



e-ISSN 1694-8645

**КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН ИЛИМ, ЖОГОРКУ БИЛИМ
БЕРҮҮ ЖАНА ИННОВАЦИЯЛАР МИНИСТРЛИГИ**



**ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА**

Научный журнал

№1(8), 2026

**HERALD OSH STATE UNIVERSITY
MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES**

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА»**

Главный редактор: Сопуев Адахимжан Сопуевич – доктор физ.-мат. наук, профессор, Ошский государственный университет, asopuev@oshsu.kg, sopuev@mail.ru, (Кыргызстан, г. Ош)

Заместитель главного редактора: Ташполотов Ысламидин Ташполотович – доктор физ.-мат. наук, профессор, Ошский государственный университет, itashpolotov@mail.ru (Кыргызстан, г. Ош);

Члены редакционной коллегии:

Асанов Авыт Асанович – д-р физ.-мат. наук, проф., avyt.asanov@manas.edu.kg (Кыргызстан, г. Бишкек);

Обозов Алайбек Джумабекович – д-р техн. наук, проф., Obozov-a@mail.ru (Кыргызстан, г. Бишкек);

Маткаримов Таалайбек Ысманиевич – д-р техн. наук, проф., talai_m@bk.ru (Кыргызстан, г. Бишкек);

Алыбаев Курманбек Сарманович – д-р физ.-мат. наук, проф., alybaevkurmanbek@rambler.ru (Кыргызстан, г. Джалал-Абад);

Матиева Гулбадан Матиевна – д-р физ.-мат. наук, проф., gulbadan_57@mail.ru (Кыргызстан, г. Ош);

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович – д-р физ.-мат. наук, проф., dtursunov@oshsu.kg (Кыргызстан, г. Ош);

Кенжаев Идирибек Гуламович – д-р техн. наук, проф., kenjaevig@rambler.ru (Кыргызстан, г. Ош);

Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич – д-р техн. наук, проф., zhanybai@gmail.com (Российская Федерация, ЮЗГУ, г. Курск);

Карманов Виталий Сергеевич – к-т техн. наук, доцент, karmanov@corp.nstu.ru (Российская Федерация, г. Новосибирск);

Бердышев Абдумаулен Сулейманович – д-р физ.-мат. наук, проф., berdyshev@mail.ru (Казахстан, г. Алматы);

Клычев Шавкат Исакович – д-р техн. наук, проф., klichevsh@list.ru (Узбекистан, г. Ташкент);

Апаков Юсупжон Пулатович – д-р физ.-мат. наук, проф., yusupjonapakov@gmail.com (Узбекистан, г. Наманган);

Исломов Бозор Исломович – д-р физ.-мат. наук, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, islomovbozor@yandex.com (Узбекистан, г. Ташкент)

Давыдов Алексей Александрович – д-р физ.-мат. наук, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, davydov@mi-ras.ru (Российская Федерация, МГУ, г. Москва,)

Кангузин Балтабек Есматович – д-р физ.-мат. наук, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, kanguzhin53@gmail.com (Казахстан, г. Алматы)

Расулов Тулкин – д-р физ.-мат. наук, Бухарский государственный университет, t.h.rasulov@buxdu.uz, rth@mail.ru (Узбекистан, г. Бухара)

Юлдашев Турсун Камалдинович – д-р физ.-мат. наук, проф., Ташкентский государственный транспортный университет, tursun.k.yuldashev@gmail.com (Узбекистан, г. Ташкент)

Папиева Толкун Маматаевна – к.ф.-м.н., доцент, Ошский государственный университет, tpapieva@oshsu.kg (Кыргызстан, г. Ош).

Абдумиталип уулу Кубатбек – к.ф.-м.н., доцент, Ошский государственный университет, kuba@oshsu.kg, kubatbek-90@mail.ru (Кыргызстан, г. Ош).

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
“HERALD OSH STATE UNIVERSITY MATHEMATICS.
PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES”

Editor-in-Chief: Sopuev Adakhimzhan Sopuevich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Osh State University, asopuev@oshsu.kg, sopuev@mail.ru (Osh, Kyrgyzstan).

Deputy Editor-in-Chief: Tashpolotov Yslamidin Tashpolotovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Osh State University, itashpolotov@mail.ru (Osh, Kyrgyzstan).

Members of the Editorial Board:

Asanov Avyt Asanovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, avyt.asanov@manas.edu.kg (Bishkek, Kyrgyzstan).

Obozov Alaibek Dzhumabekovich - Doctor of Technical Sciences, Professor, Obozov-a@mail.ru (Bishkek, Kyrgyzstan).

Matkarimov Talaibek Ismanalievich - Doctor of Technical Sciences, Professor, talai_m@bk.ru (Bishkek, Kyrgyzstan).

Alybaev Kurmanbek Sarmanovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, alybaevkurmanbek@rambler.ru (Jalal-Abad, Kyrgyzstan).

Matieva Gulbadan Matievna - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, gulbadan_57@mail.ru (Osh, Kyrgyzstan).

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, dtursunov@oshsu.kg (Osh, Kyrgyzstan).

Kenzhaev Idirisbek Gulamovich - Doctor of Technical Sciences, Professor, kenjaevig@rambler.ru (Osh, Kyrgyzstan).

Zhusubaliev Zhanybai Tursunbaevich - Doctor of Technical Sciences, Professor, Southwest State University, zhanybai@gmail.com (Kursk, Russian Federation).

Karmanov Vitaliy Sergeevich - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, karmanov@corp.nstu.ru (Novosibirsk, Russian Federation).

Berdyshev Abdumaulen Suleimanovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, berdyshev@mail.ru (Almaty, Kazakhstan).

Klychev Shavkat Isakovich - Doctor of Technical Sciences, Professor, klichevsh@list.ru (Tashkent, Uzbekistan).

Apakov Yusupjon Pulatovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, yusupjonapakov@gmail.com (Namangan, Uzbekistan).

Islomov Bozor Islomovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, islomovbozor@yandex.com (Tashkent, Uzbekistan).

Davydov Alexey Alexandrovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University, davydov@mi-ras.ru (Moscow, Russian Federation).

Kanguzhin Baltabek Esmatovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Al-Farabi Kazakh National University, kanguzhin53@gmail.com (Almaty, Kazakhstan).

Rasulov Tulkin - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Bukhara State University, t.h.rasulov@buxdu.uz, rth@mail.ru (Bukhara, Uzbekistan).

Yuldashev Tursun Kamaldinovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Tashkent State Transport University, tursun.k.yuldashev@gmail.com (Tashkent, Uzbekistan).

Papieva Tolkun Mamataevna - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Osh State University, tpapieva@oshsu.kg (Osh, Kyrgyzstan).

Abdumitalip uulu Kubatbek - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Osh State University, kuba@oshsu.kg, kubatbek-90@mail.ru (Osh, Kyrgyzstan).

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

6

- Аширбаева А.Ж., Туленбаева Р.А., Дыйканов Д.Д.** Использование метода дополнительного аргумента для решения обратной задачи..... 6
- Сапарова Г.Б., Мурзабаева А.Б.** Интегральные уравнения в теории массового обслуживания и оптимизации цепей поставок..... 11
- Турсунов Д.А., Сулайманов З.М.** Асимптотика решения бисингулярной двухточечной краевой задачи с внутренним слоем..... 16
- Юлдашев Т.К., Артыкова Ж.А., Файзиев А.К.** Периодические решения системы функциональных интегро-дифференциальных уравнений с произведением двух нелинейных функций и функцией с переменными отклонениями под максимумами... 25

ФИЗИКА

39

- Акрамов И., Расулов Т., Курбанова Д.** Гибридный метод спектральной отложенной коррекции с инициализацией на основе физически-информированной нейронной сети 39
- Осконбаев М.Ч., Кожобекова П.Ж., Полотова Э.Ж.** Определение универсальной газовой постоянной для различных газов экспериментальным методом с использованием виртуальной лаборатории..... 50

ТЕХНИКА

60

- Сопуев У.А.** К изучению синхронизации импульсного осциллятора Гудвина–Смита внешним периодическим возбуждением..... 60
- Токторбаев А.М., Токтомураева Ж.Э.** Стили в LaTeX: обзор и применение 66
- Терехов С.В.** Прогностический полуэмпирический расчет теплофизических свойств сплавов золота с кремнием по данным компонентов..... 74

CONTENTS

MATHEMATICS

6

- Ashirbayeva A.Zh., Tulenbaeva R.A., Dyikanov D.D.** Application of the additional argument method to solving an inverse problem..... 6
- Saparova G.B., Murzabayeva A.B.** Integral equations in the theory of mass service and supply chain optimization..... 11
- Tursunov D.A., Sulaimanov Z.M.** Asymptotics of the solution of a bisingular two-point boundary-value problem with an internal layer..... 16
- Yuldashev T.K., Artykova Z.A., Fayziyev A.K.** Periodic solutions for a system of functional integro-differential equations with product of two nonlinear functions and with a function involving variable deviations under the maximum 25

PHYSICS

39

- Akramov I., Rasulov T., Kurbonova D.** A hybrid spectral deferred correction method with physics-informed neural network initialization..... 39
- Oskonbaev M.Ch., Kozhobekova P.Zh., Polotova E.Zh.** Determination of the universal gas constant for different gases by an experimental method using a virtual laboratory..... 50

TECHNICAL SCIENCES

60

- Sopuev U.A.** On the study synchronization of a forced impulsive Goodwin–Smith oscillator..... 60
- Toktorbaev A.M., Toktomuratova Zh.E.** Styles in latex: review and application..... 66
- Terekhov S.V.** Prognostic semi-empirical calculation of the thermophysical properties of gold-silicon alloys based on component data..... 74

МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

УДК 519.968

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1\(8\)_6](https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1(8)_6)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна

д.ф.-м.н., профессор.

Ошский технологический университет им. М.М. Адышева

ORCID 0000-0001-7706-0608, aijarkyn.osh@mail.ru

Туленбаева Рамина Аскербековна

Аспирант

Дыйканов Данияр Дыйканович

магистрант

Аннотация. Расширяются области применения метода дополнительного аргумента, разработанного известными учеными Кыргызской Республики. Если ранее данный метод применялся в прямых задачах, предусмотренных для уравнений в частных производных различного порядка, то в настоящее время рассматривается возможность применения и для обратных задач. В статье рассматривается обратная задача для уравнения в частных производных второго порядка. В частности, наряду с неизвестной функцией функция в начальном условии также рассматривается как неизвестная. Доказано существование и единственность решения поставленной обратной задачи.

Ключевые слова: Частная производная, обратная задача, дополнительный аргумент, метод, начальное условие, неизвестная функция, второй порядок.

APPLICATION OF THE ADDITIONAL ARGUMENT METHOD TO SOLVING AN INVERSE PROBLEM

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor.

Osh Technological University named after M.M. Adyshev. ORCID 0000-0001-7706-0608,

aijarkyn.osh@mail.ru

Tulenbaeva Ramina Askerbekovna

graduate student

Dyikanov Daniyar Dyikanovich

master's student

Abstract. The fields of application for the additional argument method, developed by renowned scientists of the Kyrgyz Republic, are expanding. While this method was previously applied to direct problems for partial differential equations of various orders, now its application to inverse problems is currently being explored. An inverse problem for a second-order partial differential equation is examined in this article. Specifically, along with the unknown function, the function in the initial condition is also treated as unknown. The existence and uniqueness of the solution to the formulated inverse problem are proven.

Keywords: Partial derivative, inverse problem, additional argument, method, initial condition, unknown function, second order.

Введение

В данной статье метод дополнительного аргумента распространен для нелинейного уравнения второго порядка относительно неизвестной функции вида:

$$b^2(t, x)u_{tt}(t, x) - a^2(t, x)u_{xx}(t, x) = c(t, x)u_t(t, x) + d(t, x)u_x(t, x) + f(t, x, u), \quad (1)$$

$$(t, x) \in G_2(T) = [0, T] \times R.$$

Опубликован ряд статей по применению МДА (метод дополнительного аргумента) к прямым задачам, начиная от уравнений первого порядка и заканчивая уравнениями в частных производных высших порядков. Среди них можно выделить статьи [1–5].

Применение же данного метода к уравнениям со степенной особенностью, в частности к обратным задачам, было рассмотрено в статье [6].

Уравнение (1) является дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа. Для исследования его решения мы используем МДА и для удобства приводим его к следующей операторной форме:

$$D[b(t, x), -a(t, x)]D[b(t, x), a(t, x)]u(t, x) = f(t, x, u), \quad (2)$$

где оператор: $D[w, v] = w \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$.

Рассмотрим данное уравнение гиперболического типа со следующими начальными условиями:

$$u(0, x) = \psi_0(x), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \psi_1(x). \quad (4)$$

Здесь функция $\psi_0(x)$ является заданной и непрерывно дифференцируемой до первого порядка, а функция $\psi_1(x)$ неизвестная функция.

Функции, заданные в уравнении, удовлетворяют следующим условиям:

$$a(t, x), b(t, x) \in \bar{C}^{(2)}(G_2(T)), \quad b(0, x) = 0, \quad c(t, x) = -D[b(t, x), -a(t, x)]b(t, x),$$

$$d(t, x) = -D[b(t, x), -a(t, x)]a(t, x),$$

$$f(t, x, u) \in \bar{C}^{(2)}(G_2(T) \times R) \cap LipL|_u, \quad L > 0 - const.$$

Здесь функции $\bar{C}^{(k)}(\Omega)$ и $Lip(N|_u, M|_v, \dots)$ классы функций определены в работах [1, 2]

Перед применением МДА рассмотрим следующие сопряженные интегральные уравнения, имеющие единственное решение:

$$p(s, t, x) = x + \int_s^t A(v, p(v, t, x)) dv, \quad (5)$$

$$q(s, t, x) = x - \int_s^t A(v, p(v, t, x)) dv, \quad (6)$$

$$A(t, x) = \frac{a(t, x)}{b(t, x)}, \quad b(t, x) \neq 0, \quad (s, t, x) \in Q_2(T) = \{(s, t, x) | 0 \leq s \leq t \leq T, x \in R\}.$$

Уравнения (5) и (6) обладают единственным решением, если для функции $A(t, x)$ существует ограниченная частная производная по x . В нашем случае это условие выполняется, и имеют следующие равенства:

$$p(s, s, x) = x, \quad q(s, s, x) = x.$$

С помощью дифференцирования из (5), (6) получаем:

$$D[b(t, x), -a(t, x)]p(s, t, x) = 0, \quad (7)$$

$$D[b(t, x), a(t, x)]q(s, t, x) = 0, \quad (8)$$

Теперь дважды последовательно применим МДА к поставленной задаче:

$$D[b(t, x), a(t, x)]u(t, x) = \varphi(p(0, t, x)) + \int_0^t \frac{1}{b(s, p(s, t, x))} f(s, p(s, t, x), u(s, p(s, t, x))) ds, \quad (9)$$

$$a(t, x)u_x(t, x)|_{t=0} = \varphi(x).$$

Применяя МДА еще раз, получаем:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \psi_0(q(0, t, x)) + \int_0^t \frac{1}{b(s, p(s, t, x))} \phi(p(0, s, q(s, t, x))) ds + \\ &= \int_0^t \frac{1}{b(s, q(s, t, x))} \int_0^s \frac{1}{b(v, p(v, t, x))} f(v, p(v, s, q(s, t, x)), u(v, p(v, s, q(s, t, x)))) dv ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегральное уравнение (10) имеет единственное решение.

Обозначим:

$$g(t, x) = \psi_0(q(0, t, x)) + \int_0^t \frac{1}{b(s, p(s, t, x))} \varphi(p(0, s, q(s, t, x))) ds.$$

Тогда (10) можно записать в виде:

$$Au = g(t, x) + \int_0^t \frac{1}{b(s, q(s, t, x))} \int_0^s \frac{1}{b(v, p(v, t, x))} f(v, p(v, s, q(s, t, x)), u(v, p(v, s, q(s, t, x)))) dv ds.$$

Нам необходимо доказать, что оператор A является сжимающим.

Пусть $u_1(t, x), u_2(t, x) \in C(G_2(T))$.

Тогда

$$\begin{aligned} |Au_2 - Au_1| &= \left| \int_0^t \frac{1}{b(s, q(s, t, x))} \int_0^s \frac{1}{b(v, p(v, t, x))} f(v, p(v, s, q(s, t, x)), u_2(v, p(v, s, q(s, t, x)))) dv ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \frac{1}{b(s, q(s, t, x))} \int_0^s \frac{1}{b(v, p(v, t, x))} f(v, p(v, s, q(s, t, x)), u_1(v, p(v, s, q(s, t, x)))) dv ds \right| \leq \\ &\leq K^2 L \frac{t^2}{2} \max_{G_2(T)} |u_2(t, x) - u_1(t, x)|, \end{aligned}$$

$$\text{Здесь: } \left| \frac{1}{b(t, x)} \right| < K > 0 - \text{const.}$$

Число T выбирается чтобы удовлетворялось следующее неравенство:

$$L \frac{(KT)^2}{2} < 1.$$

В этом случае наш оператор будет сжимающим, следовательно, решение интегрального уравнения (10) существует и единственно. После этого мы определяем неизвестную функцию из начальных условий на основе найденного решения.

Рассмотрим конкретный пример

$$tu_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x) - \frac{1}{2}u_t(t, x), \quad (11)$$

Рассмотрим уравнение (11) с начальными условиями (2), (3). Согласно поставленному условию, функция $\psi_0(x) = x$ задана и непрерывно дифференцируема, а функция $\psi_1(x)$ неизвестна. Запишем (11) в операторной форме:

$$D[\sqrt{t}, -1]D[\sqrt{t}, 1]u(t, x) = f(t, x) \quad (12)$$

В наших случаях :

$$p(s, t, x) = x + \int_s^t \frac{1}{\sqrt{v}} dv = x + 2(\sqrt{t} - \sqrt{s}),$$

$$q(s, t, x) = x - \int_s^t \frac{1}{\sqrt{v}} dv = x - 2(\sqrt{t} - \sqrt{s}),$$

$$(s, t, x) \in Q_2(T).$$

Для этих функций действительно выполняются условия (7) и (8):

$$D[\sqrt{t}, -1]p(s, t, x) = 0,$$

$$D[\sqrt{t}, 1]q(s, t, x) = 0,$$

$$\text{и } p(s, s, x) = x, \quad q(s, s, x) = x.$$

Применяем МДА к уравнению (2):

$$D[\sqrt{t}, 1]u(t, x) = 1 + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} f(s, p(s, t, x)) ds$$

Отсюда получаем:

$$D[\sqrt{t}, 1]u(t, x) = 1 + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} f(s, x + 2\sqrt{t} - 2\sqrt{s}) ds$$

Еще раз применяя МДА к последнему уравнению, окончательно имеем:

$$u(t, x) = q(0, t, x) + 2\sqrt{t} + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{v}} f(v, q(s, t, x) + 2\sqrt{s} - 2\sqrt{v}) dv ds$$

Отсюда получаем:

$$u(t, x) = x + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{v}} f(v, x - 2\sqrt{t} + 4\sqrt{s} - 2\sqrt{v}) dv ds$$

Мы получили решение поставленной задачи. Теперь определим неизвестную функцию. Для этого используем равенство (11):

$$u_t(t, x) = 2f(t, x) - 2tu_{tt}(t, x) + 2u_{xx}(t, x).$$

$$u_t(0, x) = \psi_1(x) = 2f(0, x) + 2u_{xx}(0, x).$$

$$u_{xx}(t, x) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{v}} f_{xx}(v, x - 2\sqrt{t} + 4\sqrt{s} - 2\sqrt{v}) dv ds.$$

$$u_t(0, x) = \psi_1(x) = 2f(0, x).$$

В частном случае, если (11) имеет вид:

$$tu_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = x - \frac{1}{2}u_t(t, x),$$

и $\psi_0(x) = x$, то решение и функция в начальном условии определяются так:

$$u(t, x) = x + 2xt,$$

$$\psi_1(x) = 2x.$$

Заключение. Полученные в статье результаты могут быть обобщены для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Литературы

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
2. Иманалиев М.И. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1992. – Т. 323. – № 3. – С. 410–414.
3. Мамазияева Э.А. Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – Ош, 2014. – № 3. – С. 27–32.
4. Мамбетов Ж.И. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. – №5. – С. 87–90.
5. Садыкова Г. К. Исследование решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / Г.К. Садыкова // Известия ВУЗов Кыргызстана. 2019. – №11. – С.15-19.

УДК 519.7

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1\(8\)_11](https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1(8)_11)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕПЕЙ ПОСТАВОК

Сапарова Гульмира Баатыровна

к.ф.-м.н., доцент, Ошский технологический университет

saparovagula14@gmail.com

0009-0002-3524-8877

Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна

к.-ф.м.н, доцент, Ошский государственный университет

amurzabaeva@oshsu.kg

0000-0003-0694-6633

Аннотация. В данной статье рассмотрено применение интегральных уравнений для моделирования систем массового обслуживания и оптимизации цепей поставок. Рассмотрено и доказано, что использование интегральных моделей позволяет учитывать накопительный спрос, задержки поставок и распределение клиентов между службами обслуживания. Показаны аналитические и численные методы решения интегральных уравнений, рассмотрен пример оптимизации управления запасами и ресурсов. Полученные результаты исследования могут быть применены для повышения эффективности логистических процессов и снижения времени ожидания обслуживания.

Ключевые слова: интегральные уравнения, массовое обслуживание, цепи поставок, оптимизация, численные методы, уравнение Фредгольма, Вольтерра

INTEGRAL EQUATIONS IN THE THEORY OF MASS SERVICE AND SUPPLY CHAIN OPTIMIZATION

Saparova Gulmira Baatyrovna

candidat of physico-mathematical sciences, associate professor

Osh Technological University

saparovagula14@gmail.com

0009-0002-3524-8877

Murzabayeva Aitbu Busurmankulovna

candidat of physico-mathematical sciences, associate professor

Osh State University

amurzabaeva@oshsu.kg

0000-0003-0694-6633

Abstract. This article examines the application of integral equations to the modeling of queuing systems and the optimization of supply chains. It is demonstrated that the use of integral models makes it possible to account for cumulative demand, delivery delays, and the distribution of customers among service facilities. Analytical and numerical methods for solving integral equations are presented, and an example of inventory and resource management optimization is discussed. The results of this study can be applied to improve the efficiency of logistics processes and reduce customer waiting time.

Keywords: integral equations, queuing systems, supply chains, optimization, numerical methods, Fredholm equation, Volterra equation.

Введение. Современные системы логистики и обслуживания характеризуются высокой динамичностью и неопределенностью спроса. Эффективное управление запасами и потоками клиентов требует применения математических моделей, способных учитывать задержки, накопление и распределение ресурсов. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра представляют удобный инструмент для описания этих процессов. С их помощью можно учитывать прошлые события, такие как, предыдущие поставки или время ожидания клиентов и прогнозировать будущие состояния системы.

Так же социально – экономические системы характеризуются высокой степенью неопределенности, динамичности и сложности взаимодействующих процессов. В таких условиях особую актуальность приобретают методы математического моделирования, с помощью которых можно эффективно анализировать и оптимизировать процессы обслуживания и распределения ресурсов. К таким методам относятся интегральные уравнения, которые играют важную роль в описании систем с памятью, запаздыванием и распределенными параметрами.

Теория массового обслуживания является одним из важных направлений прикладной математики, она широко применяется при анализе работы транспортных систем, телекоммуникационных сетей, производственных процессов и логистических комплексов. В данной теории интегральные уравнения применяются для описания вероятностных характеристик потоков заявок, времени ожидания и длины очереди, особенно в случаях, когда классические марковские модели оказываются недостаточными. Вместе с этими задачами оптимизации цепей поставок развиваются в условиях глобализации и цифровизация экономики. Эффективное управление запасами, транспортными потоками и распределением ресурсов требует учета случайных факторов, временных задержек и взаимодействия между различными элементами системы. В таких случаях интегральные уравнения позволяют формализовать такие процессы, включая зависимости от предыстории системы, это делает их мощным инструментом для построения адекватных моделей цепей поставок.

Таким образом, применение интегральных уравнений в теории массового обслуживания и оптимизации цепей поставок открывает новые возможности для более точного описания и анализа сложных систем. И это способствует разработке эффективных методов управления, направленных на снижение издержек, повышение качества обслуживания и устойчивости логистических процессов.

Целью данной работы является показать, как интегральные уравнения применяются для моделирования систем массового обслуживания и оптимизации цепей поставок, а также исследовать численные методы решения этих уравнений. В многоканальных системах обслуживания интегральные уравнения помогают учитывать распределение клиентов между каналами и вероятность ожидания. В логистике эти уравнения моделируют накопительный спрос, задержки поставок, и влияние прошлых событий на текущий запас.

Интегральные уравнения Фредгольма первого рода имеют вид:

$$\int_a^b K(t, s) u(s) ds = f(t),$$

Вольтерра второго рода:

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s) u(s) ds.$$

где $u(s)$ – искомая функция, $K(t, s)$ – ядро интеграла, $f(t)$ – известная функция.

Интегральные уравнения применяются в системах обслуживания, как:

- **Вероятность ожидания клиентов:** вычисляется через ядро интеграла, учитывающее поток клиентов и количество обслуживающих каналов;
- **Моделирование перегрузки каналов:** интегральное уравнение позволяет определить момент, когда система станет перегруженной.
- **Оптимизация ресурсов:** численное решение интегральных уравнений показывает оптимальное распределение сотрудников и оборудования.

Обзор литературы. Современные исследования показывают активное развитие методов анализа систем массового обслуживания и цепей поставок на основе стохастических моделей и интегральных уравнений. Были рассмотрены фундаментальные аспекты теории очередей, включая анализ времени ожидания и балансировки потоков [1,2]

Особое внимание уделяется интеграции моделей очередей с задачами управления запасами и логистики. Так, в исследованиях развиваются queueing - inventory модели, позволяющие учитывать одновременно процессы обслуживания и хранения ресурсов [3, 4]

В разных статьях были предложены подходы, основанные на интегральных уравнениях, для описания динамики стохастических систем обслуживания. Эти методы позволяют более точно моделировать непрерывные потоки заявок и ресурсов. Современные работы по оптимизации цепей поставок демонстрируют применение методов теории массового обслуживания для повышения эффективности логистических систем в условиях неопределенности [2, 3]

Таким образом, можно отметить тенденцию к объединению интегральных методов, теории очередей и оптимизационных моделей в рамках единого подхода к анализу сложных социально-экономических систем.

Материалы и методы. Пусть система состоит из склада и нескольких пунктов выдачи, а спрос в каждый момент времени t задается функцией $f(t)$. Определить оптимальный уровень запасов $u(t)$, учитывая задержки поставок и распределение ресурсов.

Математическую модель можно записать с помощью интегрального уравнения Вольтерра:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t K(t, s) f(s) ds - \int_0^t R(t, s) u(s) ds.$$

где, $K(t, s)$ – накопление спроса, а $R(t, s)$ – расход ресурсов.

Решение идет численное. Применяется метод дискретизации на временном шаге Δt . Для каждого шага t_i :

$$u(t_i) \approx u_0 + \sum_{j=0}^i K(t_i, t_j) f(t_j) \Delta t - \sum_{j=0}^i R(t_i, t_j) u(t_j) \Delta t.$$

Реализация возможна в *Excel*, *Python* или *Matlab*.

Например, в оптимизации это:

- сравнение двух стратегий поставок: периодические поставки и поставка по фактическому спросу;
- вычисление среднего времени ожидания и уровня запасов;
- выбор стратегии с минимальными затратами и наименьшим риском дефицита.

Пример 1. Модель очереди с интегральным уравнением.

Рассмотрим сервисный центр по заказу еды, в который поступают заявки:

- поток заявок – интенсивность $\lambda = 2$ заявки/ час;

- обслуживание – интенсивность $\mu = 3$ заявки/ час.

Пусть $P(t)$ – вероятность того, что система свободна в момент времени t . Динамика системы описывается интегральным уравнением типа Вольтерра:

$$P(t) = e^{-\mu t} + \lambda \int_0^t e^{-\mu(t-s)} P(s) ds.$$

Решение: Это уравнение решается методом дифференцирования.

Продифференцируем:

$$P'(t) = -\mu e^{-\mu t} + \lambda P(t).$$

Подставляем $\lambda = 2, \mu = 3$:

$$P'(t) = -3e^{-3t} + 2P(t).$$

Решая как дифференциальное уравнение, имеем:

Общее решение:

$$P(t) = Ce^{2t} + e^{-3t}.$$

Из условия $P(0) = 1$:

$$C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0.$$

Таким образом,

$$P(t) = e^{-3t}.$$

- вероятность свободной системы экспоненциально убывает;
- чем больше μ , тем быстрее система освобождается;
- при $t \rightarrow \infty$: $P(t) \rightarrow 0$.

То есть, система со временем почти всегда занята.

Пример 2. Модель очереди + запасы.

Рассмотрим сервисный центр по заказу такси, в который поступают заявки:

- заявки приходят с интенсивностью λ ;
- обслуживание с интенсивностью μ ;
- есть гаражи (запасы) $S(t)$;
- при отсутствии запаса возникает очередь.

Построим модель в виде интегральной системы:

$$P(t) = e^{-\mu t} + \lambda \int_0^t e^{-\mu(t-s)} P(s) ds.$$

$$S(t) = S_0 + \lambda \int_0^t (a - bP(s)) ds.$$

где: a – скорость пополнения; b – интенсивность потребления.

$P(t)$ – загрузка системы; $S(t)$ – уровень запасов; если $S(t) \rightarrow 0 \rightarrow$ возникает очередь. Рассмотрим конкретные значения:

$$a = 5, b = 4, P(t) = e^{-3t}.$$

Тогда,

$$S(t) = S_0 + \lambda \int_0^t (5 - 4e^{-3s}) ds.$$

Решаем:

$$S(t) = S_0 + 5t + \frac{4}{3}e^{-3t} - \frac{4}{3}.$$

Таким образом, получаем окончательно:

$$S(t) = S_0 + 5t - \frac{4}{3}(1 - e^{-3t});$$

Полученная модель показывает процесс обслуживания и динамику запасов. Анализ показывает, что при увеличении интенсивности потребления система может перейти в режим дефицита, что приводит к росту очередей.

