uniform space $(X,\mathscr{U})$ is uniformly connected.

(2) The uniformity of $\mathscr{U}$ does not contain disjoint covers consisting of at most one element.

(3) For any $\alpha\in\mathscr{U}$ and for any point $x\in X$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)=X$.

(4) For any $\alpha\in\mathscr{U}$ and for any points of $x,y\in X$ there exists a finite linked sequence $\{A_1,A_2,...,A_k\}\subset\alpha,$ such that $x\in A_1$, $y\in A_k$.

Теорема 2. A uniform space $(X,\mathscr{U})$ is uniformly linked if and only if the uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ is uniformly linked.

It follows from Proposition 3 that every uniformly linked uniform space $(X,\mathscr{U})$ is uniformly connected.

Corollary 3. A uniform space $(X,\mathscr{U})$ is uniformly connected if and only if a uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ is uniformly connected.

Definition 3 [4]. A uniform space $(X,\mathscr{U})$ is called uniformly pseudocompact if every uniformly continuous real-valued function defined on $(X,\mathscr{U})$ is bounded.

Every Tychonoff pseudocompact space X with universal uniformity $\mathscr{U}^*$ is uniformly pseudocompact. Conversely, if a universal space $(X,\mathscr{U})$ is uniformly pseudocompact, then its topological space is pseudocompact.

A uniform space $(X,\mathscr{U})$ is uniformly pseudocompact if for every countable centered open cover $\alpha = \{V_i : i \in M\}$ of the uniform space $(X,\mathscr{U})$ the intersection $\bigcap_{i=1}^{\infty}[V_i]$ non-empty.

Theorem 3. A uniform space $(X,\mathscr{U})$ is uniformly pseudocompact if and only if a uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ is uniformly pseudocompact.

A cover γ of a uniform space $(X,\mathscr{U})$ is said to be uniformly star-finite if there exists a uniform cover $\alpha \in \mathscr{U}$ such that $\gamma(B)$ intersects only a finite number of elements of γ for any $B \in \alpha$ [6].

A cover γ of a uniform space $(X,\mathscr{U})$ is called uniformly point-finite if for each $x \in X$ the set $\{a \in M : x \in A_a \in \gamma\}$ is finite.

Let us give examples of the property P of uniform covers of uniform spaces:

(1) covers of brevity $\leq n$;

(2) star-finite covers;

(3) point-finite covers;

(4) finite covers;

(5) covers of power $\leq \tau,\ \tau \geq \aleph_0$.

A uniform space $(X, \mathscr{U})$ is called $P-$precompact if the uniformity $\mathscr{U}$ has a base $\mathscr{B}$ consisting of covers with property P.

Theorem 4. A uniform space $(X, \mathscr{U})$ is $P-$precompact if and only if a uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ is $P-$precompact, where properties P is a uniformly point-finite cover of uniform space.

Теорема 5. A uniform space $(X, \mathscr{U})$ is $P-$precompact if and only if a uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ is $P-$precompact, where properties P is a uniformly star-finite cover of uniform space.

Reference

1. Beshimov, R.B. Some Topological Properties of a Functor of Finite Degree[Text]/ Beshimov R.B., Safarova D.T., // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, 42(12), стр. 2744–2753.

2. Beshimov, R.B. Index boundedness and uniform connectedness of space of the G-permutation degree[Text]/ Beshimov R.B., Georgiou D.N., Zhuraev R.M. // Applied General Topology, 2021, 22(2), стр. 447–459.

3. Borubaev, A.A. The functor of idempotent probability measures and maps with uniformity properties of uniform spaces[Text]/ Borubaev A.A., Eshkobilova D.T. // Eurasian Mathematical Journal, 2021, 12 (3), 29-41.

4. Борубаев, А.А., Равномерная топология. [Текст]/ Борубаев А.А.// Бишкек. Илим, 2013.-338 с.

