



e-ISSN 1694-8645

**КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН ИЛИМ, ЖОГОРКУ БИЛИМ
БЕРҮҮ ЖАНА ИННОВАЦИЯЛАР МИНИСТРЛИГИ**



**ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА**

Научный журнал

№2(7), 2025

**HERALD OSH STATE UNIVERSITY
MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES**

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА»**

Главный редактор: Сопуев Адахимжан Сопуевич – доктор физ.-мат. наук, профессор, Ошский государственный университет, asopuev@oshsu.kg, sopuev@mail.ru, (Кыргызстан, г. Ош)

Заместитель главного редактора: Ташполотов Ысламидин Ташполотович – доктор физ.-мат. наук, профессор, Ошский государственный университет, itashpolotov@mail.ru (Кыргызстан, г. Ош);

Члены редакционной коллегии:

Асанов Авыт Асанович – д-р физ.-мат. наук, проф., avyt.asanov@manas.edu.kg (Кыргызстан, г. Бишкек);

Обозов Алайбек Джумабекович – д-р техн. наук, проф., Obozov-a@mail.ru (Кыргызстан, г. Бишкек);

Маткаримов Таалайбек Ысманиевич – д-р техн. наук, проф., talai_m@bk.ru (Кыргызстан, г. Бишкек);

Алыбаев Курманбек Сарманович – д-р физ.-мат. наук, проф., alybaevkurmanbek@rambler.ru (Кыргызстан, г. Джалал-Абад);

Матиева Гулбадан Матиевна – д-р физ.-мат. наук, проф., gulbadan_57@mail.ru (Кыргызстан, г. Ош);

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович – д-р физ.-мат. наук, проф., dtursunov@oshsu.kg (Кыргызстан, г. Ош);

Кенжаев Идирибек Гуламович – д-р техн. наук, проф., kenjaevig@rambler.ru (Кыргызстан, г. Ош);

Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич – д-р техн. наук, проф., zhanybai@gmail.com (Российская Федерация, ЮЗГУ, г. Курск);

Карманов Виталий Сергеевич – к-т техн. наук, доцент, karmanov@corp.nstu.ru (Российская Федерация, г. Новосибирск);

Бердышев Абдумаулен Сулейманович – д-р физ.-мат. наук, проф., berdyshev@mail.ru (Казахстан, г. Алматы);

Клычев Шавкат Исакович – д-р техн. наук, проф., klichevsh@list.ru (Узбекистан, г. Ташкент);

Апаков Юсупжон Пулатович – д-р физ.-мат. наук, проф., yusupjonapakov@gmail.com (Узбекистан, г. Наманган);

Исломов Бозор Исломович – д-р физ.-мат. наук, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, islomovbozor@yandex.com (Узбекистан, г. Ташкент)

Давыдов Алексей Александрович – д-р физ.-мат. наук, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, davydov@mi-ras.ru (Российская Федерация, МГУ, г. Москва,)

Кангузин Балтабек Есматович – д-р физ.-мат. наук, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, kanguzhin53@gmail.com (Казахстан, г. Алматы)

Расулов Тулкин – д-р физ.-мат. наук, Бухарский государственный университет, t.h.rasulov@buxdu.uz, rth@mail.ru (Узбекистан, г. Бухара)

Юлдашев Турсун Камалдинович – д-р физ.-мат. наук, проф., Ташкентский государственный транспортный университет, tursun.k.yuldashev@gmail.com (Узбекистан, г. Ташкент)

Папиева Толкун Маматаевна – к.ф.-м.н., доцент, Ошский государственный университет, tpapieva@oshsu.kg (Кыргызстан, г. Ош).

Абдумиталип уулу Кубатбек – к.ф.-м.н., доцент, Ошский государственный университет, kuba@oshsu.kg, kubatbek-90@mail.ru (Кыргызстан, г. Ош).

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL

“HERALD OSH STATE UNIVERSITY MATHEMATICS. PHYSICS. TECHNICAL SCIENCES”

Editor-in-Chief: Sopuev Adakhimzhan Sopuevich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Osh State University, asopuev@oshsu.kg, sopuev@mail.ru (Osh, Kyrgyzstan).

Deputy Editor-in-Chief: Tashpolotov Yslamidin Tashpolotov - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Osh State University, itashpolotov@mail.ru (Osh, Kyrgyzstan).

Members of the Editorial Board:

Asanov Avyt Asanovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, avyt.asanov@manas.edu.kg (Bishkek, Kyrgyzstan).

Obozov Alaibek Dzhumabekovich - Doctor of Technical Sciences, Professor, Obozov-a@mail.ru (Bishkek, Kyrgyzstan).

Matkarimov Talaibek Ismanalievich - Doctor of Technical Sciences, Professor, talai_m@bk.ru (Bishkek, Kyrgyzstan).

Alybaev Kurmanbek Sarmanovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, alybaevkurmanbek@rambler.ru (Jalal-Abad, Kyrgyzstan).

Matieva Gulbadan Matievna - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, gulbadan_57@mail.ru (Osh, Kyrgyzstan).

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, dtursunov@oshsu.kg (Osh, Kyrgyzstan).

Kenzhaev Idirisbek Gulamovich - Doctor of Technical Sciences, Professor, kenzhaevig@rambler.ru (Osh, Kyrgyzstan).

Zhusubaliyev Zhanybai Tursunbaevich - Doctor of Technical Sciences, Professor, Southwest State University, zhanybai@gmail.com (Kursk, Russian Federation).

Karmanov Vitaliy Sergeevich - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, karmanov@corp.nstu.ru (Novosibirsk, Russian Federation).

Berdyshev Abdumaulen Suleimanovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, berdyshev@mail.ru (Almaty, Kazakhstan).

Klychev Shavkat Isakovich - Doctor of Technical Sciences, Professor, klichevsh@list.ru (Tashkent, Uzbekistan).

Apakov Yusupjon Pulatovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, yusupjonapakov@gmail.com (Namangan, Uzbekistan).

Islomov Bozor Islomovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, islomovbozor@yandex.com (Tashkent, Uzbekistan).

Davydov Alexey Alexandrovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University, davydov@mi-ras.ru (Moscow, Russian Federation).

Kanguzhin Baltabek Esmatovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Al-Farabi Kazakh National University, kanguzhin53@gmail.com (Almaty, Kazakhstan).

Rasulov Tulkin - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Bukhara State University, t.h.rasulov@buxdu.uz, rth@mail.ru (Bukhara, Uzbekistan).

Yuldashev Tursun Kamaldinovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Tashkent State Transport University, tursun.k.yuldashev@gmail.com (Tashkent, Uzbekistan).

Papieva Tolkun Mamataevna - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Osh State University, tpapieva@oshsu.kg (Osh, Kyrgyzstan).

Abdumitalip uulu Kubatbek - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Osh State University, kuba@oshsu.kg, kubatbek-90@mail.ru (Osh, Kyrgyzstan).

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

6

Абдилазизова А.А., Орозбаева А.А., Анарбаева Г.М. Асимптотика решения системы из четырёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений..... 6

Аширбаева А.Ж., Садыкова Г.К., Сапиев Ж.Э. Миграционные процессы в Кыргызстане и их математическое прогнозирование 10

Камбарова А.Д., Мурзабаева А.Б., Орозмаматова Ж.Ш. Об одном классе линейных интегральных уравнений ольтерра первого рода на оси..... 17

Матиева Г., Сарыгулова Н.А., Махаматсабыр кызы М. Об одной квазидвойной линии пары распределений в пространстве E_5 25

Нуранов Б.Ш. О краевых задачах для уравнения смешанного типа третьего порядка с переменными коэффициентами..... 31

Сопуев А.А. О краевых задачах для уравнения смешанного параболического типа третьего порядка с двумя линиями изменения типа..... 41

Шамшиева Г.А. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойных линий пары распределений в пространстве E_5 51

ФИЗИКА

58

Ташполотов Ы., Ибраимов Т.К. Иерархическое квантование и дальное действие поверхностных сил в конденсированных средах: мезомеханический и термодинамический аспекты..... 58

Терехов С.В. Соотношения и уравнения физики в гиперпространстве двойных кватернионов..... 72

ТЕХНИКА

84

Камалов С.С., Пакал уулу Д., Азимов А.Д. Комплексная система распознавания лиц: интеграция python, opencv, face_recognition и баз данных sql..... 84

Матисаков Т.К., Ли Цзяфэй Исследование применения эффекта Тромбе-Мишеля в энергоэффективных зданиях..... 99

CONTENTS

MATHEMATICS

6

- Abdilazizova A.A., Ainagul A.O., Anarbaeva G.M.** Asymptotics of the solution to a system of four nonlinear ordinary differential equations..... 6
- Ashirbayeva A.Zh., Sadykova G.K., Sapiev Zh.E.** Migration processes in Kyrgyzstan and their mathematical forecasting 10
- Kambarova A.D., Murzabayeva A.B., Orozmamatova J.Sh.** On one class of linear volterra integral equations of the first kind on the axis..... 17
- Matieva G., Sarygulova N.A., Mahamatsabyr kyzy M.** On a quasi-double line of a pair of distributions in the five-dimensional euclidean space E_5 25
- Nuranov B.Sh.** On boundary value problems for a third-order mixed-type equation with variable coefficients..... 31
- Sopuev A.A.** On boundary value problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation of third order with two lines of type change..... 41
- Shamshieva G.A.** Necessary and sufficient conditions for the existence of quasi-double lines of a pair of distributions in E_5 51

PHYSICS

58

- Tashpolotov Y., Ibraimov T.K.** Hierarchical quantization and long-range action of surface forces in condensed media: mesomechanical and thermodynamic aspects..... 58
- Terekhov S.V.** Relations and equations of physics in hyperspace of double quaternions..... 72

TECHNICAL SCIENCES

84

- Kamalov S.S., Pakal uulu D., Azimov A.D.** Integrated face recognition system: integration of python, opencv, face_recognition and sql databases..... 84
- Matisakov T.K., Li Jiafei** A study of the use of the Tromb-Michel effect in energy-efficient buildings..... 99

МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

УДК 517.928

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2\(7\)_6](https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2(7)_6)

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION TO A SYSTEM OF FOUR NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abdilazizova Akbermet Abdijalilovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Osh State University

<https://orcid.org/0009-0003-1202-8975>, aabdilazizova@oshsu.kg

Ainagul Aslanbekovna Orozbaeva

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Osh State University

<https://orcid.org/0009-0007-2214-6579>

Anarbaeva Gulzhamal Mamatovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate professor, Osh State University

<https://orcid.org/0000-0002-8703-1904>

Abstract. This paper investigates the solution of a singularly perturbed system of differential equations with an arbitrary degree of accuracy in a particularly critical case. The Cauchy initial value problem is considered for a singularly perturbed system of four nonlinear ordinary differential equations in the case of a stability change. The matrix of the nonlinear system possesses complex conjugate multiple eigenvalues. The problem is studied for a system of fourth-order nonlinear singularly perturbed equations in which the eigenvalues governing the stability change in an unbounded domain of the complex plane have zeros only at infinitely distant points. The proximity of the solutions of the perturbed and unperturbed problems is proved, and a corresponding estimate is derived.

Keywords: Singularly perturbed system of differential equations, Cauchy problem, solution, eigenvalues of a matrix, asymptotic, critical case, uniform approximations.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЁХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Абдилазизова Акбермет Абдижалиловна

к.ф.-м.н., Ошский государственный университет

<https://orcid.org/0009-0003-1202-8975>, aabdilazizova@oshsu.kg

Орозбаева Айнагул Асланбековна

к.ф.-м.н., Ошский государственный университет

<https://orcid.org/0009-0007-2214-6579>

Анарбаева Гульжамал Маматовна

к.ф.-м.н., доцент, Ошский государственный университет

<https://orcid.org/0000-0002-8703-1904>, aabdilazizova@oshsu.kg

Аннотация. В данной работе исследуется решение сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений с произвольной степенью точности в особо критическом случае. Рассматривается задача Коши для сингулярно возмущённой системы четырёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости. Матрица нелинейной системы обладает комплексно-сопряжёнными кратными собственными значениями. Исследуется задача для системы нелинейных сингулярно возмущённых уравнений четвёртого порядка, в которой собственные значения, определяющие смену устойчивости, обращаются в нуль только в бесконечно удалённых точках комплексной плоскости. Доказана близость решений возмущённой и невозмущённой задач, а также получена соответствующая оценка.

Ключевые слова: Сингулярно возмущённая система дифференциальных уравнений, задача Коши, решение, собственные значения матрицы, асимптотика, критический случай, равномерные приближения.

Introduction

The following problem is considered:

$$\varepsilon \dot{x}(t, \varepsilon) = D(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon f(t, x(t, \varepsilon)), \quad (1)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon), \quad \|x^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad (2)$$

where

$$f(t, x(t, \varepsilon)) = (f_1(t, x(t, \varepsilon)), f_2(t, x(t, \varepsilon)), f_3(t, x(t, \varepsilon)), f_4(t, x(t, \varepsilon)))$$

is a known quantity, and $D(t)$ is a given matrix of size 4×4 .

Assume that the following conditions are satisfied:

1. For all $t \in H_0$, the matrix $D(t)$ has eigenvalues $\lambda_k(t)$, $k = 1, 2, 3, 4$, and admits a Jordan normal form ($D(t) \in \Phi(H_0)$).
2. $f(t, x) \in \Phi(\Delta(t, x))$, where $\Delta(t, x) = \{t_0 \in H_0, \|x\| < \delta - \text{const}\}$ does not depend on ε , and $\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq M\|x - \tilde{x}\|$, where M is a positive constant independent of the point.
3. $\lambda_k(t) \in \Phi(H_0)$ and $\lambda_1(t) = \lambda_3(t)$, $\lambda_2(t) = \lambda_4(t)$.

The functions $\text{Re } \lambda_1(t)$ and $u(t_1, t_2)$ in the domain H_0 satisfy the following conditions:

4. $\text{Re } \lambda_1 < 0$ on the strip

$$t \in H_{01} = \{t \in H_0 : t_0 \leq t_1 < a_0, \quad -\infty < t_2 < +\infty\},$$

$$\text{Re } \lambda_1(a_0 + i \cdot 0) = 0 \quad \text{on the line } p = \{t \in H_0 : t_1 = a_0, \quad -\infty < t_2 < +\infty\},$$

- $\text{Re } \lambda_1 > 0$ on the strip

$$t \in H_{02} = \{t \in H_0 : a_0 < t_1 \leq T_0, \quad -\infty < t_2 < +\infty\}.$$

5. For all $t \in H_0$: $\text{Im } \lambda_1(t) > 0$.

6. $u(t_1, t_2) = 0$ on the lines $t_1 = t_0$ and $t_1 = T_0$, $-\infty < t_2 < +\infty$.

The objective is to find the asymptotic of the solution to problem (1), (2) under the above conditions.

Materials and Methods

Problem (1), (2) is reduced to an integral equation, and the method of successive approximations is applied to derive the estimates.

Starting from the second approximation, the paths of integration are chosen from the domain H_0 . The integration paths consist of arcs of smooth curves or piecewise smooth curves.

To estimate the successive approximations, lemma 4 [1] is employed:

On the line P we will consider the equations

$$u(t_1, t_2) = at_1 + b \quad \text{where } a = \frac{C_1 - C_2}{T_2 - t_{01}}, \quad b = \frac{C_1 T_2 - C_2 t_{01}}{T_2 - t_{01}}, \quad (3)$$

The main lemma: If level lines $u_1(t_1, t_2) = C$ ($C_2 \leq C \leq C_1$) completely cover line P and an arbitrary point (t_1, t_2) line P belongs to a single line-level $\{C\}$, $\text{Im } \lambda_1(t) \neq 0$, then equations (6) in the line P defines valued continuously differentiable function $t_2 = \varphi(t_1)$ with the region of existing off $(t_{01} \leq t_1 \leq T_2)$ and the curve segment (K_0) , defined by this function, connects points $(t_{01}, 0)$, $(T_2, 0)$, and at this $u_1(t_1, \varphi(t_1))$ is decreasing on $[t_{01}, T_2]$.

The main lemma was proved with an original method. Another proof is available in our papers.

Let $C_1 = \alpha(\varepsilon)$, $C_2 = 2\alpha(\varepsilon)$, then the domain covered by the curves K is denoted by $K_0 \subset H_0$.

Let $C_1 = -\delta, C_2 = -2\delta$, where $0 < \delta < 1$; then the corresponding domain is denoted by $K_0 = H_c$.

Let $C_1 = -\varepsilon^p, C_2 = -2\varepsilon^p$, where $0 < p < 1$. In this case the domain is denoted by $H_p \subset H_0$.

Let $K = \Delta \cap K$, where $\Delta = \{(t_1, t_2) : t_0 \leq t_1 \leq t_{01}, t_2 = 0\}$. The estimate of $x(t, \varepsilon)$ is carried out for points of the domain K . Here the integration path l depends on which set the points (t_1, t_2) belong to.

Selection of Integration Paths.

Let the curve for which $(t_1, t_2) \in K_0$ consist of $l = \cup_{k=1}^3 l_k$, where l_1 is the line segment connecting the point $(t_0, 0)$ with the point $(t_{01}, 0)$; l_2 is the arc of a curve connecting the point $(t_{01}, 0)$ with the point $(t_1, t_2^*) = \tilde{\varphi}(t_1)$; and l_3 is the line segment connecting the point (t_1, t_2^*) with the point (t_1, t_2) . Note that if $(t_1, t_2) \in K_0$, then on the curve K for any t_1 there exists a unique point $(t_1, t_2^*) = \varphi(t_1)$.

Estimates of the First Approximations.

We construct the first approximation satisfying the initial condition as follows:

$$\begin{cases} x_1^{(1)}(t, \varepsilon) = x_1^{(0)}(\varepsilon) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_1(s) ds \right] + \int_{t_0}^t f_1(\tau, x^{(0)}(t, \varepsilon)) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_1(s) ds \right] d\tau, \\ x_2^{(1)}(t, \varepsilon) = x_2^{(0)}(\varepsilon) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_2(s) ds \right] + \int_{t_0}^t \left[f_2(\tau, x^{(0)}(t, \varepsilon)) + \frac{\eta}{\varepsilon} x_1^{(1)}(t, \varepsilon) \right] \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_2(s) ds \right] d\tau, \\ x_3^{(1)}(t, \varepsilon) = x_3^{(0)}(\varepsilon) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_3(s) ds \right] + \int_{t_0}^t f_3(\tau, x^{(0)}(t, \varepsilon)) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_3(s) ds \right] d\tau \\ x_4^{(1)}(t, \varepsilon) = x_4^{(0)}(\varepsilon) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_4(s) ds \right] + \int_{t_0}^t \left[f_4(\tau, x^{(0)}(t, \varepsilon)) + \frac{\eta_1}{\varepsilon} x_3^{(1)}(t, \varepsilon) \right] \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_4(s) ds \right] d\tau. \end{cases}$$

For $(t_1, t_2) \in \bar{K}$ the following estimate is obtained:

$$|x^{(1)}(t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{1-p}),$$

where

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \text{colon}(x_1^{(1)}(t, \varepsilon), x_2^{(1)}(t, \varepsilon), x_3^{(1)}(t, \varepsilon), x_4^{(1)}(t, \varepsilon)).$$

If $(t_1, t_2) \in \bar{K}$, then $l_1 = \cup_{k=1}^3 l_k$, where l_1 is the line segment connecting the point $(t_0, 0)$ with the point $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$; l_2 is the arc of the curve $(\bar{C})$ connecting the point $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$ with the point $(t_1, t_2^*) = \tilde{\varphi}(t_1, \varepsilon)$; and l_3 is the line segment connecting the point (t_1, t_2^*) with the point (t_1, t_2) .

For all $t \in H^c$ the estimate $\|x^{(1)}(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon$ holds, and for all $t \in H_4$ the estimate $\|x^{(1)}(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{1-p}$ holds.

Estimates of the Remaining Approximations.

The successive approximations $x^{(n)}(t, \varepsilon)$ with the initial condition are defined as follows:

$$x^{(n)}(t, \varepsilon) = E(t, t_0, \varepsilon) x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) f(\tau, x^{(n-1)}(\tau, \varepsilon)) d\tau,$$

where

$$E(t, t_0, \varepsilon) = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t D(s) ds \right), \quad E(t, \tau, \varepsilon) = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t D(s) ds \right).$$

The scalar form of the system.

$$\begin{cases} x_1^{(n)}(t, \varepsilon) = x_1^0(\varepsilon) \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_1(s) ds + \int_{t_0}^t f_1 \left(\tau, x_1^{(n-1)}(t, \varepsilon) \right) \left(\exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_1(s) ds \right) d\tau, \\ x_2^{(n)}(t, \varepsilon) = x_2^0(\varepsilon) \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_2(s) ds + \int_{t_0}^t f_2 \left(\tau, x_2^{(n-1)}(t, \varepsilon) \right) \left(\exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_2(s) ds \right) d\tau, \\ x_3^{(n)}(t, \varepsilon) = x_3^0(\varepsilon) \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_3(s) ds + \int_{t_0}^t f_3 \left(\tau, x_3^{(n-1)}(t, \varepsilon) \right) \left(\exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_3(s) ds \right) d\tau, \\ x_4^{(n)}(t, \varepsilon) = x_4^0(\varepsilon) \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_4(s) ds + \int_{t_0}^t f_4 \left(\tau, x_4^{(n-1)}(t, \varepsilon) \right) \left(\exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_4(s) ds \right) d\tau. \end{cases}$$

Validity of the Estimates for $n = 2$.

For all $t \in H_c$

$$\|\tilde{x}^{(2)}(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^2,$$

and for all $t \in H_p$:

$$\|\tilde{x}^{(2)}(t, \varepsilon)\| \leq M(c\varepsilon^{1-p})^2.$$

The remaining approximations are estimated by applying the method of mathematical induction for all $t \in H_c$:

$$\|\tilde{x}^{(n)}(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^n,$$

and for all $t \in H_p$:

$$\|\tilde{x}^{(n)}(t, \varepsilon)\| \leq (c\varepsilon^{1-p})^n.$$

Theorem 1. Suppose that conditions 1–6 are satisfied. Then for problem (1), (2) there exists a unique solution admitting the representation

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{x}^{(n)}(t, \varepsilon).$$

For $t \in H_c$ the estimate $\|\tilde{x}^{(n)}(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^n$ holds, and for $t \in H_p$ the estimate

$$\|\tilde{x}^{(n)}(t, \varepsilon)\| \leq (c\varepsilon^{1-p})^n,$$

holds, where $c > 0$ is a constant independent of t and ε .