Выводы

Таким образом, получаем:

1. Интегральные уравнения являются мощным инструментом для моделирования систем массового обслуживания и цепей поставок.
2. Они позволяют учитывать накопительный спрос, задержки и распределение ресурсов.
3. Численные методы решения дают возможность реализовать модели в Excel и Python, что делает их применимыми для практических задач.
4. Оптимизация на основе интегральных моделей снижает время ожидания и повышает эффективность логистики.

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методологии. – 8 – е изд., стер. – Москва: КНОРУС, 2019. – 192 с.
2. Крейн С.Г. Интегральные уравнения: введение в теорию. – Москва: ЛЕНАНД, 2017. – 320 с.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. – Москва: Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – 10 – е изд. – Москва: Вильямс, 2019. – 912 с.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович

д.ф.-м.н., профессор

Ошский государственный университет

dtursunov@oshsu.kg

<https://orcid.org/0000-0002-6990-1742>

Сулайманов Завур Мамадалиевич

Преподаватель

Ошский государственный университет

szavur1983@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0009-5355-1459>

В статье исследуется двухточечная краевая задача для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром ε под знаком старшей производной искомой функций. Рассматриваемое уравнение задано в виде $\varepsilon y''(x) + \chi y'(x) - \chi y(x) = f(x, \varepsilon)$, $-1 < x < 1$, и граничные условия $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$. Подобные задачи встречаются в физике, технике, биологии, экономике и других областях науки. Особенности рассматриваемой задачи являются принадлежность к классу сингулярно возмущенных уравнений, а также то, что коэффициент соответствующего невозмущенного уравнения обращается нулю на рассматриваемом отрезке. Эти два фактора (сингулярное возмущение и внутренняя сингулярная точка) делают задачу бисингулярной и усложняют структуру решения. Однако отличие рассматриваемой задачи от других сингулярно возмущенных задач заключается в том, что на границе граничных точек не появляются пограничные слои. Слой образуется только в окрестности внутренней сингулярной точки $x=0$. В результате мы не можем записать решение рассматриваемой задачи с помощью одной функции, т.е. мы строим отдельные решения на отрезках $[-1, 0]$ и $[0, 1]$, т.е. строится составное решение. Каждый из них состоит из суммы двух функций: регулярной внешней части и внутреннего решения, описывающего слой на сингулярной точке. Цель исследования – построить равномерное асимптотическое разложение решения двухточечной краевой задачи с бисингулярным возмущением, на данном отрезке. Точность полученных асимптотических формул сравнивается с численными расчетами, выполненными в системе Maple на основе конкретного примера, и показано их асимптотическая близость.

Ключевые слова: двухточечная задача, бисингулярное возмущение, сингулярное возмущение, асимптотика, асимптотическое разложение, внутренний слой, сращивание.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A BISINGULAR TWO-POINT BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH AN INTERNAL LAYER

Dilmurat Abdillazhanovich Tursunov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Osh State University

dtursunov@oshsu.kg

<https://orcid.org/0000-0002-6990-1742>

Zavur Mamadalievich Sulaimanov

Lecturer

Osh State University

szavur1983@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0009-5355-1459>

This article studies a two-point boundary-value problem for a linear inhomogeneous second-order ordinary differential equation with a small parameter ε under the sign of the highest derivative of the unknown function. The equation under consideration is given in the form $\varepsilon y''(x) + xy'(x) - xy(x) = f(x, \varepsilon)$, $-1 < x < 1$, and the boundary conditions $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$. Similar problems are encountered in physics, engineering, biology, economics, and other fields of science. The peculiarities of the problem under consideration are that it belongs to the class of singularly excited equations, and that the coefficient of the corresponding unexcited equation vanishes on the interval under consideration. These two factors (singular perturbation and internal singular point) make the problem bisingular and complicate the structure of the solution. However, the difference between the problem under consideration and other singularly perturbed problems is that boundary layers do not appear on the boundaries of the boundary points. The layer is formed only in the neighborhood of the internal singular point $x=0$. As a result, we cannot write the solution to the problem under consideration using a single function, i.e. We construct individual solutions on the intervals $[-1, 0]$ and $[0, 1]$, i.e., a composite solution is constructed. Each solution consists of the sum of two functions: a regular external part and an internal solution describing the layer at the singular point. The goal of the study is to construct a uniform asymptotic expansion of the solution to a two-point boundary value problem with a bisingular perturbation on a given interval. The accuracy of the resulting asymptotic formulas is compared with numerical calculations performed in Maple based on a specific example, and their asymptotic closeness is demonstrated.

Keywords: two-point problem, bisingular perturbation, singular perturbation, asymptotics, asymptotic expansion, internal layers, matching.

Введение. Теория сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений является одним из важнейших разделов современной математической физики и прикладного анализа. Задачи, содержащие малый параметр при старшей производной, описывают широкий класс процессов с быстрыми и медленными составляющими: пограничные слои в гидродинамике, контрастные структуры в химической кинетике, переходные режимы в электрических цепях, а также явления с локализованными внутренними перепадами [4]-[8], [14]-[17]. В таких задачах решение на малом интервале изменения независимой переменной может претерпевать резкие изменения, образуя так называемые *пограничные слои* (вблизи границ) или *внутренние слои* (в окрестности внутренней точки области) [1]-[11].

Особый интерес представляют краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\varepsilon y'' = f(x, y, \varepsilon), \quad x \in (a, b), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

с дополнительными условиями на концах отрезка. Когда вырожденное уравнение (при $\varepsilon=0$) имеет изолированное решение, которое теряет устойчивость или претерпевает бифуркацию, в решении полной задачи могут возникать *внутренние переходные слои* – области, где решение быстро переходит от одного устойчивого состояния к другому. Такие структуры называют *контрастными* или *ступенчатыми* [2]. Подобное явление ранее в линейных уравнениях не встречалось, все задачи в которых появились *контрастные (всплеск) явления были нелинейными*.

Исследованию асимптотики решений подобных задач посвящены работы многих авторов (А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузова, Н.Н. Нефёдова, С.А. Ломова, М.Г. Дмитриева и др.). В классическом методе пограничных функций строится равномерное асимптотическое приближение, содержащее быстро осциллирующие или быстро затухающие составляющие [2]-[8]. Однако при наличии внутреннего слоя возникает необходимость дополнительного согласования разложений слева и справа от точки перехода, что требует применения техник *сращивания* или *метода сшивания асимптотических разложений* [18].

В данной статье рассматривается двухточечная краевая задача для сингулярно возмущённого обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, у которого вырожденное уравнение имеет разрывное решение, а точка разрыва расположена внутри рассматриваемого интервала.

Цель работы – построение полного асимптотического разложения решения, учитывающего внутренний слой в заданной точке. Для этого используется комбинация обобщенного метода пограничных функций с техникой сращивания асимптотических разложений решений.

Основные результаты состоят в следующем:

- установлены условия существования внутреннего переходного слоя;
- отсутствия пограничных слоёв на граничных точках;
- построены регулярные и сингулярные части асимптотики (внутренняя пограничная функция в окрестности особой точки $x=0$);
- доказана равномерная пригодность полученного асимптотического разложения;
- приведены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода.

Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процессов с резкими внутренними перепадами, а также при разработке численных методов для сингулярно возмущённых задач.

Постановка задачи. Требуется построить полное асимптотическое разложение решения краевой задачи (1)-(2) с любой степенью точности по малому параметру, при стремлении малого параметра к нулю в рассматриваемом отрезке:

$$\varepsilon y''(x) + xy'(x) - xy(x) = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (1)$$

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, x – действительная переменная, $f \in C^\infty[-1, 1]$.

Особенности рассматриваемой задачи:

В уравнении (1) малый параметр ε стоит при старшей (второй) производной искомой функции $y(x)$. Уравнения, обладающие такой особенностью, называют **сингулярно возмущёнными дифференциальными уравнениями типа Тихонова**. Ключевая особенность заключается в том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ порядок уравнения понижается: из уравнения второго порядка мы получаем уравнение первого порядка. Предельное (вырожденное) уравнение, вообще говоря, не в состоянии удовлетворить всем крайевым условиям, которые были заданы для исходной задачи.

Это несоответствие приводит к тому, что решение полной задачи в окрестности границ или внутри области претерпевает резкие изменения, образуя так называемые **пограничные слои**. В зависимости от структуры вырожденного уравнения и вида крайевых условий такие слои могут возникать как у границ интервала, так и в его внутренних точках. В последнем случае говорят о *внутреннем переходном слое* (или *контрастной структуре*).

Для построения асимптотического решения сингулярно возмущённых задач с пограничными слоями традиционно используются методы **пограничных функций** (А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов) и **сращивания асимптотических разложений** (А.М. Ильин, Ван Дайк). В случае, когда точка перехода находится внутри области, требуется дополнительное согласование разложений, построенных слева и справа от неё, что существенно усложняет задачу.

Таким образом, изучение крайевых задач для сингулярно возмущённых уравнений второго порядка с внутренними слоями имеет важное теоретическое и прикладное значение, так как позволяет описывать процессы с резкими внутренними перепадами в физике, химии, биологии и технике.

Методы и методология исследования. При решении задачи (1)-(2) используются методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительными условиями, а также асимптотические методы (метод малого параметра, обобщенный метод пограничных функций, метод сращивания). Основной идеей, т.е. методологией исследования является построение регулярных внешних решений и сращивать их с внутренними решениями [1], [9], [12]-[14], [18].

Решение задачи. В уравнении (1) при $\varepsilon=0$ получаем вырожденное уравнение

$$x\tilde{y}'(x) - x\tilde{y}(x) = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (3)$$

для полученного уравнения точка $x=0$ является особой (сингулярной) точкой, так как не всегда $f_0(0)=0$. Если считать, что $x \neq 0$, то решение уравнения (3) можно представить в виде:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}(x_0)e^{x-x_0} + \int_{x_0}^x \frac{f(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau. \quad (4)$$

Функция $\tilde{y}(x)$ определенная равенством (4) при $x \rightarrow 0$ имеет особенность вида $\tilde{y}(x) = O(\ln |x|)$, т.е. точка $x=0$ является особой точкой для функций $\tilde{y}(x)$.

Поэтому нулевой приближение внешнего решения задачи (1)-(2) можно представить в виде:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} \tilde{y}_0^{(-)}(x), & x \in [-1, 0), \\ \tilde{y}_0^{(+)}(x), & x \in (0, 1], \end{cases}$$

где

$$\tilde{y}_0^{(-)}(x) = \int_{-1}^x \frac{f(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau, \quad \tilde{y}_0^{(+)}(x) = \int_1^x \frac{f(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau.$$

На основе двух отмеченных выше особенностей краевую задачу (1)-(2) можно назвать бисингулярной (двойной особенностью) задачей. Этот термин впервые был введен в науку академиком Арленом Михайловичем Ильиным [4]. Бисингулярные задачи исследуются многими учеными, поскольку они широко применяются в физике, технике и других науках [15]-[17].

Сначала построим внешнее решение. Внешнее решение будем искать в виде следующего ряда:

$$y^{\text{out}}(x) = \begin{cases} u^{(-)}(x), & -1 \leq x < 0, \\ u^{(+)}(x), & 0 < x \leq 1, \end{cases}, \quad (5)$$

где $u^{(-)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(-)}(x)$, $u^{(+)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(+)}(x)$, $u_k^{(\pm)}(x)$ – пока неизвестные функций.

Подставляя ряд (5) в задачу (1)-(2) и применяя метод малого параметра имеем:

$$xu'_0(x) - xu_0(x) = f(x), \quad u_0(-1) = 0, \quad u_0(1) = 0, \quad (6)$$

$$xu'_k(x) - xu_k(x) = -u''_{k-1}(x), \quad u_k(-1) = 0, \quad u_k(1) = 0, \quad k \in N. \quad (7)$$

Используя формулу (4) запишем решения задач (6) и (7) в виде:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0^{(-)}(x), & x \in [-1, 0), \\ u_0^{(+)}(x), & x \in (0, 1], \end{cases} \quad u_k(x) = \begin{cases} u_k^{(-)}(x), & x \in [-1, 0), \\ u_k^{(+)}(x), & x \in (0, 1], \end{cases}$$

где

$$u_0^{(-)}(x) = \int_{-1}^x \frac{f(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau, \quad u_0^{(+)}(x) = \int_1^x \frac{f(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau;$$

$$u_k^{(-)}(x) = -\int_{-1}^x \frac{u_{k-1}^{(-)}(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau, \quad u_k^{(+)}(x) = -\int_1^x \frac{u_{k-1}^{(+)}(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau.$$

В окрестности особой точки $x=0$ выделим особенности рядов $u^{(-)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(-)}(x)$ и

$$u^{(+)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(+)}(x):$$

$$u^{(-)}(x) = a_0(x) + \alpha_0 \ln|x| + \frac{\varepsilon}{x^2} (a_1(x) + \alpha_1 x^2 \ln|x|) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{x^{2n}} (a_n(x) + \alpha_n x^{2n} \ln|x|) + \dots,$$

$$u^{(+)}(x) = b_0(x) + \beta_0 \ln|x| + \frac{\varepsilon}{x^2} (b_1(x) + \beta_1 x^2 \ln|x|) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{x^{2n}} (b_n(x) + \beta_n x^{2n} \ln|x|) + \dots,$$

где $a_k, b_k \in C^\infty[-1,1]$, $b_k(1)=0$, $a_k(-1)=0$, $k \in N_0 = \{0,1,2,\dots\}$, $\alpha_k, \beta_k = \text{const}$.

Из последних построенных рядов $u^{(+)}(x)$ и $u^{(-)}(x)$ следует, что для построения внутреннего решения необходимо использовать преобразование $x = \mu t$, где t – новая переменная, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$.

Таким образом, внешнее решение теряет свой асимптотический характер в особой точке $x=0$ и в её окрестности, и не может являться решением краевой задачи (1)–(2).

Решение задачи (1)–(2) включающую особую точку будем искать в виде:

$$y(x, \varepsilon) = v(x, \varepsilon) + w(t, \mu), \quad (8)$$

где $v(x, \varepsilon)$ – регулярное внешнее решение, не имеет никаких особенностей, $w(t, \mu)$ – внутреннее решение в окрестности особой точки $x=0$.

Подставляя соотношение (8) в задачу (1)–(2) имеем:

$$\varepsilon v''(x) + x v'(x) - x v(x) = f(x) - h(\varepsilon), \quad x \in (-1,1), \quad (9)$$

$$v(-1) = 0, \quad v(1) = 0, \quad (10)$$

$$w''(t) + t w'(t) - t \mu w(t) = h(\mu^2), \quad t \in (-1/\mu, 1/\mu), \quad (11)$$

$$w(-1/\mu) = 0, \quad w(1/\mu) = 0. \quad (12)$$

Начнем с задачи (9)–(10). Решение этой задачи будем искать в виде:

$$v(x) = \begin{cases} v^{(-)}(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ v^{(+)}(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}, \quad (13)$$

$$\text{где } v^{(-)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^{(-)}(x), \quad v^{(+)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^{(+)}(x).$$

Подставляя соотношение (13) в задачу (9)–(10) имеем простую систему рекуррентных соотношений:

$$x v_0'(x) - x v_0(x) = f(x) - h_0, \quad v_0(-1) = 0, \quad v_0(1) = 0, \quad (14)$$

$$x v_k'(x) - x v_k(x) = -h_k - v_{k-1}''(x), \quad v_k(-1) = 0, \quad v_k(1) = 0, \quad k \in N. \quad (15)$$

Применяя формулу (4) к (14) и (15) получаем:

$$v_0(x) = \begin{cases} v_0^{(-)}(x), & x \in [-1,0], \\ v_0^{(+)}(x), & x \in [0,1], \end{cases} \quad v_k(x) = \begin{cases} v_k^{(-)}(x), & x \in [-1,0], \\ v_k^{(+)}(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

где

$$v_0^{(-)}(x) = \int_{-1}^x \frac{f(\tau) - h_0^{(-)}}{\tau} e^{x-\tau} d\tau, \quad v_0^{(+)}(x) = \int_1^x \frac{f(\tau) - h_0^{(+)}}{\tau} e^{x-\tau} d\tau;$$

$$v_k^{(-)}(x) = - \int_{-1}^x \frac{h_k^{(-)} + v_{k-1}^{(-)}(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau, \quad v_k^{(+)}(x) = - \int_1^x \frac{h_k^{(+)} + v_{k-1}^{(+)}(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau.$$

Пусть

$$h_0^{(-)} = h_0^{(+)} = f(0), \quad h_k^{(-)} = -v_{k-1}^{(-)}(0), \quad h_k^{(+)} = -v_{k-1}^{(+)}(0), \quad k \in N$$

тогда $v_k^{(-)} \in C[-1, 0]$, $v_k^{(+)} \in C[0, 1]$, $v_k^{(-)} \in C^\infty(-1, 0)$, $v_k^{(+)} \in C^\infty(0, 1)$.

Таким образом определены все члены неизвестных рядов $h^{(-)}(\varepsilon)$, $h^{(+)}(\varepsilon)$:

$$h^{(-)}(\varepsilon) = f - \varepsilon v_0^{(-)}(0) - \dots - \varepsilon^n v_{n-1}^{(-)}(0) - \dots;$$

$$h^{(+)}(\varepsilon) = f - \varepsilon v_0^{(+)}(0) - \dots - \varepsilon^n v_{n-1}^{(+)}(0) - \dots$$

Переходим к основной части нашего научного результат, т.е. к решению задачи (11)-(12). Решение этой задачи будем искать в виде:

$$w(t, \mu) = \begin{cases} w^{(-)}(t, \mu), & -1/\mu \leq t \leq 0, \\ w^{(+)}(t, \mu), & 0 \leq t \leq 1/\mu, \end{cases}, \quad (16)$$

где $w^{(-)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k^{(-)}(t)$, $w^{(+)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k^{(+)}(t)$.

Подставляя ряд (16) в соотношения (14)-(15) имеем:

$$\begin{aligned} w_0^{(-)}(t) + t w_0^{(-)}(t) &= h_0^{(-)}, \quad -1/\mu < t < 0, \quad w_0^{(-)}(-1/\mu) = 0; \\ w_0^{(+)}(t) + t w_0^{(+)}(t) &= h_0^{(+)}, \quad 0 < t < 1/\mu, \quad w_0^{(+)}(1/\mu) = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} w_{2k-1}^{(-)}(t) + t w_{2k-1}^{(-)}(t) &= t w_{2k-2}^{(-)}(t), \quad -1/\mu < t < 0, \quad w_{2k-1}^{(-)}(-1/\mu) = 0; \\ w_{2k-1}^{(+)}(t) + t w_{2k-1}^{(+)}(t) &= t w_{2k-2}^{(+)}(t), \quad 0 < t < 1/\mu, \quad w_{2k-1}^{(+)}(1/\mu) = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} w_{2k}^{(-)}(t) + t w_{2k}^{(-)}(t) &= h_k^{(-)} + t w_{2k-1}^{(-)}(t), \quad -1/\mu < t < 0, \quad w_{2k}^{(-)}(-1/\mu) = 0; \\ w_{2k}^{(+)}(t) + t w_{2k}^{(+)}(t) &= h_k^{(+)} + t w_{2k-1}^{(+)}(t), \quad 0 < t < 1/\mu, \quad w_{2k}^{(+)}(1/\mu) = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

Для функций $w_k^{(-)}(t)$ и $w_k^{(+)}(t)$ потребуем дополнительные условия (условия сращивания):

$$\begin{aligned} v_k^{(-)}(0) + w_{2k}^{(-)}(0) &= v_k^{(+)}(0) + w_{2k}^{(+)}(0), & w_{2k+1}^{(-)}(0) &= w_{2k+1}^{(+)}(0), \quad k = 0, 1, \dots; \\ v_k^{(-)}(0) + w_{2k}^{(-)}(0) &= v_k^{(+)}(0) + w_{2k}^{(+)}(0), & w_{2k+1}^{(-)}(0) &= w_{2k+1}^{(+)}(0), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Условие (20) обеспечивает непрерывность решения (8) в точке $x=0$ и в ее окрестности.

Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма. Решение задачи (21) существует, единственно:

$$\begin{aligned} \xi^{(-)}(t) + t \xi^{(-)}(t) &= G^{(-)}(t), \quad t \in (-\mu^{-1}, 0), \\ \xi^{(+)}(t) + t \xi^{(+)}(t) &= G^{(+)}(t), \quad t \in (0, \mu^{-1}), \\ \xi^{(-)}(0) + k_1 \xi^{(+)}(0) &= \alpha, \quad \xi^{(-)}(0) + k_2 \xi^{(+)}(0) = \beta, \\ \xi^{(-)}(-\mu^{-1}) &= 0, \quad \xi^{(+)}(\mu^{-1}) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

и представимо в виде:

$$\xi^{(-)} = \frac{1}{2} \gamma(B_1^{(+)} - B_1^{(-)}) \int_{-1/\mu}^t e^{-\tau^2/2} d\tau + \int_{-1/\mu}^t e^{-\tau^2/2} \int_0^\tau e^{s^2/2} G^{(-)}(s) ds d\tau,$$

$$\xi^{(+)} = \frac{1}{2} \gamma(B_1^{(+)} - B_1^{(-)}) \int_{1/\mu}^t e^{-\tau^2/2} d\tau + \int_{1/\mu}^t e^{-\tau^2/2} \int_0^\tau e^{s^2/2} G^{(+)}(s) ds d\tau,$$

где

$$\gamma = \left(\int_{-1/\mu}^t e^{-\tau^2/2} d\tau \right)^{-1}, B_1^{(-)} = \int_{-1/\mu}^0 e^{-\tau^2/2} \int_0^\tau e^{s^2/2} s w_0^{(-)}(s) ds d\tau, \quad B_1^{(+)} = \int_{1/\mu}^0 e^{-\tau^2/2} \int_0^\tau e^{s^2/2} s w_0^{(+)}(s) ds d\tau.$$

На основании этой леммы мы можем утверждать, что решение задач (17)-(20) существуют и единственны.

Таким образом, нами доказана теорема

Теорема. Для решения задачи (1)-(2) при $\forall x \in [-1, 1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=0}^{2n+1} \mu^k w_k(t) + O(\varepsilon^{n+1/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Обсуждение. Проведённое исследование демонстрирует, что двухточечная краевая задача для линейного сингулярно возмущённого уравнения второго порядка с коэффициентом, обращающимся в ноль внутри интервала, обладает рядом нетривиальных особенностей. Классические сингулярно возмущённые задачи обычно характеризуются появлением пограничных слоёв вблизи границ области. Однако в рассмотренном примере $\varepsilon y'' + \chi y' - \chi y = f(x)$ с краевыми условиями $y(-1)=0, y(1)=0$ пограничные слои на концах отрезка отсутствуют, а основной вклад в формирование переходной структуры вносит внутренняя особая точка $x=0$. Это принципиально отличает данную задачу от широко известных моделей, где контрастные структуры возникают лишь в нелинейных уравнениях. Здесь же, несмотря на линейность, наличие нулевого коэффициента при производной в вырожденном уравнении приводит к логарифмической особенности внешнего решения и необходимости построения внутреннего слоя.

Применённый подход, сочетающий обобщённый метод пограничных функций и технику сращивания асимптотических разложений, позволил не только построить формальные асимптотические ряды, но и обосновать их равномерную пригодность. Ключевым моментом стало введение новой переменной $t = x/\mu$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, которая «растягивает» окрестность особой точки и позволяет описать внутреннее решение через функцию, зависящую от быстрой переменной. Интересно, что в отличие от многих сингулярно возмущённых задач, здесь масштаб внутреннего слоя определяется $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, а не ε , что указывает на более сложный характер переходной области.

С вычислительной точки зрения полученные асимптотические формулы могут служить основой для создания эффективных численных алгоритмов, поскольку они дают хорошее начальное приближение даже при умеренно малых ε . Точность асимптотики проверялась в системе Maple на конкретном примере; такая верификация подтверждает практическую ценность метода. Вместе с тем, остаются открытыми вопросы о влиянии более сложных правых частей, о возможности распространения подхода на нелинейные аналоги, а также о строгом обосновании сходимости асимптотических рядов при $\varepsilon \rightarrow 0$ в классе гладких функций.

Следует отметить, что предложенная методика не требует предварительного знания структуры пограничных слоёв — она сама выявляет их из анализа поведения внешнего решения. Это делает её удобной для автоматизации при построении асимптотик в символьных математических пакетах. В целом, полученные результаты расширяют класс задач, для которых может быть эффективно применён метод сращивания, и демонстрируют, что даже в линейных постановках возможны нетривиальные внутренние переходные слои, если вырожденное уравнение имеет особую точку.

Заключение. В данной статье рассмотрена двухточечная краевая задача для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Показано, что наличие у коэффициента при первой производной нуля внутри интервала приводит к тому, что вырожденное уравнение имеет особую точку, а решение полной задачи формирует внутренний переходный слой в окрестности этой точки, тогда как классические пограничные слои на границах области не возникают. Такая комбинация сингулярного возмущения и внутренней особенности позволила отнести задачу к классу бисингулярных.

Основным результатом работы является построение полного равномерного асимптотического разложения решения с любой степенью точности по малому параметру. Для этого использована комбинация обобщённого метода пограничных функций и метода сращивания асимптотических разложений. В отличие от стандартных подходов, здесь внешнее решение строится раздельно на левом и правом полуинтервалах, а затем сшивается через внутреннее решение, которое описывает поведение в окрестности особой точки. Масштабирующая замена $t = x / \mu$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ позволила получить уравнения для внутренних пограничных функций, решаемые в явном виде. Доказана лемма о существовании и единственности решения вспомогательной задачи для внутреннего слоя, а на её основе сформулирована и доказана теорема о равномерной пригодности асимптотического разложения.

Полученные асимптотические формулы могут быть использованы при моделировании физических процессов, в которых возникает резкое изменение решения внутри области при малом параметре — например, в задачах теплопроводности с переменными коэффициентами, в теории пограничного слоя при наличии внутренней особой линии, а также в экономических и биологических моделях с пороговыми эффектами. Кроме того, результаты могут служить эталоном для тестирования численных методов, предназначенных для решения сингулярно возмущённых задач.

Практическая значимость работы подтверждается сравнением асимптотических приближений с численными расчётами, выполненными в системе Maple, которое показало высокую точность уже при малых порядках асимптотики. В дальнейшем планируется распространить предложенную методику на нелинейные уравнения, а также на задачи с несколькими внутренними особыми точками и на системы уравнений. Отдельным направлением является строгое обоснование асимптотических разложений в смысле сходимости рядов и получение оценок остаточных членов в пространствах более высоких норм.

Литература

1. Алымкулов К., Турсунов Д.А. (2016). Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущённых задач. *Известия вузов. Математика*, 12, 3–11.

2. Васильева, А. Б., Бутузов, В. Ф. (1973) Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. *Москва: Наука*. – 272 с.
3. Вишик, М. И., Люстерник, Л. А. (1957) Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *Успехи математических наук*, 12(4), 3–122.
4. Ильин, А. М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. *Москва: Наука*, 1989. – 334 с.
5. Коул, Дж. (1972) *Методы возмущений в механике жидкости*. Москва: Мир. – 276 с.
6. Ломов, С. А., Ломов, И. С. (2011) *Основы математической теории пограничного слоя*. Москва: Изд-во МГУ. – 456 с.
7. Ломов, С. А. (1981) *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*. Москва: Наука. – 400 с.
8. Найфе, А. (1984) *Введение в методы возмущений*. Москва: Мир. – 535 с.
9. Омаралиева, Г. А., Турсунов, Д. А. (2022) Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка. *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 28(2), 193–200.
10. Тихонов, А. Н. О (1948) зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. *Математический сборник*, 22 (64), 193–204.
11. Тихонов, А. Н. (1952) Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. *Математический сборник*, 31 (73)(3), 575–586.
12. Турсунов, Д. А. (2018) Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. *Известия вузов. Математика*, (3), 70–78.
13. Турсунов, Д. А. (2018) Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений». Вестник Томского государственного университета. *Математика и механика*, (54), 46–57.
14. Alymkulov, K., & Tursunov, D. A. (2017). Perturbed differential equations with singular points. In D. I. Uzunov (Ed.), *Recent studies in perturbation theory* (pp. 1–43). InTech.
15. Antony Prince, P., Govindarao, L., & Elango, S. (2025). Non-standard finite difference scheme for system of singularly perturbed Fredholm integro-differential equations. *Journal of Mathematical Modeling*, 13(4), 823–840.
16. Feng, T., & Ni, M. (2024). Asymptotic solution for a system of singularly perturbed delay differential equations. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 16(1), 458–478.
17. Kumar, D., & Gowrisankar, S. (2025). Parameter uniform numerical scheme for singularly perturbed Fredholm integro-differential equation with an interior layer. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 71(Suppl 2), 1641–1663.
18. Tursunov, D. A., Sulaimanov, Z. M., & Khalmatov, A. A. (2021) Singularly perturbed ordinary differential equation with turning point and interior layer. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(12), 3016–3021.

УДК 517.924.4

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1\(8\)_25](https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1(8)_25)

PERIODIC SOLUTIONS FOR A SYSTEM OF FUNCTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PRODUCT OF TWO NONLINEAR FUNCTIONS AND WITH A FUNCTION INVOLVING VARIABLE DEVIATIONS UNDER THE MAXIMUM

Yuldashev Tursun Kamaldinovich

*DSc., professor, Chief Scientific Researcher,
Tashkent State Transport University, Temiryolchilar Street, 1, 100167, Tashkent, Uzbekistan;
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of Ozbekistan Academy of Science, Tashkent,
Uzbekistan;*

E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-9346-5362>

Artykova Zhyldyz Abdisalamovna

*Cand. of Sci. (Phys. and Math.), associate professor
Osh State University, 331, Lenin street, Osh, Kyrgyzstan*

E-mail: jartykova@oshsu.kg

<https://orcid.org/0009-0005-6513-9366>

Fayziyev Aziz Kudratillayevich

*Doctoral Student,
Tashkent State Transport University, Temiryolchilar street, 1, Tashkent, Uzbekistan*

E-mail: fayziyev.a@inbox.ru,

<https://orcid.org/0000-0001-6798-3265>

Abstract. This paper investigates periodic solutions of a nonlinear system of fractional functional integro-differential equations involving the Gerasimov--Caputo fractional operator, a product of two nonlinear functions, and maxima-type nonlinearities with variable deviations. The considered model combines hereditary effects, nonlocal interactions, and extremal functional dependencies, which substantially complicate the qualitative analysis of the system. The original periodic boundary-value problem is transformed into an equivalent system of nonlinear functional-integral equations. Explicit estimates for the associated nonlinear operators are obtained, and a constructive iterative procedure based on the method of successive approximations is developed. Sufficient conditions guaranteeing existence and uniqueness of periodic solutions are established by combining the contraction mapping principle with detailed operator estimates in an appropriate Banach space. Furthermore, the periodic solvability problem is reduced to the investigation of zeros of an associated nonlinear vector field. Using homotopy arguments and topological index techniques, sufficient conditions for the existence of periodic solutions are derived. The obtained results provide a constructive framework for the analysis of nonlinear fractional systems with memory, delays, maxima, and nonlocal interactions.