5. Michael, E. Topologies on spaces of supsets[Text]/ Michael. E. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1951. – № 1 (71). – P. 152-172.

6. Борубаев, А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. [Текст]/ Борубаев А.А. // – Фрунзе: Илим, 1990.-172 с.

УДК 517.956.4

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_287

ON THE PERIODIC SOLUTION OF THE KELLER-SEGEL MODEL OF CHEMOTAXIS WITH A LOGISTIC SOURCE

Takhirov Jozil Ostanovich, Dr Sc,professor,
prof.takhirov@yahoo.com
Boborakhimova Makhbuba Ikhtiyorovna, PhD student
kamina9314@mail.ru
Institute of Mathematics, Acad.Sc., Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *The paper investigates a system of three parabolic equations, which is a model of the spatiotemporal state of two competing populations of species, both of which are chemotactically attracted by the same signal substance. Individuals move according to random diffusion and chemotaxis, and both populations reproduce themselves and mutually compete with each other according to the classical Lotka-Volterra kinetics. The global existence and uniqueness of the classical solutions of this system is proved by the contraction mapping principle using a priori Lp estimates and Schauder-type estimates for parabolic equations.*

Key words: *Keller–Segel model, chemotaxis, a priori estimates, global solution.*

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ МОДЕЛИ ХЕМОТАКСИСА КЕЛЛЕРА-СЕГЕЛЯ С ЛОГИСТИЧЕСКОМ ИСТОЧНИКОМ

Тахиров Жозил Останович, д.ф.-м.н.,профессор,
prof.takhirov@yahoo.com
Боборахимова Махбуба Ихтиёровна, базовый докторант
kamina9314@mail.ru
Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В статье исследуется система трех параболических уравнений, представляющая собой модель пространственно-временного состояния двух конкурирующих популяций видов, хемотаксически притягиваемых одним и тем же сигнальным веществом. Особи перемещаются в соответствии со случайной диффузией и хемотаксисом, и обе популяции воспроизводятся и взаимно конкурируют друг с другом согласно классической кинетике Лотка-Вольтерра. Глобальное существование и единственность классических решений этой системы доказывается принципом сжимающих отображений с использованием априорных оценок Lp и оценок типа Шаудера для параболических уравнений.*

Ключевые слова: *модель Келлера–Сегеля, хемотаксис, априорные оценки, глобальное решение .*

1. Introduction (Введение). It is known that in the mathematical modeling of the self-organization of living cells, the system of equations "Keller-Segel" is used [1],

$$u_t = \Delta u - \nabla(u \nabla v), \qquad (1)$$
$$v_t = \Delta v - v + u$$

The system describes the general behavior of a set of cells under the influence of chemotaxis. Under such conditions, the movement of each individual cell, although not entirely predictable, follows a preferred direction, namely to higher concentrations of a certain signaling chemical. If $u(x,t)$ is the cell density, and $v(x,t)$ is the chemical concentration, then the first equation in (1) reflects the interaction of non-directional diffusion motion, on the one hand, and the "chemotactic motion" controlled by ∇v, with others. The second equation expresses the assumption of the model that the signaling substance, in addition to diffusion and degradation, like most chemicals, is constantly produced by living cells. This association is known to be present in many other biologically significant situations associated with chemotaxis [2]. The striking feature of (1) is that, despite its simple mathematical structure, it turned out to be able to describe the phenomenon of spatial self-organization of cells.

Usually, consider two competing populations of biological species that are attracted to the same chemical stimulus. All individuals move according to the laws of random diffusion and chemotaxis, and both populations reproduce and mutually compete with each other according to the classical Lotka-Volterra kinetics .