Conclusion

As a result of this work, uniform approximations were constructed for the solution of a singularly perturbed system of differential equations in the especially critical case when the eigenvalues do not have zeros on the considered domain.

References

1. Alybaev, K.S. 2001. Metod liniya urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravneniy pri narushenii usloviya ustoychivosti [The level line method for the study of singularly perturbed equations under stability condition violation] (Doctoral dissertation). Bishkek. 204 p.
2. Alybaev, K.S., Juraev, A.M., Nurmatova, M.N. 2024. Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position. Lobachevskii Journal of Mathematics. T. 45. № 3. -p. 912-921.
3. Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M. 1963. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of integrals, sums, series, and products]. Moscow: Fizmatgiz. 1100 p.
4. Malkin, I. G. 1966. Teoriya ustoychivosti dvizheniya [Theory of stability of motion]. Moscow: Nauka. 533 p.

УДК 314.745:519.86

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2\(7\)_11](https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2(7)_11)

МИГРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КЫРГЫЗСТАНЕ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна

д.ф.-м.н., профессор. Ошский технологический университет им. М.М. Адышева
ORCID 0000-0001-7706-0608, ajarkyn.osh@mail.ru

Садыкова Гульхан Курбанбековна

к.ф.-м.н., доцент. Ошский государственный университет
ORCID 0009-0002-9258-2054, gsadykova@oshsu.kg
723500, Ош, Кыргызская Республика

Сапиев Жеңишбек Эрмекбаевич

преподаватель, магистр. Ошский государственный университет
jsapiev@oshsu.kg

Аннотация. В статье анализируются миграционные процессы в Кыргызстане как фактор социально-экономического развития. Особое внимание уделено исследованию двойственного характера влияния внешней трудовой миграции на макроэкономические и социальные показатели. С одной стороны, ремиттансы (денежные переводы мигрантов) выступают мощным инструментом снижения уровня бедности населения и стимулирования внутреннего потребительского спроса. С другой стороны, данный процесс провоцирует масштабный отток квалифицированных кадров, усугубляет демографический дисбаланс и усиливает региональные диспропорции в развитии территорий. Поэтому прогнозирование в различных областях науки и техники является актуальным вопросом. С помощью эконометрической модели можно сделать анализ и прогнозирование по статистическим данным. Метод двойного экспоненциального сглаживания Брауна (Brown's double exponential smoothing) довольно часто применяется для прогнозирования миграционных потоков, численности населения с учётом миграции и связанных показателей (например, объёма ремиттансов), особенно когда данные представляют собой временные ряды с линейным трендом и случайными колебаниями, но без ярко выраженной сезонности.

Ключевые слова: миграция, ремиттансы, устойчивое развитие, миграционные процессы, моделирование, экспоненциальное сглаживание Брауна.

MIGRATION PROCESSES IN KYRGYZSTAN AND THEIR MATHEMATICAL FORECASTING

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor. Osh Technological University named after M.M. Adyshev. ORCID 0000-0001-7706-0608, ajarkyn.osh@mail.ru

Sadykova Gulkhan Kurbanbekova

Ph.D., Associate Professor. Osh State University
ORCID 0009-0002-9258-2054, gsadykova@oshsu.kg

Sapiev Zhenishbek Ermekbaevich

Teacher, Master of Education, Osh State University
jsapiev@oshsu.kg

Abstract. The article analyzes migration processes in Kyrgyzstan as a factor of socio-economic development. Particular attention is paid to the study of the dual nature of external labor migration's impact on macroeconomic and social indicators. On the one hand, remittances (migrants' money transfers) act as a powerful tool for reducing poverty and stimulating domestic consumer demand. On the other hand, this process provokes a large-scale outflow of qualified personnel, exacerbates demographic imbalance, and

reinforces regional disparities in territorial development. Therefore, forecasting in various fields of science and technology is a highly relevant issue. Using an econometric model, it is possible to analyze and forecast based on statistical data. Brown's double exponential smoothing method is quite frequently applied to forecast migration flows, population size factoring in migration, and related indicators (e.g., remittance volume), especially when the data represents time series with a linear trend and random fluctuations, but without a pronounced seasonality. It yields good results for short- and medium-term migration forecasts when complex models of system dynamics or agent-based modeling are redundant or when data is scarce.

Keywords: migration, remittances, sustainable development, migration processes, modeling, Brown's double exponential smoothing.

Введение

Миграционные процессы в Кыргызстане оказывают двойственное воздействие на устойчивое развитие: способствуя снижению бедности через ремиттансы, они одновременно усиливают демографические и структурные уязвимости экономики – моделирование этих взаимодействий необходимо для обоснования политики, направленной на замещение миграционного дохода внутренними драйверами роста [11]. Необходимость регулирования миграционных процессов и создания условий для безопасной, упорядоченной и легальной миграции признана Национальной стратегией развития Кыргызской Республики на 2018-2040 годы, утвержденной Указом Президента Кыргызской Республики от 31 октября 2018 года № 221 [13].

Трудовая миграция остаётся ключевым фактором краткосрочного снижения бедности и поддержки потребления в Кыргызстане за счёт ремиттансов (25–30% ВВП) [16], однако её масштабная нерегулируемая природа усиливает долгосрочные угрозы устойчивому развитию – демографический дисбаланс, отток человеческого капитала и структурную зависимость экономики от внешних шоков [9-12], что делает необходимым переход к математическому моделированию миграционно-экономических взаимодействий для обоснования политики замещения миграции внутренним ростом [14].

Материалы и методы исследования

Прогнозирование в различных областях науки и техники является актуальным вопросом. С помощью эконометрической модели можно сделать анализ и прогнозирование по статистическим данным [1, 8]. Оптимальным решением для оценивания параметров и близлежащего прогноза объемов ремиттансов и миграционных потоков, характеризующихся линейным вектором и стохастическими колебаниями, является аппарат адаптивного моделирования. Его теоретические истоки восходят к классической концепции Р. Брауна [3,4] и методическим разработкам Ю. П. Лукашина [6]. Предложенный Брауном метод двойного экспоненциального сглаживания (Brown's double exponential smoothing) ценен тем, что он оперативно интегрирует новые данные и подстраивается под динамику процесса, сохраняя структурную простоту и прозрачность вычислений.

Метод двойного экспоненциального сглаживания Брауна довольно часто применяется для прогнозирования миграционных потоков, численности населения с учётом миграции и связанных показателей (например, объёма ремиттансов), особенно когда данные представляют собой временные ряды с линейным трендом и случайными колебаниями, но без ярко выраженной сезонности [5]. Метод простой, адаптивный, требует мало параметров (только один α), легко реализуется в Excel – идеально для начального/среднесрочного прогнозирования (1–5 лет). Он даёт хорошие результаты для

краткосрочных и среднесрочных прогнозов миграции, когда сложные модели системной динамики, агентного моделирования избыточны или данных мало [2].

Миграционные данные (число выехавших, чистая миграция по годам/кварталам, ремиттансы из России/Казахстана) обычно имеют линейный или слабо нелинейный тренд (рост в 2000–2010-е, спад во время пандемии, восстановление после 2022–2025 годы) [7]. Метод Брауна применяется для сглаживания данных с учётом линейного тренда (один параметр сглаживания для уровня и тренда одновременно), что позволяет строить краткосрочные прогнозы с минимальными вычислениями. Это типичный подход в эконометрике, демографии или статистике для несезонных рядов с трендом.

Рассмотрен исходный временной ряд, который содержит девятнадцать уровней наблюдения заданного показателя $Y(t)$ (количество выбывших мигрантов за последние 19 лет) [15]. Данные за 2007–2025 годы, использованные в прогнозировании, были получены с сайта <https://stat.gov.kg/ru/publications/demograficheskij-ezhegodnik-kyrgyzskoj-respubliki/>.

Таблица 1.

2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
54 608	41 287	33 380	54 531	45 740	49 349	44 209	43 171	38169	38 367
2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
42 876	51 248	48 989	69 136	45 970	53 410	57 229	61 978	67000	?
2027									
?									

Реализован алгоритм адаптивного моделирования временных рядов. Методом наименьших квадратов (МНК) определены параметры A_0 , A_1 линейной модели для первых девятнадцати показателей временного ряда:

$$Y_p(t) = A_0 + A_1 t.$$

Первичные оценки искомых коэффициентов получены с применением стандартного инструментария МНК следующим образом:

$$A_1 = \frac{\sum[(t - t_{cp}) \cdot (Y(t) - Y_{cp})]}{\sum(t - t_{cp})^2} \approx -4492:10 = -449,2,$$

$$A_0 = Y_{cp} - A_1 \cdot t_{cp} = 45909,2 + 449,2 \cdot 3 \approx 47256,8,$$

где t_{cp} – среднее значение фактора “время”,

Y_{cp} – среднее значение исследуемого показателя.

Оценка начальных значений параметров модели в MS Excel приведены в следующей таблице №2.

Возьмем $k=1$, параметр α сглаживания равным 0,5. Подставив в уравнение тренда $t=1$, находим:

$$Y_p(1) = 47256,8 - 449,2 \cdot 1 = 46807,6$$

Ошибка прогноза:

$$e(1) = Y(1) - Y_p(1) = 7800,4.$$

Сделана корректировка коэффициентов, учитывая ошибки:

$$A_1(t) = A_1 + (1 - \beta)^2 e(t), \quad A_0(t) = A_0 + A_1 + (1 - \beta^2) e(t).$$

В условиях задачи $\alpha = 0,5$. Соответственно $\beta = 1 - \alpha = 0,5$.

Таблица №2.

	A	B	C	D	E	F
1	t	Y(t)	(t-tcp)^2	Y(t)-Ycp	t-tcp	(Y(t)-Ycp)(t-tcp)
2	1	54608	4	8698,8	-2	-17397,6
3	2	41287	1	-4622,2	-1	4622,2
4	3	33380	0	-12529,2	0	0
5	4	54531	1	8621,8	1	8621,8
6	5	45740	4	-169,2	2	-338,4
7	tcp=3	Ycp=45909,2	10	0	0	-4492
8						
9			A1=	-449,2		
10			A0=	47256,8		
11						

Вычислительный этап реализован с помощью инструментария надстройки "Анализ данных" программного комплекса Excel:

$$A_1(1) = D2 + (1 - 0,5)^2 * F3, \quad A_0(t) = C2 + D2 + (1 - 0,5^2) * F3.$$

Текущее прогнозное моделирование осуществляется с опорой на скорректированные к данному моменту структурные коэффициенты:

$$Y_p(2) = C3 + D3 = 54158,8; \quad e(2) = Y(2) - Y_p(2) = B4 - E4 = -12871,8$$

Итерационный процесс последовательного уточнения параметров реализуется до последнего наблюдения.

Выполним прогноз на два следующие периода времени (2026, 2027 годы):

$$Y_p(20) = C21 + D21 = 69378,1; \quad Y_p(21) = C21 + D2 * 2 = 72693,3.$$

Результаты расчетов.

Таблица 3.

	A	B	C	D	E	F
1	t	Y(t)	A ₀	A1	Y _p (t)	e(t)
2			47256,8	-449,2		
3	1	54608	52657,9	1500,9	46807,6	7800,4
4	2	41287	44505	-1717,05	54158,8	-12871,8
5	3	33380	35732	-4069,03	42787,9	-9407,9
6	4	54531	48814	1647,99	31663	22868,1
7	5	45740	46920,5	467,494	50462	-4721,98
8	6	49349	48858,7	957,747	47388	1961,01
9	7	44209	45610,9	-444,127	49816,5	-5607,49
10	8	43171	43669,9	-943,063	45166,7	-1995,75
11	9	38169	39308,5	-2082,53	42726,9	-4557,87
12	10	38367	38081,7	-1797,27	37225,9	1141,06
13	11	42876	41228,1	-149,383	36284,5	6591,53
14	12	51248	48705,7	2392,93	41078,7	10169,3
15	13	48989	49516,4	1865,53	51098,6	-2109,62
16	14	69136	64697,5	6304,05	51381,9	17754,1
17	15	45970	52227,9	46,1636	71001,5	-25031,5
18	16	53410	53126	330,152	52274	1135,95
19	17	57229	56285,8	1273,36	53456,2	3772,84
20	18	61978	60873,3	2378,07	57559,2	4418,85
21	19	67000	66062,8	3315,23	63251,4	3748,64
22	20				69378,1	
23	21				72693,3	0

Как показано в таблице 3, расчёты проведены в Microsoft Excel с использованием метода двойного экспоненциального сглаживания Брауна, что позволило учесть линейный тренд и получить прогноз за 2026 год 69379 выбывших и за 2027 год 72694 выбывших.

В таблице №4 представлен сравнительный анализ фактических статистических показателей миграционного оттока населения Кыргызской Республики за последние 19 лет и теоретических значений, полученных в результате трендового моделирования.

Таблица №4.

	A	B
1	$Y(t)$	$Y_p(t)$
2		
3	54608	46807,6
4	41287	54158,8
5	33380	42787,9
6	54531	31663
7	45740	50462
8	49349	47388
9	44209	49816,5
10	43171	45166,7
11	38169	42726,9
12	38367	37225,9
13	42876	36284,5
14	51248	41078,7
15	48989	51098,6
16	69136	51381,9
17	45970	71001,5
18	53410	52274
19	57229	53456,2
20	61978	57559,2
21	67000	63251,4
22		69378,1
23		72693,3

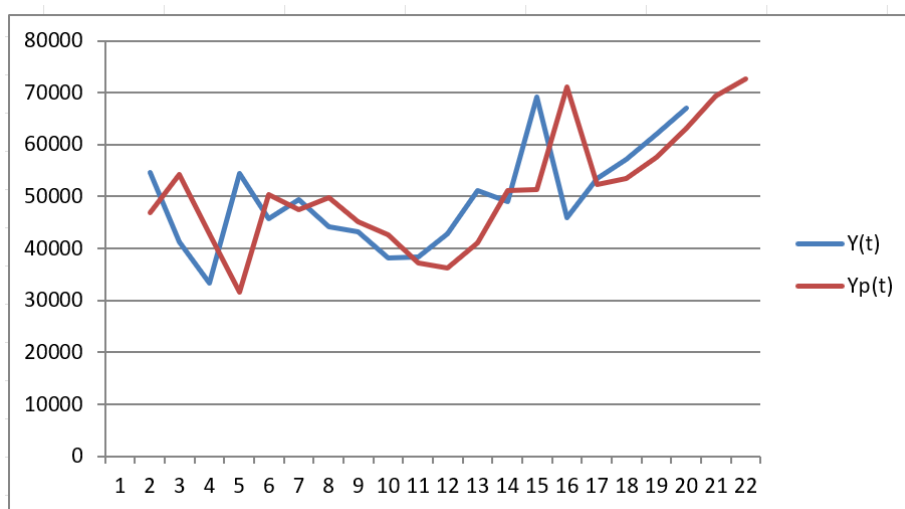


Рис. 1. Результаты аппроксимации и прогнозирования по адаптивной модели Брауна (параметр сглаживания равен 0,5).

Результаты и обсуждения

Таким образом, расчёты, проведенные в Microsoft Excel с использованием метода двойного экспоненциального сглаживания Брауна, позволили учесть линейный тренд и получить краткосрочный прогноз об увеличении количества выбывших и связанных с ними показателей для анализа влияния миграции на социально-экономические показатели устойчивого развития Кыргызстана. Для достижения устойчивого социально-экономического развития Кыргызстана в условиях сохраняющейся высокой миграционной мобильности населения требуется интеграция миграционных процессов в национальную стратегию до 2040 года через разработку и верификацию комплексных моделей (включая влияние ремиттансов на ВВП, человеческий капитал и демографию), что позволит минимизировать негативные эффекты и трансформировать диаспору в ресурс для инвестиций и репатриации знаний.

Выводы

Метод Брауна использует один параметр α , что делает его более устойчивым и точным в условиях жесткого дефицита статистической информации или при работе со сравнительно короткими временными рядами миграционной статистики КР. Применение методов эконометрического прогнозирования позволяет количественно оценить влияние внешней трудовой миграции на достижение целей устойчивого развития Кыргызстана до 2040 года: с одной стороны – амортизация безработицы и приток ремиттансов, с другой – усиление региональных диспропорций и демографических рисков, что открывает возможность для разработки оптимальных сценариев государственной миграционной политики.

Литература

1. Айвазян С.А. Методы эконометрики: учебник /С.А. Айвазян. – М.:Магистр: ИНФРА.– М, 2010. – 512 с.
2. Аширбаева А.Ж., Каракозиев М.М. Прогноз по линейной модели Брауна количества больных детей из города Ош, поступивших в Ошскую межобластную детскую клиническую больницу [Текст] / Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2022. –№ 2.– С. 69–72.
3. Brown, R. G. Statistical Forecasting for Inventory Control / R. G. Brown. – New York : McGraw-Hill, 1959.
4. Brown, R. G. Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series / R. G. Brown. – Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1963. (*Переиздано в 2004 г. издательством Dover Publications*).
5. Дорохина Е.Ю., Брацин Р.М. Современные подходы к моделированию и прогнозированию миграции [Текст] / Бизнес. Образование. Право. –2024. – № 1(66). – С.134–139.
6. Лукашин, Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов : учеб. пособие / Ю. П. Лукашин. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
7. Макыев С.Т., Эргешбаев У.Ж., Кутушева Н.Т. Вопросы внешней трудовой миграции населения кыргызской республики в рамках ЕАЭС. [Текст] / Вестник ОшГУ. Экономика. –2024. № 2 (5). – С. 43–50.

8. Светульников С. Г., Светульников И. С. Методы социально-экономического прогнозирования. В 2 т. – М.: Издательство Юрайт, 2019.
9. Эргешбаев У.Ж., Макыев С.Т., Кутушева Н.Т. Современные тенденции внешней трудовой миграции населения Кыргызстана [Текст] / Вестник ОшГУ. Экономика. – 2024. № 2 (5). – С. 22–32.
10. Эргешбаев У. Ж., Кочербаева А. А. Внешняя трудовая миграция населения Кыргызстана в условиях евразийской интеграции // Проект «Социально-политическое измерение реализации процессов евразийской интеграции» / Под общей редакцией С. В. Рязанцева, Г. И. Осадчей. Выпуск № 4; Центр исследования процессов евразийской интеграции ИСПИ РАН. – М.: Изд-во Экон-Информ, 2019.
11. Эргешбаев У. Ж. Влияние денежных переводов трудовых мигрантов на социально-экономическое развитие Кыргызстана // Наука, техника и образование. – 2016. – № 11 (29). – С. 58–61.
12. Эргешбаев У.Ж. Миграция населения Киргизской Республики в Россию: социальноэкономические последствия // Регион: экономика и социология. 2010. № 2. С. 156-165.
13. УКАЗ Президента КР от 31 октября 2018 года УП № 221 О Национальной стратегии развития Кыргызской Республики на 2018-2040 годы. <https://cbd.minjust.gov.kg/430002/edition/1095562/ru>
14. Концепция миграционной политики Кыргызской Республики на 2021-2030 годы.
15. Демографический ежегодник Кыргызской Республики за 2006-2024 гг. –Б: Нацстатком Кыргызской Республики.
16. Миграциялык абал боюнча баяндама, январь-июнь 2025. Эл Аралык Миграция Уюму (ЭАМУ) Ибраимов к., 103 Виктория Бизнес борбору Бишкек Кыргызстан.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА НА ОСИ

Камбарова Айсалкын Даминовна

к.ф.-м.н., доцент. Ошский государственный университет
ORCID 0009-0004-7885-3932, akambarova@oshsu.kg

Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна

к.-ф.м.н., доцент. Ошский государственный университет
0000-0003-0694-6633, amurzabaeva@oshsu.kg

Орозмаматова Жыпаргул Шермаматовна

к.ф.-м.н., доцент. Ошский технологический университет
0000-0002-8847-5478, jypar75@mail.ru

Аннотация. Рассматривается один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, заданных на всей числовой оси. Исследованы свойства интегрального оператора, определяемого заданным ядром, и анализируются функциональные пространства, в которых рассматриваются решения уравнения. Особое внимание уделяется условиям на ядро интегрального уравнения, обеспечивающим корректность постановки задачи и возможность восстановления неизвестной функции. Рассмотрены особенности уравнений, заданных на всей числовой оси, что приводит к дополнительным трудностям, связанным с неограниченностью области интегрирования и поведением функций на бесконечности. Для исследования используются методы функционального анализа, теории интегральных операторов и теории некорректно поставленных задач. Обсуждены возможные подходы к регуляризации решений, позволяющие стабилизировать процесс их нахождения при наличии погрешностей в исходных данных. Построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву, для решения данного интегрального уравнения первого рода. Полученные результаты могут быть использованы в прикладных задачах математической физики и вычислительной математики, приводящие к решению интегральных уравнений Вольтерра первого рода

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра первого рода, линейные интегральные уравнения, интегральный оператор, ядро интегрального уравнения, числовая ось, существование и единственность решения, некорректно поставленные задачи; регуляризация устойчивости решения, приближённые методы решения.

ON ONE CLASS OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND ON THE AXIS

Kambarova Aisalkyn Daminovna

Associate Professor. Osh State University
ORCID 0009-0004-7885-3932, akambarova@oshsu.kg

Murzabayeva Aitbü Busurmankulovna

Associate Professor. Osh State University
ORCID 0000-0003-0694-6633, amurzabaeva@oshsu.kg

Orozmamatova Jypargul Shermamatovna

Associate Professor. Osh Technological University
ORCID 0000-0002-8847-5478, jypar75@mail.ru

Abstract. This paper considers a class of first-kind linear Volterra integral equations defined on the entire real line. The properties of the integral operator determined by a given kernel are investigated, and the functional spaces in which the solutions are sought are analyzed. Particular attention is paid to the conditions imposed on the kernel of the integral equation that ensure the well-posedness of the problem and the possibility of recovering the

unknown function. The study examines the specifics of equations defined on the entire real line, which introduces additional challenges related to the unboundedness of the integration domain and the behavior of functions at infinity. The research employs methods from functional analysis, the theory of integral operators, and the theory of ill-posed problems. Potential approaches to the regularization of solutions are discussed, allowing for the stabilization of the recovery process in the presence of errors in the input data. Regularizing operators in the sense of M.M. Lavrentiev are constructed to solve this first-kind integral equation. The obtained results are applicable to problems in mathematical physics and computational mathematics that involve solving first-kind Volterra integral equations.