Key words: Periodic solutions, system of functional integro-differential equations, product of two nonlinear functions, function involving variable deviations under the maximum.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ ПОД МАКСИМУМАМИ

Турсун К. Юлдашев

доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, Ташкентский государственный транспортный университет, ул. Темиръульчилар, 1, 100167, Ташкент, Узбекистан; Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Узбекистана, Ташкент, Узбекистан; E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9346-5362>

Жылдыз А. Артыкова

кандидат физ.-мат. наук, доцент Ошский государственный университет, улица Ленина, 331, Ош, Кыргызстан, Электронная почта: jartykova@oshsu.kg, <https://orcid.org/0009-0005-6513-9366>

Файзиев Азиз К.

докторант, Ташкентский государственный транспортный университет, улица Темиръульчилар, 1, Ташкент, Узбекистан, Электронная почта: fayziev.a@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6798-3265>

Аннотация. В данной работе исследуются периодические решения нелинейной системы дробных функциональных интегро-дифференциальных уравнений, включающей дробный оператор Герасимова—Капуто, произведение двух нелинейных функций и нелинейности типа максимумов с переменными отклонениями. Рассматриваемая модель сочетает в себе наследственные эффекты, нелокальные взаимодействия и экстремальные функциональные зависимости, что существенно усложняет качественный анализ системы. Исходная периодическая краевая задача преобразуется в эквивалентную систему нелинейных функционально-интегральных уравнений. Получены явные оценки для соответствующих нелинейных операторов и разработана конструктивная итерационная процедура, основанная на методе последовательных приближений. Достаточные условия, гарантирующие существование и единственность периодических решений, установлены путем объединения принципа сжимающих отображений с подробными оценками операторов в соответствующем банаховом пространстве. Кроме того, периодическая задача разрешимости сводится к исследованию нулей соответствующего нелинейного векторного поля. С помощью гомотопических аргументов и топологических индексных методов выведены достаточные условия существования периодических решений. Полученные результаты обеспечивают конструктивную основу для анализа нелинейных дробных систем с памятью, задержками, максимумами и нелокальными взаимодействиями.

Ключевые слова: Периодические решения, система функциональных интегро-дифференциальных уравнений, произведение двух нелинейных функций, функция, содержащая переменные отклонения под максимумом.

Introduction

Differential and integro-differential equations have become one of the principal mathematical tools for describing dynamical systems with memory, hereditary properties, anomalous transport phenomena, and nonlocal interactions. During the last decades, such equations have found numerous applications in viscoelasticity, control theory, continuum mechanics, biology, signal processing, heat transfer, and many other branches of modern science and engineering. In addition, in the theory of differential equations, one of the main directions is functional-differential equations (Artykova et al., 2026; Gladilina and Ignatyev, 2004; Mamanov and et al., 2026).

A particularly important role in the qualitative theory of dynamical systems is played by periodic solutions. Periodic regimes describe recurrent processes, oscillatory behavior, and stable long-term patterns that arise naturally in both natural and engineered systems. Consequently, the study of periodic solutions remains one of the central directions in the theory of differential and integro-differential equations, see, for example: (Bai and Yang, 2007; Chen and et al., 2007; Hu and Han, 2009; Li and et al., 2015; Ma and et al., 2012).

In the theory of fractional order differential equations, the main place is given not only to theoretical development, but also to practical application in various fields of science and practice,

see, for example: (Area and et al., 2015; Delbosco and Rodino, 1996; Handbook of Fractional Calculus with Applications 2019; Hilfer, 2000; Hussain and et al., 2020; Kaufmann and Mboumi, 2007; Kilbas and et al., 2006; Kosmakova and et al., 2026; Samko and et al., 1993; Sun and et al., 2019). At the same time, many practical models involve not only memory effects represented by fractional operators but also functional dependencies containing maxima of the unknown function over variable intervals. Such maxima-type nonlinearities appear in control systems with threshold mechanisms, biological models with delayed responses, optimization problems, and engineering systems with extremal feedback. The simultaneous presence of fractional memory effects and maxima considerably increases the analytical complexity of the problem.

An additional difficulty arises when nonlinear integral interactions are represented by products of nonlinear functions. In this case, the resulting equations combine several distinct sources of nonlinearity: fractional memory, integral dependence, variable deviations, and extremal operators. The interaction of these mechanisms leads to mathematical models whose qualitative properties remain insufficiently understood.

Motivated by these considerations, the present paper studies a periodic boundary-value problem for a nonlinear system of fractional functional integro-differential equations involving the Gerasimov-Caputo operator, maxima-type nonlinearities, and a product of two nonlinear functions. The considered model includes various types of deviating arguments and therefore unifies several important classes of functional differential equations. Related problems of finding periodic solutions to integer-order nonlinear functional differential equations are considered in (Yuldashev, 2022a; Yuldashev, 2022b; Yuldashev and Abduvahobov, 2023; Yuldashev and Sulaimonov, 2022).

The main idea of the paper consists in reducing the original periodic boundary-value problem to an equivalent system of nonlinear functional-integral equations. This reduction makes it possible to construct a convergent iterative process and to apply fixed-point techniques. Existence and uniqueness of periodic solutions are established by means of the contraction mapping principle. Furthermore, the periodic solvability problem is connected with the investigation of zeros of an associated nonlinear vector field. By combining homotopy arguments with topological index methods, additional sufficient conditions for the existence of periodic solutions are obtained.

The developed approach provides a constructive analytical framework for studying nonlinear periodic processes in fractional systems with memory, maxima, and nonlocal interactions.

1. Problem statement

In this paper on the interval $[0, T]$ we consider the questions of existence and constructive methods of calculating of the periodic solutions of the system of nonlinear ordinary first order integro-differential equations with maxima

$${}_C D_{0t}^\alpha x(t) = q(t, x(t)) + \int_0^t g(s, x(s)) f \left(s, x(s), \int_{-\infty}^s K(s, \theta, \max \{x(\tau) | \tau \in P(\theta)\}) d\theta \right) ds, \quad (1)$$

where

$${}_C D_{0t}^\alpha x(t) = I_{0t}^{1-\alpha} x'(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x'(s) ds}{(t-s)^\alpha}, \quad t \in (0, T)$$

is the Gerasimov-Caputo fractional differential operator,

$$I_{0t}^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

is Riemann-Liouville integral operator, α is order of fractional differential operator, $\Gamma(\alpha)$ is Gamma function.

$x \in X$, X is the closed bounded domain in the space R^n , ∂X is its border, $g \in C([0, T] \times X, R^n)$
 $f \in C([0, T] \times X \times R^n, R^n)$, functions q, g, f are T -periodic,
 $P(t) \equiv [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]$, $\lambda_i(t) \in C[0, T]$, $i = 1, 2$.

According to the deviation functions are possible following cases:

- 1). $-\infty < \lambda_1(t) < \lambda_2(t) \leq 0$ (initial argument case);
- 2). $-\infty < \lambda_1(t) < \lambda_2(t) \leq t$ (initial-delay argument case);
- 3). $-\infty < \lambda_1(t) < 0$, $0 < \lambda_2(t) \leq t$ (initial-delay argument case);
- 4). $-\infty < \lambda_1(t) \leq t < \lambda_2(t) \leq T$ (initial-delay-advancing argument case);
- 5). $-\infty < \lambda_1(t) \leq t < \lambda_2(t) < \infty$ (initial-delay-advancing-final argument case);
- 6). $0 \leq \lambda_1(t) < \lambda_2(t) \leq t$ (delay argument case);
- 7). $0 < \lambda_1(t) \leq t < \lambda_2(t) \leq T$ (delay-advancing argument case);
- 8). $t \leq \lambda_1(t) < \lambda_2(t) \leq T$ (advancing argument case);
- 9). $0 < \lambda_1(t) \leq T < \lambda_2(t) < \infty$ (advancing-final argument case);
- 10). $-\infty < \lambda_1(t) \leq T < \lambda_2(t) < \infty$ (initial-advancing-final argument case);
- 11). $t \leq \lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \infty$ (advancing-final argument case).

We consider the case 5. Other cases will be study similarly. The choice of the initial conditions for equation (1) depends from the nature of the deviations. In the case of 5 we will study the equation (1) with the following conditions

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_1(t), & t \in (-\infty, 0], \\ x(t) = \varphi_2(t), & t \in [T, \infty), \\ x(0) = x(T), \end{cases} \quad (2)$$

where $\varphi_1(t) \in C((-\infty, 0], R^n)$, $\varphi_2(t) \in C([T, \infty), R^n)$, $\int_{-\infty}^t |K(t, s, x)| ds < \infty$.

By $C([0, T], R^n)$ denoted the Banach space, which consists of continuous vector functions $x(t)$, defined on the segment $[0, T]$, with values in R^n and with the norm

$$\|x\|_{C[0, T]} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \max_{0 \leq t \leq T} |x_j(t)|^2}.$$

By the $BD([0, T], R^n)$ we denote the Banach space of continuous functions on the interval $[0, T]$ with the norm

$$\|x(t)\|_{BD[0, T]} = \|x(t)\|_{C[0, T]} + h \cdot \|x'(t)\|_{C[0, T]}, \quad 0 < h = \text{const.}$$

Formulation of problem. To find the T -periodic function $x(t) \in BD([0, T], R^n)$, which for all $t \in [0, T]$ satisfies the system of integro-differential equations (1) and the periodic condition in (2) and goes through x_0 at $t = 0$.

2. Reduction to functional-integral equation

Let the function $x(t) \in BD([0, T], R^n)$ is a solution of the periodic boundary value problem (1), (2). Using the definition of the operator, we integrate of the equation (1) on the given interval $(0, t)$

$$I_{0t}^\alpha D_{0t}^\alpha (x(t)) = I_{0t}^\alpha I_{0t}^{1-\alpha} x'(t) = I_{0t}^1 x'(t) = \int_0^t x'(s) ds = x(t) - x(0), \quad (3)$$

$$I_{0t}^\alpha \eta(t, x(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \eta(s, x(s)) ds. \quad (4)$$

Applying the formulas (3) and (4) to the last fractional integro-differential equation, we obtain

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[q(s, x) + \int_0^s g(\theta, x) f(\theta, x, y) d\theta \right] ds, \quad (5)$$

where

$$g(t, x) = g(t, x(t)), \quad q(t, x) = q(t, x(t)), \quad f(t, x, y) = f \left(t, x(t), \int_{-\infty}^t K(t, s, \max \{x(\tau) | \tau \in P(s)\}) ds \right).$$

The quantity $x(0)$ in the equation (5) is unknown. To find it we use the periodic condition (2). So, from (5) we have

$$x(T) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left[q(s, x) + \int_0^s g(\theta, x) f(\theta, x, y) d\theta \right] ds.$$

Hence, taking the condition (2) into account, we obtain:

$$\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left[q(s, x) + \int_0^s g(\theta, x) f(\theta, x, y) d\theta \right] ds = 0.$$

Consequently, the differential equation (1) one can write as

$$\begin{aligned} {}_C D_{0t}^\alpha x(t) = & q(t, x(t)) + \\ & + \int_0^t g(s, x(s)) f \left(s, x(s), \int_{-\infty}^s K(s, \theta, \max \{x(\tau) | \tau \in P(\theta)\}) d\theta \right) ds - \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} q(s, x(s)) ds - \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \int_0^s g(\theta, x(\theta)) f \left(\theta, x(\theta), \int_{-\infty}^\theta K(\theta, \varsigma, \max \{x(\tau) | \tau \in P(\varsigma)\}) d\varsigma \right) d\theta ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Then by integration of the equation (6), we obtain the following system of equations:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [q(s, x(s)) + \\
 & + \int_0^s g(\theta, x(\theta)) f \left(\theta, x(\theta), \int_{-\infty}^{\theta} K(\theta, \varsigma, \max \{x(\tau) | \tau \in P(\varsigma)\}) d\varsigma \right) d\theta - \\
 & - \frac{1}{T} \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} q(\theta, x(\theta)) d\theta - \frac{1}{T} \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} \int_0^{\theta} g(\varsigma, x(\varsigma)) \times \\
 & \times f \left(\varsigma, x(\varsigma), \int_{-\infty}^{\varsigma} K(\varsigma, \xi, \max \{x(\tau) | \tau \in P(\xi)\}) d\xi \right) d\varsigma d\theta \Big] ds. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Lemma 1. For the equation (7) is true the following estimate

$$\|x(t) - x_0\|_{C[0,T]} \leq T^\alpha \frac{T + (1+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)\Gamma(\alpha)} (M_q + TM_g M_f), \quad (8)$$

where

$$M_q = \|q(t, x(t))\|_{C[0,T]}, \quad M_g = \|g(t, x(t))\|_{C[0,T]}, \quad M_f = \|f(t, x(t), y(t))\|_{C[0,T]}.$$

Proof. We rewrite the equation (7) as

$$\begin{aligned}
 x(t) - x_0 = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q(s, x(s)) ds + \\
 & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s g(\theta, x(\theta)) f \left(\theta, x(\theta), \int_{-\infty}^{\theta} K(\theta, \varsigma, \max \{x(\tau) | \tau \in P(\varsigma)\}) d\varsigma \right) d\theta ds - \\
 & - \frac{1}{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} q(\theta, x(\theta)) d\theta - \frac{1}{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} \times \\
 & \times \int_0^{\theta} g(\varsigma, x(\varsigma)) f \left(\varsigma, x(\varsigma), \int_{-\infty}^{\varsigma} K(\varsigma, \xi, \max \{x(\tau) | \tau \in P(\xi)\}) d\xi \right) d\varsigma d\theta.
 \end{aligned}$$

Hence, implies that there is true the following estimate

$$\|x(t) - x_0\|_{C[0,T]} \leq \alpha(t) [\|q(t, x(t))\| + T \|g(t, x(t))\| \|f(t, x(t), y(t))\|], \quad (9)$$

where

$$\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (1+s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{T} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} (1+\theta) d\theta.$$

We calculate the integrals:

$$A_1 = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s ds = \left| \begin{array}{l} s = tz \\ s = 0 \Rightarrow z = 0 \\ s = t \Rightarrow z = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-z)^{\alpha-1} t z dz = t^{\alpha+1} B(2, \alpha),$$

$$A_2 = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \left| \begin{array}{l} t-s=z \Rightarrow ds=-dz \\ s=0 \Rightarrow z=t \\ s=t \Rightarrow z=0 \end{array} \right| = -\int_t^0 z^{\alpha-1} dz = \frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

Similarly, we obtain that

$$A_3 = \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} s ds = T^{\alpha+1} B(2, \alpha), \quad A_4 = \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds = \frac{T^\alpha}{\alpha},$$

$$A_5 = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} (1+\theta) d\theta ds = A_2(A_3 + A_4) = \frac{(tT)^\alpha}{\alpha} \left(T \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Then we have the following estimate

$$\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [A_1 + A_2] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{T} A_5 = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left[t \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right] -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^\alpha T^{\alpha-1}}{\alpha} \left(T \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right) \leq T^\alpha \frac{T + (1+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)\Gamma(\alpha)}.$$

It is easy to check that from (9) follows (8). Lemma 1 is proved.

Remark. T -periodic solution $x_{\varphi_1(t)} = \psi(t)$ of the system (1) with initial value function $\varphi_1(t)$ on the initial set $(-\infty, 0]$ is defined by the initial value function $\varphi_1(t)$, which is periodical continuation of the solution $\psi(t)$ into initial set $(-\infty, 0]$. T -periodic solution $x_{\varphi_2(t)} = \psi(t)$ of the system (1) with final value function $\varphi_2(t)$ on the final set $[T, \infty)$ is defined by the final value function $\varphi_2(t)$, which is periodical continuation of the solution $\psi(t)$ into final set $[T, \infty)$.

Lemma 2. For the difference of two functions with maxima there holds the following estimate

$$\left\| \max \{x(\tau) | \tau \in P(t)\} - \max \{y(\tau) | \tau \in P(t)\} \right\|_{C[0, T]} \leq$$

$$\leq \|x(t) - y(t)\|_{C[0, T]} + h \left\| \frac{\partial}{\partial t} [x(t) - y(t)] \right\|_{C[0, T]},$$

where $P(t) \equiv [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]$,

$$h = \max \left\{ \sup_{-\infty < t \leq T} |\lambda_1(t)| + \sup_{0 \leq t < \infty} |\lambda_2(t)|; \sup_{-\infty < t \leq 0} |\varphi_1(t)| + \sup_{T \leq t < \infty} |\varphi_2(t)| \right\}.$$

3. Main results

Theorem 1. Assume that for all $t \in [0, T]$ are fulfilled the following conditions:

1. $\|q(t, x(t))\| \leq M_q < \infty$, $\|g(t, x(t))\| \leq M_g < \infty$, $\|f(t, x(t), y(t))\| \leq M_f < \infty$;
2. $\|q(t, x_1) - q(t, x_2)\| \leq L_1 \|x_1 - x_2\|$;
3. $\|g(t, x_1) - g(t, x_2)\| \leq L_2 \|x_1 - x_2\|$;
4. $\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leq L_3 [\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|]$;
5. $\|K(t, s, x_1) - K(t, s, x_2)\| \leq L_4(s) \|x_1 - x_2\|$, $0 < \sup_{t \rightarrow \infty} \int_t^T L_4(s) ds < \infty$;

6. The radius of the inscribed ball in X is greater than $T^\alpha \frac{T+(1+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)\Gamma(\alpha)} (M_q + TM_g M_f)$;

7. $\rho = \chi_0 \chi_1 < 1$, where $\chi_0 = \max\{L_1 + T(M_g L_3 + M_f L_2); M_0 M_g L_3\}$,

$$\chi_1 = \max\left\{T^\alpha \frac{T+(1+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)\Gamma(\alpha)}; \alpha'_0\right\}, \quad M_0 = \sup_t \int_{-\infty}^t L_4(s) ds < \infty.$$

If the system (1) has a solution for all $t \in [0, T]$, then this solution can be founded by the system of nonlinear functional-integral equations

$$\begin{aligned} x(t, x_0) = J(t; x) \equiv & x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q(s, x(s, x_0)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s g(\theta, x(\theta, x_0)) \times \\ & \times f\left(\theta, x(\theta, x_0), \int_{-\infty}^{\theta} K(\theta, \varsigma, \max\{x(\tau, x_0) | \tau \in P(\varsigma)\}) d\varsigma\right) d\theta ds - \\ & - \frac{1}{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} q(\theta, x(\theta, x_0)) d\theta - \frac{1}{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} \times \\ & \times \int_0^{\theta} g(\varsigma, x(\varsigma, x_0)) f\left(\varsigma, x(\varsigma, x_0), \int_{-\infty}^{\varsigma} K(\varsigma, \xi, \max\{x(\tau, x_0) | \tau \in P(\xi)\}) d\xi\right) d\varsigma d\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Proof. The theorem we proof by the method of successive approximations, defining iteration process as

$$x_0(t, x_0) = x_0, \quad x_{m+1}(t, x_0) = J(t; x_m), \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

We will show that the right-hand side of the system of equations (10) as an operator maps a ball with radius $T^\alpha \frac{T+(1+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)\Gamma(\alpha)} (M_q + TM_g M_f)$ into itself and is a contraction operator. So, according to the lemma 1, from (11) we have

$$\|x_{m+1}(t, x_0) - x_0\|_{C[0, T]} \leq T^\alpha \frac{T+(1+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)\Gamma(\alpha)} (M_q + TM_g M_f). \quad (12)$$

By integration of the system of integral equations (10) we obtain

$$\begin{aligned} x'_{m+1}(t, x_0) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} q(s, x_m(s, x_0)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} \int_0^s g(\theta, x_m(\theta, x_0)) \times \\ & \times f\left(\theta, x_m(\theta, x_0), \int_{-\infty}^{\theta} K(\theta, \varsigma, \max\{x_m(\tau, x_0) | \tau \in P(\varsigma)\}) d\varsigma\right) d\theta ds - \\ & - \frac{1}{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} q(\theta, x_m(\theta, x_0)) d\theta - \\ & - \frac{1}{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} \int_0^{\theta} g(\varsigma, x_m(\varsigma, x_0)) \times \end{aligned}$$

$$\times f\left(\varsigma, x_m(\varsigma, x_0), \int_{-\infty}^{\xi} K\left(\varsigma, \xi, \max\{x_m(\tau, x_0) | \tau \in P(\xi)\}\right) d\xi\right) d\varsigma d\theta. \quad (13)$$

From (13) we get

$$\|x'_{m+1}(t, x_0)\|_{C[0, T]} \leq \alpha'(t)(M_q + TM_g M_f), \quad (14)$$

where

$$\alpha'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} (1+s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{T} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} (1+\theta) d\theta.$$

We calculate the integrals:

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} ds = -\int_0^t (1-s)^{\alpha-1} d(1-s) = \frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha}, \\ B_2 &= \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} s ds = -\int_0^t (1-s)^{\alpha-1} [(1-s)-1] ds = \\ &= -\int_0^t (1-s)^\alpha ds + \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} ds = -\frac{1-(1-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} = \\ &= \frac{1-(1+\alpha)(1-t)^\alpha + \alpha(1-t)^{\alpha+1}}{\alpha(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Similarly, we obtain that

$$B_3 = \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} s ds = T^{\alpha+1} B(2, \alpha) = T^{\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)}, \quad B_4 = \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds = \frac{T^\alpha}{\alpha},$$

$$\begin{aligned} B_5 &= \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} (1+\theta) d\theta = B_1(B_3 + B_4) = \\ &= T^\alpha \frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \left(T \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Then we have the following estimate

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [B_1 + B_2] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{T} B_5 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} + \frac{1-(1+\alpha)(1-t)^\alpha + \alpha(1-t)^{\alpha+1}}{\alpha(1+\alpha)} \right] - \\ &\quad - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \left(T \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right) \leq \alpha'_0, \end{aligned}$$

where

$$\alpha'_0 = \begin{cases} \frac{\alpha(1-t)^{\alpha+1}}{\alpha(1+\alpha)\Gamma(\alpha)}, & T < 1, \\ \frac{2+\alpha}{\alpha(1+\alpha)\Gamma(\alpha)}, & T = 1, \\ \frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{1-(1+\alpha)(1-t)^\alpha}{\alpha(1+\alpha)}, & T > 1. \end{cases}$$

We consider a difference $x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)$, where the functions $x_{m+1}(t, x_0)$ and $x_m(t, x_0)$ are defined from the approximations of system of equations (11). By the conditions of the theorem and lemma 2, from (11) we have

$$\begin{aligned} & \|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)\|_{C[0, T]} \leq \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\{ \left(L_1 + T(M_g L_3 + M_f L_2) \right) \|x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)\| + \right. \\ & + M_g L_3 \int_{-\infty}^s L_4(\theta) \left\| \max \{x_m(\tau, x_0) | \tau \in P(\theta)\} - \max \{x_{m-1}(\tau, x_0) | \tau \in P(\theta)\} \right\| d\theta + \\ & + \frac{1}{T} \int_0^T \left(L_1 + T(M_g L_3 + M_f L_2) \right) \left[\|x_m(\theta, x_0) - x_{m-1}(\theta, x_0)\| + M_g L_3 \int_{-\infty}^{\theta} L_4(\xi) \times \right. \\ & \times \left. \left\| \max \{x_m(\tau, x_0) | \tau \in P(\xi)\} - \max \{x_{m-1}(\tau, x_0) | \tau \in P(\xi)\} \right\| d\xi \right] d\theta \Big\} ds \leq \\ & \leq \alpha(t) \left[\left(L_1 + T(M_g L_3 + M_f L_2) \right) \|x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)\|_{C[0, T]} + \right. \\ & + M_0 M_g L_3 h \|x'_m(t, x_0) - x'_{m-1}(t, x_0)\|_{C[0, T]} \Big] \leq T^\alpha \frac{T + (1 + \alpha)}{\alpha(1 + \alpha)\Gamma(\alpha)} \times \\ & \times \chi_0 \left[\|x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)\|_{C[0, T]} + h \|x'_m(t, x_0) - x'_{m-1}(t, x_0)\|_{C[0, T]} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

where

$$\chi_0 = \max \left\{ L_1 + T(M_g L_3 + M_f L_2); M_0 M_g L_3 \right\}, \quad M_0 = \sup_t \int_{-\infty}^t L_4(s) ds < \infty.$$

Similarly, by the assumptions of the theorem 1, from (13) we have

$$\begin{aligned} & \|x'_{m+1}(t, x_0) - x'_m(t, x_0)\|_{C[0, T]} \leq \\ & \leq \alpha'_0 \chi_0 \left[\|x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)\|_{C[0, T]} + h \|x'_m(t, x_0) - x'_{m-1}(t, x_0)\|_{C[0, T]} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Denoting $\chi_1 = \max \left\{ T^\alpha \frac{T + (1 + \alpha)}{\alpha(1 + \alpha)\Gamma(\alpha)}; \alpha'_0 \right\}$, from (15) and (16), we obtain

$$\|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)\|_{BD[0, T]} \leq \rho \cdot \|x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)\|_{BD[0, T]}, \quad (17)$$

where $\rho = \chi_0 \chi_1$.

According to the last condition of the theorem 1, $\rho < 1$. Since

$$\|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)\|_{BD[0, T]} < \|x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)\|_{BD[0, T]},$$

from the estimate (17) we deduce that the operator on right-hand side of (11) is contracting. From the estimates (12), (14) and (15), (16) implies that there exists a unique fixed point $x(t, x_0) \in BD[0, T]$. The theorem 1 is proved.

From the estimate (17) it is easy to obtain that for $x_0, \bar{x}_0 \in X$ holds

$$\|x(t, x_0) - x(t, \bar{x}_0)\|_{BD[0, T]} \leq \frac{|x_0 - \bar{x}_0|}{1 - \rho}.$$

Now we will show the existence of periodic solutions of the system of impulsive integro-differential equations (1). We introduce designations:

$$\begin{aligned} \Delta(x_0) = & \frac{1}{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} q(\theta, x_\infty(\theta, x_0)) d\theta + \\ & + \frac{1}{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} \int_0^\theta g(\zeta, x_\infty(\zeta, x_0)) \times \\ & \times f\left(\zeta, x_\infty(\zeta, x_0), \int_{-\infty}^\xi K(\zeta, \xi, \max\{x_\infty(\tau, x_0) | \tau \in P(\xi)\}) d\xi\right) d\zeta d\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Delta_m(x_0) = & \frac{1}{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} q(\theta, x_m(\theta, x_0)) d\theta + \\ & + \frac{1}{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} \int_0^\theta g(\zeta, x_m(\zeta, x_0)) \times \\ & \times f\left(\zeta, x_m(\zeta, x_0), \int_{-\infty}^\xi K(\zeta, \xi, \max\{x_m(\tau, x_0) | \tau \in P(\xi)\}) d\xi\right) d\zeta d\theta, \end{aligned} \quad (19)$$

where $x(t, x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0) = x_\infty(t, x_0)$ is solution of the nonlinear system (10). Therefore, $x_\infty(t, x_0)$ is the solution of the system of impulsive integro-differential equations (1) for $\Delta(x_0) = 0$ going through x_0 at $t = 0$. Consequently, the questions of existence of solution of the system of impulsive integro-differential equations (1) we reduce to the questions of existence of zeros of function $\Delta(x_0)$ and we solve this problem finding zeros of the function $\Delta_m(x_0)$.

Theorem 2. Assume that

1. All conditions of the theorem 1 are fulfilled;
2. There is a natural number m such that the function $\Delta_m(x_0)$ has an isolated singular point x_0^0 that $\Delta_m(x_0^0) = 0$ and index of isolated singular point x_0^0 is nonzero;
3. There is a closed convex region $X_0 \subset X$, containing a single singular point such that on the its border ∂X_0 is fulfilled estimate

$$\inf_{x \in \partial X_0} \|\Delta_m(x)\| \geq (M_q + TM_g M_f) \frac{\rho^{m+1}}{1 - \rho}. \quad (20)$$

Then the system of impulsive integro-differential equations (1) has a periodic solution for all $t \in [0, T]$ that $x(0) \in X_0$.

Proof. By definition, index of isolated singular point x_0^0 of continuous mapping $\Delta_m(x_0)$ is equal to the characteristic of vector field, generated by mapping $\Delta_m(x_0)$ on the sufficiently small

sphere S^n with the center in x_0^0 . Since in X_0 there is no another singular point, which will be differenced from x_0^0 and X_0 is homeomorphic to the unit ball E^n , then characteristic of vector field $\Delta_m(x_0)$ on the sphere S^n is equal to the characteristic of this vector field on ∂X_0 . The fields $\Delta_m(x_0)$ and $\Delta(x_0)$ are homotopic on ∂X_0 . Let us consider families of everywhere continuous on ∂X vector fields

$$V(\sigma, x_0) = \Delta_m(x_0) + \sigma(\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)),$$

which connect the fields

$$V(0, x_0) = \Delta_m(x_0), \quad V(1, x_0) = \Delta(x_0).$$

We note that there is true the estimate

$$\|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)\| \leq (M_q + TM_g M_f) \frac{\rho^{m+1}}{1-\rho}. \quad (21)$$

Therefore, the vector field $V(\sigma, x_0)$ does not vanish anywhere on ∂X_0 . Indeed, from (20) and (21) implies that

$$\|V(\sigma, x_0)\| \geq \|\Delta_m(x_0)\| - \|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)\| > 0. \quad (22)$$

The fields $\Delta_m(x_0)$ and $\Delta(x_0)$ are homotopic on ∂X and the rotations of the fields homotopic on the compact are equal. Hence, taking into account (22), we conclude that the rotation of the field $\Delta(x_0)$ on the ∂X_0 is equal to the index of the singular point x_0 of the field $\Delta_m(x_0)$ and nonzero. Consequently, the vector field $\Delta(x_0)$ on the X_0 has a singular point x_0 , for which $\Delta(x_0) = 0$. Therefore, the system of impulsive integro-differential equations (1) has a periodic solution for all $t \in [0, T]$ that $x(0) \in X_0$. In addition, we note that for $x_0, \bar{x}_0 \in X$ from (18) and (19) we have

$$\begin{aligned} \|\Delta(x_0)\|_{BD[0,T]} &\leq \frac{T^{2\alpha-1}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left(T \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right) (M_q + TM_g M_f), \\ \|\Delta(x_0) - \Delta(\bar{x}_0)\|_{BD[0,T]} &\leq \frac{|x_0 - \bar{x}_0|}{1-\rho}. \end{aligned}$$

Theorem 2 is proved.