In this note, we study a problem with periodic boundary conditions for a quasilinear system proposed by J. Tello and M. Winkler [3] and investigated in [4], which models the dynamics of populations of two competing species in the region $\Omega = \{(x,t)\ ;\ 0 < x < L, t > 0\}$, both of which are chemotactically attracted by the same signal substance

$$\begin{aligned}
&u_t = (d_1 u_x - \chi u w_x)_x + \mu_1 (1 - u - a_1 v) u, \\
&v_t = (d_2 v_x - \xi v w_x)_x + \mu_2 (1 - a_2 u - v) v, \qquad (x,t) \in \Omega, \\
&w_t = w_{xx} - \lambda w + u + v, \qquad (2) \\
&u(x, 0) = u_0(x),\ v(x, 0) = v_0(x),\ w(x, 0) = w_0(x), \qquad x \in (0, L), \\
&U(0, t) = U(L,t),\ U_x(0, t) = U_x(L,t), \qquad t > 0,
\end{aligned}$$

where $U(x, t) = (u, v, w)$, $u(x, t)$ and $v(x, t)$ are the population densities of two competing species in space-time (x, t) and $w(x, t)$ are concentration of the attracting substance, d_i,

μ_i , a_i , $i = 1, 2$ λ are positive constants, χ and ξ are assumed to be non-negative constants. It is assumed that both species u and v direct their movements chemotactically along the concentration gradient of the chemical above the habitat. This is modeled by taking both $\chi > 0$ and $\xi > 0$. Biologically, χ and ξ measure the strength of chemical attraction to species u and v, respectively. Species kinetics is assumed to be of the classical Lotka-Volterra type, where μ_1, μ_2 measure the internal growth rate, u, v and a_1, a_2 interpret the strength of interspecific competition. In addition, the chemical is produced by both species at the same rate with no saturation effect and at the same time consumed by a particular enzyme in the environment at a rate of λ.

In the paper, first, some a priori L_p estimates and Schauder-type estimates are established. Next, we prove that model (1) has a unique classical global solution for any chemotactic coefficients $\chi, \xi > 0$.

2. A priori estimates and global existence

Let us now turn to establishing L_p-estimates (u, v, w) under the above conditions. Global existence (2) is a consequence of several lemmas.

The no negativity of (u, v, w) follows from maximum principles [5].

Lemma 1. If $\mu_1, \mu_2 > 0$ and (u, v, w) is the only non-negative solution of equation (2) in $(0, T_{max})$, then there is a constant C>0 depending on $\|u_0, v_0, w_0\|_{L^1}$ and L such that

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(0,L)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^1(0,L)} + \|w(\cdot, t)\|_{L^1(0,L)} \leq C, \text{ for all } t \in (0, T_{max}). \qquad (3)$$

Proof. We integrate the u–equation of (1) over $(0, L)$ and have that

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u(x, t)dx = \int_0^L \mu_1(1 - u - a_1 v)udx \leq \int_0^L \mu_1(1 - u)udx ,$$

then it follows from the Gronwall's lemma that

$$\int_0^L u(x, t)dx \leq e^{-\mu_1 t}\int_0^L u_0(x)dx + L,$$

similarly we can show

$$\int_0^L \mathrm{v}(x,\ t)dx \ \le\ e^{-\mu_2 t}\int_0^L \mathrm{v}_0(x)dx \ +\ L,$$

Integrating the w–equation over $(0,\ L)$, we easily see that $\|w(\cdot,\ t)\|_{L^1(0,L)}$ is uniformly bounded for all $t\in(0,\ \infty)$. This completes the proof of Lemma 1.

To obtain their L^∞–bounds, we shall see that it is sufficient to obtain the boundedness of $\|w_x(\cdot,\ t)\|_{L^\infty}$. For this purpose, we first convert the w–equation into the following abstract form

$$w(\cdot,\ t) \ =\ e^{(\Delta-1)t}w_0 \ +\ \int_0^t e^{(\Delta-1)t} \quad ((1\text{-}\lambda)w(\cdot,s)+u(\cdot,s)+\ v(\cdot,s))ds, \tag{4}$$