Keywords: Volterra integral equations of the first kind; linear integral equations; integral operator; kernel of the integral equation; real axis; existence and uniqueness of solutions; ill-posed problems; regularization; stability of solutions; approximate solution methods.

Введение. В данной статье рассматривается один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, заданных на всей числовой оси. Основное внимание уделяется исследованию свойств интегрального оператора и ядра, анализу условий существования и единственности решения. Актуальность исследования обусловлена тем, что интегральные уравнения Вольтерра первого рода являются некорректными по Адамару: решение может не существовать, быть не единственным или крайне чувствительным к малым изменениям исходных данных. Это создаёт необходимость разработки методов анализа таких уравнений, изучения условий существования и единственности решений, а также применения методов регуляризации для стабилизации приближённых решений.

Цель статьи заключается в исследовании одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на всей числовой оси и в разработке методов получения устойчивых решений.

Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\infty}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (1)$$

где $K(t,s)$ и $f(t)$ – заданные функции, $u(t)$ – неизвестная функция.

Различные вопросы для интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода исследованы в работах В.Я. Арсенина (1968), Т.Т. Каракеева (2012), М.И. Иманалиева (1978). В частности, в работе (Иманалиев, М.И 1978) доказаны теоремы единственности и построен регуляризирующий оператор для систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода на отрезке.

Материалы и методы

В данной статье построен регуляризирующий оператор и доказана теорема единственности для решения уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_{-\infty}^t K(t,s)v(s, \varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u_0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, $u_0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t)$, $u(t)$ – решение уравнения (1).

Введем обозначения:

1) Обозначим через $C(-\infty, +\infty)$ пространство всех функций $u(t)$ – непрерывных и ограниченных на $(-\infty, +\infty)$, $\|\cdot\|_C$ норма в $C(-\infty, +\infty)$, т.е. для любого

$$u(t) \in C(-\infty, +\infty)$$

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} |u(t)|$$

2) Через $L_1(-\infty, +\infty)$ обозначим пространство всех функций $u(t)$ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty.$$

3) Обозначим через $C_0(-\infty, +\infty)$ – пространство всех функций $u(t) \in C(-\infty, +\infty)$, таких что $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = u_0, u_0 \in R$.

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} |u(t)|$$

4) Через $L_{1,los}(-\infty, +\infty)$ обозначим пространство всех функций $u(t)$, таких что для любого $T \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^T |u(t)| dt < \infty.$$

5) Обозначим через $C_0^1(-\infty, +\infty)$, пространство всех функций $u(t) \in C_0(-\infty, +\infty)$ таких, что для любых $t \in (-\infty, +\infty)$

$$|u'(t)| \leq M_0 K(t, t),$$

где M_0 – положительная постоянная, $K(t, t) \in L_{1,los}(-\infty, +\infty)$ и $K(t, t) \geq 0$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Предположим выполнение следующих условий:

а) $K(t, t) \geq 0$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^t |K(t, s)| ds \in C(-\infty, +\infty), K(t, t) \in L_{1,los}(-\infty, +\infty).$$

б) Для любых $t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$,

$$|K(t_1, s) - K(t_2, s)| \leq l(s) \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, s) ds \right|,$$

где $0 \leq l(t)$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$, $l(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$

Решение уравнения (2) будем искать в виде:

$$v(t, \varepsilon) = u(t) + \xi(t, \varepsilon). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2) имеем:

$$\xi(t, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t K(s, s) \xi(s, \varepsilon) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t \left[\int_{-\infty}^t K(t, s) - K(s, s) \right] \xi(s, \varepsilon) ds + [u_0 - u(t)].$$

Отсюда, используя резольвенту $R(t, s, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau}$ ядра $-\frac{1}{\varepsilon} K(s, s)$ имеем

$$\begin{aligned} \xi(t, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t [K(t, s) - K(s, s)] \xi(s, \varepsilon) ds + [u_0 - u(t)] + \\ & + \int_{-\infty}^t \frac{1}{\varepsilon} K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\tau} [K(\tau, s) - K(s, s)] \xi(s, \varepsilon) ds d\tau - \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} [u_0 - u(t)] d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Применяя формулу Дирихле, уравнение (4) запишем в виде:

$$\xi(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t H(t, s, \varepsilon) \xi(s, \varepsilon) ds + \varphi(t, \varepsilon), \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} H(t, s, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} [K(t, s) - K(s, s)] + \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} [K(\tau, s) - K(s, s)] d\tau, \quad (t, s) \in G, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\varphi(t, \varepsilon) = u_0 - u(t) - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t [K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} [u_0 - u(t)]] d\tau. \quad (7)$$

$$G\{(t, s): -\infty < s < t < +\infty\}, t \in (-\infty, +\infty).$$

Результаты и обсуждение

Теорема. Пусть выполняются условия а), б) и $u(t) \in C_0^1(-\infty, +\infty)$, где $u(t)$ – решение уравнения (1). Тогда решение $v(t, \varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к решению $u(t)$ уравнения (1). При этом справедлива оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C \leq M_1 \varepsilon, \quad (8)$$

$$\text{где } M_1 = M_0 \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} l(s) ds \right\}, \quad |u'(t)| \leq M_0 K(t, t), t \in (-\infty, +\infty).$$

Доказательство. Учитывая формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} d\tau &= 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} d\tau &= 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t K(\tau, \tau) d\tau} \end{aligned}$$

из (6) получили:

$$\begin{aligned} H(t, s, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} [K(t, s) - K(s, s)] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} - \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} [K(t, s) - K(\tau, s)] d\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

Интегрируя по частям, из (7) имеем:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} u'(\tau) d\tau, t \in R. \quad (10)$$

Учитывая условие б), из (9) получили:

$$\begin{aligned} |H(t, s, \varepsilon)| &\leq l(s) \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau \right] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} l(s) \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau \right] d\tau = \\ &= l(s) \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau \right] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} + l(s) \int_s^t \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau \right] d\tau \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по частям, имеем:

$$|H(t, s, \varepsilon)| \leq l(s) \int_s^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} K(\tau, \tau) d\tau = l(s) \left[1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} \right].$$

Из последнего неравенства получим

$$|H(t, s, \varepsilon)| \leq l(s), (t, s) \in G = \{(t, s) : -\infty < s \leq t < +\infty\} \quad (11)$$

В силу $u(t) \in C_0^1(-\infty, +\infty)$, из (10) имеем:

$$|\varphi(t, \varepsilon)| \leq \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} u'(\tau) d\tau \leq M_0 \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} K(\tau, \tau) d\tau \leq M_0 \varepsilon.$$

Отсюда получим:

$$\|\varphi(t, \varepsilon)\|_C \leq M_0 \varepsilon. \quad (12)$$

Учитывая (11) и (12) из (5) имеем:

$$|\xi(t, \varepsilon)| \leq \int_{-\infty}^t l(s) |\xi(s, \varepsilon)| ds + M_0 \varepsilon, t \in (-\infty, +\infty). \quad (13)$$

Применяя формулу Гронуолла-Белмана из (13) имеем (8). Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия а), б) и существует $\delta \in (-\infty, +\infty)$ такое что $K(t, t) > 0$ почти при всех $t \in (-\infty, \delta)$. Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $C_0^1(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $u(t) \in C_0^1(-\infty, +\infty)$ является решением уравнения (1) при $f(t) = 0, t \in (-\infty, +\infty)$. В этом случае сначала в силу условий а), б) доказываем, что $\lim_{t \rightarrow -\infty} |u(t)| = 0$. В самом деле

$$\int_{-\infty}^t K(t, s) u(s) ds = 0, t \in (-\infty, +\infty).$$

Отсюда, имеем:

$$\int_{-\infty}^t K(s,s)u(s)ds = - \int_{-\infty}^t [K(t,s) - K(s,s)]u(s)ds, t \in (-\infty, \delta). \quad (14)$$

В силу условий *a*) и *b*), из (14) имеем:

$$\left| u(t^*) \right| \left| \int_{-\infty}^t K(s,s)ds \right| = \left| \int_{-\infty}^t K(s,s)u(s)ds \right| \leq \int_{-\infty}^t l(s) \left[\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau \right] ds \|u(t)\|_C,$$

где $-\infty < t^* \leq t \leq \delta$.

Из последнего неравенства получим:

$$\left| u(t^*) \right| \leq \|u(t)\|_C \int_{-\infty}^t l(s)ds, -\infty < t^* \leq t < +\infty$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left| u(t^*) \right| = 0.$$

Далее в силу оценки (8) доказывается $u(t) = 0$ при всех $K(t,s)$ $t \in (-\infty, +\infty)$.

Ниже приведем пример.

Пример. Рассмотрим уравнения (1) и (2) при

$$K(t,s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^2} \left[\frac{1}{1+s^2} + \int_s^t \frac{|s|}{(1+s^2)^3} ds \right], (t,s) \in G. \quad (15)$$

В этом случае условия теоремы выполняются при

$$K(s,s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^3}, l(s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^2}, s \in (-\infty, +\infty).$$

В самом деле, в силу (15) для любых $t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$ имеем:

$$K(t_1,s) - K(t_2,s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{|s|}{(1+s^2)^3} ds,$$

Отсюда

$$\left| K(t_1,s) - K(t_2,s) \right| \leq l(s) \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s,s)ds \right|.$$

Поэтому утверждения теоремы справедливы для уравнения (1) и (2), когда $K(t,s)$ определяется по формуле (15).

Выводы. В работе рассмотрен один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, определённых на числовой оси. Анализ показал, что особенности постановки на бесконечной оси приводят к дополнительным математическим трудностям, связанным с поведением функций на бесконечности и неограниченностью области интегрирования. Исследование свойств интегрального оператора и ядра позволило определить условия, обеспечивающие существование и единственность решения рассматриваемого класса уравнений. Показано, что правильная постановка задачи и соблюдение условий на ядро являются ключевыми для получения корректного решения. Рассмотрены методы регуляризации, в частности подходы, основанные на построении регуляризующих операторов по М. М. Лаврентьеву.

Полученные результаты создают основу для дальнейшего исследования линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода и разработки численных методов их решения, применимых в математической физике, инженерных расчётах и других прикладных областях.

Литература

1. Apartsin, A.S. On multilinear Volterra equations of the 1st kind [Text] / A.S. Apartsin // Automation and telemechanics. – 2004. - No. 2 – P. 118-125.
2. Arsenin, V. Ya. On the solution of some integral equations of the first kind, of the convolution type, by the regularization method [Text] / V. Ya. Arsenin, V. V. Ivanov // Zhurnal vzyit. matem. i matem. physic. – 1968. – 8. - № 2.
3. Asanov, A. Volterra-Stieltjes integral equations of the second and first kind [Text] / A. Asanov // Journal of Natural Sciences KTUM, Bishkek, 2002, No. 2, – P.79-95.
4. Imanaliev, M.I. Generalized solutions of integral equations of the first kind [Text] / M.I. Imanaliev // Frunze: Ilim, 1978. – 144 p.
5. Karakeev T.T., Bugubaeva Zh. Equivalent transformation and regularization of integral Volterra equations of the third kind // Bulletin of KNU - Bishkek, 2012-issue 5-pp. 29-33.
6. Saadabaev, A.S. Finite-dimensional approximation of the solution of an operator equation of the first kind [Text] /A.S.Saadabaev // Studies in integro-differential equations. - Bishkek: Ilim, 1991. - Issue 23. - P. 152 - 155.
7. Srazhidinov, A. Regularization of an integral equation of the first kind of Volterra type with inaccurate data [Text] /A. Srazhidinov // Studies in integro-differential equations. - Frunze: Ilim, 1988. - Issue 21. - P. 57-68.
8. Tagaeva, S. B. Regularization and uniqueness of solutions of Volterra integral equations of the 3rd kind in unbounded domains [Text]: author's abstract. dis. ... candidate of physical and mathematical sciences: 01.01.02 / S. B. Tagaeva. - Bishkek, 2015. - 19 p.
9. Bedelova, N.S. Regularization and uniqueness of solutions of Volterra-Stieltjes integral equations of the third kind [Text]: author's abstract. dis. ... candidate of physical and mathematical sciences: 01.01.02 / S.N. Bedelova. - Osh, 2016. - 20 p.
10. Anikonov, Y.E. Poorly Visidle Media in X-ray Tomografic [Текст]/Y.E. Anikonov, V.G. Nazarov, L.V. Prokhorov // Utrecht, the Netherlands: VSP, 2004-294p.
11. Anikonov, Y.E. Poorly Visidle Media in X – ray Tomografic [Текст] / Y.E. Anikonov, V.G. Nazarov, L.V. Prokhorov // Utrecht, the Netherlands: VSP, 2002 – 294 p.
12. Apartsyn, A.G. Nonclassical linear Volterra Equations of the first kind [Текст] / Y.E. Anikonov, V.G. Nazarov, L.V. Prokhorov // Utrecht The Netherlands: VSP, 2002 – 294 p.
13. Asanov, A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind [Текст] / A. Asanov // Utrecht, VSP, 1998 – 272 p.
14. Asanov, A. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations [Текст] / A. Asanov, E.R. Atamanov // Utrecht, the Netherlands: VSP, 1997 – 152 p.
15. Bughegeim, A.L. Introduction to the Theory of Inverse Problems [Текст] / A.L. Bughegeim // Utrecht, the Netherlands: VSP, 2000 – 232 p.
16. Bughegeim, A.L. Volterra Equations and Inverse Problems [Текст] / A.L. Bughegeim // Utrecht, the Netherlands: VSP, 1999 – 204 p.
17. Denisov, A.M. Elements ot the Theory of Inverse Problems [Текст] / A.M.Denisov // VSP, Utrecht, 1999, 272 p.

18. Imanaliev, M.I. Regularization and Uniqueness of Solutions to Systems of Nonlinear Volterra Integral Equations of the Third Kind [Текст] / M.I. Imanaliev, A. Asanov // Doklady Mathematics, Vol. 76, № 1, 2007 – Pp. 490-493.
19. Shishatsky, S.P., Asanov A., Atamanov E.R. Uniqueness Problems for Degenerating Equations and Nonclassical Problems [Текст] / S.P.Shishatsky, A.Asanov, E.R.Atamanov // – VSP, P.O. – AH Zeist. – 2001, 178 p.
20. Shishatsky, S.P. Uniqueness Problems for Degenerating Equations and Nonclassical Problems [Текст] / S.P. Shishatsky, A. Asanov, E.R. Atamanov// VSP, P.O. – AH Zeist, 2001 – 178 p.
21. Kambarova A.D. Regularization of solutions of one class of systems of linear Volterra integral equations of the first kind on the axis, Kambarova A.D., Toygonbaeva A.K., Bedelova N.S., Murzabaeva A.B. Eurasian Scientific Association. 2021. No. 6-1 (76). P. 34-37. <https://elibrary.ru/contents.asp?id=46338910>
22. Lavrentiev, M.M. Regularization of Volterra-type operator equations [Text] / M.M. Lavrentiev // In the book: Problems of Mathematical Physics and Computational Mathematics. - Moscow: Nauka, 1977, pp. 199-205.
23. Orozmamatova, Zh.Sh. Regularization and uniqueness of solutions of linear integral Fredholm equations of the first kind in unbounded domains [Text]: Abstract of Cand. of Phys. and Mathematics Sciences: 01.01.02 / Zh.Sh. Orozmamatova. – Osh, 2019. – 20 p.
24. Tolubaev, Zh. O. Boundedness and square summability of solutions of Volterra-Stieltjes integro-differential equations [Text]: author's abstract. dis. ... candidate of physical and mathematical sciences: 01.01.02 / Zh. O. Tolubaev. - Bishkek, 2016. - 19 p.
25. Toygonbaeva, A.K. Regularization and uniqueness of the solution of Fredholm-Stieltjes integral equations of the first kind [Text]: author's abstract. dis. ... candidate of physical and mathematical sciences: 01.01.02 / A.K. Toygonbaeva. - Osh, 2014. - 20 p.

УДК 514.7

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2\(7\)_27](https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2(7)_27)

ОБ ОДНОЙ КВАЗИДВОЙНОЙ ЛИНИИ ПАРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ E_5

Матиева Гулбадан

д.ф.-м.н., профессор кафедры алгебры и геометрии,
Ошский государственный университет;
ORCID: 0009-0003-1106-8211, gulbadan_57@mail.ru

Сарыгулова Нуркыз Акболушовна

магистр математики, старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии,
Ошский государственный университет;
ORCID: 0009-0009-1169-1832, n.sarygulova@mail.ru

Махаматсабыр кызы Максуда

магистрант, Ошский государственный университет;
mahamatsabyrkyzymaksuda@gmail.com

***Аннотация.** В работе рассматривается семейство гладких линий в области пятимерного евклидова пространства, обладающее свойством, что через каждую точку области проходит единственная линия данного семейства. Для исследования геометрических свойств линий используется подвижной репер Френе, а интегральные линии его координатных векторов образуют сеть Френе. На касательной к рассматриваемой линии инвариантным образом определяется точка, называемая псевдофокусом. При перемещении исходной точки в области эта точка описывает некоторую область, что приводит к возникновению частичного отображения между областями пространства. Исследуются пары четырехмерных распределений и устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых линии, принадлежащие этим распределениям, являются квазидвойными линиями соответствующих пар распределений.*

***Ключевые слова:** евклидово пространство, репер Френе, сеть Френе, частичное отображение, квазидвойная линия, распределение, псевдофокус.*

ON A QUASI-DOUBLE LINE OF A PAIR OF DISTRIBUTIONS IN THE FIVE- DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE E_5

Matieva Gulbadan

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor of the Department of Algebra and Geometry,
Osh State University;
ORCID: 0009-0003-1106-8211, gulbadan_57@mail.ru

Sarygulova Nurkyz Akbolushovna

Master of Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Algebra and Geometry,
Osh State University;
ORCID: 0009-0009-1169-1832, n.sarygulova@mail.ru

Mahamatsabyr kyzy Maksuda

Master's Degree Student in Mathematics, Osh State University;
mahamatsabyrkyzymaksuda@gmail.com

***Abstract.** This paper investigates a family of smooth lines in a domain of five-dimensional Euclidean space, such that exactly one line of the family passes through each point of the domain. To study*

the geometric properties of these lines, a Frenet frame is introduced, and the integral curves of its coordinate vector fields form a Frenet net. Along the tangent to the line, a point called the pseudofocus is defined in an invariant manner. As the initial point varies within the domain, the pseudofocus traces out another domain, giving rise to a partial mapping between the corresponding domains. Pairs of four-dimensional distributions are studied, and necessary and sufficient conditions are established under which the lines belonging to these distributions are quasi-double lines.

Key words: Euclidean space, Frenet's frame, Frenet net, partial mapping, quasi-double lines, distribution, pseudofocus.

ВВЕДЕНИЕ

В области $\Omega \subset E_5$ задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия ω^1 заданного семейства. Подвижной репер $\mathcal{R}$ пространства E_5 выбран так, чтобы он являлся репером Френе [1] для линии ω^1 . Интегральные линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [1]. На касательной к линии ω^1 инвариантным образом определяется точка F_1^2 , так называемая псевдофокусом [2]. Когда точка X смещается в области Ω , точка F_1^2 описывает свою область $\Omega_1^2 \subset E_5$. Получается частичное отображение $f_1^2: \Omega \rightarrow \Omega_1^2$ такое, что $f_1^2(X) = F_1^2$. Рассмотрены пары четырехмерных распределений. Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии, принадлежащие распределениям, являлись квазидвойными линиями пар распределений.

В области Ω пространства E_5 заданы семейства линий таких, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна и только одна линия каждого семейства. Подвижной ортонормированный репер $\mathcal{R} = (X, \vec{e}_i)(i, j, k = \overline{1,5})$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [5] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\mathcal{R}$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \quad (1)$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \quad (2)$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_5 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\mathcal{R}$ построен на касательных к линиям сети Σ_5 , формы ω_i^k становятся главными [6], т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \quad (3)$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \quad (4)$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (2.1.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \wedge \omega_i^\ell) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [8] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \wedge \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = (\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l) \omega^m \quad (5)$$

отсюда

$$B_{ikm}^j = \Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l. \quad (6)$$

Система величин $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} d_1 \vec{e}_1 &= \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2, \\ d_1 \vec{e}_2 &= \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3, \\ d_1 \vec{e}_3 &= \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4, \\ d_1 \vec{e}_4 &= \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5, \\ d_1 \vec{e}_5 &= \Lambda_{51}^4 \vec{e}_4. \end{aligned}$$

и

$$\Lambda_{i1}^1 = 0 \quad (i < j, i = 1, 2, 3; j = 1, 4, 5)$$

$$\Lambda_{i1}^{i+1} = 0 \quad (i < j, i = 1, 2, 3)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, ..., $k_4^1 = \Lambda_{4,1}^5$ первая, вторая, третья, четвёртая кривизны линии ω^1 соответственно, где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1 .

Псевдофокус [9] F_i^j ($i \neq j$) касательной к линии ω^1 сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j} \vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i} \vec{e}_i.$$

В каждой касательной $(X, \vec{e}_i)$ существует по 4 псевдофокуса: когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, псевдофокус F_i^j описывает свою область $\Omega_i^j \subset E_5$. В результате которого получается частичное отображение $f_i^j: \Omega \rightarrow \Omega_i^j$ такое, что $f_i^j(X) = F_i^j$.

МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Псевдофокус $F_1^2 \in (X, \vec{e}_1)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_1 \quad (7)$$

Дифференцируем это равенство обычным образом и принимаем деривационные формулы репера $\mathcal{R}$. Тогда имеем:

$$d\vec{F}_1^2 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{12i}^2 \omega^i}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1i}^m \omega^i}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m, \text{ где } B_{12i}^2 = \Lambda_{12i}^2 + \Lambda_{1l}^2 \Lambda_{2i}^l + \Lambda_{l2}^2 \Lambda_{1i}^l$$

Последнее равенство перепишем в виде:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_1^2 = & \left[\vec{e}_1 + \frac{B_{121}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^m}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m \right] \omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B_{122}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^m}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m \right] \omega^2 \\ & + \left[\vec{e}_3 + \frac{B_{123}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^m}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m \right] \omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B_{124}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^m}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m \right] \omega^4 \\ & + \left[\vec{e}_5 + \frac{B_{125}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^m}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m \right] \omega^5 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \left[1 + \frac{B_{121}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \right] \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^5}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_5 \\ \vec{b}_2 &= \frac{B_{122}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^5}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_5; \\ \vec{b}_3 &= \frac{B_{123}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^5}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \\ \vec{b}_4 &= \frac{B_{124}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{14}^5}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_5; \\ \vec{b}_5 &= \frac{B_{125}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^2}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_2 + \vec{e}_5. \end{aligned} \quad (8)$$

В общем случае векторы $\vec{b}_i$ линейно независимые.