Conclusion

In this paper, a periodic boundary-value problem for a nonlinear system of fractional functional integro-differential equations with maxima and variable deviations has been investigated. The considered system combines several analytically challenging features simultaneously: fractional memory effects generated by the Gerasimov--Caputo operator, nonlinear integral interactions, products of nonlinear functions, and extremal functional dependencies.

By transforming the original problem into an equivalent system of nonlinear functional-integral equations, a constructive analytical framework for studying periodic solutions has been developed. Explicit estimates for the associated nonlinear operators were derived, which allowed the application of the method of successive approximations and the contraction mapping principle. As a result, sufficient conditions guaranteeing existence and uniqueness of periodic solutions were obtained.

A further contribution of the paper is the reduction of the periodic solvability problem to the investigation of zeros of a nonlinear vector field generated by the associated integral equations.

The application of homotopy methods and topological index theory made it possible to establish additional existence criteria for periodic solutions.

The obtained results extend existing solvability theories for fractional functional integro-differential equations and provide effective tools for the analysis of nonlinear systems with memory and extremal feedback mechanisms. The proposed methods can be further developed for broader classes of fractional systems, including impulsive equations, systems with nonlocal boundary conditions, distributed parameter models, and equations defined in infinite-dimensional functional spaces.

References

1. Area, I., Batarfi, H., Losada, J., Nieto, J.J., Shammakh, W.M., Torres, A. (2015). On a fractional order Ebola epidemic model. *Advances in Difference Equations*, Vol. 278.
2. Artykova, Zh.A., Abduvakhobov, T.A., Shukurova, M.D. (2026). Nonlinear fractional-differential-integral equation with product of two nonlinear functions, degeneration and maxima. *J. Osh University "Differential Equations"*, Vol. 1, №1, pp. 53-66.
3. Bai, Ch., Yang, D. (2007). Existence of solutions for second-order nonlinear impulsive differential equations with periodic boundary value conditions. *Boundary Value Problems* (Hindawi Publishing Corporation) Vol. 2007, №41589, pp. 1-13.
4. Chen, J., Tisdell, Ch. C., Yuan R. (2007). On the solvability of periodic boundary value problems with impulse. *J. of Math. Anal. and Appl.* Vol. 331, pp. 902-912.
5. Delbosco, D., Rodino, L. (1996). Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 204, pp. 609-625.
6. Gladilina, R.I., Ignatyev, A.O. (2004). On the stability of periodic impulsive systems. *Math. Notes* Vol. 76, №1, pp. 41-47.
7. *Handbook of Fractional Calculus with Applications* (2019). Vols. 1-8. Tenreiro Machado J.A. (ed.). Berlin, Boston, Walter de Gruyter GmbH.
8. Hilfer, H. (2000). *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific, Singapore.
9. Hussain, A., Baleanu, D., Adeel, M. (2020). Existence of solution and stability for the fractional order novel coronavirus (nCoV-2019) model. *Advances in Difference Equations*, Vol. 384.
10. Hu, Z., Han, M. (2009). Periodic solutions and bifurcations of first order periodic impulsive differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 19, №8, pp. 2515-2530.
11. Kaufmann, E.R., Mboumi, E. (2007). Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, Vol. 2007, №3, pp. 1-11.
12. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. North-Holland Mathematics Studies Vol. 204. Elsevier Science B. V., Amsterdam.
13. Kosmakova, M.T., Yuldashev, T.K., Sagdullaeva, M.U. (2026). Inverse problem for a nonlinear pseudoparabolic differential equation with final condition and Gerasimov–Caputo operator. *Journal of Osh University "Differential Equations"*, Vol. 1, №1, pp. 1-14.
14. Li, X., Bohner, M., Wang, Ch.-K. (2015). *Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications*. *Automatica*, Vol. 52, pp. 173-178.

15. Ma, R., Yang, B., Wang, Z. (2012). Bifurcation of positive periodic solutions of first-order impulsive differential equations. *Boundary Value Problems*, Vol. 2012, №83, pp. 1-16.
16. Mamanov, M.K., Khasanov, G.A., Madatova, Z.A. (2026). Optimal control problem for an impulsive systems of functional-differential equations with a nonlinear function under the sign of a first-order differential. *J. Osh University "Differential Equations"*, Vol. 1, №1, pp. 67-77.
17. Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. (1993). *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Gordon and Breach, Yverdon.
18. Sun, H, Chang, A., Zhang, Y., Chen, W. (2019). A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol. 22, №1, pp. 27-59.
19. Yuldashev, T.K. (2022). Periodic solutions for an impulsive system of nonlinear differential equations with maxima. *Nanosystems: Physics, Chem., Math.*, Vol. 13, №2, pp. 135-141.
20. <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2022-13-2-135-141>
21. Yuldashev, T.K. (2022). Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima. *Vest. Sam. Gos. Tekhn. University. Ser.: Phyz.-Math. Science*, Vol. 26, №2, pp. 368-379. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1917>
22. Yuldashev, T.K., Abduvahobov, T.A. (2023). Periodic solutions for an impulsive system of fractional order integro-differential equations with maxima. *Lobachevskii J. Mathematics*, Vol. 44, №10, pp. 4401-4409. <https://doi.org/10.1134/S1995080223100451>
23. Yuldashev, T.K., Sulaimonov, F.U. (2022). Periodic solutions of second order impulsive system for an integro-differential equations with maxima. *Lobachevskii J. Mathematics*, Vol. 43, №12, 3674-3685. <https://doi.org/10.1134/S1995080222150306>

ФИЗИКА / PHYSICS

УДК 519.6

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1\(8\)_39](https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1(8)_39)

**A HYBRID SPECTRAL DEFERRED CORRECTION METHOD WITH
PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORK INITIALIZATION**

Akramov Ikrom

Associate Professor

Bukhara state university

OrcidID: 0000-0002-8869-0784 ikrom960623@gmail.com

Rasulov Tulqin

Professor

Bukhara state university

OrcidID: 0000-0002-2868-4390 t.h.rasulov@buxdu.uz

Kurbonova Dilnora

Student

Bukhara state university

OrcidID: 0009-0006-3015-1928 dilnoraqurbonova3@gmail.com

Abstract: Spectral Deferred Correction (SDC) methods are iterative methods used to solve ordinary differential equations. The SDC method can achieve high-order convergence by adjusting the initial guess, quadrature nodes, and the number of iterations. Therefore, its convergence strongly depends on the initial approximation. In this work, we introduce a hybrid method in which a Physics-Informed Neural Network (PINN) provides the initial guess for SDC iterations. We present a rigorous formulation of both SDC and PINN, along with a convergence analysis of the proposed method. Finally, we validate our results using numerical examples. The proposed method significantly reduces the number of SDC sweeps required to achieve high-order accuracy.

Keywords: Spectral Deferred Correction (SDC), collocation problem, Physics-Informed Neural Network (PINN), initial guess.

**ГИБРИДНЫЙ МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОЙ ОТЛОЖЕННОЙ
КОРРЕКЦИИ С ИНИЦИАЛИЗАЦИЕЙ НА ОСНОВЕ ФИЗИЧЕСКИ-
ИНФОРМИРОВАННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ**

Акрамов Икром

доцент

Бухарский государственный университет

OrcidID: 0000-0002-8869-0784, ikrom960623@gmail.com

Расулов Тўлқин

профессор

Бухарский государственный университет

OrcidID: 0000-0002-2868-4390, t.h.rasulov@buxdu.uz

Курбанова Дилнора

студентка

Аннотация: Методы спектральной отложенной коррекции (SDC) являются итерационными методами для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод SDC может достигать высокого порядка сходимости за счёт изменения начального приближения, квадратурных узлов и числа итераций. Поэтому его сходимость существенно зависит от начального приближения. В данной работе предлагается гибридный метод, в котором физически-информированная нейронная сеть (PINN) используется для задания начального приближения для итераций SDC. Представлена строгая формулировка методов SDC и PINN, а также анализ сходимости предложенного метода. В заключение результаты подтверждаются численными примерами. Предложенный метод существенно уменьшает количество итераций SDC, необходимых для достижения высокой точности.

Ключевые слова: спектральная отложенная коррекция (SDC), задача коллокации, физически-информированная нейронная сеть (PINN), начальное приближение.

Introduction

High-order numerical methods play a fundamental role in the accurate simulation of nonlinear and stiff differential equations arising in physics, engineering, and applied sciences [1-3]. In many applications, such as fluid dynamics, plasma physics, and kinetic theory, achieving high accuracy in time integration is essential for capturing complex dynamical behavior [4].

Spectral Deferred Correction (SDC) methods, originally introduced by Dutt, Greengard, and Rokhlin [5], provide a flexible and systematic framework for constructing high-order time integration schemes. The main idea behind SDC is to iteratively correct a low-order approximation using defect correction based on an integral formulation of the differential equation. Each iteration, often referred to as a sweep, increases the order of accuracy and drives the numerical solution toward the corresponding collocation solution. Over the years, SDC methods have been further developed and analyzed in various contexts, including stiff problems and multi-level extensions [5-9].

Despite their advantages, classical SDC methods rely heavily on the quality of the initial approximation. Typically, this initial guess is obtained using a low-order time-stepping scheme such as the forward or backward Euler method. While such approaches are inexpensive, they may produce relatively large initial errors, especially for highly nonlinear or stiff systems. As a result, a larger number of SDC iterations may be required to achieve the desired accuracy, which reduces the overall efficiency of the method [10, 11].

In parallel, recent advances in scientific machine learning have introduced Physics-Informed Neural Networks (PINNs) as a powerful tool for approximating solutions of differential equations [12]. PINNs incorporate the governing equations directly into the training process of a neural network, allowing the model to learn solutions that satisfy the underlying physical laws. Unlike classical numerical methods, PINNs provide a global, smooth approximation over the entire domain and do not require a predefined

The main objective of this work is to develop and analyze such a hybrid PINN-SDC method. In this framework, the neural network provides a physics-consistent initial guess at the quadrature nodes, and the SDC method acts as an efficient iterative solver for the associated collocation problem. We show that this combination leads to faster convergence and improved efficiency, particularly for nonlinear problems.

The remainder of the paper is organized as follows. In Section 2, we introduce the integral formulation and the associated collocation problem. Section 3 presents the derivation of the SDC method. Section 4 reviews the formulation of Physics-Informed Neural Networks. In Section 5, we describe the proposed hybrid method. Section 6 provides an error decomposition and convergence analysis. Finally, numerical results and conclusions are presented in the subsequent sections.

Collocation problem

In this section, we explain carefully how the Spectral Deferred Correction (SDC) method is obtained starting from the original differential equation

Consider the following ordinary differential equation

$$\frac{du}{dt} = f(u, t), u(t_0) = u_0 \quad (1)$$

Instead of working directly with the derivative, we rewrite the problem in an integral form. This is done by integrating both sides from t_0 to some time t

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(u(\tau), \tau) d\tau \quad (2)$$

This equation tells us something very important. The value of the solution at time t is equal to the initial value plus the total accumulated effect of the function f from time t_0 to t .

Suppose we divide the interval into M sub-intervals

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M$$

These points are called quadrature nodes. At each of these points, we want to approximate the solution.

For each point t_m , the integral equation becomes:

$$u(t_m) = u_0 + \int_{t_0}^{t_m} f(u(\tau), \tau) d\tau \quad (3)$$

The integral is usually difficult to compute exactly because we do not know the exact solution $u(\tau)$. Therefore, we approximate the integral using a numerical rule called quadrature.

We replace the integral by a weighted sum:

$$\int_{t_0}^{t_m} f(u(\tau), \tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^M q_{mj} f(u_j, t_j) \quad (4)$$

where u_j is an approximation of $u(t_j)$, and q_{mj} are known weights that depend on the chosen nodes.

Now the equation becomes:

$$u_m = u_0 + \sum_{j=0}^M q_{mj} f(u_j, t_j) \quad (5)$$

This is called the *collocation problem*. It is a system of equations where all unknown values $u_0, u_1, \dots, u_M$ appear together.

The important thing to notice is that the values u_j appear inside the function $f(u_j, t_j)$. This means the equations are nonlinear. Because of this, solving the system directly can be very expensive, especially when M is large.

Instead of solving it all at once, we try to improve an approximate solution step by step. This idea leads to the SDC method.

We begin by choosing an initial approximation. For example, we can use a simple method like Euler's method to compute values:

$$u_0^0, u_1^0, \dots, u_M^0$$

Here, the superscript 0 means this is the first guess.

This guess is not very accurate, but it gives us a starting point.

Now we check how good our approximation is. We do this by plugging it into the collocation equation. We define the defect:

$$r_m^k = u_0 + \sum_{j=0}^M q_{mj} f(u_j^k, t_j) - u_m^k \quad (6)$$

If our approximation were perfect, this value would be zero. In reality, it is not zero, and this tells us how much error we have.

We now try to correct our approximation. We write:

$$u_m^{k+1} = u_m^k + \delta_m^k$$

where δ_m^k is a correction that we want to compute.

The idea is simple: we improve the solution little by little.

Spectral deferred correction method

Instead of solving a complicated global problem, we go back to the integral form and focus on small intervals.

Between two points t_{m-1} and t_m , we write:

$$u(t_m) = u(t_{m-1}) + \int_{t_{m-1}}^{t_m} f(u(\tau), \tau) d\tau \quad (7)$$

Now we approximate this step by step.

We split the integral into two parts. One part uses the old approximation, and the other part corrects the error:

$$\begin{aligned} u_m^{k+1} &= u_{m-1}^{k+1} + \int_{t_{m-1}}^{t_m} f(u^k(\tau), \tau) d\tau \\ &+ \int_{t_{m-1}}^{t_m} [f(u^{k+1}(\tau)) - f(u^k(\tau))] d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

The first integral is computed using the known values from the previous iteration. The second integral is small and can be approximated using a simple method.

We approximate the correction term using a simple Euler-type step:

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} [f(u^{k+1}) - f(u^k)] d\tau \approx \Delta t_m [f(u_{m-1}^{k+1}) - f(u_{m-1}^k)] \quad (9)$$

The first integral is approximated using quadrature weights. Combining everything, we obtain:

$$u_m^{k+1} = u_{m-1}^{k+1} + \Delta t_m [f(u_{m-1}^{k+1}) - f(u_{m-1}^k)] + \sum_{j=0}^M q_{mj} f(u_j^k) \quad (10)$$

This is exactly the SDC iteration formula.

The method works as follows. We start with a rough approximation. Then we repeatedly improve it. Each correction reduces the error and increases the accuracy.

After several iterations, the solution becomes very close to the true collocation solution.

The collocation method gives a very accurate solution but is hard to solve directly. The SDC method solves it step by step in a simple and efficient way.

In your work, instead of starting with a rough initial guess, a Physics-Informed Neural Network provides a much better starting point. This means fewer correction steps are needed to reach high accuracy.

Physics-Informed Neural Networks

In this section, we explain what a Physics-Informed Neural Network (PINN) is and how it is used to approximate the solution of a differential equation [12].

A neural network is a function with parameters. We denote it by $u_\theta(t)$, where θ represents all adjustable parameters (weights and biases). The goal of the neural network is to learn a function that behaves like the true solution $u(t)$.

The key idea of a PINN is the following. Instead of only learning from data, the neural network is trained using the differential equation itself. This means that the network is forced to satisfy the physics of the problem.

We recall the differential equation

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) \quad (11)$$

If $u_\theta(t)$ is a good approximation, then it should satisfy

$$\frac{du_\theta}{dt}(t) \approx f(u_\theta(t), t) \quad (12)$$

To enforce this, we define a loss function. The loss function measures how well the neural network satisfies the equation and the initial condition.

We write:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{N} \sum_i |u_\theta(t_i) - u_i|^2 + \frac{1}{N} \sum_j \left| \frac{du_\theta}{dt}(t_j) - f(u_\theta(t_j), t_j) \right|^2 \quad (13)$$

The first term measures how well the neural network matches known values, such as the initial condition. The second term measures how well the differential equation is satisfied.

During training, the parameters θ are adjusted so that this loss becomes as small as possible. When the loss is small, the neural network behaves like a function that satisfies the differential equation.

An important property of PINNs is that they produce a smooth function defined on the entire time interval. This is different from classical numerical methods, which only give values at discrete points.

Proposed Hybrid Method

When we solve the problem using SDC, we need an initial approximation:

$$u_m^0 \approx u(t_m)$$

If this initial guess is poor, then many SDC iterations are required to correct the error. This increases computational cost.

A simple method like Euler produces a rough approximation [13, 14]. The error can be quite large, especially for nonlinear problems.

In contrast, a PINN has already learned the structure of the solution. It approximately satisfies the differential equation everywhere in the interval. This means that the initial error is already small before starting SDC.

Another important point is that the PINN gives values at all points in a continuous way. Therefore, it naturally provides values at all quadrature nodes without additional computation.

Because of these reasons, the PINN initialization is much closer to the true collocation solution than a classical low-order method.

As a result, the SDC method needs fewer correction steps to reach high accuracy.

We now describe in detail how the Physics-Informed Neural Network (PINN) is combined with the Spectral Deferred Correction (SDC) method.

The central idea is to use the neural network as a high-quality approximation of the solution before applying any classical numerical method. The neural network produces a function $u_\theta(t)$ that approximately satisfies the differential equation on the entire interval.

Once the neural network is trained, we evaluate it at the quadrature nodes:

$$u_m^0 := u_\theta(t_m), m = 0, 1, \dots, M \quad (14)$$

These values serve as the initial approximation for the SDC method. Unlike standard approaches where the initial guess is obtained using a low-order method, here the approximation already incorporates global information about the solution.

After initialization, the SDC iteration is applied. At each sweep, the method corrects the current approximation using the defect of the collocation problem. Because the initial error is already small, the correction process converges faster.

Thus, the hybrid method consists of two stages. In the first stage, a global approximation is constructed using the neural network. In the second stage, this approximation is refined locally through SDC iterations until high-order accuracy is achieved.

Algorithm

1. Train the neural network $u_\theta(t)$ on the interval $[0, T]$ so that it approximately satisfies the differential equation and initial condition.
2. Evaluate the trained network at the quadrature nodes to obtain the initial values u_m^0 .
3. Apply SDC sweeps to iteratively improve the solution.

Error Decomposition

To understand why this hybrid method is effective, we analyze the error in a structured way.

Let $u(t)$ denote the exact solution, and let u_m^k be the approximation after k SDC iterations. We define the total error:

$$e_m^k = u(t_m) - u_m^k \quad (15)$$

We now split this error into two parts:

$$e_m^k = (u(t_m) - u_\theta(t_m)) + (u_\theta(t_m) - u_m^k). \quad (16)$$

The first term represents the error introduced by the neural network:

$$e_m^{\text{PINN}} = u(t_m) - u_\theta(t_m) \quad (17)$$

The second term represents the error introduced by the SDC iterations:

$$e_m^{\text{SDC},k} = u_\theta(t_m) - u_m^k \quad (18)$$

Thus, the total error can be written as:

$$e_m^k = e_m^{\text{PINN}} + e_m^{\text{SDC},k} \quad (19)$$

This decomposition clearly separates the contribution of the machine learning approximation and the numerical correction.

The PINN error depends on how well the neural network is trained. The SDC error depends on the number of iterations and the time step size.

Improved Hybrid Method Description

We now refine our understanding of the hybrid method using the error decomposition. At the beginning of the SDC iteration, we have:

$$u_m^0 = u_\theta(t_m) \quad (20)$$

which implies:

$$e_m^0 = u(t_m) - u_\theta(t_m) = e_m^{\text{PINN}} \quad (21)$$

This shows that the initial error is exactly the PINN approximation error. During SDC iterations, the method reduces the numerical error component. More precisely, each SDC sweep improves the approximation by correcting the defect of the collocation equation.

As the number of iterations increases, the SDC error decreases, while the PINN error remains fixed. Therefore, after sufficiently many iterations, the dominant source of error is the neural network approximation.

This observation explains why a better PINN leads to fewer required SDC iterations.

Convergence Analysis

We now formalize the above observations.

Theorem 1. Assume that the function f is Lipschitz continuous with constant L . Let the neural network approximation satisfy:

$$\|u - u_\theta\| \leq \varepsilon_{\text{PINN}}$$

Then the total error after K SDC iterations satisfies:

$$\|e^K\| \leq C(\Delta t)^K + \varepsilon_{\text{PINN}} \quad (22)$$

where C is a constant independent of Δt and K .

Proof. From the theory of SDC methods, it is known that each iteration reduces the collocation error by a factor proportional to Δt . Therefore, after K iterations, the SDC error satisfies:

$$\|e^{\text{SDC},K}\| \leq C(\Delta t)^K$$

From the error decomposition, we have:

$$\|e^K\| \leq \|e^{\text{PINN}}\| + \|e^{\text{SDC},K}\|$$

Using the assumption on the PINN approximation, we obtain:

$$\|e^K\| \leq \varepsilon_{\text{PINN}} + C(\Delta t)^K$$

This completes the proof.

Numerical Results

In this section, we demonstrate the performance of the proposed PINN-SDC method on two test problems. The first example is a simple linear equation with a known exact solution, and the second example is the nonlinear Penning trap system, which is commonly used in plasma physics.

Linear Equation: We first consider the scalar problem:

$$u' = -u, u(0) = 1 \quad (23)$$

The exact solution is given by:

$$u(t) = e^{-t} \quad (24)$$

We compare the performance of the SDC method initialized with a standard low-order method and with a PINN-based initialization.

The results show that the PINN provides a much better initial approximation. As a result, the number of SDC iterations required to achieve a given accuracy is significantly reduced. The final numerical solution obtained by the hybrid method matches the exact solution with high accuracy.

The table 1 shows the evolution of the training loss over time. At epoch 0, the initial loss is relatively large (around 10^{-3}), reflecting the fact that the network parameters are randomly initialized and the network does not yet satisfy the differential equation.

After 500 epochs, the loss drops dramatically to approximately 10^{-8} , indicating that the network has learned a solution that closely satisfies the governing differential equation and initial condition. Subsequent training (epochs 1000 and 1500) shows that the loss remains around 10^{-8} , suggesting convergence and stability of the network training.

Table 1. *The evolution of the PINN training loss over time for linear problem.*

Epoch	Loss
0	0.002496610628440976
500	1.3459487746558807e-08
1000	1.522908021911462e-08

Penning Trap System

We now consider the Penning trap model, which describes the motion of a charged particle in combined electric and magnetic fields. The equations of motion are given by:

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} + \frac{\omega_z^2}{2} x, \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} + \frac{\omega_z^2}{2} y, \ddot{z} = -\omega_z^2 z \quad (25)$$

We rewrite this system as a first-order system by introducing velocity variables:

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$$

This leads to:

$$\dot{x} = v_x \quad (26)$$

$$\dot{y} = v_y \quad (27)$$

$$\dot{z} = v_z \quad (28)$$

$$\dot{v}_x = \omega_c v_y + \frac{\omega_z^2}{2} x \quad (29)$$

$$\dot{v}_y = -\omega_c v_x + \frac{\omega_z^2}{2} y \quad (30)$$

$$\dot{v}_z = -\omega_z^2 z \quad (31)$$

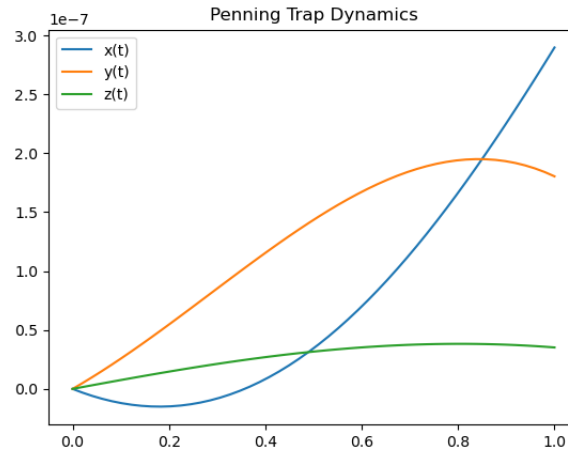


Figure 1. The trajectory of Penning trap problem for 3-axes.

Figure 1 shows the trajectory of Penning trap problem for 3 axes they are $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$. The system exhibits oscillatory behavior and coupling between components, making it a suitable test for the proposed method.

Table 2. PINN Training Loss for Penning Trap Problem.

Epoch Loss	Epoch Loss
0	0.01792776770889759
500	3.1727699933981057e-07
1000	1.6572564618400065e-06
1500	2.3762851242281613e-07

This table 2 shows the evolution of the training loss for the Physics-Informed Neural Network (PINN) applied to the Penning trap system, which is a six-dimensional nonlinear dynamical system. At epoch 0, the loss is approximately $1.79e-2$, indicating that the network starts with a poor approximation due to random initialization. After 500 epochs, the loss drops sharply to about $3.17e-7$, demonstrating that the network has learned a solution that closely satisfies the system of differential equations. By epoch 1000, the loss slightly increases to $1.66e-6$, which can happen due to stochastic variations during training, but it remains very small. At epoch 1500, the loss stabilizes at $2.38e-7$, indicating that the network has effectively converged.

Conclusion

In this work, we proposed a hybrid numerical framework that combines Spectral Deferred Correction (SDC) methods with Physics-Informed Neural Networks (PINNs) for solving initial value problems. The main idea is to use the neural network as a physics-consistent initial approximation and then apply SDC iterations to recover high-order accuracy.

We began by revisiting the integral formulation of the differential equation and its associated collocation problem. Based on this formulation, we derived the SDC method as an iterative procedure for solving the collocation system. We then introduced the PINN approach, which provides a global approximation of the solution by incorporating the governing equation into the training process.

The central contribution of this work is the integration of these two approaches. By evaluating the trained neural network at the quadrature nodes, we obtain an initial approximation that is more accurate than traditional low-order initial guesses. This leads to a substantial reduction in the initial error of the SDC method.

The convergence analysis shows that the total error consists of two terms: one associated with the SDC iterations and another determined by the quality of the neural network approximation. As a result, high-order accuracy can be achieved with fewer SDC sweeps when the PINN approximation is sufficiently accurate.

Overall, the proposed PINN-SDC framework combines the global approximation capability of machine learning with the rigorous error control of classical numerical methods. This makes it particularly attractive for nonlinear problems where traditional initial guesses may be inadequate.

References

1. P. Agarwal, J. Mohamed, and B. Samet, *Fixed Point Theory in Metric Spaces: Recent Advances and Applications*, Springer, Singapore, 2018, <https://doi.org/10.1007/978-981-13-2913-5>.
2. X. Bai and J. L. Junkins, "Modified Chebyshev-Picard iteration methods for orbit propagation," *J. Astronaut. Sci.*, 58 (2011), pp. 583–613, <https://doi.org/10.1007/BF03321533>.
3. J. P. Boris, "Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code," in *Proceeding of Fourth Conference on Numerical Simulations of Plasmas*, Naval Research Laboratory, Washington, DC, 1972.
4. L. Brown and G. Gabrielse, "Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a Penning trap," *Rev. Mod. Phys.*, 58 (1986), pp. 233–311.
5. A. Dutt, L. Greengard, and V. Rokhlin, "Spectral deferred correction methods for ordinary differential equations," *BIT*, 40 (2000), pp. 241–266, <https://doi.org/10.1023/A:1022338906936>.
6. M. F. Causley and D. C. Seal, "On the convergence of spectral deferred correction methods," *Commun. Appl. Math. Comput. Sci.*, 14 (2019), pp. 33–64, <https://doi.org/10.2140/camcos.2019.14.33>.
7. E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner, *Geometric Numerical Integration: Structure-preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin, 2002, <https://doi.org/10.1007/3-540-30666-8>.
8. G. Kremling and R. Speck, "Convergence of multilevel spectral deferred corrections," *Commun. Appl. Math. Comput. Sci.*, 16 (2021), pp. 227–265, <https://doi.org/10.2140/camcos.2021.16.227>.
9. D. Ruprecht and R. Speck, "Spectral deferred corrections with fast-wave slow-wave splitting," *SIAM J. Sci. Comput.*, 38 (2016), pp. A2535–A2557, <https://doi.org/10.1137/16M1060078>.
10. C. T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, Front. Appl. Math. 16, SIAM, Philadelphia, 1995, <https://doi.org/10.1137/1.9781611970944>.

11. M. L. Minion, "Semi-implicit spectral deferred correction methods for ordinary differential equations," *Commun. Math. Sci.*, 1 (2003), pp. 471–500, <https://doi.org/10.4310/CMS.2003.v1.n3.a6>.
12. M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis, *Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations*, *Journal of Computational Physics*, 378, 2019, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>.
13. E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff problems*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1993, <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1>.
14. E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner, "Geometric numerical integration illustrated by the Störmer-Verlet method," *Acta Numer.*, 12 (2003), pp. 399–450, <https://doi.org/10.1017/S0962492902000144>.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ПОСТОЯННОЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ГАЗОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ МЕТОДОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВИРТУАЛЬНОЙ ЛАБОРАТОРИИ

Осконбаев Маралбек Чотоевич

*Кандидат физико-математических
наук, доцент, ОшГУ, Кыргызстан,
o_manas@mail.ru*

Кожобекова Пардаз Жумабаевна

*Доктор философии (PhD) по направлению 510100 – «Математика»
ОшГУ, Кыргызстан,
zpardaz@mail.ru*

Полотова Элиза Жигиталиевна

*Магистр 1-курса, ОшГУ, Кыргызстан,
polotovaeliza5@gmail.com*

Аннотация: В статье рассматривается методика экспериментального определения универсальной газовой постоянной для различных газов с использованием виртуальной лаборатории. Цель исследования заключается в расчёте численных значений универсальной газовой постоянной на основе уравнения состояния идеального газа и сравнении полученных результатов с теоретическим значением. В качестве модели использовался сферический сосуд с постоянным объёмом. Начальные параметры эксперимента составляли: давление $P_1 = 101\,000$ Па, температура $T = 293$ К и объём $V = 0,003$ м³. С помощью виртуальной лаборатории были проведены эксперименты для воздуха, кислорода, углекислого газа, азота, аргона, метана, озона, ацетилена, гелия и аммиака. По изменению давления и соответствующему изменению массы газа были рассчитаны значения универсальной газовой постоянной. Результаты показали, что рассчитанные значения близки к теоретическому значению универсальной газовой постоянной. Полученные данные подтверждают правильность предложенной методики и независимость данной физической постоянной от вида газа. Практическая значимость исследования заключается в возможности использования виртуальной лаборатории при организации лабораторных занятий по молекулярной физике и термодинамике.