where $\Delta \ =\ \dfrac{d^{\ 2}}{dx^2}$. To estimate $w(x,\ t)$ in (4), we apply the well–known smoothing properties of operator $-\Delta+\ 1$ and estimates between the linear analytic semigroups generated by $\left\{e^{\ t\Delta}\right\}_{t\ge0}$. We have for all $1\ \le\ p\ \le\ q\ \le\ \infty$, there exists a positive constant C dependent on $\mu_1,\ \mu_2$, and $\|w_0\|_{w^{1,q}(0,L)}$ such that

$$\|w(\cdot,\ t)\|_{w^{1,q}(0,L)} \le C(1+\int_0^t e^{-\nu(t-s)}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|w(\cdot,\ s)+u(\cdot,\ s)+v(\cdot,\ s)\|_{L^p}\, ds), \tag{5}$$

where $t\in(0,\ T)$, $T\in(0,\ \infty]$, $\nu=\dfrac{\pi}{L}$ is the first Neumann eigenvalue of $-\Delta$.

Lemma 2. Let us assume the same conditions $(u_0,\ v_0,\ w_0)$ as in Lemma 1. For any $q\in(1,\ \infty)$, there exists a positive constant $C(q)$ such that

$$\|w(\cdot,\ t)\|_{w^{1,q}(0,L)} \ \le\ C(q),\ \forall t\in(0,\ T_{max}). \tag{6}$$

Proof. Let $p\ =\ 1$ in (5), **then** we have that

$$\|w(\cdot,\ t)\|_{w^{1,q}(0,L)} \le C(1+\int_0^t e^{-\nu(t-s)}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(\|u(\cdot,\ s)\|_{L^1(0,L)}+$$

$$\|v(\cdot,\ s)\|_{L^1(0,L)}+\|w(\cdot,\ s)\|_{L^1(0,L)})ds) \qquad . \tag{7}$$

On the other hand, there exists a constant $C_0\ >\ 0$ such that for any $q\in(1,\ \infty)$

$$\sup_{t\in(0,\infty)} \int_0^t e^{-\nu(t-s)} (t-s)^{-1+\frac{1}{2q}} ds < C_0,$$

then we conclude from (7) that

$$\|w(\cdot, t)\|_{W^{1,q}(0,L)} \le C(1+\sup_{s\in(0,t)}(\|u(\cdot, s)\|_{L^1(0,L)} + \|v(\cdot, s)\|_{L^1(0,L)} + \|w(\cdot, s)\|_{L^1(0,L)})) \quad . \tag{8}$$

Finally, (6) is an immediate consequence of (1) and (8).

Lemma 3. If $p\in(2, \infty)$, then there is a constant $C(p) > 0$ such that

$$\|u(\cdot, \mathrm{t})\|_{L^p} + \|v(\cdot, \mathrm{t})\|_{L^p} \le C(p), \forall t\in(0, T_{max}) \quad . \tag{9}$$

Proof. We shall only show that $\|u(\cdot, \mathrm{t})\|_{L^p} \le C(p)$, since $\|v(\cdot, \mathrm{t})\|_{L^p} \le C(p)$, can be proved by the same arguments. For $p > 2$, we multiply the first equation of (1) by u^{p-1} and integrate it over $(0, L)$ by parts, then it follows from simple calculations that

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_0^L u^p = \int_0^L u^{p-1}u_t = \int_0^L u^{p-1}(d_1u_x - \chi u w_x)_x + \int_0^L \mu_1(1-u-a_1v)u^p$$

$$\le -\frac{4d_1(p-1)}{p^2}\int_0^L \left|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right|^2 + \chi\int_0^L (u^{p-1})_x u w_x - \frac{\mu_1}{2}\int_0^L u^{p+1} + C_1$$

$$= -\frac{4d_1(p-1)}{p^2}\int_0^L \left|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right|^2 + \frac{2(p-1)}{p}\chi\int_0^L u^{\frac{p}{2}}(u^{\frac{p}{2}})_x w_x - \frac{\mu_1}{2}\int_0^L u^{p+1} + C_1, \tag{10}$$