Присоединим к области $\Omega_1^2 \subset E_5$ подвижный репер $\mathcal{R}' = (F_1^2, \vec{b}_i)$, где $F_1^2 = f_1^2(X)$, $\vec{b}_i = f_1^2(\vec{e}_i)$.

Рассмотрим четырехмерные распределения $\Delta_{(1234)}, \Delta_{(1235)}, \Delta_{(1234)}, \Delta_{(2345)}, \Delta_{(1245)}$ ($\Delta_{(ijkl)} = (X, \vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_l)$) и их образы в частичном отображении $f_1^2: \Delta'_{(ijkl)} = f_1^2$

Определение. Линии $l \in \Delta_p, \bar{l} = f(l)$ называются квазидвойными линиями пары распределений (Δ_p, Δ'_p) в частичном отображении f , если касательные к линиям l и $\bar{l}$ взятые в их соответствующих точках X и $f(X)=F$ принадлежат одному и тому же p -мерному подпространству Δ_p пространства E_5 [10].

Рассмотрим линию $\alpha \in \Delta_{(1234)}$ с касательным вектором: $\vec{\alpha} = \alpha^1 \vec{e}_1 + \alpha^2 \vec{e}_2 + \alpha^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\alpha}$ к линии $\bar{\alpha} = f_1^2(\alpha)$ в виде: $\vec{\alpha} = \alpha^1 \vec{b}_1 + \alpha^2 \vec{b}_2 + \alpha^3 \vec{b}_3 + \alpha^4 \vec{b}_4$. Учитывая формул (2) отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} = & (\alpha^1 b_1^1 + \alpha^2 b_2^1 + \alpha^3 b_3^1 + \alpha^4 b_4^1) \vec{e}_1 + (\alpha^3 b_3^2 + \alpha^4 b_4^2) \vec{e}_2 + \alpha^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4 + (\alpha^1 b_1^5 + \alpha^2 b_2^5 \\ & + \alpha^4 b_4^5) \vec{e}_5 \end{aligned}$$

Из условия $l, \bar{l} \in \Delta_{(1234)}$ следует, что $\alpha^1 b_1^5 + \alpha^2 b_2^5 + \alpha^4 b_4^5 = 0$. Воспользуюсь формулами (8) отсюда получим:

$$\alpha^1 \Lambda_{11}^5 + \alpha^2 \Lambda_{12}^5 + \alpha^4 \Lambda_{14}^5 = 0 \quad (9)$$

Обратно, если имеет место равенство (9), то линии $\alpha, \bar{\alpha} = f_1^2(\alpha)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(1234)}, \Delta'_{(1234)})$ в частичном отображении f_1^2 .

Легко проверить, что

А) линии $\beta \in (\Delta_{(1235)})$ и $\bar{\beta} = f_1^2(\beta)$ всегда являются квазидвойными линиями пара распределений $(\Delta_{(1235)}, \Delta'_{(1235)})$ в частичном отображении f_1^2 ;

Б) линии $l \in (\Delta_{(1245)}, \bar{l} = f_1^2(l))$ всегда являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(1245)}, \Delta'_{(1245)})$ в частичном отображении f_1^2 .

Рассмотрим линию $\gamma \in \Delta_{(2345)}$ с касательным вектором: $\vec{\gamma} = \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4 + \alpha^5 \vec{e}_5$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ к линии $\bar{\gamma} = f_1^2(\gamma)$ в виде: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2 \vec{b}_2 + \gamma^3 \vec{b}_3 + \gamma^4 \vec{b}_4 + \gamma^5 \vec{b}_5$. Учитывая формул (8) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\gamma}} = (\gamma^2 b_2^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^4 b_4^1 + \gamma^5 b_5^1) \vec{e}_1 + (\gamma^3 b_3^2 + \gamma^4 b_4^2 + \gamma^5 b_5^2) \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3 + \gamma^4 \vec{e}_4 + (\gamma^2 b_2^5 + \alpha^4 b_4^5 + \gamma^5) \vec{e}_5$$

Из условия $\vec{\bar{\gamma}}, \bar{\gamma} \in (\Delta_{(2345)})$ следует:

$$\gamma^2 b_2^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^4 b_4^1 + \gamma^5 b_5^1 = 0.$$

Опять учитывая формул (2) отсюда имеем:

$$\gamma^2 B_{122}^2 + \gamma^3 B_{123}^2 + \gamma^4 B_{124}^2 + \gamma^5 B_{125}^2 = 0 \quad (10)$$

Обратно, если имеет место равенство (10), то линии

$\gamma \in \Delta_{(2345)}, \bar{\gamma} = f_1^2(\gamma)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(2345)}, \Delta'_{(2345)})$ в частичном отображении f_1^2 .

Теперь рассмотрим линию $d \in \Delta_{(1345)}$ с касательным вектором: $\vec{d} = d^1 \vec{e}_1 + d^3 \vec{e}_3 + d^4 \vec{e}_4 + d^5 \vec{e}_5$. Ищем касательный вектор $\vec{\bar{d}}$ к линии $\bar{d} = f_1^2(d)$ в виде: $\vec{\bar{d}} = d^1 \vec{b}_1 + d^3 \vec{b}_3 + d^4 \vec{b}_4 + d^5 \vec{b}_5$. Учитывая формул (8) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{d}} = (d^1 b_1^1 + d^3 b_3^1 + d^4 b_4^1 + d^5 b_5^1) \vec{e}_1 + (d^3 b_3^2 + d^4 b_4^2 + d^5 b_5^2) \vec{e}_2 + d^3 \vec{e}_3 + d^4 \vec{e}_4 + (d^1 b_1^5 + d^4 b_4^5 + d^5) \vec{e}_5$$

Из условия $\vec{\bar{d}}, \bar{d} \in (\Delta_{(1345)})$ следует:

$$d^3 b_3^2 + d^4 b_4^2 + d^5 b_5^2 = 0.$$

Опять учитывая формул (8) отсюда получим:

$$d^3 \Lambda_{13}^2 + d^4 \Lambda_{14}^2 + d^5 \Lambda_{15}^2 = 0 \quad (11)$$

Обратно, если имеет место равенство (11), то линии

$d \in \Delta_{(1345)}, \bar{d} = f_1^2(d)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(1345)}, \Delta'_{(1345)})$ в частичном отображении f_1^2 .

Из вышеизложенных следует

Теорема. 1) Линии $\alpha \in \Delta_{(1234)}$ и $\bar{\alpha} = f_1^2(\alpha)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(1234)}, \Delta'_{(1234)})$ в частичном отображении f_1^2 тогда и только тогда, когда координаты касательного вектора $\vec{\alpha}$ к линии α удовлетворяет условию:

$$\alpha^1 \Lambda_{11}^5 + \alpha^2 \Lambda_{12}^5 + \alpha^4 \Lambda_{14}^5 = 0 \quad (12)$$

2) Линии $\beta \in \Delta_{(1235)}$ и $\bar{\beta} = f_1^2(\beta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(1235)}, \Delta'_{(1235)})$ в частичном отображении f_1^2 ;

3) Линии $\gamma \in \Delta_{(1234)}$ и $\bar{\gamma} = f_1^2(\gamma)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(1234)}, \Delta'_{(1234)})$ в частичном отображении f_1^2 тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\gamma^2 B_{122}^2 + \gamma^3 B_{123}^2 + \gamma^4 B_{124}^2 + \gamma^5 B_{125}^2 = 0 \quad (13)$$

4) Линии $l \in \Delta_{(1245)}$ и $\bar{l} = f_1^2(l)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(1245)}, \Delta'_{(1245)})$ в частичном отображении f_1^2 ;

5) Линии $d \in \Delta_{(1345)}$ и $\bar{d} = f_1^2(d)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(1345)}, \Delta'_{(1345)})$ в частичном отображении f_1^2 тогда и только тогда, когда имеет место

равенство:

$$d^3\Lambda_{13}^2 + d^4\Lambda_{14}^2 + d^5\Lambda_{15}^2 = 0 \quad (14)$$

Литература

1. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ*. Москва: Едиториал УРССР, 2002. – 664 с.
2. Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии*. М. – Л.: Гостехиздат, 1948. – 432 с.
3. Матиева Г., Абдуллаева Ч.Х., Папиева Т.М. *Введение в геометрию квазидвойных линий частичных отображений евклидовых пространств*. Монография. – Ош: «Билим» ОшГУ, 2024. – 172 с.
4. Matieva G., Abdullaeva Ch. H., Artykova Z. A. *Existence of quasidouble lines of a pair (f_1^5, Δ_{135}) in Euclidean space*. Journal of Physics: Conference Series. 28, Sains Matematik Wahana Pencetus Inovasi Sejangat. -2001. – С. 012082. – DOI 10.1088/1742-6596/1/012082
5. Соловьев, А. Ф. *Кривизна распределения* [Текст] / А. Ф. Соловьев // Математические заметки. – Т.35. – №1. – 1984. –С. 111-124.
6. Базылев, В. Т. *О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей* [Текст] / В. Т. Базылев // Изв. вузов. Математика. – 1967. – Т. 9. – С. 3-11.
7. Папиева, Т. М. *Двойные линии частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе* [Текст] / Т. М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 43. – С. 199-203.
8. Шинкунас, Ю. И. *О распределении m -мерных плоскостей в n -мерном римановом пространстве* [Текст] / Ю. И. Шинкунас // Труды Геометрического Семинара. – Москва: ВИНТИ, 1973. – Т.5. – С.123-133.
9. Базылев, В. Т. *Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p -поверхности евклидова пространства* [Текст] / В. Т. Базылев //Сибирский математический журнал. – 1966. – Т. 3. – С. 499-511.
10. Курбанбаева Н.Н., Сейитказыева Г.И., Сарыгулова Н.А. *Бөлүштүрүүлөрдүн түгөйүнүн квазикошмок сызыктарынын жашашы* [Текст] // Вестник Ошского государственного университета. Математика. – 2024. - №4/2024. – С.145-149.

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Нуранов Бактыбек Шермаматович

Ошский государственный университет,

<https://orcid.org/0009-0003-4120-8780>, nuranov2014@mail.ru

Ош, Кыргызстан

Аннотация. Доказано существование и единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка с переменными коэффициентами, когда смешанный параболическо-гиперболический оператор применяется к дифференциальному оператору первого порядка с частными производными вида $\partial/\partial x - \partial/\partial y$. На линии изменения типа уравнения требуется непрерывность следа искомой функции и её производных первого и второго порядков по y . Методом понижения порядка уравнения рассматриваемая задача сводится к задаче Трикоми для уравнения смешанного уравнения второго порядка, разрешимость которого устанавливается методом интегральных уравнений Фредгольма второго рода. После определения следа производных первого и второго порядков искомой функции на линии изменения типа уравнений $y=0$, задача сводится к решению краевой задачи для уравнения первого порядка вида $\partial u/\partial x - \partial u/\partial y = 0$, которое имеет единственное решение.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, третий порядок, краевые условия, существование, единственность, функция Грина, функция Римана, интегральные уравнения.

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A THIRD-ORDER MIXED-TYPE EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Nuranov Baktybek Shermamatovich

Osh State University,

<https://orcid.org/0009-0003-4120-8780>, nuranov2014@mail.ru

Osh, Kyrgyzstan

Abstract. The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem for a third-order mixed-type equation with variable coefficients is proved when a mixed parabolic-hyperbolic operator is applied to a first-order partial differential operator of the form $\partial/\partial x - \partial/\partial y$. On the line $y=0$ where the type of the equation changes, the continuity of the trace of the unknown function and its of its first- and second-order derivatives with respect to y is required. Using the method of order reduction, the problem under consideration is reduced to the Tricomi problem for a second-order mixed-type equation, the solvability of which is established using the Fredholm integral equation method of the second kind. After determining the traces of the first- and second-order derivatives of the unknown function on the line of type change $y=0$, the problem is reduced to solving a boundary value problem for a first-order equation of the form $\partial u/\partial x - \partial u/\partial y = 0$, which has a unique solution.

Keywords: partial differential equations, third-order, boundary conditions, existence, uniqueness, Green's function, Riemann function, integral equations.

Введение

Разработка корректных условий «склеивания» решений на границе раздела областей – это фундаментальная задача теории дифференциальных уравнений, так как с ростом порядка уравнения для обеспечения гладкости решения и корректности краевых задач количество условий на линии сопряжения (склеивания) пропорционально увеличивается.

Обзор краевых задач для уравнения смешанного параболическо-гиперболического типа второго, третьего и четвертого порядков указаны в работах [1, 2], а для уравнений смешанного эллиптического-гиперболического и эллиптического-параболического типов приведены в работах [3 – 13].

Классификация и приведение к каноническому виду уравнений с частными производными третьего и четвертого порядков рассмотрены в работах [14 – 15].

Постановка задачи. В области D , ограниченной отрезками линий $AC: x+y=0$, $CB: x-y=\ell$, $BB_0: x=\ell$, $B_0A_0: y=\ell$, $B_0A: x=0$ ($\ell > 0$), рассматривается уравнение

$$L_1 L_2 u = 0 \quad (1)$$

где

$$L_1 \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} + c_1(x, y), & y > 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_2(x, y), & y < 0, \end{cases} \quad L_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y},$$

$a_2(x, y), b_2(x, y), c_i(x, y)$ ($i=1, 2$) – заданные функции, $D = D_1 \cup AB \cup D_2$, $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$, $AB = \{(x, y): 0 < x < \ell, y = 0\}$.

Задача 1. Требуется определить функцию $u(x, y)$, которая является решением уравнения (1) в области $D \setminus (y = 0)$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x, y), u_x(x, y), u_{yy}(x, y) \in C(\bar{D}), \quad (2)$$

$$u|_{AA_0} = \varphi_1(y), u|_{BB_0} = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq \ell, \quad (3)$$

$$u_x|_{AA_0} = \varphi_3(y), u_x|_{BB_0} = \varphi_4(y), 0 \leq y \leq \ell, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BC} = \psi(x), \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell, \quad (5)$$

где $\varphi_i(y)$ ($i = \overline{1, 4}$), $\psi(x)$ – заданные гладкие функции, n – внутренняя нормаль (Рис.1), причём

$$c_1(x, y) \in C(\bar{D}_1), a_2(x, y), a_{2x}(x, y), b_2(x, y), b_{2y}(x, y), c_2(x, y) \in C(\bar{D}_2). \quad (6)$$

$$\varphi_i(y) \in C^1[0, \ell] \quad (i = 1, 2), \varphi_j(y) \in C[0, \ell] \quad (j = 3, 4), \psi(x) \in C^2\left[\frac{\ell}{2}, \ell\right]. \quad (7)$$

$$\varphi_4(0) - \varphi_2'(0) = -\sqrt{2}\psi(\ell). \quad (7)$$

Если $y > 0$, то уравнение (1) представим в виде:

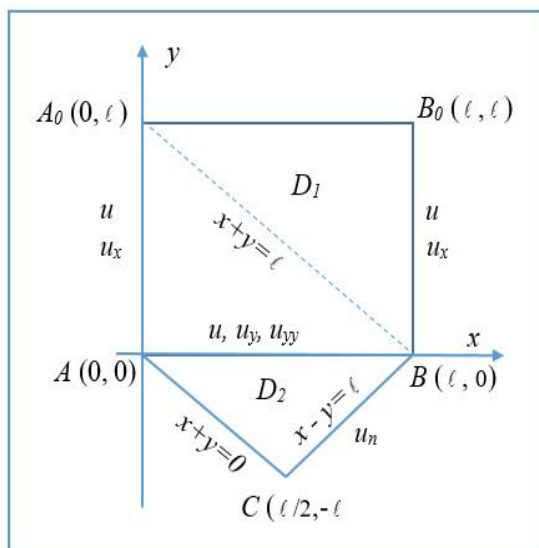
$$L_2 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = v_1(x, y), (x, y) \in D_1, \quad (8)$$

$$L_1 v_1 \equiv \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1}{\partial y} + c_1(x, y)v_1 = 0, (x, y) \in D_1, \quad (9)$$

а когда $y < 0$, то уравнение (1) запишем в виде

$$L_2 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = v_2(x, y), (x, y) \in D_2, \quad (10)$$

$$L_1 v_2 \equiv \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + a_2(x, y) \frac{\partial v_2}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial v_2}{\partial y} + c_2(x, y)v_2 = 0, (x, y) \in D_2. \quad (11)$$


$$v_1(x, +0) = v_2(x, -0), v_{1\nu}(x, +0) = v_{2\nu}(x, -0), 0 \leq x \leq \ell. \quad (12)$$
$$u_1(x, +0) = u_2(x, -0) = v(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (13)$$

$$v_{1v}(x, +0) = v_{2v}(x, -0) = \mu(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (14)$$

Материалы и методы исследования

$$\begin{aligned} v_2(x, y) = & \frac{1}{2} [R(x, y; x+y, 0)v(x+y) + R(x, y; x-y, 0)v(x-y)] + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} [R_\eta(x, y; \xi, 0) + b_2(\xi, 0)R(x, y; \xi, 0)]v(\xi)d\xi - \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} R(x, y; \xi, 0)\mu(\xi)d\xi, \end{aligned} \quad (15)$$
$$R_{\xi\xi} - R_{\eta\eta} - (a_2 R)_\xi - (b_2 R)_\eta + c_2 R = 0, \quad (16)$$
$$R(x, y; \xi, x + y - \xi) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x^\xi [a_2(t, x + y - t) + b_2(t, x + y - t)] dt \right\}, \quad (17)$$

$$R(x, y; \xi, \xi - x + y) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x^\xi [a_2(t, t - x + y) - b_2(t, t - x + y)] dt \right\}, \quad (18)$$

$$R(x, y; x, y) = 1. \quad (19)$$

Условие (5) запишем в следующем виде:

$$\nu_2(x, x-\ell) = -\sqrt{2}\psi(x), \quad \ell/2 \leq x \leq \ell. \quad (20)$$

Используя условия (20), при $y = x - \ell$ из формулы (15), получим связь между функциями $\nu(x)$ и $\mu(x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} R(x, x-\ell; 2x-\ell, 0)\nu(2x-\ell) = & - \int_{2x-\ell}^{\ell} \left[R_{\eta}(x, x-\ell; \xi, 0) + b_2(\xi, 0)R(x, x-\ell; \xi, 0) \right] \nu(\xi) d\xi + \\ & + \int_{2x-\ell}^{\ell} R(x, x-\ell; \xi, 0) \mu(\xi) d\xi - 2\sqrt{2}\psi(x) + \sqrt{2}R(x, x-\ell; \ell, 0)\psi(\ell). \end{aligned} \quad (21)$$

Введя замену $2x-\ell = z$, затем меняя z на x , имеем

$$\begin{aligned} R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right)\nu(x) = & - \int_x^{\ell} \left[R_{\eta}\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right) + b_2(\xi, 0)R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right) \right] \nu(\xi) d\xi + \\ & + \int_x^{\ell} R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right) \mu(\xi) d\xi - 2\sqrt{2}\psi\left(\frac{x+\ell}{2}\right) + \sqrt{2}R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \ell, 0\right)\psi(\ell). \end{aligned} \quad (22)$$

Лемма 1. $\forall x \in [0, \ell]$ имеет место неравенство

$$R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right) > 0. \quad (23)$$

Доказательство. Из равенства (17) при $\xi = x + y$ имеем

$$R(x, y; x+y, 0) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{x+y} [a_2(t, x+y-t) + b_2(t, x+y-t)] dt \right\}.$$

Отсюда при $y = x - \ell$ имеем

$$R(x, x-\ell; 2x-\ell, 0) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{2x-\ell} [a_2(t, 2x-\ell-t) - b_2(t, 2x-\ell-t)] dt \right\}.$$

Введя замену $2x-\ell = z$, затем меняя z на x , получим

$$R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{\frac{x+\ell}{2}}^x [a_2(t, x-t) - b_2(t, x-t)] dt \right\}, \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Следовательно, $\forall x \in [0, \ell]: R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right) > 0$. Лемма 1 доказано.

С учетом Леммы 1 из (22) имеем

$$\nu(x) = \int_x^{\ell} K_1(x, \xi) \nu(\xi) d\xi + \int_x^{\ell} K_2(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \Psi_1(x), \quad (24)$$

где $K_1(x, \xi) = - \frac{R_{\eta}\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right) + b_2(\xi, 0)R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right)}{R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right)},$

$$K_2(x, \xi) = \frac{R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right)}{R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right)}, \quad \Psi_1(x) = -\sqrt{2} \frac{2\psi\left(\frac{x+\ell}{2}\right) - R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \ell, 0\right)}{R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right)},$$

Обращая Вольтерровскую часть уравнения (24), имеем соотношение между функциями $\nu(x)$ и $\mu(x)$, полученное из области D_2 :

$$\nu(x) = \int_x^\ell K_3(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \Psi_2(x), \quad (25)$$

где $K_3(x, \xi) = K_2(x, \xi) + \int_x^\xi R_1(x, t) K_2(t, \xi) dt$, $\Psi_2(x) = \Psi_1(x) + \int_x^\xi R_1(x, \xi) \Psi_1(\xi) d\xi$, $R_1(x, \xi)$ - резольвента ядра $K_1(x, \xi)$.