Ключевые слова: универсальная газовая постоянная, виртуальная лаборатория, идеальный газ, газовые законы, молекулярная физика, экспериментальный метод.

DETERMINATION OF THE UNIVERSAL GAS CONSTANT FOR DIFFERENT GASES BY AN EXPERIMENTAL METHOD USING A VIRTUAL LABORATORY

Oskonbaev Maralbek Chotoevich

*candidate of physics and mathematics
Sciences, Associate Professor,
OshSU, Kyrgyzstan, o_manas@mail.ru ,*

Kozhobekova Pardaz Zhumabaевна

*Doctor of Philosophy (PhD) in the field of training 510100 – "Mathematics"
OshSU, Kyrgyzstan, zpardaz@mail.ru*

Polotova Eliza Zhigitalievna

1st year master,
OshSU, Kyrgyzstan,
polotovaeliza5@gmail.com

Abstract. This article presents a method for experimentally determining the universal gas constant for different gases using a virtual laboratory. The aim of the study is to calculate the numerical values of the universal gas constant based on the ideal gas equation and compare the obtained results with the theoretical value. A spherical vessel with a constant volume was used as a virtual experimental model. The initial parameters were pressure $P_1 = 101000$ Pa, temperature $T = 293$ K, and volume $V = 0.003$ m³. Virtual experiments were performed for air, oxygen, carbon dioxide, nitrogen, argon, methane, ozone, acetylene, helium, and ammonia. The values of the gas mass changes corresponding to pressure variations were determined. The calculated values of the universal gas constant were found to be close to the theoretical value. The results confirm the reliability of the proposed experimental methodology and demonstrate that the universal gas constant does not depend on the type of gas. The obtained results indicate that virtual laboratories can be effectively used for organizing laboratory activities in molecular physics and thermodynamics.

Keywords: universal gas constant, virtual laboratory, ideal gas, gas laws, molecular physics, experimental method.

Введение. Актуальность исследования и обзор литературы

Сочетание теоретических знаний с экспериментальной деятельностью в обучении физике является одним из ключевых условий формирования у студентов научного мировоззрения. Лабораторные работы играют важную роль в освоении физических законов в разделах молекулярной физики и термодинамики, поскольку они предоставляют студентам возможность связать теоретические модели с экспериментальными данными. Универсальная газовая постоянная (R) является одной из фундаментальных величин в молекулярной физике. Она используется в уравнении состояния идеального газа и определяется как постоянная величина, не зависящая от рода газа.

Однако недостаток современного лабораторного оборудования, высокая стоимость приборов и связанные с их обслуживанием проблемы затрудняют полноценную организацию практических экспериментов в некоторых образовательных учреждениях. Эта проблема актуальна не только для Кыргызстана, но и для многих стран мира [4, 7, 8]. В таких условиях виртуальные лаборатории приобретают значение как современная образовательная технология, позволяющая моделировать физические процессы, многократно повторять эксперименты и анализировать полученные данные.

Основное преимущество виртуальных лабораторий заключается в том, что они предоставляют студентам возможность исследовать взаимосвязи физических величин в условиях, приближенных к реальному эксперименту. Они способствуют пониманию логики проведения эксперимента, обработке результатов измерений и развитию навыков формулирования научных выводов. Данный подход имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционными лабораторными работами, включая возможность неограниченного повторения экспериментов, высокий уровень безопасности и экономическую эффективность [8].

В исследованиях последних лет отмечается, что применение виртуальных лабораторий в обучении физике способствует углублению понимания студентами и улучшению их экспериментальной подготовки. Виртуальные симуляции позволяют усилить связь между теоретическими знаниями и экспериментальной деятельностью при

изучении газовых законов [6]. Также показано, что такие технологии повышают эффективность учебного процесса в условиях, когда лабораторные работы недоступны [7–9].

На международном уровне проведен ряд исследований по использованию виртуальных лабораторий в обучении физике. Martinez и соавторы [6] показали, что виртуальные симуляции углубляют понимание студентами газовых законов и укрепляют связь между теоретическими знаниями и экспериментальными действиями. Filanovich и Povzner [7] отметили, что виртуальные лаборатории повышают эффективность учебного процесса в условиях ограниченных возможностей для проведения экспериментов. Shamshin [8] выделил такие основные преимущества виртуальных лабораторий, как возможность многократного повторения экспериментов, безопасность и экономия ресурсов, тогда как Velychko и Zuma [9] указали на важную роль таких лабораторий в развитии профессиональной компетентности будущих учителей физики.

В трудах отечественных ученых также всесторонне рассматривается вопрос внедрения виртуальных лабораторий в учебный процесс. В работах Бокоевой [1] описана структура виртуальных физических лабораторий и их возможности в учебном процессе, а Трухин [4] показал, что использование виртуальных лабораторий в образовании является эффективной технологией, дополняющей традиционные эксперименты. В исследованиях, проведенных в Ошском государственном университете, накоплен практический опыт моделирования различных физических процессов и организации лабораторных работ с помощью виртуальных лабораторий [3, 5].

Тем не менее, сравнительно мало встречается исследований, в которых с помощью виртуальных лабораторий по единой методике определяется универсальная газовая постоянная для различных газов и полученные экспериментальные результаты сравниваются с теоретическим значением. В предшествующих работах внимание чаще уделялось изучению свойств только одного газа, тогда как комплексные исследования, охватывающие широкий спектр газов с различной молярной массой, недостаточны. Между тем, такое исследование важно для экспериментальной демонстрации фундаментального характера универсальной газовой постоянной и оценки эффективности виртуальных технологий в учебном процессе.

В связи с этим в настоящем исследовании предусмотрено экспериментальное определение универсальной газовой постоянной для различных газов с помощью виртуальной лаборатории, сравнение полученных значений с теоретической величиной и оценка возможности применения предложенной методики в учебном процессе.

Научно-методическая новизна исследования

Научно-методическая новизна исследования заключается в определении универсальной газовой постоянной для десяти газов с различной молярной массой (воздух, кислород, углекислый газ, азот, аргон, метан, озон, ацетилен, гелий и аммиак) с использованием единой виртуальной экспериментальной методики. Данная методика демонстрирует возможность применения вычислительного алгоритма, основанного на изменении давления и массы газа, в лабораторных работах по молекулярной физике.

Кроме того, в исследовании проведено сравнение результатов, полученных для газов с различными физико-химическими свойствами, и на экспериментальной основе показано, что универсальная газовая постоянная является фундаментальной физической величиной,

не зависящей от рода газа. Данный подход отличается от традиционных лабораторных работ тем, что охватывает более широкий спектр газов.

Цель и задачи исследования

Основная цель исследования – экспериментальное определение универсальной газовой постоянной для различных газов с использованием виртуальной лаборатории, сравнение полученных значений с теоретическим значением и оценка возможности применения предложенной методики в обучении молекулярной физике.

Для достижения поставленной цели были определены следующие задачи:

- создать экспериментальную модель для различных газов на основе виртуальной лаборатории;
- определить изменение массы газа, связанное с изменением его давления;
- обработать полученные экспериментальные данные в Международной системе единиц (СИ);
- рассчитать значения универсальной газовой постоянной на основе уравнения состояния идеального газа;
- сравнить рассчитанные значения с теоретическим значением $R=8,314 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$;
- оценить возможность применения предложенной экспериментальной методики в лабораторных работах по физике.

Объект и методы исследования

В качестве объекта исследования были выбраны газы, обладающие различными физико-химическими свойствами. В эксперименте использовались следующие газы: воздух, кислород, углекислый газ, азот, аргон, метан, озон, ацетилен, гелий и аммиак.

Поскольку молярные массы этих газов различаются (в диапазоне от 0,004 до 0,048 кг/моль), сравнение результатов, полученных при определении универсальной газовой постоянной, позволяет проверить ее независимость от рода газа. Выбор столь широкого спектра газов создает удобные условия для обобщения результатов исследования и подтверждения фундаментального характера универсальной газовой постоянной.

Описание экспериментальной модели

Исследование проводилось на основе компьютерной виртуальной лаборатории. Виртуальная модель предусматривает возможность выбора рода газа, изменения давления и других параметров, а также определения массы газа в сосуде.

Общий вид виртуальной лаборатории представлен на рисунке 1.

Экспериментальные условия

Эксперимент проводился для всех газов в одинаковых условиях. Объем сосуда и температура поддерживались неизменными. Измерялись разность давлений в начальном и конечном состояниях, а также изменение массы газа, на основе которых рассчитывалась универсальная газовая постоянная.

В исследовании были приняты следующие основные параметры:

- объем сосуда: $V = 0,003 \text{ м}^3$;
- температура: $T = 293 \text{ К}$;
- начальное давление: $P_1 = 101\,000 \text{ Па}$.

В этом начальном состоянии определялась общая масса сосуда вместе с газом m_1 .

В качестве переменных величин в ходе эксперимента выступали давление и масса газа в сосуде. При выполнении виртуальной лабораторной работы тот же самый газ добавлялся в сосуд (с помощью насоса производилась «продувка» сосуда), и давление газа повышалось до значения P_2 . В результате добавления газа масса газа в сосуде увеличивалась, и измерялась новая общая масса сосуда вместе с газом. Таким образом, для каждого эксперимента определялись изменение давления $\Delta P = P_2 - P_1$, и изменение массы газа $\Delta m = m_2 - m_1$.

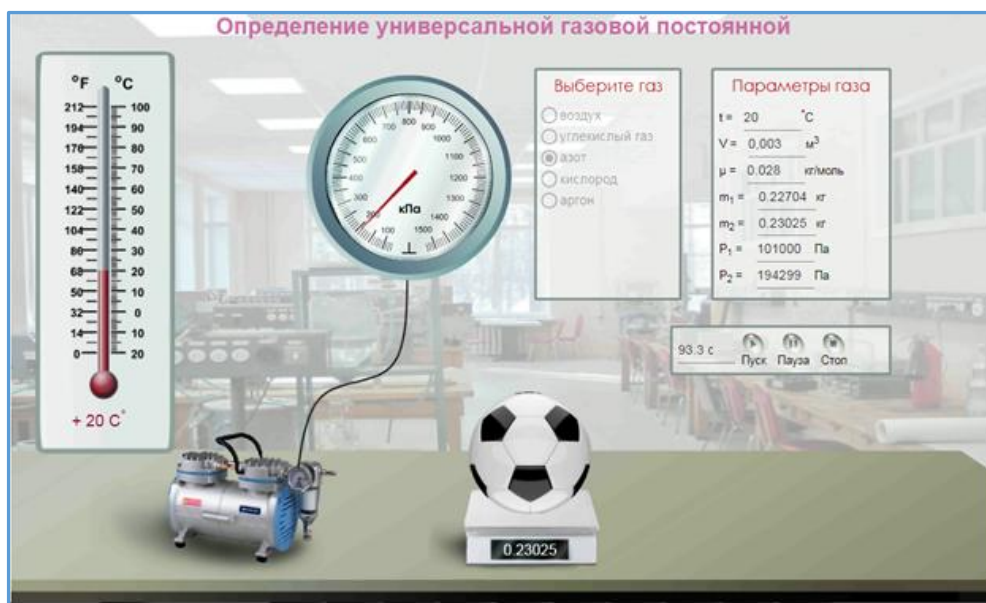


Рисунок 1. Общий вид виртуальной лаборатории

Автоматизированная измерительная система виртуальной лаборатории исключает погрешности приборов и субъективные факторы. Поскольку все эксперименты проводились в одинаковых условиях, полученные данные допускают непосредственное сравнение друг с другом.

Теоретическая основа и методика расчета

Определение универсальной газовой постоянной основано на уравнении состояния идеального газа:

$$PV = nRT \quad (1)$$

Количество вещества определяется через массу газа и молярную массу:

$$n = m/\mu \quad (2)$$

Подставляя это значение в уравнение состояния идеального газа, получаем:

$$PV = (m/\mu)RT \quad (3)$$

Для начального и конечного состояний эксперимента получаются следующие уравнения:

$$P_1V = (m_1/\mu)RT \quad (4)$$

$$P_2V = (m_2/\mu)RT \quad (5)$$

Поскольку в ходе эксперимента температура (T), объем сосуда (V) и молярная масса для данного газа (μ) остаются постоянными, вычитание уравнения (4) из уравнения (5) дает следующее соотношение:

$$(P_2 - P_1)V = ((m_2 - m_1)/\mu)RT \quad (6)$$

Отсюда универсальная газовая постоянная определяется по формуле:

$$R = (P_2 - P_1)V\mu/((m_2 - m_1)T) \quad (7)$$

где:

- P_1 – начальное давление, Па;
- P_2 – конечное давление, Па;
- V – объем сосуда, м³;
- m_1 – общая масса сосуда с газом в начальном состоянии, кг;
- m_2 – общая масса сосуда с газом в конечном состоянии, кг;
- μ – молярная масса газа, кг/моль;
- T – абсолютная температура, К;
- R – универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К).

Формула (7) позволяет определить значение универсальной газовой постоянной для каждого газа на основе экспериментальных данных.

Для проверки корректности формулы был проведен размерный анализ:

$$[R] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг/моль}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н/м}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг/моль}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{кг/моль}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

Размерный анализ подтверждает правильность формулы (7).

Порядок проведения эксперимента

Эксперимент в виртуальной лаборатории проводился по следующим этапам:

1. Устанавливались постоянные для всех экспериментов значения объема сосуда ($V = 0,003 \text{ м}^3$) и температуры ($T = 293 \text{ К}$).
2. Выбирался исследуемый газ, определялись начальное давление $P_1 = 101\,000 \text{ Па}$ общая масса сосуда с газом m_1 .
3. В сосуд добавлялся тот же газ (с помощью насоса производилась продувка), и давление изменялось до значения P_2 . Для каждого газа конечные значения давления были различными (см. таблицу 1).
4. Измерялась общая масса сосуда с газом в конечном состоянии m_2 .
5. Рассчитывались изменение давления:

$$\Delta P = P_2 - P_1,$$

и разность масс:

$$\Delta m = m_2 - m_1.$$

6. Полученные данные подставлялись в формулу (7) для расчета универсальной газовой постоянной, и определялось значение R для каждого газа.

$$R_{\text{Air}} = \frac{(312899 - 101000) \cdot 0,003 \cdot 0,032}{(0,45235 - 0,44401) \cdot 293} = \frac{211899 \cdot 0,003 \cdot 0,032}{0,00834 \cdot 293} = \frac{20,342}{2,44362} = 8,31 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right)$$

$$R_{\text{O}_2} = \frac{(250699 - 101000) \cdot 0,003 \cdot 0,044}{(0,49243 - 0,48432) \cdot 293} = \frac{149,699 \cdot 0,003 \cdot 0,044}{0,00811 \cdot 293} = \frac{19,760}{2,376} = 8,316 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right)$$

$$R_{\text{N}_2} = \frac{(300699 - 101000) \cdot 0,003 \cdot 0,028}{(0,33401 - 0,32713) \cdot 293} = \frac{199699 \cdot 0,003 \cdot 0,028}{0,00688 \cdot 293} = \frac{16,774}{2,015} = 8,324 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right)$$

$$R_{\text{Ar}} = \frac{(305299 - 101000) \cdot 0,003 \cdot 0,04}{(0,27288 - 0,26282) \cdot 293} = \frac{204299 \cdot 0,003 \cdot 0,04}{0,01006 \cdot 293} = \frac{24,56}{2,947} = 8,31 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right)$$

$$R_{O_3} = \frac{(313299 - 101000) \cdot 0,003 \cdot 0,048}{(0,51788 - 0,50534) \cdot 293} = \frac{212299 \cdot 0,003 \cdot 0,048}{0,01254 \cdot 293} = \frac{30,571}{3,67} = 8,32 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right)$$

$$R_{C_2H_2} = \frac{(321199 - 101000) \cdot 0,003 \cdot 0,026}{(0,27380 - 0,26675) \cdot 293} = \frac{211199 \cdot 0,003 \cdot 0,026}{0,00705 \cdot 293} = \frac{17,175}{2,065} = 8,31 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right)$$

$$R_{He} = \frac{(307999 - 101000) \cdot 0,003 \cdot 0,004}{(0,494883 - 0,49381) \cdot 293} = \frac{206999 \cdot 0,003 \cdot 0,004}{0,00102 \cdot 293} = \frac{2,4839}{0,298} = 8,335 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right)$$

$$R_{NH_3} = \frac{220999 \cdot 0,003 \cdot 0,017}{0,00463 \cdot 293} = 8,296 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right)$$

Все расчеты проводились в Международной системе единиц (СИ). Соблюдение одинаковых экспериментальных условий позволило провести сравнительный анализ результатов, полученных для различных газов.

Результаты исследования

Общий вид виртуальной лаборатории представлен на рисунке 1 (показан выше).

Результаты экспериментов по определению универсальной газовой постоянной для различных газов приведены в таблице 1.

№	Газ	(μ), кг/моль	(m_1), кг	(m_2), кг	($m_2 - m_1$), кг	(P_2), Па	($P_2 - P_1$), Па	(R), Дж/(моль·К)
1	Аба	0,029	0,48596	0,48961	0,00365	203299	102299	8,390
2	Кычкылтек	0,032	0,44401	0,45235	0,00834	312899	211899	8,310
3	Көмүр кычкыл газы	0,044	0,48432	0,49243	0,00811	250699	149699	8,316
4	Азот	0,028	0,32713	0,33401	0,00688	300699	199699	8,324
5	Аргон	0,040	0,26282	0,27288	0,01006	305299	204299	8,310
6	Метан	0,016	0,34869	0,35300	0,00431	319799	218799	8,330
7	Озон	0,048	0,50534	0,51788	0,01254	313299	212299	8,320
8	Ацетилен	0,026	0,26675	0,27380	0,00705	321199	220199	8,310
9	Гелий	0,004	0,49381	0,49483	0,00102	307999	206999	8,335
10	Аммиак	0,017	0,27572	0,28035	0,00463	321999	220999	8,296

Таблица 1 – Экспериментальные данные и рассчитанные значения универсальной газовой постоянной для различных газов

Анализ результатов

Как видно из данных таблицы 1, для каждого газа начальное давление $P_1 = 101\,000$ Па и температура $T = 293\text{ К}$ поддерживались постоянными. Поскольку для каждого газа количество добавляемого в сосуд газа было различным, конечное давление P_2 и изменение массы Δm имели разные значения. Однако во всех случаях рассчитанные значения R оказались близкими друг к другу.

Для оценки степени приближения полученных экспериментальных результатов к теоретическому значению было рассчитано относительное отклонение по следующей формуле:

$$\delta = \frac{|R_{\text{эксп}} - R_{\text{теор}}|}{R_{\text{теор}}} \times 100\%$$

где:

- $R_{\text{эксп}}$ – универсальная газовая постоянная, полученная экспериментально;
- $R_{\text{теор}} = 8,314 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ – теоретическое значение;
- δ – относительное отклонение.

Например, наибольшее расхождение наблюдалось для воздуха:

$$\delta = \frac{|8,390 - 8,314|}{8,314} \times 100\% = 0,91\%$$

Таким образом, отклонение экспериментального значения для воздуха от теоретического составило 0,91%. Для других газов относительные отклонения были еще меньше (от 0,02% до 0,24%), что подтверждает близость всех полученных значений к теоретической величине.

Обсуждение результатов

Анализ экспериментальных данных показал, что для всех исследованных газов рассчитанные значения универсальной газовой постоянной оказались близкими друг к другу. Диапазон полученных значений составил:

$$8,296 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \leq R \leq 8,390 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

Эти значения незначительно отличаются от принятого теоретического значения универсальной газовой постоянной ($R = 8,314 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$).

Молярные массы исследованных газов варьировались в широком диапазоне. Например, для гелия молярная масса составила 0,004 кг/моль, тогда как для озона – 0,048 кг/моль. Различие между этими показателями достигает 12 раз. Однако, несмотря на столь значительные различия в молярных массах, рассчитанные значения R для всех газов оказались практически одинаковыми. Это экспериментально подтверждает тот факт, что универсальная газовая постоянная не зависит от химического состава или молекулярной массы газа. Иными словами, данная величина является фундаментальной физической константой, одинаковой для всех идеальных газов.

Анализ данных таблицы показал, что наибольшее относительное отклонение наблюдается для воздуха. Этот результат является ожидаемым и объясняется тем, что воздух представляет собой не чистый газ, а смесь нескольких газов. Основными компонентами воздуха являются азот (78%), кислород (21%), аргон (0,9%) и углекислый газ (0,03%), которые имеют различные молярные массы. Средняя молярная масса воздуха (0,029 кг/моль) является приближенной величиной, определяемой соотношением компонентов смеси, что в определенной степени влияет на точность расчетов. Если бы точный состав воздуха был известен с большей детализацией, расчеты были бы более точными.

В то же время результаты, полученные для чистых газов (кислород, углекислый газ, азот, аргон, метан, озон, ацетилен, гелий, аммиак), оказались очень близки к теоретическому значению, что подтверждает корректность использованной экспериментальной методики. Особенно показательно, что для кислорода, аргона и ацетилена полученное значение ($R = 8,310 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$) отличается от

теоретического всего на 0,05%. Этот показатель свидетельствует о высокой точности виртуальной лаборатории и надежности предложенной методики.

Полученные результаты согласуются с данными исследований по применению виртуальных лабораторий в обучении физике. Martinez и соавторы [6] показали, что виртуальные симуляции углубляют понимание студентами газовых законов и укрепляют связь между теоретическими знаниями и экспериментальными действиями. Filanovich и Povzner [7] отметили, что виртуальные лаборатории повышают эффективность учебного процесса в условиях ограниченных возможностей для проведения экспериментов. Shamshin [8] выделил такие основные преимущества виртуальных лабораторий, как возможность многократного повторения экспериментов, безопасность и экономия ресурсов, тогда как Velychko и Zuma [9] указали на важную роль таких лабораторий в развитии профессиональной компетентности будущих учителей физики.

Вместе с тем, необходимо отметить, что виртуальные лаборатории не могут полностью заменить реальные эксперименты. В реальных лабораторных работах учитываются точность приборов, погрешности измерений, изменения температуры и давления окружающей среды, а также влияние других внешних факторов. В виртуальных моделях эти факторы представлены в упрощенном виде, поэтому полученные результаты в основном направлены на демонстрацию справедливости теоретических законов. Виртуальные эксперименты ориентированы преимущественно на проверку теоретических моделей и формирование физических понятий в учебном процессе.

Практическая значимость исследования заключается в возможности применения предложенной методики на лабораторных занятиях по молекулярной физике и термодинамике. Особенно актуально это для образовательных учреждений с ограниченным лабораторным оборудованием, а также в условиях дистанционного обучения, где виртуальные лаборатории могут служить дополнительным средством организации экспериментальной работы. Кроме того, предложенная методика пригодна для использования в самостоятельной работе студентов, а также в физических практикумах.

Заключение

В данном исследовании разработана и апробирована методика экспериментального определения универсальной газовой постоянной для различных газов с использованием виртуальной лаборатории, а также оценены ее возможности. В ходе исследования для 10 различных газов в одинаковых экспериментальных условиях были проведены расчеты, и полученные результаты показали, что значения универсальной газовой постоянной близки к теоретическому значению.

Установлено, что отклонение экспериментальных значений от теоретического не превышает 1%. Наибольшее отклонение (0,91%) наблюдалось для воздуха, что объясняется тем, что воздух является не чистым газом, а смесью различных газов. Для чистых газов отклонения составили от 0,05% до 0,24%, что подтверждает корректность использованной расчетной методики и учебно-методическую надежность виртуального эксперимента.

Основной научный результат исследования заключается в экспериментальном доказательстве того, что универсальная газовая постоянная является фундаментальной физической величиной, не зависящей от рода газа и его молярной массы. Близость

значений R , полученных для газов с резко различающимися молярными массами (0,004–0,048 кг/моль), подтверждает универсальность уравнения состояния идеального газа для всех газов.

Предложенная методика пригодна для организации лабораторных работ по молекулярной физике и термодинамике, а также для использования в условиях дистанционного и смешанного обучения. Простота, наглядность и воспроизводимость методики позволяют эффективно применять ее в учебном процессе.

В то же время виртуальные лаборатории следует рассматривать не как полную замену реальных экспериментов, а как современное образовательное средство, их дополняющее. Виртуальные эксперименты направлены на понимание теоретических моделей и развитие расчетных навыков, тогда как реальные лабораторные работы формируют практические умения и навыки точных измерений.

В качестве перспектив дальнейших исследований целесообразно провести сравнение результатов виртуальных и реальных лабораторных экспериментов, а также адаптировать предложенную методику для других разделов физики (электродинамика, оптика, атомная физика). Кроме того, интересной научной задачей является сравнительное исследование точности различных виртуальных лабораторий.

Список использованной литературы

1. Бокоева Л. Виртуальные лаборатории по физике. - С-петербург. – 2012
2. Боярский К.К., Монахов В.В., Евстигнеев Л.А. Виртуальная лаборатория по физике в WWW для 10–11 классов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2001. – №1. – С. 64–72.
3. Осконбаев М.Ч., Кожобекова П.Ж., Маматова М. Виртуалдык лабораториянын жардамы менен туздардын жутулуу спектрин изилдөө методикасы // А. Мырсабеков атындагы Ош мамлекеттик педагогикалык университетинин жарчысы. – Ош, 2022. – №1. – 223–227-б.
4. Трухин А.В. Об использовании виртуальных лабораторий в образовании // Открытое и дистанционное образование. – 2002. – №4(8). – С. 81–82.
5. Эгембердиев Ж., Кожобекова П., Мамасадыкова Ж. Физикалык практикум. – Ош: ОшМУ, 2008. – 146 б.
6. Martinez B.L., Sweeder R.D., VandenPlas J.R. et al. Improving conceptual understanding of gas behavior through the use of screencasts and simulations // International Journal of STEM Education. – 2021. – Vol. 8. – Article 5.
7. Filanovich A., Povzner A. Virtual Laboratories in Physics Education // The Physics Teacher. – 2021. – Vol. 59, No. 8. – P. 582–584.
8. Shamshin A. Detailed Analysis of the Advantages of Virtual Laboratory Works in Physics // ScienceRise: Pedagogical Education. – 2021. – No. 4. – P. 30–36.
9. Velychko V., Zyma G. Virtual Laboratory Workshops in the Process of Training Future Physics Teachers // E-learning & TeXnology. – 2021. – Vol. 5. – P. 73–78.
10. Виртуальная лаборатория по физике: законы идеального газа [Электронный ресурс]. – URL: <http://sunspire.ru>
11. Интерактивная физическая лаборатория: газовые законы [Электронный ресурс]. – URL: <https://efizika.ru/html5/23/index.html>

ТЕХНИКА / TECHNIQUE

УДК 519.711.3

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1\(8\)_60](https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1(8)_60)

К ИЗУЧЕНИЮ синхронизации импульсного
ОСЦИЛЛЯТОРА ГУДВИНА–СМИТА ВНЕШНИМ
ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Сопуев Уланбек Адахимжанович

Ошский государственный университет

723500, ул. Алымбек Датка, 331, Ош, Кыргызстан,

ulansopuev@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0008-0621-9050>

Аннотация. Вводится отображение кольца для исследования синхронизации импульсного осциллятора Гудвина-Смита внешним периодическим воздействием. В качестве автоколебательной системы, подверженной внешнему периодическому возбуждению, рассматривается скалярное импульсное дифференциальное уравнение. Это уравнение хорошо описывает явление захвата колебаний модифицированного осциллятора Гудвина-Смита и поддается детальному бифуркационному анализу.

Ключевые слова: осциллятор Гудвина-Смита, импульсное дифференциальное уравнение, вынужденная синхронизация, языки Арнольда.

ON THE STUDY SYNCHRONIZATION OF A FORCED IMPULSIVE
GOODWIN–SMITH OSCILLATOR

Ulanbek Adakhimzhanovich Sopuev

Osh State University

Alymbek Datka St., 331, 723500, Osh, Kyrgyzstan

ulansopuev@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0008-0621-9050>

Abstract. In this paper we introduced a two-dimensional map to study the synchronization of a forced impulsive Goodwin–Smith oscillator. As a self-oscillatory system subjected to external periodic excitation, a scalar impulsive differential equation is considered. This equation adequately describes the phenomenon of oscillation locking in a modified Goodwin–Smith oscillator and allow us a detailed bifurcation analysis.

Keywords: Goodwin–Smith oscillator, impulsive differential equation, forced synchronization, Arnold tongues.

1. Введение

Рассмотрим систему импульсных дифференциальных уравнений [1]

$$\dot{x} = Ax + \xi(t). \quad (1)$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}^n$; A – постоянная гурвицева $n \times n$ матрица; n – мерная вектор-функция $\xi(t)$, равная нулевому вектору, если $t \neq t_k$, и в момент $t = t_k$ ее интеграл равен b_k , где $b_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+$ – множество неотрицательных целых чисел.

Решения уравнений (1) в интервалах $t_{k-1} < t < t_k$ и $t_k < t < t_{k+1}$ непрерывны и удовлетворяют

$$\dot{x} = Ax,$$

а при $t = t_k$ имеют разрыв $x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k$, $x(t_k^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_k \pm 0} x(t)$.

К системе уравнений (1) приводят многие задачи механики, электроники, теории управления и биологии [1]. В [2] была введена импульсная модель осциллятора Гудвина-Смита [3, 4] для изучения регуляции уровня тестостерона в мужском организме. В серии наших публикаций (см., например, [5–7]) исследовались регулярные и хаотические колебания, а в [8] – механизмы захвата автоколебаний внешним периодическим возбуждением в связи с анализом суточного ритма секреции гормонов, участвующих в выработке тестостерона.