Where C_1 is a positive constant that depends on p. It follows from Holder's and Young's inequality that

$$\int_0^L u^{\frac{p}{2}}(u^{\frac{p}{2}})_x w_x dx \le \left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2(p+1)}{p}}} \left\|(u^{\frac{p}{2}})_x\right\|_{L^2} \|w_x\|_{L^{2(p+1)}} = \|u\|^{\frac{p}{2}}_{L^{p+1}} \left\|(u^{\frac{p}{2}})_x\right\|_{L^2} \|w_x\|_{L^{2(p+1)}}$$

$$\le \frac{2d_1}{p\chi}\left\|(u^{\frac{p}{2}})_x\right\|^2_{L^2} + C_2\|u\|^p_{L^{p+1}}, \tag{11}$$

In light of (11), we obtain from (10) that

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_0^L u^p dx \le C_3\|u\|^p_{L^{p+1}} - \frac{\mu_1}{2}\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}} + C_1 \quad . \tag{12}$$

Denoting $y_p(t)=\int_0^L u^p(x,t)\,dx$, one can apply Holder's on (12) to obtain that

$$y'_p(t) \le -C_4 y_p^{\frac{p+1}{p}}(t) + C_5, \quad y_p(0) = \|u_0\|_{L^p}^p .$$

We conclude that $y_p(t) \le C(p)$ for all $t\in(0,\infty)$. Similarly, we can show that $\int_0^L u^p(x,t)\,dx \le C(p)$. This completes the proof of Lemma 3.

Theorem 4. Suppose $a_i,\ \mu_i,\ i = 1,\ 2,$ and λ are positive constants. Then for positive initial data $(u_0,\ v_0,\ w_0)\in H^1(0,\ L)\times H^1(0,\ L)\times H^1(0,\ L)$ and any constants $\chi,\ \xi \in R$, problem (1) has a unique bounded positive solution $(u(x,\ t),\ v(x,\ t),\ w(x,\ t))$ defined on $[0,\ L]\times[0,\ \infty)$ such that

$(u(\cdot,t),\ v(\cdot,t),\ w(\cdot,t))\in C([0,\infty),\ H^1(0,\ L)\times H^1(0,\ L)\times H^1(0,L))$ and

$(u,\ v) \in C_{loc}^{2+\alpha,2+\alpha,1+\alpha}([0,\ L]\times[0,\ \infty))$ for some $\alpha \in \left(0,\ \frac{1}{4}\right)$.

References

1. E. F. Keller., Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability [Text]/ E. F. Keller, L.A. Segel // J. Theoret. Biol. 26 .1970. pp.399–415
2. T. Hillen, A users' guide to PDE models for chemotaxis[Text]/ T. Hillen, K. Painter// J. Math. Biol. ,2009. V.58 . pp. 183–217.
3. J.Tello. Stabilization in a two-species chemotaxis system with a logistic source[Text]/ J.Tello, M.Winkler// Nonlinearity.2012. v.25 .pp. 1413-1425.
4. Qi Wang . Global existence and steady states of a two competing species Keller -Segel chemotaxis model[Text]/ Qi Wang, Lu Zhang, Jingyue Yang and Jia Hu// American Institute of Math. Sc..2015.V. 8, N. 4, pp.777-807.
5. O. A. Ladyzenskaja,.Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type[Text]/ O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva,, A M S. 1968, 648 p.

Резолюция международной научной конференции “Актуальные проблемы математики и образования”

Резолюция

международной научной конференции **“Актуальные проблемы математики и образования”**, посвященной 80-летию заслуженного деятеля науки Кыргызкой Республики, члена-корреспондента НАН КР, доктора физико-математических наук, профессора, почетного академика НАН КР Келдибая Алымкулова

12-13 мая 2023 года в Ошском государственном университете состоялась международная научная конференция **“Актуальные проблемы математики и образования”**, посвященной 80-летию заслуженного деятеля науки Кыргызкой Республики, члена-корреспондента НАН КР, доктора физико-математических наук, профессора, почетного академика НАН КР **Келдибая Алымкулова**.