Связь между функциями $\nu(x)$ и $\mu(x)$, полученная из области D_1 . С учетом условий склеивания (12) – (14) и переходом к пределу при u стремящемся к нулю, из уравнения (9) получим следующее соотношение:

$$\nu'(x) = \mu(x) - c_1(x, 0)\nu(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (26)$$

Из краевых условий (2) и (3) получим:

$$\nu(0) = \varphi_3(0) - \varphi_1'(0), \quad \nu(\ell) = \varphi_4(0) - \varphi_2'(0). \quad (27)$$

Для получения однородных краевых условий, вводим новую функцию $\tilde{\nu}(x)$, определенную равенством:

$$\nu(x) = \varphi(x) + \tilde{\nu}(x) \quad (28)$$

где

$$\varphi(x) = \varphi_3(0) - \varphi_1'(0) + \frac{x}{\ell} [\varphi_4(0) - \varphi_2'(0) - \varphi_3(0) + \varphi_1'(0)].$$

Тогда для функции $\tilde{\mu}(x)$ получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \tilde{\nu}''(x) = \mu(x) - c_1\nu(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ \tilde{\nu}(0) = 0, \quad \tilde{\nu}(\ell) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Решение задачи (29) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{\nu}(x) = \int_0^\ell G(x, \xi) [\mu(\xi) - c_1\nu(\xi)] d\xi, \quad (30)$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi(x-\ell)}{\ell}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{x(\xi-\ell)}{\ell}, & x \leq \xi \leq \ell \end{cases} \quad \text{функция Грина.}$$

Отметим, что $G(0, \xi) = 0$, $G(\ell, \xi) = 0$, $G_x(x, x+0) - G_x(x, x-0) = -1$.

Исключая $\tilde{\nu}(x)$ из (28) и (30), получим следующее соотношение:

$$\nu(x) = -c_1 \int_0^\ell G(x, \xi) \nu(\xi) d\xi + \int_0^\ell G(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (31)$$

Обращая уравнение (31) относительно $\nu(x)$, имеем:

$$v(x) = \Phi_1(x) + \int_0^{\ell} K_4(x, \xi) \mu(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (32)$$

$$\text{где } K_4(x, \xi) = G(x, \xi) + \int_0^{\ell} R_2(x, s) G(s, \xi) ds, \quad \Phi(x) = \varphi(x) + \int_0^{\ell} R_1(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

а $R_2(x, \xi)$ резольвента ядра $-c_1 G(x, \xi)$.

Приведение задачи к интегральному уравнению. Исключив $v(x)$ из уравнений (25) и (32), получим:

$$\int_x^{\ell} K_3(x, \xi) \mu(\xi) d\xi = \int_0^{\ell} K_4(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \Phi_2(x), \quad (33)$$

где $\Phi_2(x) = \Phi_1(x) - \Psi_2(x)$.

Дифференцируя уравнение (33), придем к следующему уравнению:

$$-K_3(x, x) \mu(x) + \int_x^{\ell} K_{3x}(x, \xi) \mu(\xi) d\xi = \int_0^{\ell} K_{4x}(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \Phi_2'(x). \quad (34)$$

Если учесть, что $\forall x \in [0, \ell]: K_3(x, x) = K_2(x, x) = 1$, то уравнение (34) можно записать в следующем виде:

$$\mu(x) = \int_x^{\ell} K_{2x}(x, \xi) \mu(\xi) d\xi - \int_0^{\ell} K_{4x}(x, \xi) \mu(\xi) d\xi - \Phi_2'(x). \quad (35)$$

После нахождения обращения Вольтерровской части уравнения (35), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\mu(x) = \Phi(x) + \int_0^{\ell} K(x, \xi) \mu(\xi) d\xi, \quad (36)$$

где

$$K(x, \xi) = -K_{4x}(x, \xi) - \int_x^{\ell} R_3(x, \xi_1) K_{4x}(\xi_1, \xi) d\xi_1, \quad \Phi(x) = -\Phi_2'(x) - \int_x^{\ell} R_2(x, \xi_1) \Phi_2'(\xi_1) d\xi_1,$$

а $R_3(x, \xi)$ – резольвента ядра $K_{4x}(x, \xi)$.

Пусть $\|K\|_{C(\bar{Q})} = \max_{(x, \xi) \in \bar{Q}} |K(x, \xi)|$, где $Q = \{(x, \xi): 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq \xi \leq \ell\}$.

Если

$$\ell \cdot \|K\|_{C(\bar{Q})} < 1, \quad (37)$$

тогда интегральное уравнение (36) имеет единственное решение.

Решение уравнения (36) определим в виде

$$\mu(x) = \Phi(x) + \int_0^{\ell} N(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi,$$

где $N(x, \xi)$ – резольвента ядра $K(x, \xi)$. Тогда из (32) находим $v(x)$. Следовательно, функция $v_2(x, y)$, представленная по формуле (15), полностью определена.

Решение задачи в области D_1 . В области D_1 решение уравнения (9), удовлетворяющее граничные условия:

$$u_1(0, y) = \varphi_3(y) - \varphi_1'(y) = \tilde{\varphi}_1(y), \quad u_1(\ell, y) = \varphi_4(y) - \varphi_2'(y) = \tilde{\varphi}_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ u_1(x, 0) = v(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

определим с помощью функции Грина:

$$u_1(x, y) = f(x, y) + \int_0^y d\eta \int_0^\ell c_1(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) u_1(\xi, \eta) d\xi, \quad (38)$$

где

$$f(x, y) = \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) \tilde{\varphi}_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x, y; \ell, \eta) \tilde{\varphi}_2(\eta) d\eta + \int_0^\ell G(x, y; \xi, 0) v(\xi) d\xi,$$

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\} -$$

функция Грина. Решение уравнения (38) определяется методом последовательных приближений. Таким образом, функция $u_1(x, y)$ однозначно определена.

В области D_1 решение задачи 1 сводится к решению следующей задачи.

Задача 2. Найти в области D_1 решение уравнения (8), удовлетворяющее условию (3).

Для решения задачи 2 поступим следующим образом. Область $D_1 = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \ell, 0 < \eta < \ell\}$ разобьём на две части: $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$, где $D_{11} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \ell, 0 < \eta < \ell - \xi\}$, $D_{12} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \ell, \ell - \xi < \eta < \ell\}$ (Рис. 2).

В области D_{11} выберем произвольную точку $M_1(x, y)$. Через точку $N_1(0, x+y)$ проведём прямую $N_1M_1 : \eta = -\xi + x + y$. Теперь рассмотрим криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\int_{N_1M_1} [u_\xi(\xi, \eta) - u_\eta(\xi, \eta)] d\xi = \int_{N_1M_1} v_1(\xi, \eta) d\xi.$$

В развернутом виде это равенство имеет вид:

$$\int_0^x [u_\xi(\xi, -\xi + x + y) - u_\eta(\xi, -\xi + x + y)] d\xi = \int_0^x v_1(\xi, -\xi + x + y) d\xi.$$

Учитывая, что $u_\xi(\xi, -\xi + x + y) - u_\eta(\xi, -\xi + x + y) = \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, -\xi + x + y)$ и первое краевое условие (3), из предыдущего равенства имеем

$$u(x, y) = \varphi_1(x + y) + \int_0^x v_1(\xi, -\xi + x + y) d\xi, \quad 0 \leq y \leq \ell - x.$$

Аналогичным образом в области $D_{12} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \ell, \ell - \xi < \eta < \ell\}$, выберем произвольную точку $M_2(x, y)$. Через точку $N_2(\ell, x + y - \ell)$ проведём прямую $M_2N_2 : \eta = -\xi + x + y$ и рассмотрим криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\int_x^\ell [u_\xi(\xi, -\xi + x + y) - u_\eta(\xi, -\xi + x + y)] d\xi = \int_x^\ell v_1(\xi, -\xi + x + y) d\xi.$$

Отсюда получим решение задачи 2, удовлетворяющее второе краевое условие (3) в следующем виде:

$$u(x, y) = \varphi_2(x + y - \ell) - \int_x^\ell v_1(\xi, -\xi + x + y) d\xi, \quad \ell - x \leq y \leq \ell.$$

Таким образом, решение задачи 2 представим в виде:

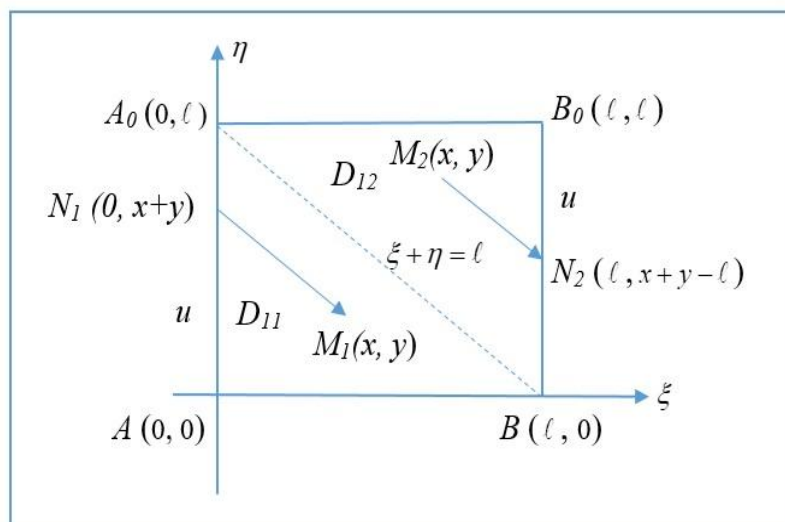


Рис. 2. Рисунок областей D_{11} и D_{12}

$$u(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(x+y) + \int_0^x \nu_1(\xi, -\xi + x+y) d\xi, & 0 \leq y \leq \ell - x, \\ \varphi_2(x+y-\ell) - \int_x^\ell \nu_1(\xi, -\xi + x+y) d\xi, & \ell - x \leq y \leq \ell, \end{cases} \quad (39)$$

где $\nu_1(x, y)$ определена по формуле (38). Отметим, что решение задачи 2 в области D_1 может иметь разрыв первого рода на линии $y = \ell - x$. Если потребуем выполнение условия согласования:

$$\varphi_2(0) = \varphi_1(\ell) + \int_0^\ell \nu_1(\xi, \ell - \xi) d\xi, \quad (40)$$

то $\nu_1(x, y) \in C(D_1)$.

Решение задачи в области D_2 . Из формулы (39) непосредственно можно определить след функции в следующем виде:

$$\tau(x) = u(x, 0) = \varphi_1(x) + \int_0^x \nu_1(\xi, -\xi + x) d\xi, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (41)$$

Тогда решение задачи 1 в области D_2 , удовлетворяющее уравнение (9) и краевое условие (41), определяется по формуле:

$$u(x, y) = \tau(x+y) + \int_{x+y}^x \nu_2(\xi, -\xi + x+y) d\xi, \quad (x, y) \in D_2.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (6), (7), (37) и (40). Тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Литературы

1. Джурев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. - Ташкент: Фан, 1979. - 240 с.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. - 448 с.
4. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. — Ташкент: Фан, 1974. - 156 с.
5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. - 287 с.
6. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов. Автореферат диссертации д-ра физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1982.
7. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 304 с.
8. Бобылева Л.А., Смирнов М.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка // Известия вузов. Математика. – 1972, №5. – С. 15-21.
9. Смирнов М.М. Краевая задача со смещением для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. №9. – С. 1678-1686.
10. Жегалов В.И. Некоторые задачи для уравнения смешанного-составного типа в бесконечной области // Труды семинара по краевым задачам. 1972. Вып. 9. – С. 75-85.
11. Жегалов В.И. Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казанское математическое общество. – 2001. – 226 с.
12. Апаков Ю.П., Хамитов А.А.У. О разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника. – 2023, №1(2). С. 13-23.
13. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника. – 2023, №1(2). С. 194-196.
14. Юлдашев Т.К. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2017. Выпуск 1(38). 42–54.
15. Юлдашев Т.К., Артыкова Ж.А. Об одной однородной нелокальной задаче для интегро-дифференциального уравнения фредгольма второго порядка // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника. – 2023, №1(2). С. 239-249.
16. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Решение краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с несимметричными условиями по времени // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника. – 2023, №2(3). С. 15-25.
17. Apakov Yu. P., Sopuev A.A. Boundary Value Problems for a Mixed Equation of Parabolic-Hyperbolic Type of the Third Order // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 12, pp. 5149–5157.
18. Yuldashev T. K., Apakov Yu. P. and Zhuraev A. Kh. Boundary value problem for third order partial integrodifferential equation with a degenerate kernel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021, 42, 1317–1327.
19. Джураев Т.Д. Попёлек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка Дифференциальные уравнения.

- 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1734-1745.
20. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
21. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
22. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. - М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
23. Абдумиталип Уулу, К. Төртүнчү тартиптеги кылдын термелүү операторун кармаган аралаш параболо-гиперболикалык тендеме үчүн чек аралык маселе / К. Абдумиталип Уулу // Вестник Ошского государственного университета. - 2021. - Vol. 3, No. 1. - P. 10-18. - DOI 10.52754/16947452_2021_3_1_10. - EDN HNHQFZ.
24. Абдумиталип Уулу, К. Краевая задача для уравнения четвертого порядка параболического типа / К. Абдумиталип Уулу, Т. Д. Асылбеков // Вестник Ошского государственного университета. - 2022. - № 1. - С. 12-19. - DOI 10.52754/16947452_2022_1_12. - EDN KDEDUQ.

УДК 517.956.6

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2\(7\)_43](https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2(7)_43)

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Сопуев Акылбек Адахимжанович

Ошский государственный университет

723500, ул. Алымбек Датка, 331, Ош, Кыргызстан

<https://orcid.org/0009-0006-6059-0008>, sopuevv@gmail.com

Аннотация. Доказано существование и единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка с двумя линиями изменения типа $y=0$ и $x=0$. На линии изменения типа $y=0$ и $x=0$ искомая функция и её нормальные производные непрерывны. Методом исключения системы уравнений, полученных из параболической и гиперболической части областей на линии $y=0$ разрешимость задачи сводится к разрешимости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, затем к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода. На линии $x=0$ разрешимость задачи сводится к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабым ядром. Методом функции Грина и Римана найдены представления решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, краевые условия, единственность, существование, функция Грина, функция Римана, интегральные уравнения.

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION OF THIRD ORDER WITH TWO LINES OF TYPE CHANGE

Sopuev Akylbek Adakhimzhanovich

Osh State University

723500, 331 Alymbek Datka Str., Osh, Kyrgyz Republic

<https://orcid.org/0009-0006-6059-0008>, sopuevv@gmail.com

Abstract. The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem for a third-order mixed parabolic-hyperbolic equation with two lines of change of type, $y=0$ and $x=0$, are established. On the change line of type $y=0$ and $x=0$, the unknown function and its normal derivatives are continuous. By eliminating a system of equations obtained from the parabolic and hyperbolic parts of the domains on the line $y=0$, the solvability of the problem is reduced to the solvability of a boundary value problem for an ordinary differential equation of the second order, then to the solvability of a Fredholm integral equation of the second kind. On the line $x=0$, the problem is reduced to a Volterra integral equation of the second kind with a weakly singular kernel. Representations of the solution to the problem under consideration are obtained using Green's and Riemann's function methods.

Keywords: differential equation, third order, multiple characteristics, boundary conditions, uniqueness, existence, Green's function, Riemann function, integral equations.

Введение

В работе [1] – [5] изучена разрешимость краевых задач для смешанного парабола-гиперболического уравнения третьего порядка с одной линией изменения типа $y = 0$:

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_{xy} = 0, & y > 0, \\ u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0, & y < 0, \end{cases}$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ – заданные коэффициенты.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа третьего порядка, когда в одной части

рассматриваемой области уравнение принадлежит параболическому типу, а в другой – гиперболическому типу исследованы в работах [6], [7].

Обзор прямых, обратных и некорректных задач для уравнений в частных производных приведен в работах [8], [9]. Нелокальные задачи, задачи со смещением и другие краевые задачи рассмотрены в работах [10] – [14]. Задачи с интегральными условиями рассмотрены в работах [15, 16]. Краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка, близкие к тематике данной работы, исследованы в работах [17] – [19].

В данной работе изучаются краевые задачи для уравнений третьего порядка смешанного парабола-гиперболического типа с двумя линиями изменения типа $y=0$ и $x=0$.

Постановка задачи. Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющие непрерывные все производные $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s$ ($r=0,1,\dots,n$; $s=0,1,\dots,m$). В области $D=D_1 \cup D_2 \cup D_3$ рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_{xy}, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u, & (x,y) \in D_2, \\ u_{xy} + a_3 u_x + b_3 u_y + c_3 u, & (x,y) \in D_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $D_1 = \{(x,y): 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$, $D_2 = \{(x,y): 0 < x < \ell, -h_1 < y < 0\}$, $D_3 = \{(x,y): -\ell_1 < x < 0, 0 < y < h\}$ ($\ell, \ell_1, h, h_1 > 0$), a_i, b_i, c_i ($i=2,3$) – заданные функции, причем

$$a_i(x,y) \in C^{1+0}(D_i), b_i(x,y) \in C^{0+1}(D_i), c_i(x,y) \in C(D_i) (i=2,3). \quad (2)$$

По классификации работы [20], уравнение (1) является уравнением смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка.

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{3+1}(D_1) \cup \cup C^{2+1}(D_2) \cup C^{2+1}(D_3)]$ ($i=\overline{1,3}$), удовлетворяющую уравнению (1) в области $D / (x \neq 0, y \neq 0)$ краевые условия

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y), u_{xx}(\ell, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u(0, y) = \chi_1(y), u_x(0, y) = \chi_2(y), -h_1 \leq y \leq 0, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), -\ell_1 \leq x \leq 0, \quad (5)$$

$$u(-\ell_1, y) = \varphi_3(y), 0 \leq y \leq h \quad (6)$$

где φ_i, χ_i ($i=1,2$), $\varphi_3, \psi, \alpha, \beta, \gamma$ – заданные функции, причем

$$\varphi_i(y) \in C^1[0, h], \chi_i(y) \in C^1[-h_1, 0] (i=1,2), \varphi_3(y) \in C[0, h], \psi(x) \in C^1[-\ell_1, 0], \quad (7)$$

$$\psi(0) = \chi_1(0), \psi'(0) = \chi_2(0), \varphi_3(0) = \psi(-\ell_1). \quad (8)$$

Пусть:

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau_1(x), u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = v_1(x), 0 \leq x \leq \ell, \quad (9)$$

$$u(+0, y) = u(-0, y) = \tau_2(y), u_x(+0, y) = v_2(y), 0 \leq y \leq h, \quad (10)$$

Рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

Задача 2. Требуется найти в области D_1 функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}_1) \cap C^{3+1}(D_1)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_1(u) \equiv u_{xxx} - u_{xy} = 0, (x,y) \in D_1 \quad (11)$$

и условиям

$$\begin{aligned} u_x(+0, y) = v_2(y), u(\ell, y) = \varphi_1(y), u_{xx}(\ell, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq h, \\ u(x, 0) = \tau_1(x), 0 \leq x \leq \ell. \end{aligned} \quad (12)$$

Задача 3. Требуется найти в области D_2 функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_2(u) \equiv u_{xx} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u = 0, (x, y) \in D_2, \quad (13)$$

краевым условиям (4) и начальному условию

$$u(x, 0) = \tau_1(x), 0 \leq x \leq \ell. \quad (14)$$

Задача 4. Требуется найти в области D_3 функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}_3) \cap C^{2+1}(D_3)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_3(u) \equiv u_{xx} + a_3 u_x + b_3 u_y + c_3 u = 0, (x, y) \in D_3, \quad (15)$$

условию (5) и условиям

$$u(0, y) = \tau_2(y), 0 \leq y \leq h, \quad (16)$$

$$u_x(-0, y) = v_2(y), 0 \leq y \leq h. \quad (17)$$

Для доказательства существования и единственности решения задачи 1 сначала требуется построить решение задач 2, 3 и 4 в каждой из областях $D_i (i = 1, 2, 3)$ (Рисунок 1).

Чтобы решить указанные вспомогательные задачи 2, 3 и 4, сначала требуется определить функции $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$.

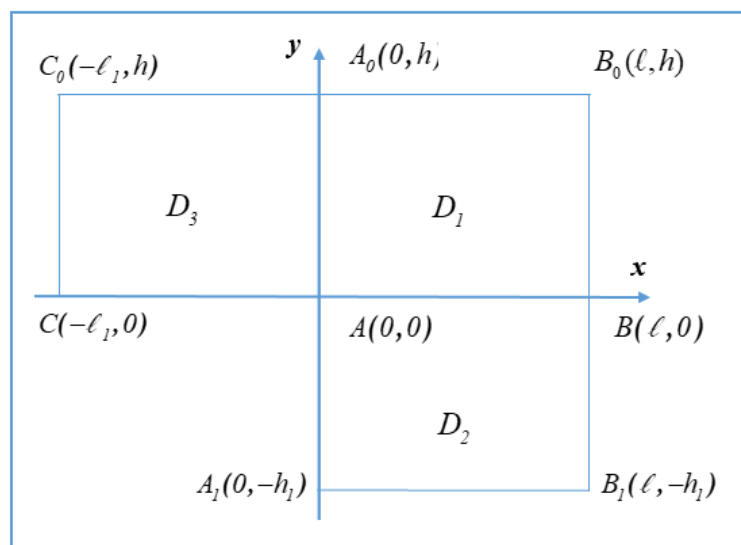


Рисунок 1. Рисунок области $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

Материалы и методы

Соотношения между $\tau_1(y)$ и $v_1(y)$, полученные из областей D_1 и D_2

После интегрирования уравнения (11) по области D_1 в пределах от x до ℓ , с учетом краевых условий (3), получается уравнение

$$u_{xx} - u_y = \omega(y), (x, y) \in D_1, \quad (18)$$

где $\omega(y) = \varphi_2(y) - \varphi_1'(y)$. При переходе к пределу при $y \rightarrow +0$ из уравнения (18) получается соотношение между функциями $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$:

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) = \omega(0). \quad (19)$$

С другой стороны, из уравнения (13) при $y \rightarrow -0$ имеет место соотношение между функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\nu_1''(x) + a_2(x, 0)\tau_1'(x) + b_2(x, 0)\nu_1(x) + c_2(x, 0)\tau_1(x) = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) записываем в виде:

$$\nu_1''(x) + b_2(x, 0)\nu_1(x) = T_1(x, \tau_1(x)), \quad (21)$$

где $T_1(x, \tau_1(x)) = -a_2(x, 0)\tau_1'(x) - c_2(x, 0)\tau_1(x)$.