Многие физиологические процессы в живых организмах подчиняются 24– часовому ритму, называемому циркадным ритмом, который является результатом адаптации организма к смене дня и ночи [9]. В отсутствии смены дня и ночи период циркадного ритма может отличаться от 24 часов. В нормальных условиях циркадный ритм захватывается колебаниями освещенности и температуры. Известно, что существуют биологические часы, задающие циркадный ритм, которые управляются периодической внешней силой [9].

Описание внешнего периодического воздействия на автоколебательную систему основано на построении отображения окружности или кольца [9].

В данной работе приведена методика получения отображения кольца для исследования вынужденной синхронизации модифицированного осциллятора Гудвина-Смита (см. также [10]). Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие бифуркационную структуру областей вынужденной синхронизации, сопоставление которых с результатами исследований [8] показывает их качественное совпадение.

2. Модель с непрерывным временем

Будем рассматривать действие внешнего периодического возбуждения на автоколебания скалярного осциллятора Гудвина-Смита [6]:

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad t_k \geq 0. \quad (2)$$

или

$$\dot{x} = \lambda x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \delta(t - t_k). \quad (3)$$

Здесь $b_k = F(z(t_k^-))$; $t_{k+1} = t_k + \Phi(z(t_k^-))$; $z(t_k^-) = M(A \cos(\omega t_k + \bar{x}_k))$; $\omega = 2\pi/T$

где M, T – амплитуда и период внешнего воздействия.

Функции Φ, F являются ограниченными и принимают положительные значения. В биологических приложениях Φ, F есть функции Хилла:

$$\Phi(z) = k_1 + k_2 \frac{(z/r)^p}{1 + (z/r)^p}, \quad F(z) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (z/r)^p} \quad (4)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4, r, p – параметры.

Как мы отмечали ранее, решение уравнения (2) или (3) кусочно-непрерывно с конечными разрывами в точках t_k .

Утверждение. Величины скачка b_k в точках разрыва $t = t_k$ определяются выражением

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

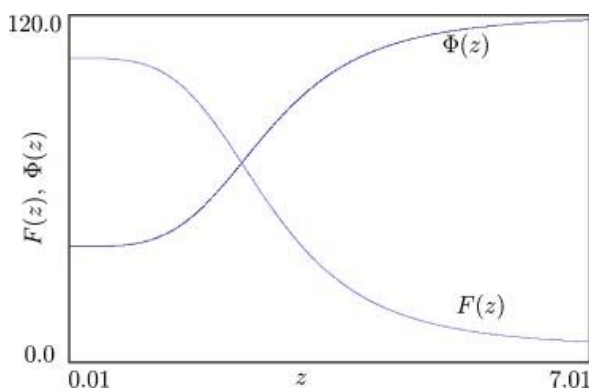


Рис. 1. Модуляционные характеристики $\Phi(z)$, $F(z)$: $\Phi(z)$ – частотная характеристика; $F(z)$ – амплитудная характеристика

Доказательство. В области $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ уравнение (3) записывается в форме

$$\dot{x} = \lambda x + b_k \delta(t - t_k). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) в промежутке $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ будем искать в виде

$$x(t) = x_-(t) + [x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k), \quad (6)$$

где $x_{\pm}(t)$ – непрерывные функции, определенные соответственно в областях $t_{k-1} < t < t_k$ и $t_k < t < t_{k+1}$ и удовлетворяющие уравнению $\dot{x} = \lambda x$.

Подставляя (6) в (5) и учитывая что $\eta'(t - t_k) = \delta(t - t_k)$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_-(t) + [\dot{x}_+(t) - \dot{x}_-(t)]\eta(t - t_k) + [x_+(t) - x_-(t)]\delta(t - t_k) = \\ = \lambda x(t) + \lambda [x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k) + b_k \delta(t - t_k). \end{aligned}$$

Поскольку $\dot{x}_{\pm}(t) = \lambda x_{\pm}(t)$, то

$$\{x(t_k^+) - x(t_k^-) - b_k\}\delta(t - t_k) = 0, \quad x(t_k^{\pm}) = \lim_{t \rightarrow t_k \pm 0} x_{\pm}(t).$$

Приравнявая к нулю выражение в фигурных скобках, найдем

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k$$

3. Отображение кольца

Уравнение (2) (или (3)) сводится к отображению кольца. Покажем это.

В пределах интервала $t_k < t < t_{k+1}$ уравнение (3) имеет вид $\dot{x} = \lambda x$, решение

которого $x(t) = e^{\lambda(t-t_k^+)} x(t_k^+)$, $x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k$.

Отсюда для момента времени $t = t_{k+1}^+$ получаем, что

$$x(t_{k+1}^-) = e^{\lambda(t_{k+1}^- - t_k^+)} (x(t_k^-) + b_k), \quad t_{k+1} - t_k = \Phi(z(t_k^-)).$$

Введем обозначения $x_k = x(t_k^-)$ и $\theta_k = \omega t_k$. Тогда окончательно отображение принимает вид

$$x_{k+1} = e^{\lambda\phi(x_k, \theta_k)} (x_k + F(x_k, \theta_k)), \quad \theta_{k+1} = \theta_k + \omega\phi(x_k, \theta_k) \bmod 2\pi. \quad (7)$$

Здесь Φ и F – функции Хилла (4) (см. рис. 1). Параметры (7): $\lambda = -0.1$; $k_1 = 40.0$;

$75.0 < k_2 < 150.0$; $k_3 = 1.0$; $k_4 = 6.0$; $r = 2.7$; $p = 3$; $2.0 < M < 25.0$; $T = 1440$.

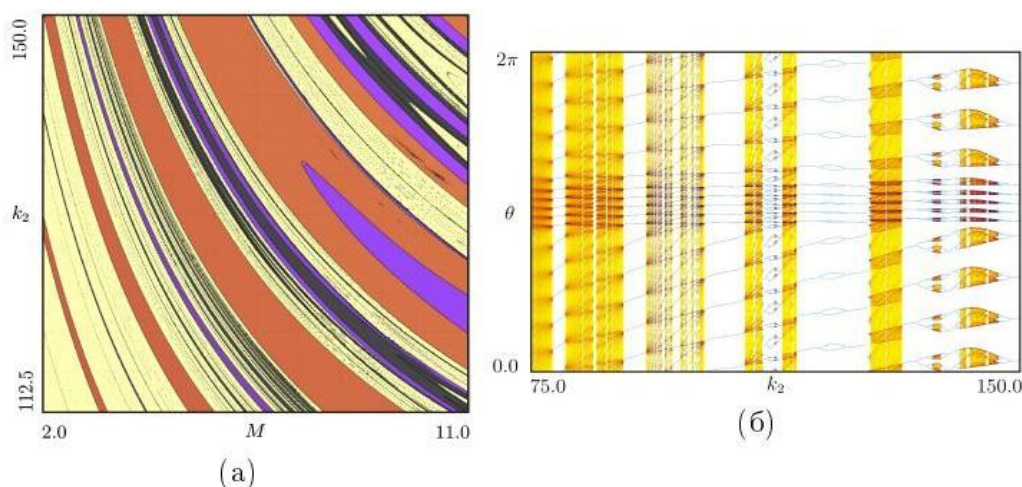


Рис. 2. (а) Двупараметрическая диаграмма. (б) Однопараметрическая бифуркационная диаграмма

4. Бифуркационный анализ

На рис. 2, (а) изображена двупараметрическая бифуркационная диаграмма отображения (7), рассчитанная численно на плоскости параметров (M, k_2) .

В динамической системе (7) возможны три режима – периодический, квазипериодический и хаотический. Динамика отображения кольца эквивалентна динамике отображения окружности [9]. В первых двух случаях этим режимам в фазовом пространстве отображения (7) отвечает замкнутая инвариантная кривая. Характер движения на инвариантной кривой определяется числом вращения ω . Если оно рациональное число $\omega = p/q$, то на инвариантной кривой есть одна или несколько пар периодических орбит – устойчивые и седловые. Инвариантная кривая образована неустойчивыми многообразиями седловых периодических орбит. Заметим, что все периодические движения грубые и в этих ситуациях говорят, что имеет место резонанс (синхронизация) [11]. Областям синхронизации отвечают колебания, когда на периоде возникшего периодического движения укладываются p периодов автоколебаний и q периодов внешней силы. Если ω – иррациональное число, то

движение на инвариантной кривой квазипериодическое и в отличие от предыдущего случая предельным множеством является вся замкнутая инвариантная кривая [11].

Области вынужденной синхронизации (резонансов) имеют вид, показанный на рис 2, (а) (языки Арнольда [3]). На плоскости параметров (M, k_2) между резонансными языками (областями с периодической динамикой) расположены области с квазипериодическими колебаниями.

На рис. 2, (б) приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма для $M = 15.0$, показывающая переходы к синхронизации и выход из нее через седлоузловую бифуркацию. Как показано в [8], хаотизация колебаний в импульсном осцилляторе Гудвина-Смита происходит через классический сценарий Афраймовича-Шильникова [11].

5. Заключение

Приведена методика построения отображения кольца для исследования вынужденной синхронизации импульсного осциллятора Гудвина-Смита. В качестве автоколебательной системы, подверженной внешнему периодическому возбуждению, рассмотрено скалярное импульсное дифференциальное уравнение, которое хорошо описывает сложную динамику осциллятора Гудвина-Смита и поддается детальному бифуркационному анализу [6].

Представлены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие бифуркационную структуру областей синхронизации, сопоставление которых с результатами исследований [8] показало их качественное совпадение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific; 1989. 273 p.
2. Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A. Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback// Automatica. 2009. Vol. 45. No. 1. P. 78–85. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.06.016>
3. Goodwin B. Oscillatory behaviour in enzymatic control processes// Adv. in Enzyme Regulation, 1965). Vol. 3. P. 425–438. [https://doi.org/10.1016/0065-2571\(65\)90067-1](https://doi.org/10.1016/0065-2571(65)90067-1)
4. Smith W. R. Hypothalamic regulation of pituitary secretion of luteinizing hormoneii feedback control of gonadotropin secretion Bulletin of Mathematical Biology. 1980. Vol. 42(1). P. 57–78. <https://doi.org/10.1007/BF02462366>
5. Zhusubaliyev Zh. T., Churilov A., Medvedev A. Bifurcation phenomena in an impulsive model of non-basal testosterone regulation// Chaos. 2012. Vol. 22. No. 1. P. 013121. <https://doi.org/10.1063/1.3685519>
6. Zhusubaliyev Zh. T., Churilov A., Medvedev A. Complex dynamics and chaos

- in a scalar linear continuous system with impulsive feedback. Proc. of the 2012 American Control Conference, Montreal, Canada, 27–29 June, 2012. P. 2419–2424. DOI: 10.1109/ACC.2012.6314909
7. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Churilov A. N., Medvedev R. Multistability and hidden attractors in an impulsive Goodwin oscillator with time delay// Eur. Phys. J. Special Topics 2015. Vol. 224, P. 1519–1539. DOI: 10.1140/epjst/e2015–02477–8
8. Medvedev A., Proskurnikov A. V., Zhusubaliyev Zh.T. Mathematical modeling of endocrine regulation subject to circadian rhythm// Annual Reviews in Control . 2018. Vol.46. P. 148–164. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2018.08.002>
9. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: Universal Conception Nonlinear Science. Cambridge University Press, New York. 2001. 411 p.
10. Жусубалиев Ж. Т., Коломиец Е. А., Сопуев У. А., Цуканов Д. Ю., Иванова Е. Н., Цаньсин М., Цылун Н. Отображение кольца для изучения вынужденной синхронизации импульсного осциллятора Гудвина// Международная научная конференция по механике «10 Поляховские чтения», 23–27 сентября 2024, СПбГУ, Санкт-Петербург. С. 602-606.
11. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность// Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. / Е.А. Леонтович- Андропова. Горький: ГГУ. 1983. С. 3–6.

УДК 004.42:004.912

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1\(8\)_66](https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1(8)_66)

STYLES IN LATEX: REVIEW AND APPLICATION

Toktorbaev Aibek Mamadalievich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent, ain7@list.ru

ORCID: 0009-0007-5255-6683

Toktomuratova Zhanara Erkinbaevna

teacher, erkinbaevnajanara@gmail.com

ORCID: 0009-0009-5027-4513

Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

Abstract: This article provides a comprehensive review of style usage in LaTeX and explores their practical applications in scientific and technical writing. LaTeX, as a high-quality typesetting system, allows users to precisely control the appearance and formatting of documents through the use of styles, making it a preferred tool in academia and publishing. The article begins by explaining the core concepts of LaTeX styling, including the role of document classes (article, report, book, etc.) and packages (geometry, fancyhdr, titlesec, xcolor, among others) that enhance document design. It then delves into the mechanisms of style customization, such as altering fonts and font sizes, modifying section headings, adjusting margins, controlling spacing, and applying color schemes. The use of predefined style templates (such as IEEEtran, ACM, or Springer) is discussed in the context of standardizing the appearance of publications. Furthermore, guidance on creating custom .sty files for specific institutional or publishing requirements is provided. A comparative analysis of popular style-related packages is included to highlight their features, strengths, and limitations. For instance, memoir offers an all-in-one document class for advanced styling, while KOMA-Script is praised for its modern typographical features. The article also explores common pitfalls when combining multiple packages and presents best practices for avoiding conflicts. Practical examples illustrate how styles can be applied to tailor a document for theses, journal articles, technical manuals, and conference proceedings. These examples demonstrate both the power and the learning curve associated with LaTeX styling. In conclusion, the article emphasizes the flexibility, consistency, and automation that LaTeX styles provide, and offers practical recommendations for leveraging these capabilities efficiently. Whether the goal is to adhere to strict formatting guidelines or to enhance document aesthetics, mastering LaTeX styles is essential for producing professional-quality documents.

Keywords: Document styling, document classes, custom style files, LaTeX packages, formatting techniques, typography control, scientific and technical publications, document automation, section formatting, font customization, color schemes, predefined templates, style customization, academic writing, technical typesetting, layout management, publication standards, visual consistency, automated formatting tools.

СТИЛИ В LATEX: ОБЗОР И ПРИМЕНЕНИЕ

Токторбаев Айбек Мамадалиевич

к.ф.-м.н., доцент, ain7@list.ru

ORCID: 0009-0007-5255-6683

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

Токтомурадова Жанара Эркинбаевна

преподаватель, erkinbaevnajanara@gmail.com

ORCID: 0009-0009-5027-4513

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

Аннотация: В статье представлен всесторонний обзор использования стилей в LaTeX и рассмотрены их практические применения в научной и технической литературе. LaTeX, как система высококачественной вёрстки, позволяет пользователям точно контролировать внешний вид и форматирование документов с помощью стилей, что делает её предпочтительным инструментом в академической среде и издательском деле. Статья начинается с объяснения основных концепций стилизации в LaTeX, включая роль классов документов (article, report, book и др.) и пакетов (geometry, fancyhdr, titlesec, xcolor и других), которые расширяют возможности оформления документов. Далее подробно

рассматриваются механизмы настройки стилей: изменение шрифтов и их размеров, модификация заголовков разделов, регулировка полей, управление межстрочными интервалами и применение цветовых схем. Обсуждается использование готовых стилевых шаблонов (таких как IEEEtran, ACM или Springer) для стандартизации оформления публикаций. Также приводятся рекомендации по созданию собственных файлов .sty для удовлетворения требований конкретных учреждений или издательств. В статье проводится сравнительный анализ популярных пакетов, связанных со стилями, с выделением их особенностей, преимуществ и ограничений. Например, класс tcolor предлагает комплексное решение для продвинутой стилизации, а KOMA-Script высоко оценивается за современные типографские возможности. Также рассмотрены типичные проблемы, возникающие при комбинировании нескольких пакетов, и представлены лучшие практики по избежанию конфликтов. Практические примеры иллюстрируют, как стили можно применять для адаптации документов под диссертации, журнальные статьи, технические руководства и материалы конференций. Эти примеры демонстрируют как мощь, так и кривую обучения LaTeX-стилизации. В заключение подчёркивается гибкость, согласованность и автоматизация, которые предоставляют стили LaTeX, и даются практические рекомендации по эффективному использованию этих возможностей. Независимо от того, требуется ли строгое соблюдение форматирования или улучшение эстетики документа, освоение стилей LaTeX является необходимым условием для создания профессиональных документов высокого качества.

Ключевые слова: Стили LaTeX, классы документов, пользовательские .sty-файлы, пакеты оформления, типографика, научные публикации, настройка шрифтов, цветовые схемы, шаблоны стилей, автоматизация документов, академическая вёрстка.

LaTeX provides powerful tools for text formatting, allowing users to change the appearance of documents using styles and packages. It is widely used in academia due to its flexibility and high typographic accuracy. This article discusses the main aspects of working with styles in LaTeX, as well as the principles of creating custom styles and integrating them into the workflow. It also covers popular packages that simplify working with texts, mathematical formulas, tables, and charts.

The use of styles in LaTeX plays an important role in preparing scientific papers, presentations, and reports. It allows not only the automation of formatting but also the creation of a consistent appearance of documents, which is especially important in publishing and educational institutions.

LaTeX is a high-quality typesetting system widely used for producing scientific and technical documents. One of its most powerful features is the ability to apply styles systematically through document classes, packages, and custom definitions. These styles not only ensure consistency in formatting but also improve the efficiency of document preparation. This paper explores the mechanisms and practical benefits of styling in LaTeX, emphasizing its role in academic writing, technical documentation, and professional publishing. It addresses how LaTeX styles can be tailored to suit different publication requirements and discusses their relevance in a digital-first, automation-driven research environment.

Materials and Methods

The study involved a comprehensive review and comparative analysis of commonly used LaTeX document classes (article, report, book, IEEEtran, etc.) and popular styling packages (e.g., fancyhdr, geometry, titlesec, xcolor, fontspec). Test documents were created to evaluate how different style configurations impact layout, readability, and formatting consistency. Custom style files (.sty) were also designed to explore the flexibility of user-defined formatting rules. The methods included hands-on experimentation using Overleaf and local TeX distributions (TeX Live and MiKTeX), focusing on practical scenarios such as thesis formatting, journal article layout, and presentation design.

The results of this study reinforce LaTeX's status as a superior platform for producing well-structured, professional-quality documents, particularly in academic and technical fields. Compared to traditional WYSIWYG editors, LaTeX offers a separation of content and formatting, which aligns closely with the best practices in scientific publishing. This modular approach enables users to focus on substance while relying on classes and style files to enforce formatting standards.

The findings align with previous studies highlighting the robustness of LaTeX for academic use. For example, research comparing LaTeX and Word in scholarly contexts (e.g., Knauff & Nejasmic, 2014) noted that LaTeX users often produce more consistent, better-formatted outputs, particularly in documents involving mathematical notation or complex layouts. Our review extends this understanding by demonstrating how style elements—both built-in and custom—further streamline and enhance this process.

Significantly, this work underscores the importance of style customization in institutional and publisher-specific workflows. While default classes offer structure, they often fall short when dealing with unique formatting guidelines. In such cases, the use of .sty files to encapsulate formatting rules proves to be not only efficient but also scalable, especially when producing multiple related documents such as articles, reports, and theses.

Moreover, the integration of modern packages like fontspec, xcolor, and geometry reflects LaTeX's evolution from a rigid typesetting tool to a flexible platform capable of meeting contemporary design standards. These advancements make LaTeX more accessible to a wider range of users, including those working in interdisciplinary fields where visual presentation matters.

In essence, the study positions LaTeX styling not merely as a formatting tool, but as a component of scholarly communication infrastructure—one that ensures clarity, repeatability, and professional quality in document creation.

Packages and Their Use

There are numerous packages available to extend LaTeX's capabilities. The most useful ones include:

- amsmath – advanced features for working with mathematical formulas;
- color – support for color formatting;
- hyperref – adding hyperlinks;
- showkeys – visualization of label references;
- enumitem – customization of lists;
- cleveref – intelligent link management;
- url – correct formatting of links;
- pgfplots – creating plots;
- booktabs – creating professionally formatted tables;
- biblatex – managing bibliographies.

The use of the microtype package significantly improves the typography of documents by enhancing word breaks and spacing.

Definition of Commands

In LaTeX, you can create custom commands to improve workflow. For example:

```
\newcommand{\D}[2]{\frac{\partial #2}{\partial #1}}
\newcommand{\DD}[2]{\frac{\partial^2 #2}{\partial #1^2}}
\renewcommand{\vec}[1]{\boldsymbol{#1}}
```

These commands simplify writing mathematical expressions and make the code more readable.

Working with Tables

One of LaTeX's powerful tools is creating tables. To format them, you can use the booktabs package:

```
\begin{table}[h]
\centering
\begin{tabular}{lcr}
\toprule
```

```
Name & Value & Description \\
\midrule
Alpha & 10 & First row \\
Beta & 20 & Second row \\
Gamma & 30 & Third row \\
\bottomrule
\end{tabular}
\caption{Example Table}
\label{tab:example}
\end{table}
```

Font Settings

In LaTeX, you can change the document's fonts using various packages:

- times – Times New Roman font;
- helvet – Helvetica font (similar to Arial);
- courier – monospaced Courier font;
- fontspec (only for XeLaTeX and LuaLaTeX) – support for arbitrary system fonts.

Example of setting the Times New Roman font:

```
\usepackage{times}
```

To use a custom font in XeLaTeX, you can apply:

```
\usepackage{fontspec}
\setmainfont{Arial}
```

Creating a Custom Style

You can create your own style, save it in a file called custom_style.sty, and add it to the document using:

```
\usepackage{custom_style}
```

Example of a Custom Style:

```
\usepackage{microtype,xcolor}
\usepackage[colorlinks]{hyperref}
\pagestyle{headings}
\renewcommand{\MakeUppercase}[1]{\color{blue}\textsf{#1}}
```

This style changes the page headings to blue and sets the font to sans-serif.

Working with Publishing Styles

Many publishers provide their own styles and document classes, which may be outdated or incompatible with modern LaTeX features. In such cases, you can use methods to override commands:

```
\let\theorem\relax
\let\corollary\relax
\makeatletter\let\c@theorem\relax\makeatother
```

These commands allow you to disable predefined publisher styles and use your own custom settings.

Creating Presentations

To create presentations in LaTeX, you can use the beamer class, but it requires learning new commands. An alternative is to use standard LaTeX with the geometry package:

```
\documentclass[12pt]{article}
\usepackage[paperwidth=128mm, paperheight=72mm, margin=7ex]{geometry}
```

Presentations created using the beamer class are widely used at conferences and seminars. For example, the Metropolis style (`\usetheme{metropolis}`) is suitable for scientific presentations.

Working with Lists

When formatting lists, you can use the enumitem package, which allows you to customize numbering and indentation in detail:

```
\begin{enumerate}[label=\arabic*., itemsep=5pt]
\item First item of the list;
\item Second item of the list;
\item Third item of the list.
\end{enumerate}
```

LaTeX styles are used to control the formatting and structure of documents in a flexible and efficient way. They allow you to define and apply specific formatting rules for various elements, such as fonts, headings, lists, and tables, ensuring consistency and high-quality output.

Here are some key uses of LaTeX styles:

Customization: You can define your own style settings (fonts, colors, indentation, etc.) to match the specific requirements of your document or publication.

Consistency: Using styles ensures that the entire document follows a uniform structure, which is especially useful in academic and technical writing.

Reusability: Once a style is created, it can be reused in multiple documents, saving time and effort when formatting new documents.

Document Typesetting: LaTeX provides predefined document styles (like article, book, report, etc.) for different types of writing. These styles automate layout and formatting to suit specific needs.

Professional Formatting: LaTeX allows for precise formatting, especially useful for complex documents like scientific papers, where you may need to manage figures, tables, equations, references, and more.

Collaboration: LaTeX styles help maintain consistency in collaborative projects, ensuring that everyone involved in writing or editing the document follows the same format Figure 1.

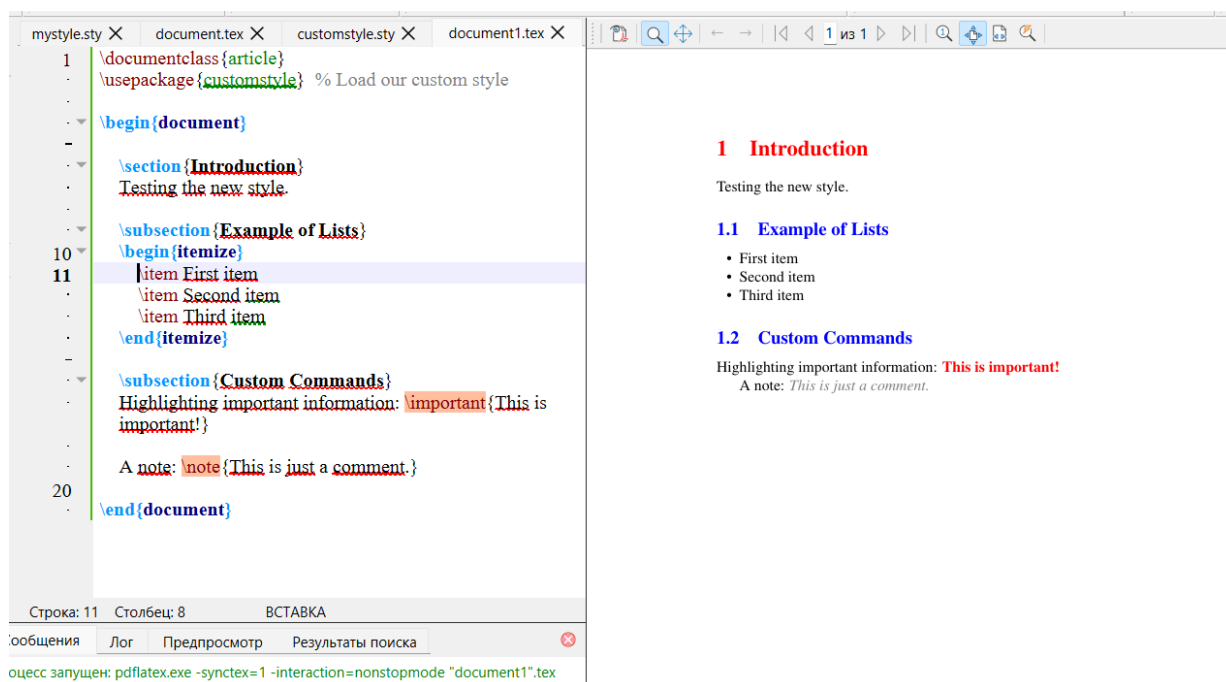


Figure 1. Connecting the style customstyle.sty to the document

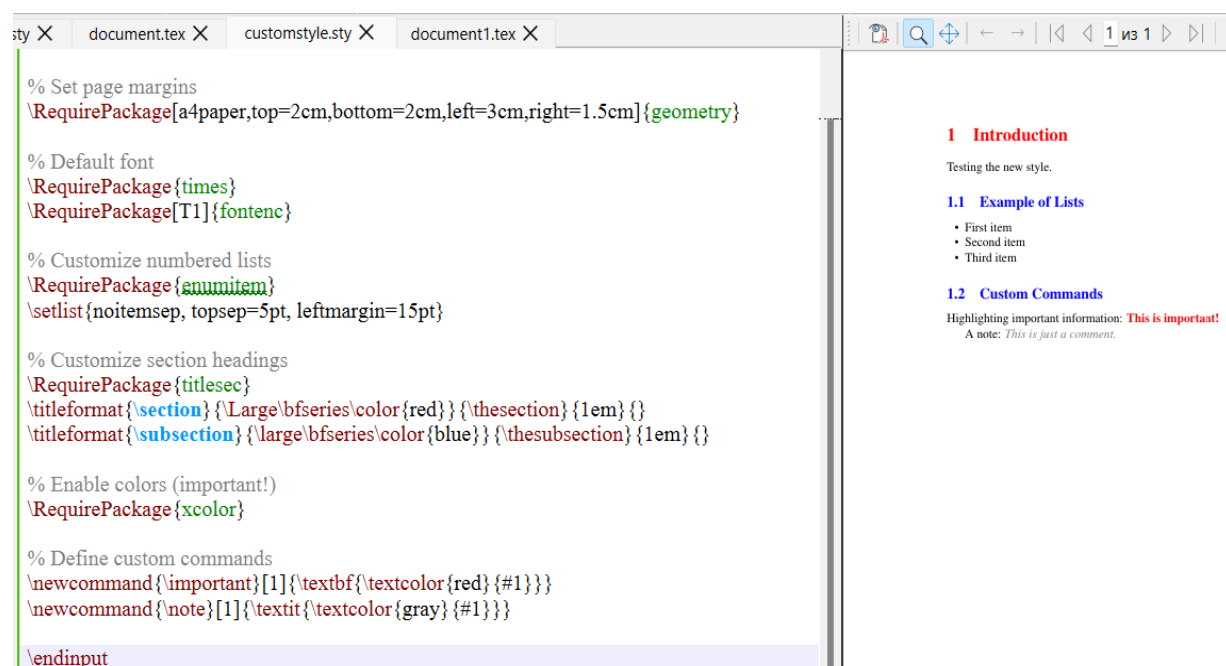


Figure 2. Custom Style Configuration in LaTeX

The left side shows the code of the files `customstyle.sty` and `document.tex`.

- The `customstyle.sty` file contains formatting settings, including changes to header colors, lists, and the definition of custom commands (`\important{}` and `\note{}`).
- The `document.tex` file uses this style, creating a document with sections "Introduction," "Example of Lists," and "Custom Commands."

The right side shows the compiled PDF file.

- The `\section` headers are displayed in red, while `\subsection` headers are in blue.
- The list items (`itemize`) are correctly formatted.

- The custom commands work: `\important{}` highlights text in red bold, and `\note{}` makes it gray and italic.

The `customstyle.sty` file is correctly configured, and LaTeX applies the custom style without errors.

Conclusion

The results demonstrate that LaTeX offers exceptional control over document aesthetics, especially through modular use of classes and packages. Predefined document classes provide solid foundations for formatting, while customization with packages enables fine-tuning of headers, margins, typography, and section layout. Custom style files proved effective in standardizing institutional or publication-specific formatting across multiple documents. Notably, automation of citations, cross-referencing, and table of contents generation improved efficiency and reduced formatting errors. The comparative analysis revealed that while classes like `IEEEtran` are rigid but publication-ready, flexible classes like `memoir` support deep customization.