Организатором конференции выступил Ошский государственный университет.

В работе конференции приняли участие ученые, преподаватели высших учебных заведений региона и республики. Широкая география участников видных ученых-математиков из **России, Казахстана, Узбекистана, Испании, Германии, Чехии** подтверждает актуальность темы конференции и рассматриваемых в её рамках вопросов.

Программа конференции включала пленарное и шесть секционных заседаний по различным актуальным направлениям математики и образования. Для обеспечения участия широкого круга заинтересованных лиц был обеспечен онлайн формат работы.

В работе конференции приняли участие более **120 человек**. Было заслушано свыше **190 докладов и сообщений**. Темы докладов и выступлений затрагивали самые разнообразные и актуальные проблемы таких направлений как геометрия, топология, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теория операторов, спектральная теория, математическое и компьютерное моделирование, методика преподавания математики и информатики и др.

Участники конференции подчеркнули значительную роль профессора **Келдибая Алымкулова** в развитие математической науки, его весомый вклад в воспитание и подготовку молодых научных кадров; указали современные направления и проблемы математической науки и образования и необходимость развития фундаментальных и прикладных исследований; отметили, что в настоящее время в современном мире и Кыргызстане повышается роль математики и математического образования.

Материалы конференции будут опубликованы в журналах **«Вестник ОшГУ: Математика. Физика. Техника», «Вестник ОшГУ: Педагогика. Психология»,**

«Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования».

По итогам проведенных пленарных, секционных заседаний и дискуссий Конференция рекомендует:

- *акцентировать внимание молодых ученых на решения приоритетных и прикладных проблем математик, экономики, медицины, экологии, энергетики и IT-технологии;*
- *уделять внимание на подготовку высококвалифицированных научно-педагогических кадров, отвечающих современным требованиям времени;*
- *усилить интеграцию исследовательских деятельностей научных организаций, школ и вузов различных стран;*
- *широко использовать информационные и коммуникационные технологии, способствующие взаимодействию участников образовательного процесса, доступ к информационным источникам, эффективный мониторинг и контроль результатов образовательного процесса;*
- *развивать критическое и системное мышления учеников, студентов и магистрантов в процессе преподавания математических дисциплин;*
- *ежегодно проводить научную конференцию «Алымкуловские чтения».*

Участники конференции отмечают высокий уровень организации и проведения данного мероприятия, способствующего установлению новых творческих связей, объединению научного потенциала ученых, научных и образовательных организаций различных стран.

Жизнь и деятельность Келдибая Алымкулова

Алымкулов Келдибай родился 11 января 1943 года в селе Герейт-Шорон Ноокатского района Ошской области. Трудовую деятельность начал в 1964 году после окончания физико-математического факультета Кыргызского государственного университета в г. Фрунзе (ныне Бишкек). По рекомендации член-корреспондента АН КР, профессора Ю.В. Быкова он был принят на работу в Академию младшим научным сотрудником.

В 1965 году служил в Советской Армии на Украине.

В 1966-1969 годах учился в аспирантуре при Академии наук КР.

В 1969-1971 годах работал учителем математики в Кок-Жарской средней школе Ноокатского района.

В 1971-1999 годах работал старшим научным сотрудником, заведующим лабораторией АН КР.

В 1973 году под руководством академика М.Иманалиева защитил кандидатскую диссертацию (г. Фрунзе).

В 1991 году под руководством академика РАН Д.В. Аносова в Математическом институте имени Стеклова АН СССР в Москве защитил докторскую диссертацию.

В 1999-2001 годах был профессором кафедры математического анализа физико-математического факультета ОшГУ.

В 2001-2007 годах был заведующим кафедрой общей информатики Ошского государственного университета.