Из условий (4) получаем краевые условия:

$$\nu_1(0) = \chi_1'(0), \nu_1(\ell) = \varphi_1'(0), \quad (22)$$

После введения замены

$$\nu_1(x) = z_0(x) + z(x), \quad (23)$$

где $z_0(x) = \chi_1'(0) + \frac{x}{\ell}[\varphi_1'(0) - \chi_1'(0)]$, для новой неизвестной функции $z(x)$ формулируется

новая краевая задача:

$$z''(x) + b_2(x, 0)z(x) = T(x, \tau_1(x)), \quad (24)$$

$$z(0) = 0, z(\ell) = 0, \quad (25)$$

где $T(x, \tau_1(x)) = T_1(x, \tau_1(x)) - z_0(x)b_2(x, 0)$.

Справедлива

Лемма 1. Если выполняется условие

$$\forall x \in [0, \ell] : b_2(x, 0) \leq 0, \quad (26)$$

то однородная задача (24), (25) имеет только тривиальное решение.

При выполнении условия (26), решение задачи (24), (25) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$z(x) = \int_0^\ell G_1(x, \xi)T(\xi, \tau_1(\xi))d\xi, \quad (27)$$

где $G_1(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi(x-\ell)}{\ell}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{x(\xi-\ell)}{\ell}, & x \leq \xi \leq \ell \end{cases}$ – функция Грина. Тогда из (23) и (27), получается

соотношение между функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\nu_1(x) = \int_0^\ell K_1(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \Phi_1(x), \quad (28)$$

где $K_1(x, \xi) = G_{1\xi}(x, \xi)a_2(\xi, 0) + [a_{2\xi}(\xi, 0) - c_2(\xi, 0)]G_1(x, \xi)$,

$\Phi_1(x) = z_0(x) - \int_0^\ell b_2(\xi, 0)z_0(\xi)G_1(x, \xi)d\xi + a_2(0, 0)G_1(x, 0)\chi_1(0) - a_2(\ell, 0)G_1(x, \ell)\varphi_1(0)$.

После исключения $\nu_1(x)$ из (19) и (28) получаем уравнение:

$$\tau_1''(x) = \int_0^\ell K_1(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \Phi_1(x) + \omega(0). \quad (29)$$

Используя краевые условия

$$\tau_1(0) = \chi_1(0), \tau_1(\ell) = \varphi_1(0) \quad (30)$$

из (29) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau_1(x) = \int_0^\ell K_2(x, \xi) \tau_1(\xi) d\xi + \Phi(x), \quad (31)$$

где $\Phi(x) = \chi_1(0) + \frac{x}{\ell} [\varphi_1(0) - \chi_1(0)] + \int_0^\ell G_2(x, \xi) [\Phi_1(\xi) \gamma(\xi) + \omega(0)] d\xi$,

$$K_2(x, \xi) = \int_0^\ell G_2(x, s) K_1(s, \xi) ds, \quad G_2(x, s) = \begin{cases} \frac{s(x-\ell)}{\ell}, & 0 \leq s \leq x, \\ \frac{x(s-\ell)}{\ell}, & x \leq s \leq \ell. \end{cases}$$

Лемма 2. Если

$$\ell \cdot \|K_2(x, \xi)\| < 1, \quad (32)$$

то решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода (31) существует и единственно.

Таким образом, из (31) однозначно определяется функция $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x) = \Phi(x) + \int_0^\ell R_1(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi, \quad (33)$$

где $R_1(x, \xi)$ – резольвента ядра $K_2(x, \xi)$.

Получение соотношения между функциями $\tau_2(y)$ и $v_2(y)$ из области D_1 .

После определения $\tau_1(x)$, решение уравнения (18) в области D_1 представим в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & - \int_0^y G(x, y; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x, y; \ell, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^\ell G(x, y; \xi, 0) \tau_1(\xi) d\xi - \int_0^y \omega(\eta) d\eta \int_0^\ell G(x, y; \xi, \eta) d\xi, \quad (x, y) \in D_1, \end{aligned} \quad (34)$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ – функция Грина, которая представима в виде [21, стр. 59-60]:

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) - \right. \\ & \left. - \exp\left(-\frac{(x-\xi+2(2n+1)\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi+2(2n+1)\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что в формуле (34) функция $v_2(y)$ ещё не определена. При $x = +0$ из (34) получаем соотношение между функциями $\tau_2(y)$ и $v_2(y)$:

$$\tau_2(y) = \int_0^y N_1(y, \eta) v_2(\eta) d\eta + \Phi_1(y), \quad (35)$$

где

$$N_1(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \left\{ -1 + \exp\left(-\frac{\ell^2}{y-\eta}\right) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left[\exp\left(-\frac{4n^2\ell^2}{y-\eta}\right) - \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\ell^2}{y-\eta}\right) \right] \right\},$$

$$\Phi_1(y) = - \int_0^y G_\xi(0, y; \ell, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_0^\ell G(0, y; \xi, 0) \tau_1(\xi) d\xi - \int_0^y \omega(\eta) d\eta \int_0^\ell G(0, y; \xi, \eta) d\xi.$$

Получение соотношения между функциями $\tau_2(y)$ и $v_2(y)$ из области D_3 . Для получения второго соотношения между функциями $\tau_2(y)$ и $v_2(y)$, сначала в области D_3 построим решение задачи 4. Пусть $M_1(x, y)$ произвольная точка области D_3 , а

$w(x, y; \xi, \eta)$ – произвольное решение уравнения

$$L_3^*(w) \equiv -w_{\xi\xi\eta} - (a_3 w)_\xi - (b_3 w)_\eta + c_3 w = 0, \quad (36)$$

в области $D_3^* = \{(\xi, \eta) : x < \xi < 0, 0 < \eta < y\}$ с границей $\partial D_3^* = M_1 P_1 \cup P_1 A \cup A Q_1 \cup Q_1 M_1$, где $M_1 P_1 = \{(\xi, \eta) : \xi = x, 0 < \eta < y\}$, $P_1 A = \{(\xi, \eta) : x < \xi < 0, \eta = 0\}$, $A Q_1 = \{(\xi, \eta) : \xi = 0, 0 < \eta < y\}$, $Q_1 M_1 = \{(\xi, \eta) : x < \xi < 0, \eta = y\}$.

Имеет место тождество:

$$w L_3(u) - u L_3^*(w) = [w u_{\xi\eta} + w_{\xi\eta} u + a_3 w u]_\xi - [w_\xi u_\xi - b_3 w u]_\eta. \quad (37)$$

После интегрирования тождество (37) по области D_3^* имеет место соотношение

$$\iint_{D_3^*} [w L_3(u) - u L_3^*(w)] d\xi d\eta = \int_{\partial D_3^*} (w_\xi u_\xi - b_3 w u) d\xi + (w u_{\xi\eta} + w_{\xi\eta} u + a_3 w u) d\eta. \quad (38)$$

Пусть $w(x, y; \xi, \eta) \in C(\bar{D}_3^*) \cap C^{2+1}(D_3^*)$ является решением уравнения (36), удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} w(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} &= 0, 0 \leq \eta \leq y, \\ w_\xi(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} &= 1, 0 \leq \eta \leq y, \\ w(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} &= \sigma(x, y; \xi), x \leq \xi \leq 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\sigma(x, y; \xi)$ – определены как решение задачи Коши:

$$w_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) + b_3(\xi, y)w(x, y; \xi, y) = 0, \quad (40)$$

$$w(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, w_\xi(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1. \quad (41)$$

Методом интегрирования из уравнения (36) получаем для $w(x, y; \xi, \eta)$ интегральное уравнение типа Вольтерра

$$\begin{aligned} w(x, y; \xi, \eta) &= \xi - x - \int_x^\xi (\xi - \xi_1) b_3(\xi_1, \eta) w(x, y; \xi_1, \eta) d\xi_1 + \\ &+ \int_x^\xi d\xi_1 \int_\eta^y [a_3(\xi_1, \eta_1) - (\xi - \xi_1) c_3(\xi_1, \eta_1)] w(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1, \end{aligned} \quad (42)$$

которое имеет единственное решение.

После интегрирования тождества (38) по области $D_3^* = \{(\xi, \eta) : x < \xi < 0, 0 < \eta < y\}$ с учетом свойств функции $w(x, y; \xi, \eta)$, определяем решение задачи 4 в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= w_\xi(x, y; 0, y) \tau_2(y) + w_\xi(x, y; x, 0) \psi(x) - w(x, y; 0, y) \nu_2(y) - \\ &- w_\xi(x, y; 0, 0) \psi(0) + w(x, y; 0, 0) \nu_2(0) + \int_0^y w_\eta(x, y; 0, \eta) \nu_2(\eta) d\eta - \\ &- \int_0^y [w_{\xi\eta}(x, y; 0, \eta) + a_3(0, \eta) w(x, y; 0, \eta)] \tau_2(\eta) d\eta + \\ &+ \int_x^0 [w_{\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + b_3(\xi, 0) w(x, y; \xi, 0)] \psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (43)$$

Используя краевое условие (6), из (43), получаем соотношение:

$$\begin{aligned} \varphi_3(y) = & w_{\xi}(-\ell_1, y; 0, y) \tau_2(y) + w_{\xi}(-\ell_1, y; -\ell_1, 0) \psi(-\ell_1) - w_{\xi}(-\ell_1, y; 0, 0) \psi(0) - \\ & - w(-\ell_1, y; 0, y) \nu_2(y) + w(-\ell_1, y; 0, 0) \nu_2(0) + \int_0^y w_{\eta}(-\ell_1, y; 0, \eta) \nu_2(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^y [w_{\xi\eta}(-\ell_1, y; 0, \eta) + a_3(0, \eta) w(-\ell_1, y; 0, \eta)] \tau_2(\eta) d\eta + \\ & + \int_{-\ell_1}^0 [w_{\xi\xi}(-\ell_1, y; \xi, 0) + b_3(\xi, 0) w(-\ell_1, y; \xi, 0)] \psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (44)$$

Равенство (44) запишем в виде:

$$\begin{aligned} w(-\ell_1, y; 0, y) \nu_2(y) = & w_{\xi}(-\ell_1, y; 0, y) \tau_2(y) + \int_0^y B_1(y, \eta) \tau_2(\eta) d\eta + \Psi_1(y) + \\ & + \int_0^y w_{\eta}(-\ell_1, y; 0, \eta) \nu_2(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(y, \eta) = & -w_{\xi\eta}(-\ell_1, y; 0, \eta) - a_3(0, \eta) w(-\ell_1, y; 0, \eta), \\ \Psi_1(y) = & -\varphi_3(y) + w_{\xi}(-\ell_1, y; -\ell_1, y) \psi(-\ell_1) - w_{\xi}(-\ell_1, y; 0, 0) \psi(0) + w(-\ell_1, y; 0, 0) \psi'(0) + \\ & + \int_{-\ell_1}^0 [w_{\xi\xi}(-\ell_1, y; \xi, 0) + b_3(\xi, 0) w(-\ell_1, y; \xi, 0)] \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Лемма 3. Если

$$\forall (x, y) \in D_3 : b_3(x, y) \leq 0, \quad (46)$$

то

$$\forall y \in [0, h] : w(-\ell_1, y; 0, y) \geq \ell_1. \quad (47)$$

Доказательство. Из уравнения (42) при $x = -\ell_1$, $\eta = y$ получаем соотношение

$$w(-\ell_1, y; 0, y) = \ell_1 + \int_{-\ell_1}^0 \xi_1 b_3(\xi_1, y) w(-\ell_1, y; \xi_1, y) d\xi_1. \quad (48)$$

При выполнении условия (46) из равенства (48) вытекает, что $\forall y \in [0, h] : w(-\ell_1, y; 0, y) \geq \ell_1$. Что и требовалось доказать.

Если учесть неравенство (47), то из уравнения (45) имеем:

$$\nu_2(y) = \Psi_2(y) + A_1(y) \tau_2(y) + \int_0^y B_2(y, \eta) \tau_2(\eta) d\eta + \int_0^y K_3(y, \eta) \nu_2(\eta) d\eta, \quad (49)$$

$$\text{где } A_1(y) = \frac{w_{\xi}(-\ell_1, y; 0, y)}{w(-\ell_1, y; 0, y)}, B_2(y, \eta) = \frac{B_1(y, \eta)}{w(-\ell_1, y; 0, y)}, K_3(y, \eta) = \frac{w_{\eta}(-\ell_1, y; 0, \eta)}{w(-\ell_1, y; 0, y)},$$

$$\Psi_2(y) = \frac{\Psi_1(y)}{w(-\ell_1, y; 0, y)}.$$

Рассматривая уравнение (49) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\nu_2(y)$, через резольвенту $R_2(y, \eta)$ ядра $K_3(y, \eta)$ его решение представим в виде:

$$\nu_2(y) = \Psi_3(y) + A_1(y) \tau_2(y) + \int_0^y B_3(y, \eta) \tau_2(\eta) d\eta, \quad (50)$$

$$\text{где } B_3(y, \eta) = B_2(y, \eta) + A_1(\eta) R_2(y, \eta) + \int_{\eta}^y R_2(y, \eta_1) B_2(\eta_1, \eta) d\eta_1,$$

$$\Psi_3(y) = \Psi_2(y) + \int_0^y R_2(y, \eta) \Psi_2(\eta) d\eta.$$

После исключения $\tau_2(y)$ из (35) и (50) получим интегральное уравнение Вольтерра

второго рода для функции $v_2(y)$

$$v_2(y) = \int_0^y N(y, \eta) v_2(\eta) d\eta + \Phi_1(y), \quad (51)$$

где $N(y, \eta) = A_1(\eta) N_1(y, \eta) + \int_{\eta}^y N_1(y, t) B_3(t, \eta) dt$, $\Phi_3(y) = \Phi_1(y) + \int_0^y N_1(y, \eta) \Psi_3(\eta) d\eta$,

которое допускает единственное решение. Определив $v_2(y)$ из (51), последовательно находим $\tau_2(y)$ по формуле (35).

Построение решение задачи 3 в области D_2 . После определения $\tau_1(x)$ решение задачи 3 в области D_2 строится методом функции Римана. Рассмотрим функцию $v(x, y; \xi, \eta)$, которая удовлетворяет по переменным (ξ, η) уравнению:

$$L_2^*(v) \equiv -v_{\xi\xi\eta} - (a_2 v)_{\xi} - (b_2 v)_{\eta} + c_2 v = 0. \quad (52)$$

Имеет место тождество

$$v L_2(u) - u L_2^*(v) = [v u_{\xi\eta} + v_{\xi\eta} u + a_2 v u]_{\xi} - [v_{\xi} u_{\xi} - b_2 v u]_{\eta}. \quad (53)$$

Пусть $M(x, y)$ произвольная точка области D_2 . Рассмотрим область $D_2^* = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, y < \eta < 0\}$ с границей $\partial D_2^* = AQ \cup QM \cup MP \cup PA$, где $AQ = \{(\xi, \eta) : \xi = 0, y < \eta < 0\}$, $QM = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, \eta = y\}$, $MP = \{(\xi, \eta) : \xi = x, y < \eta < 0\}$, $PA = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, \eta = 0\}$. После интегрирования тождество (53) по области D_2^* имеет место соотношение

$$\iint_{D_2^*} [v L_2(u) - u L_2^*(v)] d\xi d\eta = \int_{\partial D_2^*} (v_{\xi} u_{\xi} - b_2 v u) d\xi + (v u_{\xi\eta} + v_{\xi\eta} u + a_2 v u) d\eta. \quad (54)$$

Пусть $v(x, y; \xi, \eta) \in C(\bar{D}_2^*) \cap C^{2+1}(D_2^*)$ является решением уравнения (52), удовлетворяющая краевым условиям:

$$\begin{aligned} v(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\xi=x} &= 0, \quad y \leq \eta \leq 0, \\ v_{\xi}(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\xi=x} &= 1, \quad y \leq \eta \leq 0, \\ v(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\eta=y} &= \theta(x, y; \xi), \quad 0 \leq \xi \leq x, \end{aligned}$$

где $\theta(x, y; \xi)$ – определяется как решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} v_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) + b_2(\xi, y) v(x, y; \xi, y) &= 0, \quad 0 < \xi < x \\ v(x, y; \xi, y) \Big|_{\xi=x} &= 0, \quad v_{\xi}(x, y; \xi, y) \Big|_{\xi=x} = 1. \end{aligned}$$

Методом интегрирования из уравнения (52) получаем интегральное уравнение типа Вольтерра

$$\begin{aligned} v(x, y; \xi, \eta) &= \xi - x - \int_x^{\xi} (\xi - \xi_1) b_2(\xi_1, \eta) v(x, y; \xi_1, \eta) d\xi_1 + \\ &+ \int_x^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^y [a_2(\xi_1, \eta_1) - (\xi - \xi_1) c_2(\xi_1, \eta_1)] v(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1, \end{aligned}$$

которое имеет единственное решение.

Из тождество (54) с учетом свойства функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$ получаем решение уравнения (13), удовлетворяющее краевым условиям (5) и начальному условию (14), в виде:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & v_{\xi}(x, y; 0, y) \chi_1(y) + v_{\xi}(x, y; x, 0) \tau_1(x) - v(x, y; 0, y) \chi_2(y) - \\
 & - v_{\xi}(x, y; 0, 0) \chi_1(0) + v(x, y; 0, 0) \chi_2(0) + \int_0^y v_{\eta}(x, y; 0, \eta) \chi_2(\eta) d\eta - \\
 & - \int_0^y [v_{\xi\eta}(x, y; 0, \eta) + a_2(0, \eta) v(x, y; 0, \eta)] \chi_1(\eta) d\eta - \\
 & - \int_0^x [v_{\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + b_2(\xi, 0) v(x, y; \xi, 0)] \tau_1(\xi) d\xi.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Непосредственной проверкой, учитывая при этом ряд свойств функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$, нетрудно убедиться, что решение задачи 3, определенная формулой (55), удовлетворяет условиям (4) и (14).

Результаты и обсуждение

Теорема 1. Если выполняются условия (2), (7), (8), (26), (32) и (46), тогда решение задачи 1 в области D существует и единственно.

В работе Г.И. Баренблатта, Ю.П. Желтова, И.Н. Кочиной [22] показано, что дифференциальные уравнения третьего порядка в виде (1) используется при изучении вопросы фильтрацию вязко-упругой жидкости в трещиновато-пористых средах.

В работе использован метод функции Римана, рассмотренный в работах М.Х. Шханукова [23], В.И. Жегалова и Е.А. Уткиной [24].

Полученные результаты показывают, что краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка вполне корректны и с двумя линиями изменения типа.

Указанный метод исследования также применим, если след искомой функции и её нормальная производная терпят разрывы первого рода на линии изменения типа уравнений.

Автор выражает благодарность докторам физико-математических наук, профессорам Ю. П. Апакову и К.Г. Кожобекову за ценные советы и предложения.

Список литературы

1. Ochilova N. K., Yuldashev T. K. On a nonlocal boundary value problem for a degenerate parabolic-hyperbolic equation with fractional derivative // Lobachevskii J Math. 2022. 43: 229–236
2. Apanov Yu. P., Sopuev A. A. Boundary Value Problems for a Mixed Equation of Parabolic-Hyperbolic Type of the Third Order // Lobachevskii J. Mathematics, 44:12 (2023), 5149–5157
3. Кожобеков К. Г., Сопуев А. А. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка с линией сопряжения // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника, 2(5) (2024), 75–82.
4. Апаков Ю. П., Сопуев А. А. Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка // Челяб. физ.-матем. журн., 2025, том 10, выпуск 1, 5–16.
5. Апаков Ю. П., Сопуев А. А. Внутренняя нелокальная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка // Сиб. журн. индустр. матем. 28:2 (2025), 5–21
6. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа, Фан, Ташкент, 1986.
7. Сабитов К. Б. К теории уравнений смешанного типа, Физматлит, М., 2014.

8. Сабитов К. Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа, Наука, М., 2016.
9. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задач // Сибирское научное издание, Новосибирск, 2009.
10. Кожобеков К. Г. Нелокальная задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка // Вестн. КазНУ. Сер. мат., мех., инф., 2009, № 1(60), 3–40.
11. Садыбеков М. А., Дилдабек Г., Тенгаева А. А. О новой нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатики. №1(83). 2016. – С. 55 – 66.
12. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. - 1977, т. 13, № 2. – С. 294–304.
13. Аблабеков Б., Байсеркеева А., Асылбек кызы М. (2023). Разрешимость одной нелокальной задачи для псевдопараболического уравнения // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника, 1(2), 6–12.
14. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных, Наука, М., 2006.
15. Кожанов А. И., Тарасова Г. И. Задача Самарского – Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 42 (2022), Стр. 59–74.
16. Пулькина Л. С., Смирнова А. Н. Разрешимость характеристической задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2025. Том 31, № 1. С. 22–33.
17. Сопуев А., Нуранов Б. Ш. О краевых задачах для смешанного парабола-гиперболического уравнения третьего порядка // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника. 2022. № 1, С. 16–22
18. Sopuev A., Nuranov B. SH. Boundary Value Problems for a Third Order Mixed Parabolic-hyperbolic Equation with Variable Coefficients // Lobachevskii J Math 45, 3424–3431 (2024).
19. Sopuev A., Nuranov B. SH. T. D. Dzhuraev Problem for a Mixed Parabolic-Hyperbolic Type Equation of the Third Order // Lobachevskii J Math 46, 520–527 (2025).
20. Джураев Т.Д., Попёлек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения, 27:10 (1991), 1734–1745.
21. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики, Физматлит, М., 2001.
22. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика, 24:5 (1960), 58–73.
23. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения, 18:4 (1982), 689–699.
24. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика, 1999, № 10, 73–76.

25. Абдумиталип Уулу, К. Краевая задача для уравнения четвертого порядка параболического типа / К. Абдумиталип Уулу, Т. Д. Асылбеков // Вестник Ошского государственного университета. - 2022. - № 1. - С. 12-19. - DOI 10.52754/16947452_2022_1_12. - EDN KDEDUQ.
26. Абдумиталип Уулу, К. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка, содержащий параболо-гиперболический оператор / К. Абдумиталип Уулу // Вестник Ошского государственного университета. - 2022. - № 1. - С. 20-28. - DOI 10.52754/16947452_2022_1_20. - EDN ZOAFIJ.