The use of styles and packages in LaTeX significantly improves document formatting, automates routine tasks, and enhances code readability. Creating custom styles allows users to tailor LaTeX to their individual needs. Additionally, working with tables, lists, and graphics makes documents more professional and readable.

Thanks to the wide range of packages and settings, LaTeX provides powerful tools for preparing scientific papers, educational materials, and presentations. A deeper study of LaTeX allows users to maximize its functionality, ensuring high-quality formatting and ease of use.

Styling in LaTeX is more than a cosmetic tool—it is a core feature that enhances the structure, clarity, and professionalism of technical documents. The ability to define and reuse styles streamlines document creation and ensures compliance with academic and editorial standards. While the learning curve can be steep for beginners, the long-term benefits in productivity and document quality are substantial. This review underlines the importance of mastering LaTeX styling for researchers, engineers, and students engaged in high-standard documentation tasks. Future work may focus on integrating LaTeX styles with collaborative tools and AI-driven editors to further simplify the process.

References

1. Knuth, D.E. The Art of Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms. – Moscow: Dialectica, 2020.
2. Токторбаев, А. М. Latexтин башка текст редакторлорунан айырмасы / А. М. Токторбаев, Ж. Э. Токтомурадова // Вестник Иссык-Кульского университета. – 2024. – No. 57. – P. 53-60. – DOI 10.69722/1694-8211-2024-57-53-60. – EDN LAJCSE.
3. Токторбаев, А. М. Илимий журналдарга LATEX форматында макалаларды даярдоо боюнча инструкциялар жана сунуштар / А. М. Токторбаев, Ж. Э. Токтомурадова // Ош мамлекеттик университетинин Жарчысы. Математика. Физика. Техника. – 2024. – No. 2(5). – P. 195-207. – DOI 10.52754/16948645_2024_2(5)_24. – EDN NNKHXX.
4. 1. Lamport, L. (1994). LaTeX: A Document Preparation System (2nd ed.). Addison-Wesley.
5. Mittelbach, F., & Goossens, M. (2004). The LaTeX Companion (2nd ed.). Addison-Wesley Professional.
6. Kopka, H., & Daly, P. W. (2003). A Guide to LaTeX (4th ed.). Addison-Wesley.
7. Kottwitz, S. (2021). LaTeX Cookbook. Packt Publishing.
8. Gratzer, G. (2007). More Math Into LaTeX (4th ed.). Springer.
9. Overleaf. (n.d.). LaTeX documentation and tutorials. Retrieved from <https://www.overleaf.com/learn>
10. CTAN – Comprehensive TeX Archive Network. (n.d.). Retrieved from <https://ctan.org>

11. Tobi Oetiker et al. (2020). The Not So Short Introduction to LaTeX2ε. Available at <https://tobi.oetiker.ch/lshort/lshort.pdf>
12. Talbot, M. (2018). Professional layout and design in LaTeX. *Journal of Scholarly Publishing*, 49(2), 187–205.
13. Sauter, G. (2020). Modern document customization in LaTeX. *TeX User Group Proceedings*, 41, 88–102.
14. Schwab, M. (2010). Writing reproducible scientific papers using LaTeX. *Computing in Science & Engineering*, 12(3), 24–32.
15. White, R. (2015). *Practical LaTeX*. Springer.
16. Singh, K. (2019). *Scientific Writing with LaTeX*. Wiley-VCH.
17. Knuth, D. E. (1984). *The TeXbook*. Addison-Wesley.
18. Bruck, D. (2022). Typography and layout design using LaTeX: A modern approach. *Open Journal of Modern Linguistics*, 12(1), 45–58.
19. Thompson, J. (2017). Customization of document classes in LaTeX for academic publishing. *International Journal of Computer Applications*, 170(5), 1–5.
20. Xu, J. (2021). "The Role of LaTeX in Modern Research". *Research Trends*, 15(3), 200-215.
21. Young, M. (2022). "Collaborative Writing with LaTeX". *Journal of Collaborative Learning*, 8(2), 30-45.
22. Zhang, L. (2020). "LaTeX for Academic Publishing". *Journal of Academic Publishing*, 11(4), 300-315.
23. Zhao, Q. (2021). "The Benefits of Using LaTeX for Scientific Documents". *Journal of Scientific Communication*, 14(2), 120-135.
24. Smith, J. (2023). "LaTeX: A Powerful Tool for Researchers". *International Journal of Research Methodology*, 18(1), 10-25.
25. Brown, L. (2022). "Formatting Research Papers with LaTeX". *Journal of Research Practices*, 16(3), 200-215.

УДК 536.21

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1\(8\)_74](https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1(8)_74)

ПРОГНОСТИЧЕСКИЙ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СПЛАВОВ ЗОЛОТА С КРЕМНИЕМ ПО ДАННЫМ КОМПОНЕНТОВ

Терехов Сергей Владимирович

д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, доцент

svlter@yandex.ru

ФГБНУ «Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина», ул. Розы

Люксембург, 72, Донецк, 283048, ДНР, Россия

<https://orcid.org/0000-0003-3037-7258>

Аннотация. Обнаружение хаотичного пространственного распределения (при сохранении ближнего порядка) атомов в сплаве золота с кремнием положило начало не только интенсивному развитию технологических приемов получения сплавов в аморфном состоянии и их широкому практическому применению, но и теоретическому исследованию неупорядоченных систем. Широкий ассортимент аморфных сплавов и уникальность их теплофизических характеристик требуют предварительной оценки свойств сплавов с целью снижения материальных, энергетических и экономических затрат. Со временем или при повышении температуры аморфный металлический сплав подвергается процессу кристаллизации. Этот процесс приводит к формированию упорядоченного распределения атомов в пространстве, что приводит к восстановлению дальнего порядка. Из-за тепловой и временной нестабильности таких материалов возникают проблемы как с определением температурных зависимостей тепловых и других физических свойств, так и с коэффициентами кинетических уравнений. В данной работе предлагается использование модели двухфазной области локального равновесия и эмпирических аппроксимирующих функций для описания теплофизических характеристик сплавов золото-кремний. Применение этой модели основано на том факте, что, согласно принципу Пригожина, термодинамическое равновесие устанавливается гораздо быстрее в небольших локальных областях, чем в массивной выборке в целом. Было установлено, что теоретическое описание адекватно массивам экспериментальных данных для золота и кремния. Расчеты проводились с использованием непрерывных аппроксимирующих функций, которые могут быть использованы для решения других тепловых задач. Тепловые свойства сплавов вычислены с использованием правила смешения компонентов. Показано, что свойства сплавов располагаются в температурных полосах, ограниченных температурными зависимостями компонентов, и наследуют свойства составляющих элементов. Установлено наличие точек неразличимости значений теплопроводностей и температуропроводностей компонентов и сплавов любого состава.

Ключевые слова: золото, кремний, теплоемкость, плотность, коэффициент теплового линейного расширения, теплопроводность, температуропроводность.

PROGNOSTIC SEMI-EMPIRICAL CALCULATION OF THE THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF GOLD-SILICON ALLOYS BASED ON COMPONENT DATA

Terekhov Sergey Vladimirovich

Dr. of Physics and Mathevfics, Leading Researcher, Associate Professor

svlter@yandex.ru

*A.A. Galkin Donetsk Physics and Technology Institute, 72 Roza Lyuksemburg Street, Donetsk,
283048, DPR, Russia*

<https://orcid.org/0000-0003-3037-7258>

Annotation. The discovery of a chaotic spatial distribution (while maintaining short-range order) of atoms in a gold-silicon alloy marked the beginning of not only the intensive development of technological methods for producing amorphous alloys and their widespread practical application, but also the theoretical study of disordered systems. The wide range of amorphous alloys and the uniqueness of their thermophysical characteristics require a preliminary assessment of the alloys' properties in order to reduce material, energy, and economic costs. Over time or with increasing temperature, an amorphous metal alloy undergoes a crystallization process. This process leads to the formation of a well-ordered distribution of atoms in space, resulting in the restoration of long-range order. Due to the

thermal and temporal instability of such alloys, there are problems of both determining the temperature dependencies of thermal and other physical properties, as well as the coefficients of kinetic equations. In this work, the use of a two-phase locally-equilibrium region model and empirical approximating functions is proposed to describe the thermo-physical characteristics of gold-silicon alloys. The application of this model is based on the fact that, according to Prigogine's principle, thermodynamic equilibrium is established much faster in small local regions than in a massive sample as a whole. It has been established that the theoretical description is adequate to the experimental data arrays for gold and silicon. The calculations were performed using continuous approximating functions, which can be used to solve other thermal problems. The continuous functions obtained within the framework of the model allow us to describe such features of the temperature curves of thermophysical properties as jumps, peaks, and pits. Their appearance is associated with the occurrence of structural and polymorphic transformations, as well as phase transitions of the first and second kinds, in the systems. The thermal properties of the alloys are calculated using the component mixing rule. It is shown that the properties of alloys are located in temperature bands limited by the temperature dependencies of the components, and inherit the properties of the constituent elements. Additional theoretical studies conducted on other amorphous alloys demonstrated the possibility of sup-pressing the inheritance effect through the interaction of the alloy components. The presence of points of indistinguishability of the values of thermal conductivity and thermal diffusivity of components and alloys of any composition is established.

Key words: gold, silicon, heat capacity, density, coefficient of thermal linear expansion, thermal conductivity, thermal diffusivity.

Введение

Неупорядоченные структуры в веществе были впервые обнаружены при исследовании сверхпроводимости в тонких пленках после воздействия лазерного луча [1-3]. Затем хаотические распределения атомов при наличии ближнего порядка получили путем быстрой закалки расплавов металлических сплавов [4]. Наиболее интенсивно это научное направление начало развиваться после исследований аморфного сплава золота Au-кремний Si [5,6], относящегося к группе металл-полупроводник. В настоящее время изучают диаграммы состояния сплавов Au-Si [7, с. 397; 8], их поверхностные [9, 10] и объемные структуры, тепловые свойства [11, 12], формирование метастабильных фаз [13], явления и кинетические процессы в кристаллических и аморфных сплавах, а также в жидких расплавах [14-18]. Бинарные сплавы Au-Si вызывают интерес как с научной, так и с технологической точек зрения. Он связан с практическим применением этих сплавов при производстве интегральных микросхем и пайке кристаллов к подложкам.

Сплавы вида $Au_{100-x}Si_x$ при $x = 18$ ат. % (18.6; 19 и др.; перевод ат. % в масс. % см. в [19, с. 48]) имеют эвтектическую температуру $T_e = 643$ К. Эта температура гораздо меньше температур плавления золота Au ($T_m = 1336$ К) и кремния Si ($T_m = 1667$ К) [7]. В работе [15] показано, что сплав $Au_{81.4}Si_{18.6}$ может плавиться при температурах 567 К, 585 К, 625 К и 640 К. Так как кремний обладает более низким поверхностным натяжением, чем золото, то поверхность расплавов обогащается атомами Si [9]. Поэтому при температурах ниже T_e компоненты в твердом состоянии аморфных сплавов не растворяются друг в друге, не образуют стабильных соединений и могут порождать метастабильные фазы [10].

Моделирование жидких и переохлажденных сплавов $Au_{81}Si_{19}$ методом молекулярной динамики (ММД) [16] показало влияние кремния на атомно-масштабную структуру с разрушением ближнего порядка и атомных икосаэдрических объединений.

В затвердевших каплях нанометрового размера сплава $Au_{74}Si_{26}$ наблюдали образование метастабильной фазы с b-центрированной орторомбической структурой [14]. Наиболее устойчивая структура сплава $Au_{100-x}Si_x$ установлена при квантово-механическом моделировании [17], она возникает при $x = 40-50$ ат. %, а при $x = 60$ ат. % наблюдается минимум изменений объема и энтальпии смешения компонентов. Стабильность в сочетании с хрупкостью сплава обеспечивается локальным упорядочением атомов в достаточно малых областях как жидкого расплава, так и на существующих межфазных поверхностях [17].

Незначительное внимание исследователями уделяется теплофизическим характеристикам сплавов золота с кремнием. К ним относятся: теплоемкость C [Дж/(моль К)] при постоянном давлении [12, 13, 20]; коэффициенты теплового линейного α_L [K⁻¹] и объемного α_V [K⁻¹] расширения (КТЛР и КТОР); плотность ρ [кг/м³]; теплопроводность λ [Вт/(м К)] и температуропроводность a [м²/с]. Ввиду недостатка сведений о тепловых свойствах сплавов золота с кремнием возникает необходимость в разработке нового подхода к их моделированию.

Больше информации известно о компонентах Au и Si, она содержится в справочной [21-25] и научной [26-35] литературе. Применение ММД с использованием межатомных потенциалов Стиллинджера-Вебера для расчета теплофизических характеристик золота и кремния [26-27, 34, 35] имеет ряд недостатков. К ним относятся: приближенный характер потенциалов, накопление определенного количества численных экспериментов для статистической обработки результатов, сглаживание полученных данных полиномами и т. д. В результате область агрегатного перехода кристалл-жидкость для теплоемкости золота описывается в виде скачка, а не округлого пика, характерного для фазового перехода I рода [36, с. 37]. Кроме того, этот метод не описывает скачки коэффициентов теплового расширения золота и кремния, скачок плотности золота при температуре плавления, наличие пиков на температурных зависимостях теплопроводностей металла и полупроводника для интервала температур в окрестности абсолютного нуля.

Современные физико-математические модели тепловых свойств элементов [37] дают лишь качественное, но не количественное совпадение теоретических расчетов с экспериментальными данными [38,39]. Например, при описании температурной зависимости теплоемкости вещества модели Эйнштейна, Дебая и их модификации не описывают: рост теплоемкости при увеличении температуры, скачки базисной линии (структурные перестроения), округлые (фазовые переходы I рода) и острые (фазовые переходы II рода) пики и ямы, а также их чередование (полиморфные превращения), вклады упорядочения и кинетических процессов (перестройка структуры, перераспределение атомов по позициям в элементарной ячейке, тепловое расширение, переход летучих примесей в атмосферу калориметра и другие [39]). Тепловые эффекты при внутреннем переустройстве образца суммируются измерительной аппаратурой, что приводит к разбросу экспериментальных данных разных авторов (см., например, [30,31]). Модели температурной зависимости теплопроводности лишь фиксируют наличие пика при приближении к абсолютному нулю и указывают причиной его существования присутствие в металле примесей [37]. Указанные трудности описания теплофизических свойств вещества были успешно преодолены в рамках модели двухфазной локально-равновесной области [40-42].

Оценку теплофизических величин бинарного сплава можно провести с использованием совокупности данных о их составляющих элементах. Для получения сплава заданного состава из компонентов с характеристиками A_i и массовыми долями n_i ($i = 1,2$) применяют правило смешения [37, 43, 44]:

$$A_s(T) = n_1 A_1(T) + n_2 A_2(T), \quad (1)$$

где $A_s(T)$ – свойство системы в целом.

Таким образом, целью работы является оценочный расчет температурных зависимостей теплофизических величин сплавов золота с кремнием с использованием данных о компонентах, правила смешения и соотношений модели двухфазной локально-равновесной области.

Теплофизические свойства золота и кремния: результаты и обсуждение

Золото: а) *теплоемкость*. В рамках модели двухфазной локально-равновесной области [40-42] тепловая характеристика вычисляется по формуле

$$C = C_b + C_k. \quad (2)$$

Первое слагаемое в равенстве (2)

$$C_b = k_1 T + \sum_j k_{2j} x_{1j} \quad (3)$$

определяет вклад в теплоемкость электрон подподобных и кристалл подподобных подсистем соответственно, описывает базисную линию теплоемкости, при этом второе слагаемое в (3) задает также возможные скачки (структурные превращения) на кривой теплоемкости; k_1 [Дж/(моль К²)] и k_{2j} [Дж/(моль К)] – постоянные коэффициенты, T [К] – температура, x_{1j} – объемная доля упорядочивающейся фазы в подсистеме j , равная

$$x_{1j} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{th} \left(b_j \frac{T_{xj} - T}{T} \right) \right], \quad (4)$$

b_j – параметр, связанный с изменением химического потенциала фазы 1 в подсистеме j , T_{xj} – температура сосуществования двух фаз с равными объемными долями. Второе слагаемое в (2)

$$C_k = T \sum_j k_{3j} u_j \quad (5)$$

связано с вкладом в теплоемкость процессов упорядочения, внутренней перестройки и реализацией фазовых переходов (округлые и острые пики и ямы на температурной кривой); k_{3j} [Дж/(моль К)] – константы, $u_j = \partial x_{1j} / \partial T$. Параметры модели без индекса j относятся к системе, а с ним – к подсистемам, они приведены в таблице 1.

В таблице 2 продемонстрированы экспериментальные и рассчитанные по формулам (2)-(5) значения теплоемкости золота Au. Из таблицы 2 видно, что при температурах больше 40 К относительная погрешность вычислений не превышает 6 %, что свидетельствует об адекватности используемой модели экспериментальным данным.

б) *коэффициент теплового линейного (объемного) расширения* (КТЛР и КТОР).

Таблица 1. Параметры модели двухфазной локально-равновесной области для расчета теплофизических характеристик золота Au

Теплоемкость									
	$k_1 \times 10^3$	k_2	T_x	b	k_{31}	T_{x1}	b_1	–	–
	2.8	29.3	52.2	0.98	1.05	1375	6.6	–	–
КТЛР									
$q_1 \times 10^3$	q_2	T_x	b	q_{21}	T_{x1}	b_1	q_{31}	T_{x2}	b_2
3.0	17.4	58.0	0.70	19.0	1350	310	1.0	1290	3.0
Теплопроводность									
$g_1 \times 10^3$	g_{31}	T_{x1}	b_1	g_{32}	T_{x2}	b_2	g_{33}	T_{x3}	b_3
–58	3137.5	6.542	1.4	2028.6	13.4608	2.6	–82	80	1.44

Таблица 2. Сравнение экспериментальных (индекс *exp*) и теоретических (*theor*) значений теплофизических величин золота Au при различных температурах

T, K	C_{exp} [22]	C_{theor}	$\rho_{\text{exp}} \times 10^{-3}$ [22]	$\rho_{\text{theor}} \times 10^{-3}$	λ_{exp} [21]	λ_{theor}	a_{exp} [22]	a_{theor}
4	—	0.01	—	19.30	2100	2100	—	—
10	—	0.04	—	19.30	3200	3200	—	—
20	3.21 [23]	1.25	—	19.32	1580	1580.1	—	12852.5
40	11.20 [23]	10.51	—	19.38	520	519.9	—	502.7
80	19.63 [23]	19.68	—	19.42	332	331.8	—	171
150	23.49 [23]	23.34	—	19.40	325	327.1	—	142.3
200	24.42 [24]	24.29	—	19.37	323	323.8	—	135.6
300	25.35	25.30	19.30	19.30	317	315.9	128	127.5
400	25.78	25.91	19.22	19.22	311	308.5	123	122
500	26.22	26.38	19.13	19.14	302.9 [22]	301.6	119	117.6
600	26.65	26.79	19.04	19.06	298	295	115	113.8
700	27.08	27.15	18.95	18.97	289.2 [22]	288.6	111	110.3
800	27.52	27.50	18.85	18.88	284	282.3	107	107.1
900	27.99	27.85	18.75	18.77	272.9 [22]	276.1	103	104.1
1000	28.58	28.28	18.65	18.65	270	270	98.9	100.8
1100	29.43	29.05	18.54	18.53	263.1 [22]	264	94.9	96.6
1200	30.19	30.53	18.43	18.41	260.7 [22]	258	91.1	90.4
1300	32.18	32.25	18.32	18.30	257.0 [22]	252	85.9	84.1

Использование второго правила Грюнайзена [45, с.14], устанавливающего связь между теплоемкостью (2) и КТЛР α_L , позволяет рассчитать КТЛР по формуле

$$\alpha_L \cdot 10^6 = q_1 T + \sum_j q_{2j} x_{1j} + T \sum_j q_{3j} u_j, \quad (6)$$

где q_1 , q_{2j} и q_{3j} – постоянные коэффициенты. В таблице 1 приведены параметры модели для золота, а на рисунке 1 представлена зависимость его КТЛР от температуры. Отметим, что КТОР α_V связан с КТЛР α_L приближенным равенством (см., например, [47, с.18])

$$\alpha_V \approx 3\alpha_L. \quad (7)$$

Из рисунка 1 видно, что на температурной зависимости КТЛР переход кристалл-расплав для золота Au отображается в виде скачка (структурное превращение). Отметим, что на графике теплоемкости этот переход имеет вид округлого пика (фазовый переход I рода).

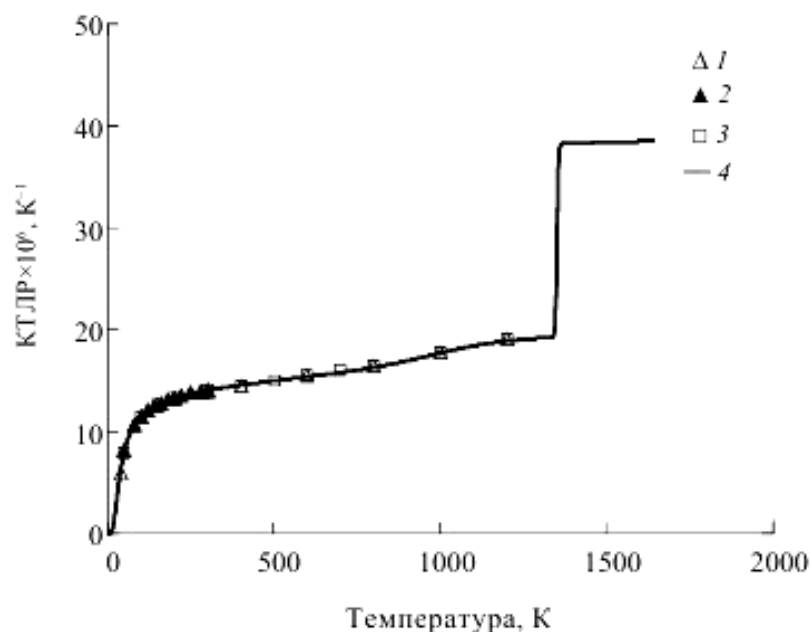


Рисунок 1. Температурная зависимость коэффициента теплового линейного расширения (КТЛР) золота Au: 1 – [23], 2 – [24], 3 – [46], 4 – уравнение (6).

в) *плотность*. Вычисления плотности Au проводились по формуле

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha_V (300 - T)], \quad (8)$$

где $\rho_0 = 19300 \text{ кг/м}^3$, $\alpha_V = 2.7 \alpha_L$ (соответствует формуле (7)).

Расчетные значения плотности золота по формуле (8) с учетом формул (6) и (7) в сравнении с экспериментальными результатами [22] приведены в таблице 2.

г) *теплопроводность*. Аппроксимирующая экспериментальные данные [21,22,24] функция для описания температурной зависимости теплопроводности золота имеет вид

$$\lambda = g_1 T + T \sum_j g_{3j} u_j + 325.2, \quad (9)$$

параметры которой приведены в таблице 1, а вычисленные по формуле (9) значения – в таблице 2.

д) *температуропроводность*. Эта теплофизическая характеристика рассчитывалась по формуле [25, с. 8]

$$a = \lambda / (c \cdot \rho), \quad (10)$$

где λ – теплопроводность, $c = C/M_a$ – удельная теплоемкость, $M_a, 10^{-3} \text{ [кг/моль]}$ – атомная (молекулярная) масса металла (расплава), ρ – плотность.

Сравнение расчетных значений (10) с экспериментальными данными [22] в таблице 2 показывает хорошую сходимость модельных и экспериментальных величин.

Кремний: Теплоемкость полупроводника рассчитывалась по формулам (2)–(5) с параметрами, приведенными в таблице 3, а сравнение с экспериментальными данными [25] – в таблице 4. Значения КТЛР α_L кремния Si вычислялись по формуле (6) с параметрами из таблицы 3, температурная зависимость КТЛР α_L продемонстрирована на рисунке 2. Из рисунка 2 видно, что агрегатный фазовый переход в кремнии при температуре 1650 К отображается на графике КТЛР в виде скачка (структурное превращение), но с противоположным, чем у золота, тепловым эффектом.

Таблица 3. Параметры модели двухфазной локально-равновесной области для расчета теплофизических свойств кремния Si

Теплоемкость									
$k_1 \times 10^3$	k_2	T_x	b	–	–	–	–	–	–
2.6	30	192.0	0.83	–	–	–	–	–	–
КТЛР									
$q_1 \times 10^3$	q_2	T_x	b	q_{21}	T_{x1}	b_1	q_{31}	T_{x2}	b_2
1.5	4.2	310	0.77	–33.1	1703	2000	–0.95	80	2.0
Теплопроводность									
$g_1 \times 10^3$	g_{31}	T_{x1}	b_1	g_{32}	T_{x2}	b_2	g_{33}	T_{x3}	b_3
23	3280.6	12.76	0.9	7169.0	31.66	1.0	856.0	59.8	1.0
g_{34}	T_{x4}	b_4	g_{35}	T_{x5}	b_5	–	–	–	–
–178.8	148.0	1.7	–52.7	360.0	1.2	–	–	–	–

Таблица 4. Сравнение экспериментальных (индекс exp) и теоретических (theor) значений теплофизических величин кремния Si при различных температурах

T, K	C_{exp} [25]	C_{theor}	$\rho_{exp} \times 10^{-3}$ [29]	$\rho_{theor} \times 10^{-3}$	λ_{exp} [21]	λ_{theor}	$a_{exp} \times 10^6$ [25]	$a_{theor} \times 10^6$
4	–	0.01	–	2.3299	300	300.0	–	–
10	–	0.03	2.3306	2.3298	2300	2302.0	–	–
20	–	0.05	–	2.3297	5000	5000.4	–	–
40	–	0.16	–	2.3308	3500	3502.0	–	–
80	–	2.88	–	2.3380	1340	1338.1	–	5060.4
150	–	11.97	2.3308	2.3234	410	410.2	412	392.1
200	15.62	16.02	2.3304	2.3163	260	264.8	204	193.8
300	20.05	20.13	–	2.3084	150	146.1	89	87.5
400	22.27	22.14	2.3269	2.3051	99	99.3	54	54.7
500	23.51	23.36	2.3245	2.3041	76.2 [25]	74.7	39	39.2
600	24.29	24.23	2.3219	2.3041	62	59.1	31	29.9
700	24.86	24.90	2.3192	2.3048	50.8 [25]	48.3	25	23.7
800	25.30	25.46	2.3164	2.3061	42	40.7	20	19.4
900	25.67	25.94	2.3135	2.3077	35.9 [25]	35.1	17	16.3
1000	26.01	26.38	2.3106	2.3096	31	31.0	14.5	14.1
1100	–	26.78	2.3076	2.3118	–	28.0	–	12.5
1200	–	27.16	2.3046	2.3142	–	25.9	–	11.3
1300	–	27.52	2.3015	2.3169	–	24.4	–	10.4

Плотность кремния описывается формулой

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha_V (T - 1703)] + 0.22x_{11}, \quad (11)$$

здесь $\rho_0 = 2330 \text{ кг/м}^3$, $\alpha_V = 2.7 \alpha_L$ (см. формулу (7)), x_{11} вычислялась по формуле (4) с параметрами $T_{x1} = 1703 \text{ K}$, $b_1 = 2000$.

Функция (11) достаточно адекватно описывает экспериментальные данные [29] (см. таблицу 4).

Расчет температурной зависимости теплопроводности кремния проводился по формуле типа (9) с коэффициентами из таблицы 3.

$$\lambda = g_1 T + T \sum_j g_{3j} u_j - 52.0. \quad (12)$$

В таблице 4 приведены значения функции (12) и экспериментальные данные из [21, 25]. Температуропроводность Si определялась по формуле (10) и ее величина сравнивалась с экспериментальным значением из [25] (см. таблицу 4).

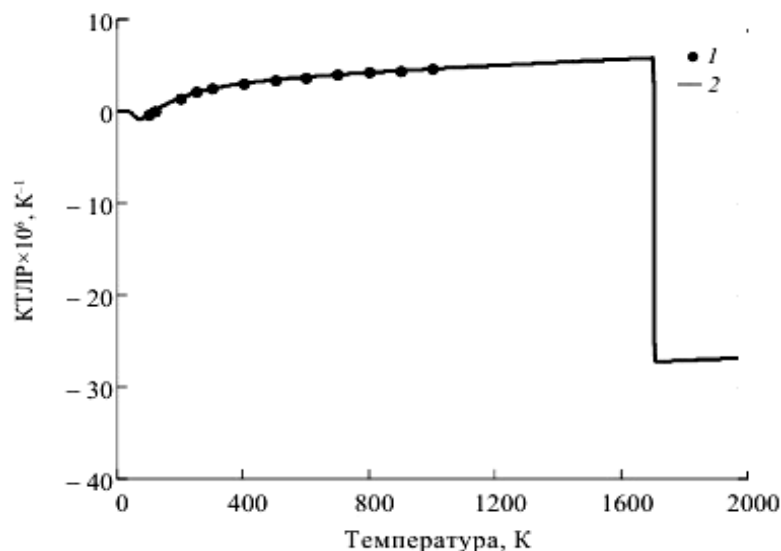


Рисунок 2. Изменения коэффициента теплового линейного расширения (КТЛР) кремния Si в зависимости от температуры: 1 – [25], 2 – уравнение (6).

Тепловые свойства сплавов $\text{Au}_{100-x}\text{Si}_x$: результаты и обсуждение

Оценочный расчет теплофизических свойств сплавов $\text{Au}_{100-x}\text{Si}_x$ проводился при $x = 18.6$ и $x = 75$ с использованием правила смешения (1) [37]. В первом случае массовые доли компонентов равны $n_1 = 0.9688$ и $n_2 = 0.0312$, а во втором – $n_1 = 0.7004$ и $n_2 = 0.2996$. Результаты вычислений приведены на рисунке 3, там же для сравнения приведены теплофизические характеристики компонентов сплавов. Из рисунка 3 видно, что теплофизические свойства сплавов $\text{Au}_{100-x}\text{Si}_x$ наследуют особенности поведения температурных кривых компонентов, что было экспериментально подтверждено на других сплавах [48-50]. Тепловые характеристики сплавов располагаются внутри полос, ограниченных аналогичными температурными зависимостями золота Au и кремния Si.