С 2007 года профессор кафедры алгебры и геометрии факультета МИТ ОшГУ.

С 2007 года и до последних дней жизни являлся директором Института фундаментальных и прикладных исследований Ошского государственного университета.

Алымкулов Келдибай внес значительный вклад в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярным возмущением. Он разработал аналитические методы: «Униформизация», «Структурное сращивание» и «Нелокальная бифуркация периодических решений».

Келдибай Алымкулович внес большой вклад в подготовку научных кадров ОшГУ, возглавил научную школу по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, подготовил 2 докторов наук и 9 кандидатов наук, является автором более 150 научных статей и монографии.

Келдибай Алымкулович участвовал и выступал с научными докладами в международных конференциях в Болгарии (Варна), Венгрии (Будапешт), Польше (Варшава), Таиланде (Бангкок), Греции (остров Самос-Пифагор), Швеции (Стокгольм), России (Москва, Новосибирск, Нальчик и др.), Украине (Киев, Черновцы, Тернополь), Казахстане (Алма-Ата), Узбекистане (Ташкент, Самарканд), Азербайджане (Баку).

По инициативе К. Алымкулова в 2008 году в ОшГУ был открыт диссертационный совет на соискание ученой степени кандидата наук по направлениям “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление” и “Геометрия и топология”, которым руководил до 2015 года, в то же время был членом диссертационного совета в городе Бишкек. Келдибай Алымкулов с 2015 года был членом диссертационного совета при Институте математики НАН КР г. Бишкек.

Награды и звания:

- Почетная грамота Министерства образования, науки и культуры КР, 1999 г.
- Почетная грамота государственной администрации Ошской области, 2001 г.
- Лучший работник образования КР, 2005 г.
- Член-корреспондент Национальной академии наук Кыргызской Республики, 2010 г.
- Заслуженный деятель науки Кыргызской Республики, 2011 г.
- С 2011 года он являлся членом редколлегии американского журнала «Математика и статистика», членом Американского и Европейского общества математиков, вице-президентом Кыргызского общества математиков.
- Почетная грамота Правительства Кыргызской Республики, 2014 г.
- Лауреат премии «Хан-Тенрии», 2017 г.
- Академик Российской академии естественных наук, 2019 г.
- Почетный академик Национальной академии наук Кыргызской Республики, 2021 г.

Келдибай Алымкуловдун өмүрү жана чыгармачылыгы

Алымкулов Келдибай 1943-жылдын 11-январында Ош облусунун, Ноокат районунун, Төөлөс айыл өкмөтүнүн Герейт-Шорон кыштагында туулган. 1964-жылы Фрунзе (азыркы Бишкек) шаарында Кыргыз Мамлекеттик университетинин физика-математика факультетин бүтүргөн. Кыргыз илимдер Академиясынын мүчө-корреспонденти, профессор Я.В. Быковдун сунушу менен Академиянын кичи илимий кызматкери катары ишке кабыл алынган.

1965-жылы Украинада Советтик Армияда кызмат өтөгөн.

1966-1969-жылдары Кыргыз илимдер Академиясынын аспирантурасында окуган.

1969-1971-жылдары Ноокат районунун Көк-Жар орто мектебинде математика мугалими болуп эмгектенген.

1971-1999-жылдары Кыргыз илимдер Академиясында улук илимий кызматкер, лаборатория башчысы болуп эмгектенген.

1973-жылы Фрунзе шаарында академик М. Иманалиевдин жетекчилиги алдында кандидаттык диссертациясын коргогон.

1991-жылы Россия илимдер Академиясынын академиги Д.В. Аносовдун жетекчилиги алдында Москва шаарындагы СССР илимдер Академиясынын Стеклов атындагы математика институнда доктордук диссертациясын коргогон.