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ПАРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ E_5

Шамшиева Гүлмира Асилидиновна

Ошский государственный университет

gshamshieva@oshsu.kg

Ош, Кыргызстан

Аннотация. В области $\Omega \subset E_5$ рассмотрено семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия ω^1 данного семейства. Подвижной репер $\mathcal{R}$ пространства E_5 выбран так, чтобы он являлся репером Френе [1] для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [1]. На касательной к линии ω^5 сети Френе инвариантным образом определяется псевдофокус F_5^4 . Когда точка X смещается в области Ω , точка F_5^4 описывает свою область Ω_5^4 . Таким образом определяется частичное отображение $f_5^4: \Omega \rightarrow \Omega_5^4$ такое, что $f_5^4(X) = F_5^4$. Рассмотрены пары трехмерных распределений $\Delta_{(ijk)}$ ($i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5$, i, j, k – различны) в пространстве E_5 . В случае, когда сеть Френе является циклической сетью Френе, доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии принадлежащие трехмерным распределениям являлись квазидвойными линиями пары трехмерных распределений в частичном отображении f_5^4 евклидова пятимерного пространства E_5 .

Ключевые слова: евклидова пространство, распределение, квазидвойная линия, сеть Френе, псевдофокус.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF QUASI- DOUBLE LINES OF A PAIR OF DISTRIBUTIONS IN E_5

Shamshieva Gulmira Asilidinovna

Osh State University

gshamshieva@oshsu.kg

Osh, Kyrgyzstan

Abstract. In the domain $\Omega \subset E_5$ consider a set of smooth lines such that through each point $X \in \Omega$ there passes exactly one line ω^1 from this set. The moving frame $\mathcal{R}$ is a Frenet frame [1] associated with the line ω^1 of the given set. The integral lines of the vector fields e_i form the Frenet net Σ_5 [1]. There exists a point F_5^4 on the tangent of the line ω^5 of the Frenet net. When the point X moves within the domain Ω , the point F_5^4 describes out its domain Ω_5^4 in E_5 . The partial mapping is defined $f_5^4(X) = F_5^4$ such that $f_5^4: \Omega \rightarrow \Omega_5^4$ such that $f_5^4(X) = F_5^4$. Pairs of 3-dimensional distributions are considered: $\Delta_{(ijk)}$ ($i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5$, i, j, k – different) in the $\Omega \subset E_5$. In the case when the Frenet net is a cyclic Frenet net, lines belonging to 3-dimensional distributions are considered. Necessary and sufficient conditions are proved for these lines to be quasi-double lines of a pair of 3-dimensional distributions in the partial mapping f_5^4 .

Keywords: quasi-double, distribution, Frenet net, partial mapping, tangent vector, geometry, conditions, surface.

Введение

В области Ω пространства E_5 заданы семейства линий таких, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна и только одна линия каждого семейства. Подвижной ортонормированный репер $\mathcal{R} = (X, \vec{e}_i)(i, j, k = \overline{1, 5})$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\mathcal{R}$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \quad (1)$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \quad (2)$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе [1] Σ_5 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\mathcal{R}$ построен на касательных к линиям сети Σ_5 , формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \quad (3)$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \quad (4)$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3)

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства(3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_\ell^j - \Lambda_{\ell j}^k \wedge \omega_i^\ell) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [2]отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_\ell^j - \Lambda_{\ell j}^k \wedge \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = (\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \wedge \omega_\ell^j + \Lambda_{lj}^k \wedge \omega_i^\ell) \omega^m \quad (5)$$

отсюда

$$B_{ikm}^j = \Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \wedge \omega_\ell^j + \Lambda_{lj}^k \wedge \omega_i^\ell. \quad (6)$$

Система величин $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид

$$d_1 \vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$

$$d_1 \vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$

$$d_1 \vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$

$$d_1 \vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5;$$

$$d_1 \vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4 \vec{e}_4.$$

$$\Lambda_{ij}^i = 0 (i < j, i = 1, 2, 3, j = 4, 5)$$

$$\Lambda_{ij}^{i+1} = 0 (i < j, i = 1, 2, 3, k_4^1 = \Lambda_{41}^2)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^5$ – первая, вторая, третья, ..., четвертая кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус F_i^j ($i \neq j$) [3] касательной к линии ω^1 сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j} \vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i} \vec{e}_i.$$

В каждой касательной $(X, \vec{e}_i)$ существует по 4 псевдофокуса: когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, псевдофокус F_i^j описывает свою область $\Omega_i^j \subset E_5$. В результате которого получается частичное отображение $f_i^j: \Omega \rightarrow \Omega_i^j$ такое, что $f_i^j(X) = F_i^j$.

Результаты

Псевдофокус $\vec{F}_5^4 \in (X, \vec{e}_5)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_5^4 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_5 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{54}^5} \vec{e}_5. \quad (7)$$

Дифференцируем равенство (1):

$$d\vec{F}_5^4 = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{54}^4}\right) \vec{e}_5 - \frac{1}{\Lambda_{54}^4} d\vec{e}_5.$$

Используя деривационные формулы $d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i$, $d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k$ репера $\mathcal{R}$, структурные уравнения евклидова пространства $D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i$, $D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k$, $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$, также формул

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j \text{ и } d\Lambda_{ij}^k = (\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{i\ell}^k \Lambda_{jm}^\ell + \Lambda_{\ell j}^k \Lambda_{im}^\ell) \omega^m,$$

отсюда получим:

$$d\vec{F}_5^4 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{D_{54m}^4 \omega^m}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{5m}^i \omega^m}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i,$$

$$\text{где } D_{54m}^4 = \Lambda_{54m}^4 + \Lambda_{5\ell}^4 \Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^4 \Lambda_{5m}^\ell.$$

Вектор $d\vec{F}_5^4$ перепишем в виде:

$$d\vec{F}_5^4 = \left[\vec{e}_1 + \frac{D_{541}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{51}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i \right] \omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{D_{542}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{52}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i \right] \omega^2 + \left[\vec{e}_3 + \frac{D_{543}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{53}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i \right] \omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{D_{544}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{54}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i \right] \omega^4 + \left[\vec{e}_5 + \frac{D_{545}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{55}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i \right] \omega^5.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{d}_1 &= \vec{e}_1 + \frac{D_{541}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{51}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i; \\ \vec{d}_2 &= \vec{e}_2 + \frac{D_{542}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{52}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i; \\ \vec{d}_3 &= \vec{e}_3 + \frac{D_{543}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{53}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i; \\ \vec{d}_4 &= \vec{e}_4 + \frac{D_{544}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{54}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i; \\ \vec{d}_5 &= \vec{e}_5 + \frac{D_{545}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{55}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Учитывая, что сеть Френе является циклической сетью Френе, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \vec{d}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{51}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_4 + \frac{D_{541}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5; \\ \vec{d}_2 &= -\frac{\Lambda_{52}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{52}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_4 + \frac{D_{542}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5; \\ \vec{d}_3 &= -\frac{\Lambda_{53}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{53}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_4 + \vec{e}_3 + \frac{D_{543}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5; \\ \vec{d}_4 &= -\frac{\Lambda_{54}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_1 + \frac{D_{544}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5; \\ \vec{d}_5 &= -\frac{\Lambda_{55}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_1 + \left[1 + \frac{D_{545}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \right] \vec{e}_5. \end{aligned} \tag{8}$$

Векторы $\vec{d}_i$ ($i = \overline{1,5}$) в общем случае линейно независимы. К области Ω_5^4 присоединим подвижной репер $\mathcal{R}' = (F_5^4, \vec{d}_i)$.

В данной работе рассмотрены трехмерные распределения $\Delta_{(123)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\Delta_{(124)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$, $\Delta_{(234)} = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, $\Delta_{(134)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ и их образы в частичном отображении $f_5^4: \Omega \rightarrow \Omega_5^4$: $\Delta'_{(123)} = f_5^4(\Delta_{(123)})$, $\Delta'_{(124)} = f_5^4(\Delta_{(124)})$, $\Delta'_{(234)} = f_5^4(\Delta_{(234)})$, $\Delta'_{(134)} = f_5^4(\Delta_{(134)})$.

Рассмотрим линию $\gamma \subset \Delta_{(123)}$, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(123)}$ с касательным вектором $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\gamma}$ к линии $\bar{\gamma} = f_5^4(\gamma)$ в виде: $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{d}_1 + \gamma^2 \vec{d}_2 + \gamma^3 \vec{d}_3$. Учитывая формулу (2) отсюда получим:

$$\vec{\gamma} = (\gamma^1 + \gamma^2 d_2^1 + \gamma^3 d_3^1) \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3 + (\gamma^1 d_1^4 + \gamma^2 d_2^4 + \gamma^3 d_3^4) \vec{e}_4 + (\gamma^1 d_1^5 + \gamma^2 d_2^5 + \gamma^3 d_3^5) \vec{e}_5, \text{ где } d_i^j - j \text{ тая координата вектора } \vec{d}_i.$$

Пусть линии γ и $\bar{\gamma} = f_5^4(\gamma)$ являются квазидвойными линиями пары распределений

$(\Delta_{(123)}, \Delta'_{(123)})$ в частичном отображении $f_5^4: \Omega \rightarrow \Omega_5^4$, т.е. $\vec{\gamma}, \vec{\gamma} \in \Delta_{(123)}$. Из этого условия следует:

$$\begin{cases} \gamma^1 d_1^4 + \gamma^2 d_2^4 + \gamma^3 d_3^4 = 0; \\ \gamma^1 d_1^5 + \gamma^2 d_2^5 + \gamma^3 d_3^5 = 0. \end{cases}$$

Учитывая формул (8) отсюда имеем:

$$\begin{cases} \gamma^1 \Lambda_{51}^4 + \gamma^2 \Lambda_{52}^4 + \gamma^3 \Lambda_{53}^4 = 0; \\ \gamma^1 D_{541}^4 + \gamma^2 D_{542}^4 + \gamma^3 D_{543}^4 = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $D_{54m}^4 = \Lambda_{54m}^4 + \Lambda_{5\ell}^4 \Lambda_{4m}^1 + \Lambda_{\ell 4}^4 \Lambda_{5m}^\ell$.

Отсюда найдем:

$$\gamma^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^4 & \Lambda_{53}^4 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix}; \gamma^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^4 & \Lambda_{51}^4 \\ D_{543}^4 & D_{541}^4 \end{vmatrix}; \gamma^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{51}^4 & \Lambda_{52}^4 \\ D_{541}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Обратно, если координаты касательного вектора $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3$ к линии $\gamma \subset \Delta_{(123)}$ удовлетворяют условиям (4) то линии γ , $\bar{\gamma} = f_5^4(\gamma)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(123)}, \Delta'_{(123)})$ в частичном отображении f_5^4 .

Рассмотрим линию β , принадлежащую распределению $\Delta_{(124)}$ с касательным

векторам $\vec{\beta} = \beta^1 \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2 + \beta^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\beta}$ к линии $\bar{\beta} = f_5^4(\beta)$ в виде $\vec{\beta} = \beta^1 \vec{d}_1 + \beta^2 \vec{d}_2 + \beta^4 \vec{d}_4$. Учитывая формул (2) отсюда получим: $\vec{\beta} = (\beta^1 + \beta^2 d_2^1 + \beta^4 d_4^1) \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2 + (\beta^1 d_1^4 + \beta^2 d_2^4) \vec{e}_4 + (\beta^1 d_1^5 + \beta^2 d_2^5 + \beta^4 d_4^5) \vec{e}_5$.

Пусть линии β и $\bar{\beta} = f_5^4(\beta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(124)}, \Delta'_{(124)})$ в частичном отображении f_5^4 , т.е. $\vec{\beta}, \vec{\beta} \in \Delta_{(124)}$. Из этого условия получим:

$$\beta^1 d_1^5 + \beta^2 d_2^5 + \beta^4 d_4^5 = 0.$$

Учитывая формул (2) отсюда имеем:

$$\beta^1 D_{541}^4 + \beta^2 D_{542}^4 + \beta^4 D_{544}^4 = 0. \quad (11)$$

Обратно, если имеет место равенство (5), то линии β и $\bar{\beta} = f_5^4(\beta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(124)}, \Delta'_{(124)})$ в частичном отображении f_5^4 .

Теперь рассмотрим линию $\delta \subset \Delta_{(234)}$ с касательным вектором: $\vec{\delta} = \delta^2 \vec{e}_2 + \delta^3 \vec{e}_3 + \delta^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\delta}$ к линии $\bar{\delta} = f_5^4(\delta)$ в виде $\vec{\delta} = \delta^2 \vec{d}_2 + \delta^3 \vec{d}_3 + \delta^4 \vec{d}_4$.

Учитывая формул (2) отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\delta} = & (\delta^2 d_2^1 + \delta^3 d_3^1 + \delta^4 d_4^1) \vec{e}_1 + \delta^2 \vec{e}_2 + \delta^3 \vec{e}_3 + (\delta^2 d_2^4 + \delta^3 d_3^4) \vec{e}_4 + \\ & + (\delta^2 d_2^5 + \delta^3 d_3^5 + \delta^4 d_4^5) \vec{e}_5. \end{aligned}$$

Из условия $\vec{\delta}, \vec{\delta} \in \Delta_{(234)}$ следует:

$$\begin{cases} \delta^2 d_2^1 + \delta^3 d_3^1 + \delta^4 d_4^1 = 0; \\ \delta^2 d_2^5 + \delta^3 d_3^5 + \delta^4 d_4^5 = 0. \end{cases}$$

Учитывая формул (11) из последнего получим:

$$\begin{cases} \delta^2 \Lambda_{52}^1 + \delta^3 \Lambda_{53}^1 + \delta^4 \Lambda_{54}^1 = 0; \\ \delta^2 D_{542}^4 + \delta^3 D_{543}^4 + \delta^4 D_{544}^4 = 0, \end{cases} \quad (12)$$

Отсюда найдем:

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{54}^1 \\ D_{543}^4 & D_{544}^4 \end{vmatrix}; \delta^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{54}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ D_{544}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix}; \delta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Обратно, если координаты касательного вектора

$\vec{\delta} = \delta^2 \vec{e}_2 + \delta^3 \vec{e}_3 + \delta^4 \vec{e}_4$ к линии $\delta \subset \Delta_{(234)}$ удовлетворяют условиям (7), то линии δ , $\bar{\delta} = f_5^4(\delta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(234)}, \Delta'_{(234)})$ в частичном отображении f_5^4 .

Рассмотрим теперь линию $\ell \subset \Delta_{(134)}$ с касательным вектором: $\vec{\ell} = \ell^1 \vec{e}_1 + \ell^3 \vec{e}_3 + \ell^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\ell}}$ к линии $\bar{\ell} = f_5^4(\ell)$ в виде $\vec{\bar{\ell}} = \ell^1 \vec{d}_1 + \ell^3 \vec{d}_3 + \ell^4 \vec{d}_4$.

Учитывая формул (2) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\ell}} = (\ell^1 + \ell^3 d_3^1 + \ell^4 d_4^1) \vec{e}_1 + \ell^3 \vec{e}_3 + (\ell^1 d_1^4 + \ell^3 d_3^4) \vec{e}_4 + (\ell^1 d_1^5 + \ell^3 d_3^5 + \ell^4 d_4^5) \vec{e}_5,$$

Где d_i^j – j-тая координата вектора $\vec{d}_i$.

Пусть линии ℓ и $\bar{\ell} = f_5^4(\ell)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(134)}, \Delta'_{(134)})$ в частичном отображении f_5^4 , т.е. $\vec{\ell}, \vec{\bar{\ell}} \in \Delta_{(134)}$. Из этого условия следует:

$$\ell^1 d_1^5 + \ell^3 d_3^5 + \ell^4 d_4^5 = 0.$$

Учитывая формул (2) отсюда имеем:

$$\ell^1 D_{541}^4 + \ell^3 D_{543}^4 + \ell^4 D_{544}^4 = 0. \quad (14)$$

Обратно, если имеет место равенство (8), то линии ℓ , $\bar{\ell} = f_5^4(\ell)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(134)}, \Delta'_{(134)})$ в частичном отображении f_5^4 .

Из вышеизложенного следует справедливость следующей теоремы.

Теорема.

1) Линия $\gamma \subset \Delta_{(123)}$ и $\bar{\gamma} = f_5^4(\gamma)$ являются квазидвойными линиями пары трехмерных распределений $(\Delta_{(123)}, \Delta'_{(123)})$ в частичном отображении f_5^4 тогда и только тогда, когда координаты касательного вектора $\vec{\gamma}$ к линии $\gamma \subset \Delta_{(123)}$ удовлетворяют условиям

$$\gamma^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^4 & \Lambda_{53}^4 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix}; \gamma^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^4 & \Lambda_{51}^4 \\ D_{543}^4 & D_{541}^4 \end{vmatrix}; \gamma^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{51}^4 & \Lambda_{52}^4 \\ D_{541}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix};$$

2) Линии $\beta \subset \Delta_{(124)}$ и $\bar{\beta} = f_5^4(\beta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(124)}, \Delta'_{(124)})$ в частичном отображении f_5^4 тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\beta^1 D_{541}^4 + \beta^2 D_{542}^4 + \beta^4 D_{544}^4 = 0;$$

3) Линия $\delta \subset \Delta_{(234)}$ и $\bar{\delta} = f_5^4(\delta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений [6] $(\Delta_{(234)}, \Delta'_{(234)})$ в частичном отображении f_5^4 тогда и только тогда, когда координаты касательного вектора $\vec{\delta}$ к линии $\delta \subset \Delta_{(234)}$ удовлетворяют условиям

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{54}^1 \\ D_{543}^4 & D_{544}^4 \end{vmatrix}; \delta^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{54}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ D_{544}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix}; \delta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix};$$

4) Линии $\ell \subset \Delta_{(134)}$ и $\bar{\ell} = f_5^4(\ell)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(134)}, \Delta'_{(134)})$ в частичном отображении f_5^4 тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\ell^1 D_{541}^4 + \ell^3 D_{543}^4 + \ell^4 D_{544}^4 = 0.$$

Выясним геометрический смысл формул (4); (5); (7); (8).

Рассмотрим систему уравнений (3) с тремя неизвестными $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$:

$$\begin{cases} \gamma^1 \Lambda_{51}^4 + \gamma^2 \Lambda_{52}^4 + \gamma^3 \Lambda_{53}^4 = 0; \\ \gamma^1 D_{541}^4 + \gamma^2 D_{542}^4 + \gamma^3 D_{543}^4 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Каждое уравнение этой системы определяет двумерную плоскость в трехмерном подпространстве пространства E_5 , натянутом на базисных векторах: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Сама система (3) определяет прямую, которая является пересечением этих двух плоскостей. Координаты направляющего вектора прямой пересечения двух плоскостей определяется по формуле (4). Этот вектор и есть касательный вектор $\vec{\gamma}$ к линии $\gamma \subset \Delta_{(123)}$, которая со своим образом $\bar{\gamma} = f_5^4(\gamma)$ в частичном отображении f_5^4 , является квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(123)}, \Delta'_{(123)})$ в этом частичном отображении f_5^4 .

Аналогично выясняется геометрический смысл равенств (7).

Рассмотрим равенство:

$$\beta^1 D_{541}^4 + \beta^2 D_{542}^4 + \beta^4 D_{544}^4 = 0. \quad (11)$$

Где $\beta^1, \beta^2, \beta^4$ — координаты касательного вектора к линии $\beta \subset \Delta_{(124)}$. Через $\vec{M}$ обозначим следующий вектор:

$$\vec{M} = D_{541}^4 \vec{e}_1 + D_{542}^4 \vec{e}_2 + D_{544}^4 \vec{e}_4.$$

Тогда равенство (11) означает, что векторы $\vec{\beta}$ и $\vec{M}$ — ортогональны.

Аналогично выясняется геометрический смысл равенства (8).

Вывод

В настоящей работе в евклидовом пятимерном пространстве исследованы пары трёхмерных распределений в условиях, когда сеть Френе является циклической сетью Френе.

Доказаны необходимые и достаточные условия существования квазидвойных линий пары трёхмерных распределений. Тем самым получена полная характеристика данного геометрического явления в рассматриваемом отображении.

Таким образом, задача о существовании квазидвойных линий пары трёхмерных распределений в рассматриваемом частичном отображении евклидова пространства полностью решена в случае циклической сети Френе. Полученные результаты расширяют теорию квазидвойных линий частичных отображений евклидовых пространств и могут быть использованы при дальнейшем исследовании геометрии распределений и многомерных сетей.

Список литературы

1. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М. : Наука, 1967. — 644 с.
2. Фиников С. О. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. — М.—Л. : Гостехиздат, 1948. — 432 с.
3. Базылев В. Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский математический сборник. — 1966. — № 4. — С. 475–491.
4. Матиева Г., Абдуллаева Ч. Х., Папиева Т. М. Введение в геометрию квазидвойных линий частичных отображений евклидовых пространств : монография. — Ош, 2024. — 172 с.
5. Матиева Г., Абдуллаева С., Ахмедов А. О существовании квазидвойных линий частичного отображения пространства E^n // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — Т. 1366, № 1. — 012061.
6. Матиева Г., Абдуллаева С., Артыкова З. Существование квазидвойных линий пары $(f_5^5; \varphi^{135})$ в евклидовом пространстве E^5 // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Т. 1988, № 1. — 01208.