В процессе расчетов были установлены по две точки на графиках теплопроводностей (A(13.89, 3487.31); B(173.89, 325.69)) и температуропроводностей (C(8.09, 1.095×10^6); D(243.73, 131.496)). В этих точках, например, B и D (см. рисунок 3 в, г), соответствующие теплофизические характеристики компонентов Au, Si и сплавов вне зависимости от значения x принимают одно и то же значение. Другими словами, в точках A и B происходит отождествление Au, Si и сплавов по теплопроводности, а в точках C и D – по температуропроводности. Следует отметить, что абсцисса точки B температура $T_B = 173.89$ К близка к характеристической температуре Дебая $\theta_D = 170$ К, вычисленной по теплоемкости [37].

Заключение

Применение соотношений модели двухфазной локально-равновесной области и эмпирических аппроксимирующих функций в сочетании с правилом смешения позволяет проводить оценочный расчет теплофизических свойств золота, кремния и их сплавов.

Вычисления проводились с помощью непрерывных функций, адекватно описывающих экспериментальные данные для конденсированного состояния вещества. Отметим, что использование непрерывных функций позволит аналитически исследовать теплофизические величины с помощью производных. Поэтому предложенные выражения могут дополнить экспериментальные исследования.

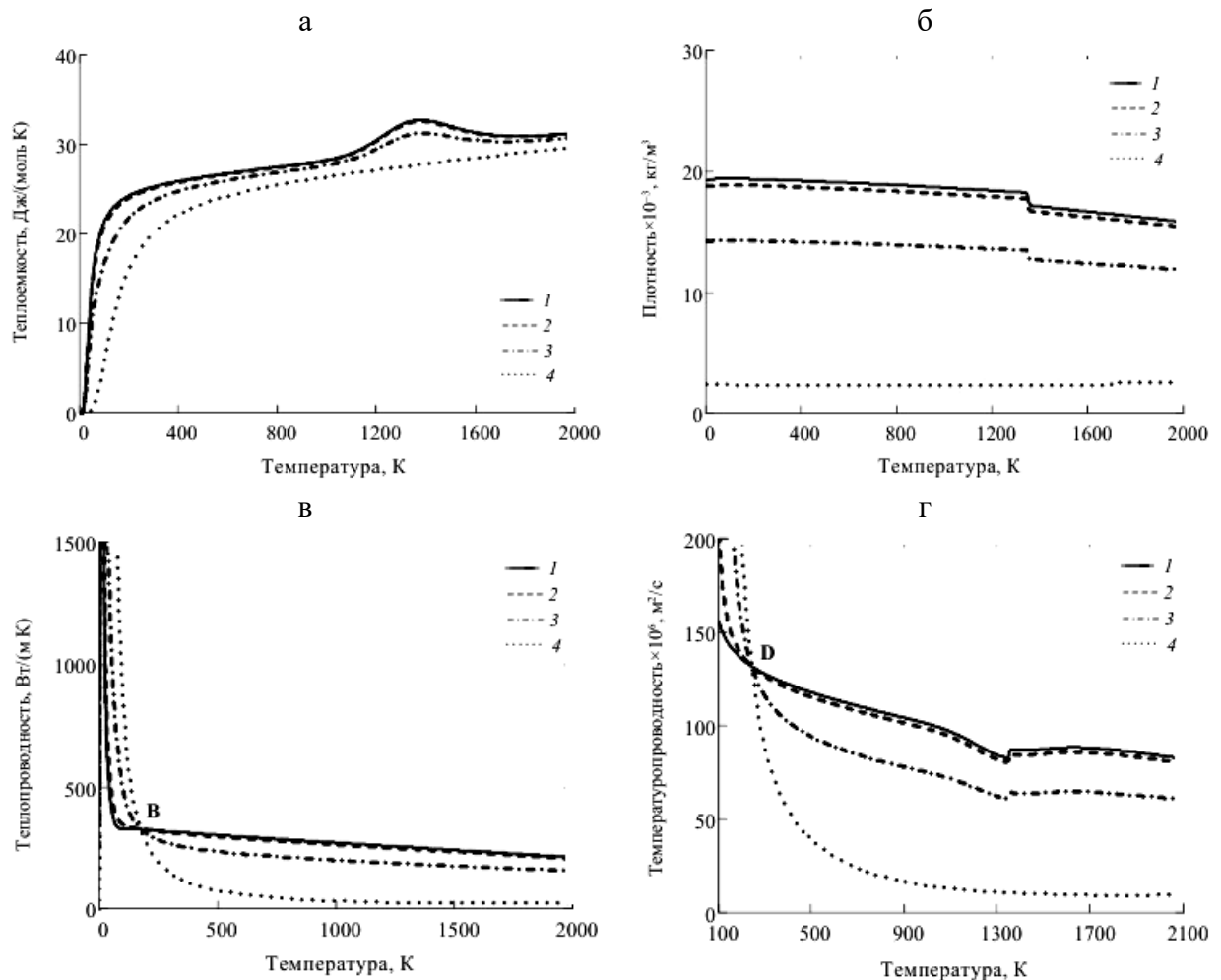


Рисунок 3. Температурные зависимости теплоемкостей (а), плотностей (б), теплопроводностей (в) и температуропроводностей (г) золота и кремния, а также их сплавов:

1 – Au, 2 – Au_{81.4}Si_{18.6}, 3 – Au₂₅Si₇₅, 4 – Si.

Проведенные прогностические вычисления показали, что температурные зависимости теплофизических характеристик сплавов золота с кремнием располагаются внутри полосы, ограниченной кривыми соответствующих свойств компонентов сплава. В процессе вычислений установлено, что сплавы не только наследуют особенности поведения компонентов, но и имеют особые точки, в которых все сплавы и их компоненты принимают одинаковые значения теплопроводности и температуропроводности.

Литература

1. Shalnikov A. Superconducting thin films // Nature. 1938. V. 142. P. 74.

2. Шальников А.И. Сверхпроводящие свойства тонких металлических слоев. // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. № 6. С. 629-640.
3. Золотухин И.В., Калинин Ю.Е. Аморфные металлические сплавы // Успехи физических наук. 1990. Т. 160, № 9. С. 75-110.
4. Салли И.В. Физические основы формирования структуры. М.: Металлургиздат, 1963. 219 с.
5. Klement W., Willens R.H., Duwez P. Non-crystalline structure in solidifies Gold-Silicon alloys // Nature. 1960. V. 187 (4740). P. 869–870. doi: 10.1038/187869b0.
6. Duwez P., Willens R.H., Klement W. Continuous series of metastable solid solutions in Silver-Copper alloys // J. Appl. Phys. 1960. V. 31(6). P. 1136-1137. doi: 10.1063/1.1735777.
7. Диаграммы состояния двойных металлических систем. Справочник. В 3-х т. Т. 1 / Под общ. ред. Н.П. Лакишева. М.: Машиностроение, 1996. 992 с.
8. Okamoto H., Massalski T.B. The Au-Si (Gold-Silicon) system // Bull. Alloy Phase Diagrams. 1983, V. 4 (2). 190-198. doi: 10.1007/BF02884878.
9. Shpyrko O.G., Streitel R. Surface crystallization in a liquid AuSi alloy // [Электронный ресурс] arXiv: cond-mat/0607178v1 [cond-mat.soft] 7 Jul 2006. doi: 10.1126/science.1128314 (Дата обращения 29.06.2024).
10. Panciera F., Terso J., Gamalski A.D., Reuter M.C., Zakharov D., Stach E.A., Hofmann S., Ross F.M. Surface crystallization in a liquid AuSi and its impact on catalysis // Advanced Materials. 2019. V. 31. № 5. P. 1806544. 10.1002/adma.201806544. <https://hal.science/hal-02403349>.
11. Waghorne R.M., Rivlin V.G., Williams G.I. Structure of liquid alloys of the Au-Si and Au-Ge systems // J. Phys. F: Metal Phys., 1976. V. 6, №. 2. P. 147-156.
12. Chen H.S., Turnbull D. Thermal properties of Gold-Silicon binary alloy near the eutectic composition // J. Appl. Phys. 1967. V. 38. P. 3646-3650. doi: 10.1063/1.1710186.
13. Hübner J.-M., Bierman B.C., Wallenberg R., Fredrickson D.C. Temporary cohabitation: the metastable phase Au₄Si. Код доступа: https://figshare.com/articles/journal_contribution/Temporary_Cohabitation_The_Metastable_Phase_Au_sub_4_sub_Si/21552117/1,ja2c10306_si_001.pdf (Дата обращения 29.06.2024).
14. Zhang M., Wen J. G., Efremov M.Y., Olson E.A., Zhang Z.S., Hu L., de la Rama L.P., Kumamuru R., Kavanagh K.L., Ma Z., Allen L.H. Metastable phase formation in the Au-Si system via ultrafast nanocalorimetry // J. Appl. Phys. 2012. 111.093516(1-7). doi: 10.1063/1.4712342.
15. Kurtuldu G., Löffler J.F. Multistep crystallization and melting pathways in the free-energy landscape of a Au–Si eutectic alloy // Adv. Sci. 2020, 7(12), 1903544 (1-7). doi:10.1002/advs.201903544.
16. Pasturel A., Tasci E.S., Sluiter M.H.F., Jakse N. Structural and dynamic evolution in liquid Au-Si eutectic alloy by ab initio molecular dynamics // Phys. Rev. B. 2010. 81(14). doi:10.1103/physrevb.81.140202.
17. Lee S.-H., Hwang G.S. Structure, energetics, and bonding of amorphous Au–Si alloys // J. Chem. Phys. 2007. V. 127, 224710 (1-5). doi: 10.1063/1.2815326.
18. Evenson Z., Yang F., Simeoni G.G., Meyer A. Self-diffusion and microscopic dynamics in a gold-silicon liquid investigated with quasielastic neutron scattering // Appl. Phys. Lett. 2016. V. 108. 121902 (1-4). doi:10.1063/1.4944814.
19. Сидоров Е.В. Физико-химические основы литейного производства. Процессы кристаллизации и структурообразования. Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2011. 230 с.

20. Терехов С.В. Размытый фазовый переход и теплоемкость твердого тела // Физика и техника высоких давлений, 2022. Т. 32, № 2. С. 36-51.
21. Физические величины. Справочник / Под. ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
22. Зиновьев В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. М.: Металлургия, 1989. 384 с.
23. Благородные металлы / Справ. изд. под ред. Савицкого Е.М. М.: Металлургия, 1984. 592 с.
24. Новицкий Л.А., Кожевников И.Г. Теплофизические свойства материалов при низких температурах. Справочник. М.: Машиностроение, 1975. 216 с.
25. Шелудяк Ю.Е., Кашпоров Л.Я., Малинин Л.А., Цалков В.Н. Теплофизические свойства компонентов горючих систем / Справочник под ред. Н.А. Силина. М.: НПО «Информация и технико-экономические исследования», 1992. 184 с.
26. Демин М.М., Алексашкина А.А., Королева О.Н. Атомистическое моделирование характеристик золота в области фазового перехода плавление-кристаллизация // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 1. 18 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-1>.
27. Мажукин В.И., Королева О.Н., Шапранов А.В., Демин М.М., Алексашкина А.А. Определение теплофизических свойств золота в области фазового перехода плавление-кристаллизация. Молекулярно-динамический подход // Математическое моделирование. 2022. Т. 34, № 1. С. 59-80. doi:10.20948/mm-2022-01-05.
28. Магомедов М.Н. Изучение свойств ГЦК-Au в широком диапазоне температур и давлений // Физика твердого тела. 2022. Т. 64, № 7. С. 765-779. doi: 10.21883/FTT.2022.07.52559.319.
29. Станкус С.В., Хайрулин Р.А., Тягельский П.В. Термические свойства германия и кремния в конденсированном состоянии // Теплофизика высоких температур. 1999. Т. 37, № 4. С. 559-564.
30. Глазов В.М., Щеликов О.Д. Объемные изменения при плавлении и нагреве расплавов кремния и германия // Теплофизика высоких температур. 2000. Т. 38, № 3. С. 429-436. doi: 10.1007/BF02756000.
31. Глазов В.М., Щеликов О.Д. Температурная зависимость удельного объема кремния и германия в окрестности фазовых переходов кристалл-расплав // Журнал физической химии. 2000. Т. 74, № 7. С. 1258-1265.
32. Магомедов Я.Б., Гаджиев Г.Г., Омаров З.М. Высокотемпературная теплопроводность и электропроводность германия, кремния и их расплавов. Физика. 2007. Т. 13. № 1-2. С. 91-94.
33. Червонный И.Ф. Эффект ускоренной кристаллизации кремния и германия // Технологический аудит и резервы производства. 2014. № 1/3(15). С. 46-48.
34. Королева О.Н., Мажукин А.В. Атомистическое моделирование теплофизических характеристик кремния в области фазового перехода полупроводник-металл // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 74. 24 с. doi:10.20948/prepr-2018-74.
35. Хвесюк В.И., Цяо В., Баринов А.А. Определение теплопроводности кремния с детальным учетом кинетики взаимодействия фононов. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 3 (102). С. 57-68. doi:10.18698/1812-3368-2022-3-57-68.
36. Терехов С.В. Тепловые свойства металлов. Справочник. Донецк: ДонФТИ им. А.А. Галкина, 2023. 184 с.

37. Лившиц Б.Г., Крапошин В.С., Липецкий Я.Л. Физические свойства металлов и сплавов. М.: Металлургия, 1980. 320 с.
38. Кошман В.С. Об одном подходе к обобщению опытных данных по теплофизическим свойствам элементов Периодической системы Д.И. Менделеева // Пермский аграрный вестник. 2014. № 2 (6). С. 35-42.
39. Успенская И.А., Дружинина А.И., Жирякова М.В., Тифлова Л.А., Скворцова Е.Г., Блудова Н.Г. Задачи практикума по физической химии. Расчет термодинамических функций по результатам измерений теплоемкости методом адиабатической вакуумной калориметрии. МГУ, М. (2019). 29 с.
40. Терехов С.В. Термодинамическая модель размытого фазового перехода в металлическом стекле $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{14}\text{B}_6$ // Физика и техника высоких давлений. 2018. Т. 28, № 1. С. 54-61.
41. Terekhov S.V. Calculation of heat capacity and coefficients of linear thermal expansion of light and heavy platinum triad metals // High Temperature. 2023. V. 61, № 5. P. 617-622. doi: 10.1134/S0018151X23050188.
42. Терехов С.В. Температурные зависимости теплоемкостей Fe, Co и Ni при наличии структурных и магнитных переходов // Письма в ЖТФ. 2024. Т. 50, № 10. С. 18-21. doi: 10.61011/PJTF.2024.10.57704.19331.
43. Кингери У.Д. Введение в керамику. М.: Стройиздат, 1967. С. 325.
44. Герасимов Я.И., Гейдерих В.А. Термодинамика растворов. М.: МГУ. 1980. 184 с.
45. Stølen S., Grande T. Chemical thermodynamics of materials: macroscopic and microscopic aspects. Chichester West Sussex. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium. 2004. 396 p.
46. Ларионов Л.Н., Юрченко Ю.Ф. Структура и свойства металлов и сплавов. Тепловые свойства металлов и сплавов. Справочник. Киев: Наукова думка, 1985. 437 с.
47. Петрунин Г.И., Попов В.Г. Теплофизические свойства вещества Земли. Ч. 1. М.: МГУ, 2011. 68 с.
48. Попель П.С., Сидоров В.Е., Бродова И.Г., Кальво-Дальборг М., Дальборг У. Влияние термической обработки исходного расплава на структуру и свойства кристаллических слитков или отливок // Расплавы. 2020. № 1. С. 3-36. doi:10.31857/S0235010620010065.
49. Попель П.С., Сидоров В.Е., Кальво-Дальборг М., Дальборг У., Молоканов В.В. Влияние термической обработки жидкого сплава на его свойства в расплавленном состоянии и после аморфизации // Расплавы. 2020. № 3. С. 223-245. doi:10.31857/S023501062003007X.
50. Бельтюков А.Л., Русанов Б.А., Ягодин Д.А., Мороз А.И., Стерхов Е.В., Сон Л.Д., Ладьянов В.И. Релаксация в аморфизирующемся расплаве Al-La // Расплавы. 2022. № 5. С. 485-493. doi:10.31857/S0235010622050024.

References

1. Shalnikov A. Superconducting thin films // Nature. 1938. V. 142. P. 74.
2. Shal'nikov A.I. Sverkhprovodyashchie svoistva tonkikh metallicheskih sloev. // ZhETF. 1940. T. 10. № 6. S. 629-640.
3. Zolotukhin I.V., Kalinin Yu.E. Amorfnye metallicheskie splavy // Uspekhi fizicheskikh nauk. 1990. T. 160, № 9. S. 75-110.
4. Salli I.V. Fizicheskie osnovy formirovaniya struktury. M.: Metallurgizdat, 1963. 219 s.

5. Klement W., Willens R.H., Duwez P. Non-crystalline structure in solidified Gold-Silicon alloys // *Nature*. 1960. V. 187 (4740). P. 869-870. doi: 10.1038/187869b0.
6. Duwez P., Willens R.H., Klement W. Continuous series of metastable solid solutions in Silver-Copper alloys // *J. Appl. Phys.* 1960. V. 31(6). P. 1136-1137. doi: 10.1063/1.1735777.
7. Diagrammy sostoyaniya dvoynykh metallicheskih sistem. Spravochnik. V 3-kh t. T. 1 / Pod obshch. red. N.P. Lyakisheva. M.: Mashinostroenie, 1996. 992 s.
8. Okamoto H., Massalski T.B. The Au-Si (Gold-Silicon) system // *Bull. Alloy Phase Diagr.* 1983, V. 4 (2). 190-198. doi: 10.1007/BF02884878.
9. Shpyrko O.G., Streitel R. Surface crystallization in a liquid AuSi alloy // [Электронный ресурс] arXiv: cond-mat/0607178v1 [cond-mat.soft] 7 Jul 2006. doi: 10.1126/science.1128314 (Дата обращения 29.06.2024).
10. Panciera F., Terso J., Gamalski A.D., Reuter M.C., Zakharov D., Stach E.A., Hofmann S., Ross F.M. Surface crystallization in a liquid AuSi and its impact on catalysis // *Advanced Materials*. 2019. V. 31. № 5. P. 1806544. doi: 10.1002/ad-ma.201806544. <https://hal.science/hal-02403349>.
11. Waghorne R.M., Rivlin V.G., Williams G.I. Structure of liquid alloys of the Au-Si and Au-Ge systems // *J. Phys. F: Metal Phys.*, 1976. V. 6, № 2. P. 147-156.
12. Chen H.S., Turnbull D. Thermal properties of Gold-Silicon binary alloy near the eutectic composition // *J. Appl. Phys.* 1967. V. 38. P. 3646-3650. doi: 10.1063/1.1710186.
13. Hübner J.-M., Bierman B.C., Wallenberg R., Fredrickson D.C. Temporary cohabitation: the metastable phase Au₄Si. Код доступа: https://figshare.com/articles/journal_contribution/Temporary_Co-habitation_The_Metastable_Phase_Au_sub_4_sub_Si/21552117/1, ja2c10306_si_001.pdf (Дата обращения 29.06.2024).
14. Zhang M., Wen J. G., Efremov M.Y., Olson E.A., Zhang Z.S., Hu L., de la Rama L.P., Kumamuru R., Kavanagh K.L., Ma Z., Allen L.H. Metastable phase formation in the Au-Si system via ultrafast nanocalorimetry // *J. Appl. Phys.* 2012. 111.093516(1-7). doi: 10.1063/1.4712342.
15. Kurtuldu G., Löffler J.F. Multistep crystallization and melting pathways in the free-energy landscape of a Au–Si eutectic alloy // *Adv. Sci.* 2020, 7(12), 1903544 (1-7). doi: 10.1002/advs.201903544.
16. Pasturel A., Tasci E.S., Sluiter M.H.F., Jakse N. Structural and dynamic evolution in liquid Au-Si eutectic alloy by ab initio molecular dynamics // *Phys. Rev. B*. 2010. 81(14). doi: 10.1103/physrevb.81.140202.
17. Lee S.-H., Hwang G.S. Structure, energetics, and bonding of amorphous Au–Si alloys // *J. Chem. Phys.* 2007. V. 127, 224710 (1-5). doi: 10.1063/1.2815326.
18. Evenson Z., Yang F., Simeoni G.G., Meyer A. Self-diffusion and microscopic dynamics in a gold-silicon liquid investigated with quasielastic neutron scattering // *Appl. Phys. Lett.* 2016. V. 108. 121902 (1-4). doi: 10.1063/1.4944814.
19. Sidorov E.V. Fiziko-khimicheskie osnovy liteinogo proizvodstva. Protsessy kristallizatsii i strukturoobrazovaniya. Vladimir : Izd-vo Vladim. gos. un-ta, 2011. 230 s.
20. Terekhov S.V. Razmytyi fazovyi perekhod i teploemkost' tverdogo tela // *Fizika i tekhnika vysokikh davlenii*, 2022. T. 32, № 2. S. 36-51.
21. Fizicheskie velichiny. Spravochnik / Pod. red. I.S. Grigor'eva, E.3. Meilikhova. M.: Energoatomizdat, 1991. 1232 s.

22. Zinov'ev V.E. Teplofizicheskie svoistva metallov pri vysokikh temperaturakh. M.: Metallurgiya, 1989. 384 s.
23. Blagorodnye metally / Sprav. izd. pod red. Savitskogo E.M. M.: Metallurgiya, 1984. 592 s.
24. Novitskii L.A., Kozhevnikov I.G. Teplofizicheskie svoistva materialov pri nizkikh temperaturakh. Spravochnik. M.: Mashinostroenie, 1975. 216 s.
25. Sheludyak Yu.E., Kashporov L.Ya., Malinin L.A., Tsalkov V.N. Teplofizicheskie svoistva komponentov goryuchikh sistem / Spravochnik pod red. N.A. Silina. M.: NPO «Informatsiya i tekhniko-ekonomicheskie issledovaniya», 1992. 184 s.
26. Demin M.M., Aleksashkina A.A., Koroleva O.N. Atomisticheskoe modelirovanie kharakteristik zolota v oblasti fazovogo perekhoda plavlenie-kristallizatsiya // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha. 2020. № 1. 18 s. doi: 10.20948/prepr-2020-1.
27. Mazhukin V.I., Koroleva O.N., Shapranov A.V., Demin M.M., Aleksashkina A.A. Opredelenie teplofizicheskikh svoistv zolota v oblasti fazovogo perekhoda plavlenie-kristallizatsiya. Molekulyarno-dinamicheskii podkhod // Matematicheskoe modelirovanie. 2022. T. 34, № 1. S. 59-80. doi: 10.20948/mm-2022-01-05.
28. Magomedov M.N. Izuchenie svoistv GTsK-Au v shirokom diapazone temperatur i davlenii // Fizika tverdogo tela. 2022. T. 64, № 7. S. 765-779. doi: 10.21883/FTT.2022.07.52559.319.
29. Stankus S.V., Khairulin R.A., Tyagel'skii P.V. Termicheskie svoistva germaniya i kremniya v kondensirovannom sostoyanii // Teplofizika vysokikh temperatur. 1999. T. 37, № 4. S. 559-564.
30. Glazov V.M., Shchelikov O.D. Ob'emnye izmeneniya pri plavlenii i nagreve rasplavov kremniya i germaniya // Teplofizika vysokikh temperatur. 2000. T. 38, № 3. S. 429-436. doi: 10.1007/BF02756000
31. Glazov V.M., Shchelikov O.D. Temperaturnaya zavisimost' udel'nogo ob'ema kremniya i germaniya v okrestnosti fazovykh perekhodov kristall-rasplav // Zhurnal fizicheskoi khimii. 2000. T. 74, № 7. S. 1258-1265.
32. Magomedov Ya.B., Gadzhiev G.G., Omarov Z.M. Vysokotemperaturnaya teploprovodnost' i elektroprovodnost' germaniya, kremniya i ikh rasplavov. Fizika. 2007. T. 13. № 1-2. S. 91-94.
33. Chervonyi I.F. Effekt uskorennoi kristallizatsii kremniya i germaniya // Tekhnologicheskii audit i rezervy proizvodstva. 2014. № 1/3(15). S. 46-48.
34. Koroleva O.N., Mazhukin A.V. Atomisticheskoe modelirovanie teplofizicheskikh kharakteristik kremniya v oblasti fazovogo perekhoda poluprovodnik-metall // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha. 2018. № 74. 24 s. doi: 10.20948/prepr-2018-74.
35. Khvesyuk V.I., Tsyao V., Barinov A.A. Opredelenie teploprovodnosti kremniya s detal'nym uchetom kinetiki vzaimodeistviya fononov. Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki. 2022. № 3 (102). S. 57-68. doi: 10.18698/1812-3368-2022-3-57-68.
36. Terekhov S.V. Teplovyie svoistva metallov. Spravochnik. Donetsk: DonFTI im. A.A. Galkina, 2023. 184 s.
37. Livshits B.G., Kraposhin V.S., Lipetskii Ya.L. Fizicheskie svoistva metallov i splavov. M.: Metallurgiya, 1980. 320 s.
38. Koshman V.S. Ob odnom podkhode k obobshcheniyu opytnykh dannykh po teplofizicheskim svoistvam elementov Periodicheskoi sistemy D.I. Mendeleeva // Permskii agrarnyi vestnik. 2014. № 2 (6). S. 35-42.

39. Uspenskaya I.A., Druzhinina A.I., Zhiryakova M.V., Tiflova L.A., Skvortsova E.G., Bludova N.G. Zadachi praktikuma po fizicheskoi khimii. Raschet termodinamicheskikh funktsii po rezul'tatam izmerenii teploemkosti metodom adiabaticheskoi vakuumnoi kalorimetrii. MGU, M. (2019). 29 s.
40. Terekhov S.V. Termodinamicheskaya model' razmytogo fazovogo perekhoda v metallicheskom stekle $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{14}\text{B}_6$ // Fizika i tekhnika vysokikh davlenii. 2018. T. 28, № 1. S. 54-61.
41. Terekhov S.V. Calculation of heat capacity and coefficients of linear thermal expansion of light and heavy platinum triad metals // High Temperature. 2023. V. 61, № 5. P. 617-622. doi: 10.1134/S0018151X23050188.
42. Terekhov S.V. Temperaturnye zavisimosti teploemkosti Fe, Co i Ni pri nalichii strukturnykh i magnitnykh perekhodov // Pis'ma v ZhTF. 2024. T. 50, № 10. S. 18-21. doi: 10.61011/PJTF.2024.10.57704.19331.
43. Kingeri U.D. Vvedenie v keramiku. M.: Stroiizdat, 1967. S. 325.
44. Gerasimov Ya.I., Geiderikh V.A. Termodinamika rastvorov. M.: MGU. 1980. 184 s.
45. Stølen S., Grande T. Chemical thermodynamics of materials: macroscopic and microscopic aspects. Chichester West Sussex. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium. 2004. 396 p.
46. Larikov L.N., Yurchenko Yu.F. Struktura i svoistva metallov i splavov. Teplovye svoistva metallov i splavov. Spravochnik. Kiev: Naukova dumka, 1985. 437 s.
47. Petrunin G.I., Popov V.G. Teplofizicheskie svoistva veshchestva Zemli. Ch. 1. M.: MGU, 2011. 68 s.
48. Popel' P.S., Sidorov V.E., Brodova I.G., Kal'vo-Dal'borg M., Dal'borg U. Vliyanie termicheskoi obrabotki iskhodnogo raspava na strukturu i svoistva kristallicheskikh slitkov ili otlivok // Rasplavy. 2020. № 1. S. 3-36. doi: 10.31857/S0235010620010065.
49. Popel' P.S., Sidorov V.E., Kal'vo-Dal'borg M., Dal'borg U., Molokanov V.V. Vliyanie termicheskoi obrabotki zhidkogo splava na ego svoistva v rasplavlennom sostoyanii i posle amorfizatsii // Rasplavy. 2020. № 3. S. 223-245. doi: 10.31857/S023501062003007X.
50. Bel'tyukov A.L., Rusanov B.A., Yagodin D.A., Moroz A.I., Sterkhov E.V., Son L.D., Lad'yanov V.I. Relaksatsiya v amorfiziruyushchemsya raspave Al–La // Rasplavy. 2022. № 5. S. 485-493. doi: 10.31857/S0235010622050024.

**Вестник Ошского государственного университета.
Математика. Физика. Техника**

Издатель:

Ошский государственный университет

Год основания: 2022

Периодичность выпуска: 2 раза в год

Государственная регистрация:

Регистрационное свидетельство Министерства юстиции Кыргызской Республики
№ 10296 от 15.06.2022.

**Журнал представлен в таких международных наукометрических базах
данных, репозиториях и поисковых системах:**

eLIBRARY.RU; Litmaps; Crossref

Адрес редакции:

Ошский государственный университет
723500, ул. Алымбек Датка, 331, г. Ош, Кыргызская Республика

<https://journal.oshsu.kg/index.php/mpht>

**Herald of Osh State University.
Mathematics. Physics. Technical Sciences**

Publisher: Osh State University

Year of foundation: 2022

Frequency: semi-annual

State registration:

Registration certificate of the Ministry of Justice of the Kyrgyz Republic
No. 10296 dated 15.06.2022.

**The journal is presented in the following international scientometric
databases, repositories and scientific systems:**

eLIBRARY.RU; Litmaps; Crossref

Editorial office address:

Osh State University 723500, Alymbek Datka Str. 331, Osh, Kyrgyz Republic
<https://journal.oshsu.kg/index.php/mpht>

«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ.
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА»
ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ

Техникалык редактор:

Абдумиталип уулу Кубатбек

ОшМУнун “Билим” редакциялык басма бөлүмүндө даярдалып,
басмадан чыгарылды.

Биздин дарек: 723500, Ош шаары, Алымбек Датка көчөсү, 331.

Байланыш телефону: +996 553 50 00 54

Факс: (+9963222) 70915

Электрондук дарек: journal-mpht@oshsu.kg

Сайт: www.oshsu.kg

Негиздөөчүсү – Кыргыз Республикасынын Илим, жогорку билим берүү жана
инновациялар министрлиги Ош мамлекеттик университети

Басууга берилди: 28.05.2026

Көлөмү: 26,7 б.т.

Форматы: 176x250 1/8

Нуска: ____ д.

«Билим» редакциялык – басма бөлүмү