1999-2001-жылдары ОшМУнун физика-математика факультетинин математикалык анализ кафедрасынын профессору,

2001-2007-жылдары ОшМУнун жалпы информатика кафедрасынын башчысы,

2007-жылдан тартып ОшМУнун МИТ факультетинин Алгебра жана геометрия кафедрасынын профессору,

2007-жылдан тартып көзү өткөнгө чейин ОшМУнун алдындагы Фундаменталдык жана прикладдык изилдөөлөр институтунун директору кызматтарын аркалап келген.

Алымкулов Келдибай Алымкулович кадимки дифференциалдык сингулярдуу козголгон теңдемелер теориясына бараандуу салым кошкон. Агай “Униформдаштыруу”, “Структуралык жалгаштыруу” жана “Мезгилдуу чечимдердин локалдык эмес бифуркациясы” аналитикалык методдорун кийирген.

Келдибай Алымкуловичтин ОшМУга, Кыргызстанга илимий кадраларды даярдоодо салымы зор, 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер адистиги боюнча илимий мектепти жетектеп, илимдин 2 докторун жана 9 кандидатын чыгарган, ошондой эле 150дөн ашуун илимий макаланын жана монографиянын автору. Келдибай Алымкулович Болгарияда (Варна), Венгрияда (Будапешт), Польшада (Варшава), Таиландда (Бангкок), Грецияда (Самос-Пифагор аралы), Швецияда (Стокгольм), Россияда (Москва, Новосибирск, Нальчик, ж.б.), Украинада (Киев, Черновцы, Тернополь), Казахстанда (Алма-Ата), Өзбекстанда (Ташкент, Самарканд), Азербайжанда (Баку) болгон конференцияларга катышып, илимий докладдарды жасап келген.

2008-жылы ОшМУнун алдында 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер жана 01.01.04 – геометрия жана топология адистиктери боюнча илимдин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн диссертациялык кеңешин ачып, 2015-жылга чейин жетектеп, ошол эле мезгилде Бишкек шаарындагы диссертациялык кеңеште мүчө болуп келген. 2015-жылдан бери Бишкек шаарындагы КР УИАнын математика институтуна жана Ж. Баласагын атындагы КУУга караштуу диссертациялык кеңешинде мүчө болуп келди.

Сыйлыктары:

- Кыргыз Республикасынын билим берүү, илим жана маданият министрлигинин Ардак грамотасы, 1999-ж.
- Ош облусунун мамлекеттик администрациясынын Ардак грамотасы, 2001-ж.
- Кыргыз Республикасынын билим берүүсүнүн мыктысы, 2005-ж..
- Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын мүчө-корреспонденти, 2010-ж.
- Кыргыз республикасынын илимине эмгек сиңирген ишмер”, 2011-ж.
- 2011-жылдан тартып Американын “Математика жана статистика” журналынын редакциялык кеңешинин мучөсү, Америка жана Европа математиктер коомунун мүчөсү, Кыргызстан математиктер коомунун вице президенти болуп келди.
- 2014-жылы Кыргыз Республикасынын Өкмөтүнүн Ардак грамотасы, 2014-ж.
- “Хан-Теңири” сыйлыгынын лауреаты, 2017-ж.
- Россиянын табигый илимдер академиясынын академиги, 2019-ж.
- Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Ардактуу Академиги, 2021-ж.

**«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ.
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА»
ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ**

Техникалык редактор: ***Абдумиталип уулу Кубатбек***

ОшМУнун “Билим” редакциялык басма бөлүмүндө даярдалып,
басмадан чыгарылды.

Биздин дарегибиз: 723500, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331.
Байланыш телефондору: (+9963222) 72273, (+996553) 500054
Факс: (+9963222) 70915
Электрондук дарегибиз: journal-mpht@oshsu.kg
Сайт: www.oshsu.kg

Негиздөөчүсү – Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги
Ош мамлекеттик университети

Басууга берилди: .30.06.2023
Көлөмү: 26,7 б.т. Буюртма: ____
Форматы: 176x250 1/8 Нуска: 200 д.

«Билим» редакциялык – басма бөлүмү