ФИЗИКА / PHYSICS

УДК 539.2:531.4

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2\(7\)_62](https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2(7)_62)

ИЕРАРХИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ: МЕЗОМЕХАНИЧЕСКИЙ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АСПЕКТЫ

Ташполотов Ысламидин

д.ф.-м.н., директор научно-исследовательского Института “Нанотехнологий и искусственного интеллекта”

Ошского государственного университета

профессор кафедры “Экспериментальная и теоретическая физика”

ORCID -0000-0001-9293-7885, itashpolotov@mail.ru

Ибраимов Таалайбек Каилбекович

Зав. отделом, Ошский государственный университет

ORCID: 0000-0002-1444-4791, t.kailbekovich@mail.ru

***Аннотация.** В работе представлены результаты экспериментального и теоретического исследования, демонстрирующие существование дискретной, иерархически организованной сферы действия поверхностных сил (СДПС) в приграничных слоях жидкостей, распространяющейся на расстояния до 200 микрометров. На основе модифицированных методов измерения краевых углов на микроволокнах и межфазного натяжения установлено, что затухание влияния поверхности происходит не монотонно, а через последовательность скачкообразных переходов в точках перегиба (7, 20, 40, 96, 200 мкм для касторового масла). Предложена теоретическая модель, вводящая масштабный инвариант $C \approx 10-20$, который связывает макроскопические точки бифуркации свойств с критическим числом молекул ($N_{cl} \approx 8000$) в мезоскопическом кластере, необходимым для преодоления энтропийного хаоса. Показано, что интерфейс функционирует как активный генератор диссипативных структур, а баланс энергии связи и энтропийного фактора определяет термодинамическую устойчивость иерархических уровней. Результаты требуют пересмотра классических граничных условий в физике поверхности и открывают новые возможности для управления свойствами материалов в нанотехнологиях, микроэлектронике и геомеханике.*

***Ключевые слова:** границы раздела фаз, поверхностные силы, самоорганизация, иерархия, диссипативные структуры, термодинамика.*

HIERARCHICAL QUANTIZATION AND LONG-RANGE ACTION OF SURFACE FORCES IN CONDENSED MEDIA: MESOMECHANICAL AND THERMODYNAMIC ASPECTS

Tashpolotov Yslamidin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Director of the Research Institute of “Nanotechnology and Artificial Intelligence” at Osh State University, Professor of the

Department of Experimental and Theoretical Physics

ORCID -0000-0001-9293-7885, itashpolotov@mail.ru

Ibraimov Taalaibek Kailbekovich

Head of Department, Osh State University

ORCID: 0000-0002-1444-4791, t.kailbekovich@mail.ru

***Abstract.** This paper presents the results of experimental and theoretical research demonstrating the existence of a discrete, hierarchically organized sphere of action of surface forces (SASF) in the boundary layers of*

liquids, extending to distances of up to 200 micrometers. Using modified methods for measuring contact angles on microfibers and interfacial tension, it has been established that the attenuation of the surface's influence occurs not monotonically, but through a sequence of abrupt transitions at inflection points (7, 20, 40, 96, 200 μm for castor oil). A theoretical model is proposed, introducing a scale invariant $C \approx 10\text{--}20$, which links macroscopic bifurcation points of properties with the critical number of molecules ($N_{cl} \approx 8000$) in a mesoscopic cluster, necessary to overcome entropic chaos. It is shown that the interface functions as an active generator of dissipative structures, and the balance between the binding energy and the entropic factor determines the thermodynamic stability of the hierarchical levels. The results necessitate a revision of classical boundary conditions in surface physics and open new possibilities for controlling material properties in nanotechnologies, microelectronics, and geomechanics.

Keywords: phase boundaries, surface forces, self-organization, hierarchy, dissipative structures, thermodynamics.

1. Введение

Классические теории поверхностных явлений, основанные на работах Юнга, Лапласа и Гиббса [1], постулируют нанометровый диапазон действия межмолекулярных сил, ограниченный потенциалами типа Леннард-Джонса [2-4]. Развитие теории Дерягина-Ландау-Фервея-Овербека (DLVO) [5,6] и работы Израэлашвили [7] углубили понимание осцилляторного характера сил в нанозазорах, однако макроскопическое проявление этих сил на масштабах в сотни микрометров оставалось необъяснимым. Парадоксальные данные, такие как «расклинивающее давление» в тонких пленках [5,6] и аномалии смачивания ультратонких волокон [8, 9], указывали на существование «сверхдальнодействия», выходящего за рамки аддитивных моделей.

Современный сдвиг парадигмы в физике конденсированного состояния связан с переходом к мезоскопическому описанию, где материал рассматривается как иерархическая система, а интерфейсы - не пассивные границы, а активные зоны локализации структурообразования [9-11]. В рамках физической мезомеханики, развитой акад. В.Е. Паниным [10, 11], интерфейсы генерируют поля моментных напряжений, определяя свойства объема материала. Одновременно, теория диссипативных структур Пригожина и Николиса [12, 13] показала, что в открытых неравновесных системах интерфейсы могут служить источниками самоорганизации.

Несмотря на отдельные экспериментальные указания на аномальное дальнодействие в наножидкостях, геологических системах и композитах [11, 15], обобщающая количественная закономерность, связывающая микро- и макропроявления, отсутствовала. Настоящее исследование направлено на заполнение этого пробела путем установления универсального механизма иерархического квантования СДПС и выявления его термодинамической природы.

2. Методика исследований

Для обеспечения достоверности и перекрестной проверки результатов использовались две независимые методики.

2.1. Метод краевых углов на микроволокнах [8]

В основе методики [8] лежит принцип, согласно которому диаметр волокна d , при котором краевой угол смачивания θ становится независимым от него, соответствует радиусу действия поля поверхностных сил (рис.1).

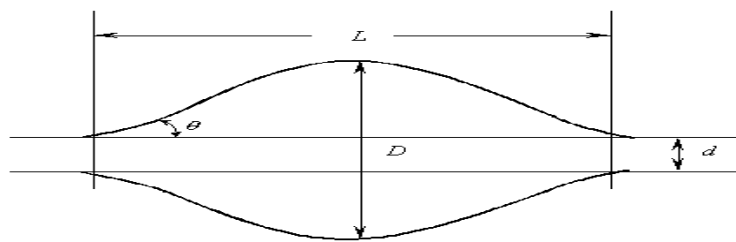


Рисунок 1. Геометрические параметры капли на волокне

В работе И. Петрянова и Н. Розенблюм [8] при изучении краевых углов малых капель на тонких волокнах (0,05-0,25 мкм) показано, что для капель одного размера краевой угол смачивания θ уменьшается с ростом диаметра волокон. Для капель различных размеров с увеличением диаметра волокон величины равновесного краевого угла стремятся к постоянным значениям. Отсюда был сделан вывод, что тот диаметр волокон, начиная с которого равновесные значения краевых углов остаются постоянными для капель каждого размера, отображает предел действия межмолекулярных сил взаимодействия жидкости и волокна. По данным [8], СДПС для волокон асбеста и исследованных жидкостей (гидрооксихлорид титана и высоковакуумного масла) равна 0,2 - 0,3 мкм.

В отличие от [8], где использовались ультратонкие волокна, в данной работе применялись стеклянные волокна диаметром от 5 до 50 мкм. Капли касторового масла наносились пульверизатором, а их профиль и краевой угол фиксировались с помощью оптического микроскопа МБИ-13 с фотоприставкой (рисунок 2).

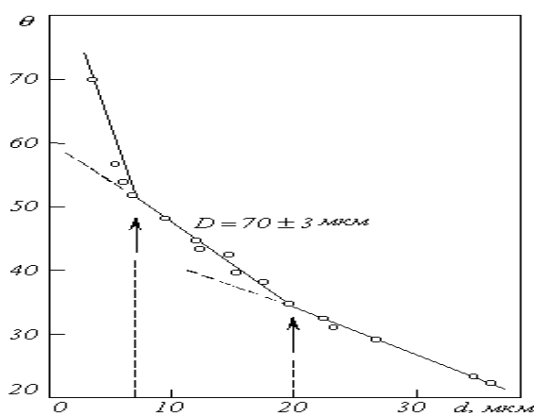


Рисунок 2. Зависимость краевого угла смачивания θ жидкой капли касторового масла от диаметров стеклянных волокон d .

Экспериментальные наблюдения показывают, что жидкие капли касторового и силиконового масел с одинаковым краевым углом смачивания θ имеют одинаковые значения отношений диаметра капли D к ее длине L , т.е. между косинусом краевого угла $\cos \theta$ и D/L существует линейная зависимость.

Исходя из этого, далее построили функциональную зависимость $\frac{D}{L} = f(d)$, при $D = \text{const}$, для разных диаметров капель (рисунок 3).

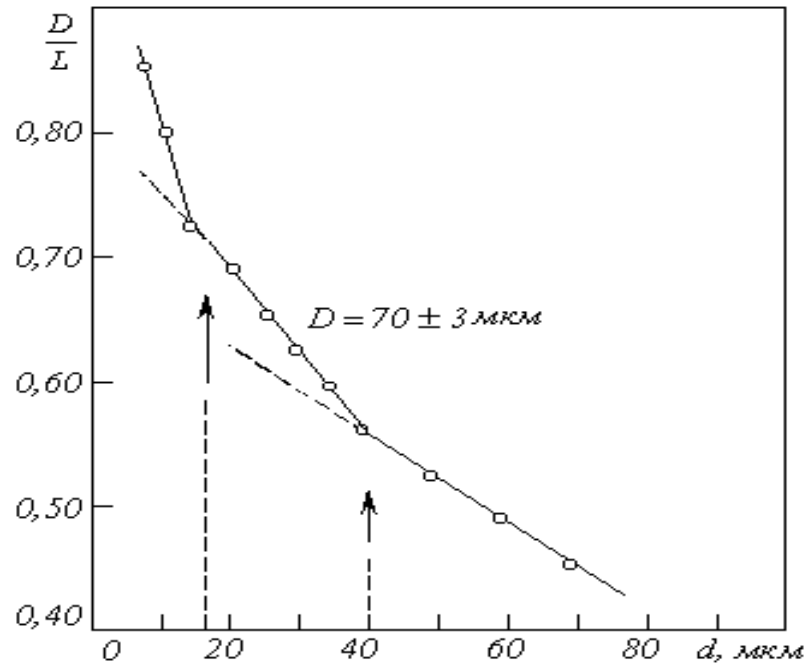


Рисунок 3. Зависимость D/L жидкой капли касторового масла от диаметров стеклянных волокон.

Из полученных данных кривой зависимости $\theta = f(D)$ установлено, что для стеклянных волокон диаметром $d=18,7$ мкм диаметр «критической» капли в точке перегиба составляет около 100 мкм, а для волокон размером $d=14,4$ мкм, эта величина равна 80 мкм. Из рисунка 3 видно, что $\theta = f(D)$ имеет кусочно-ломанный вид. Соответствующие значения точки перегиба для волокон диаметром $d=14,4$ мкм равны 20; 40; 80 мкм, а аналогичные результаты исследований для $d = 18,7$ мкм показывают, что критические размеры D капли близки к 50 и 97 мкм.

Зависимость $\cos\theta(d)$ или $\frac{D}{L} = f(d)$, носит нелинейный характер (рис.2,3) с четко выраженными точками перегиба. Это свидетельствует о том, что на этих критических диаметрах происходит скачкообразное изменение энергетического состояния системы волокно-жидкость, обусловленное дискретным изменением структуры жидкости в поле поверхности.

Ряд точек перегиба обнаружены также при изучении зависимости L/D - от диаметра капли D для разных диаметров волокон d (рисунок 4).

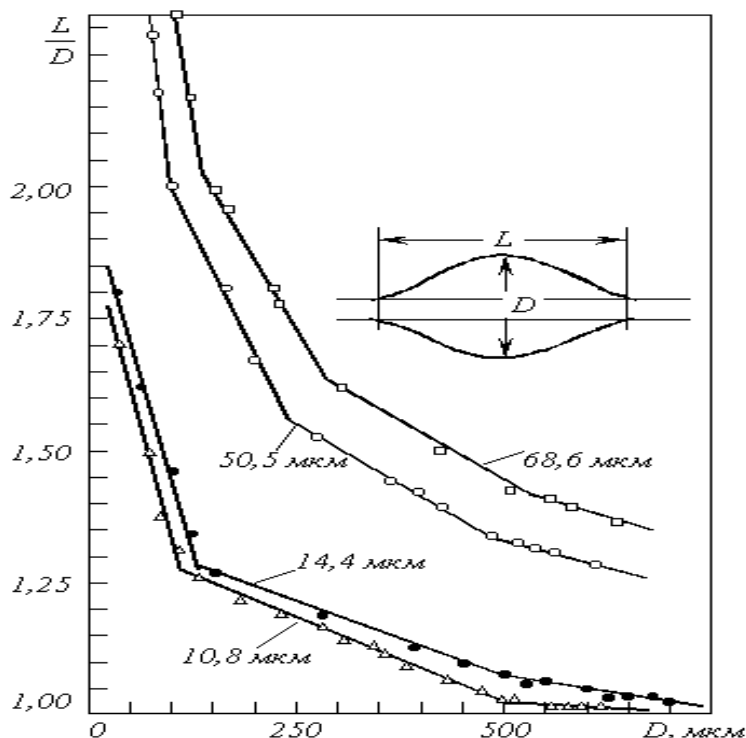


Рисунок 4. Зависимость L/D от диаметра капли касторового масла для разных диаметров стеклянных волокон: 1–10,8; 2–14,4; 3–50,5; 4–68,6 мкм.

2.2. Модифицированный метод Пэдди (отрыв диска) [4]

Для измерения межфазного натяжения σ на границе вода–масло применялись торсионные весы. Медный диск радиуса R приводился в контакт с поверхностью воды, покрытой слоем масла переменной толщины h (от 0.1 до 500 мкм). Фиксировалось усилие отрыва. Толщина слоя контролировалась интерферометрически и по объему нанесенной фазы. Эксперименты проводились в термостатированной камере (точность $\pm 0.1^\circ\text{C}$) при температурах $13,6^\circ\text{C}$ и 33°C .

Известно, что поверхностные силы вызывают определенную упорядоченность структуры в переходных слоях, соседствующих с границей раздела фаз [1–8]. В этих работах было установлено, что у поверхности твердого тела механические, электрические, реологические и другие свойства пристенных слоев отдельных жидкостей и твердых пленок отличаются от объемных. Это объясняется тем, что под действием поверхностных сил подложки происходит перестройка молекулярной структуры граничной фазы за счет возникновения вертикального градиента межмолекулярных сил взаимодействий до определенного бифуркационного уровня. До этого уровня взаимодействия подложки и пленки как бы являются «стационарными». Достижение точки бифуркации, в которой происходит самоорганизация диссипативных систем в виде упорядоченности, приводит к существенному изменению физико-химических параметров взаимодействующих систем.

Зависимость поверхностного натяжения воды от толщины слоя касторового масла на ее поверхности при постоянной температуре впервые исследовали Рэлей и Покельс [3], (рис. 5). Как видно, из рисунка 5 переход от поверхностного натяжения чистого касторового масла к поверхностному натяжению чистой воды осуществляется на очень коротком интервале толщины слоя масла - от 45 до 10 Å. Отсюда Рэлеем и Покельсом сделано заключение, что поверхностное натяжение воды начинает ощутимо изменяться лишь после

того, как ее поверхность оказывается покрытой одним рядом плотно сдвинутых молекул, т.е. после образования на поверхности мономолекулярного слоя масла.

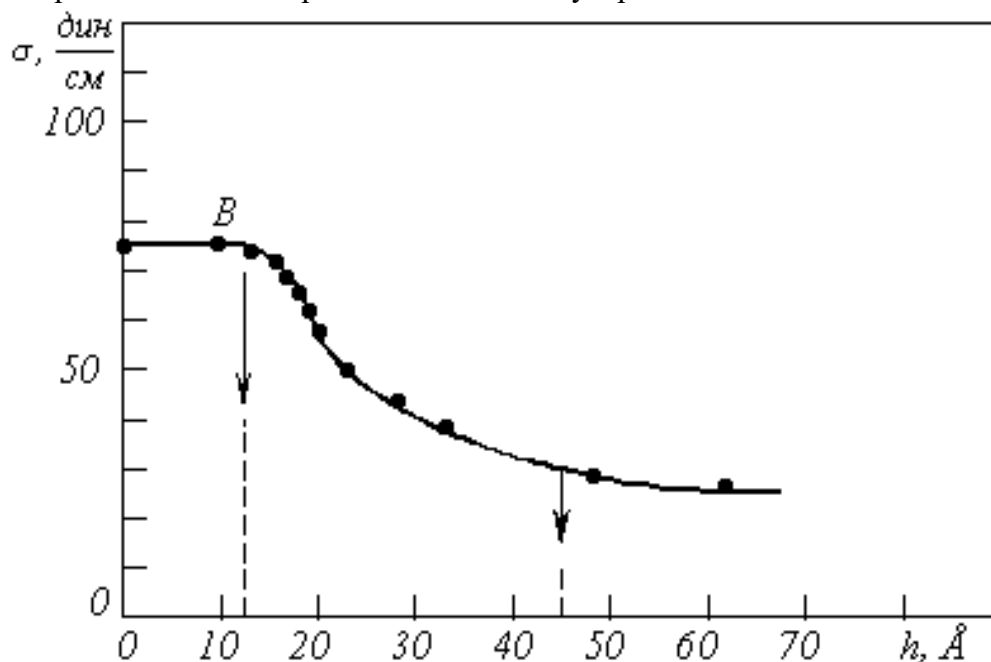


Рисунок 5. Изменение поверхностного натяжения в зависимости от толщины слоя касторового масла на поверхности воды. Точка *B* соответствует мономолекулярному слою масла.

Этот результат (рис.5) и данные по адсорбции показывают, что монослоя, содержащий три и более молекулы (атома), достаточно, чтобы экранировать силовое поле поверхности конденсированной системы.

Однако, данные зависимостей (рис.2-4) свидетельствуют о дальнем действии поверхностных сил. В связи с этим, для регистрации структурных перестроек в объеме жидкости, вызванных полем поверхности, мы исследовали зависимости поверхностного натяжения σ на границе вода-масло от толщины масляной пленки h . Измерения проводились на торсионных весах модифицированным методом отрыва (метод Пэдди [4]). Медный диск радиуса R отрывался от поверхности воды, покрытой слоем масла переменной толщины.

В таблице 1 представлены зависимости $\sigma(h)$ для касторового и силиконового масел.

Таблица 1. Зависимость межфазного натяжения σ от толщины масляной пленки h .

h , мкм	0	10	50	96	200	>200
σ (каст.), дин/см	74.0	45.0	36.0	34.0	34.0	34.0

Обнаружено, что поверхностное натяжение σ не достигает своего объемного значения ($\sigma_{\text{объем}}$) сразу после формирования мономолекулярного слоя, а плавно снижается вплоть до толщин $h \approx 100\text{--}200$ мкм (рисунок 6).

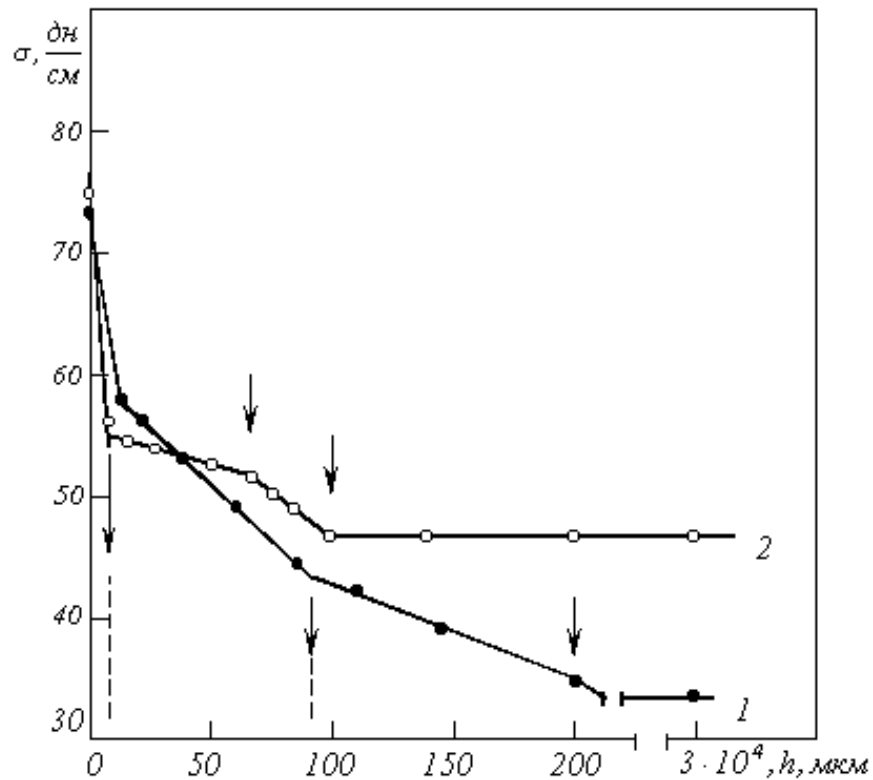


Рисунок 6. Зависимость поверхностного натяжения граничной фазы (вода – масло) от толщины масляной пленки: 1 – касторовое масло, $t=13,6^{\circ}\text{C}$; 2 – силиконовое масло, $t=33^{\circ}\text{C}$.

На кривых зависимости $\sigma = f(h)$ (рис. 6) для обоих исследованных масел (касторовое и силиконовое) четко выделяются три характерные области, что указывает на сложный, немонотонный характер взаимодействия. В первой области с изменением толщины слоя масла от 0 до ≈ 10 мкм происходит очень быстрое уменьшение поверхностного натяжения σ . Это соответствует начальному экранированию сильного поля чистой водной поверхности тончайшим слоем масла.

Во второй области (от ≈ 10 мкм до ≈ 100 -120 мкм) изменение σ по-прежнему ощутимо, но его скорость (градиент кривой) значительно слабее, чем в первой области. В этом интервале толщин σ продолжает снижаться, что говорит о сохраняющемся влиянии границы раздела фаз на структуру масляной пленки.

В третьей области (≈ 120 мкм и далее) скорость изменения σ стремится к нулю. Поверхностное натяжение достигает своего объемного значения для чистого масла (или значения, близкого к нему). Это означает, что на данной толщине влияние водной поверхности на структуру масляного слоя становится пренебрежимо малым.

Обнаруженный интервал толщины пристенного слоя, в котором происходит переход от σ чистой воды к σ чистого масла (≈ 200 мкм), примерно на четыре порядка больше, чем значения, полученные в рамках классических моделей (где силы ограничиваются нанометровым диапазоном) [1].

Эти данные свидетельствуют о дальном действии поверхностных сил на масштабах, достигающих сотен микрометров.

3. Дискретные точки перегиба и иерархический характер.

Обнаруженные дискретные точки перегиба на кривых зависимости (7, 20, 40, 96 мкм) и сам факт перегибов не могут быть объяснены в рамках классических моделей Ван-

дер-Ваальсовых сил, для которых характерно плавное, монотонное затухание с расстоянием.

Наличие нескольких характерных масштабов свидетельствует о кооперативном характере взаимодействия. Предполагается, что поле поверхности инициирует структурную перестройку в прилегающем слое, которая, в свою очередь, действует как новая "эффективная поверхность" для следующего слоя.

Этот механизм приводит к возникновению иерархии структурных уровней в объеме граничной фазы, объясняя дальнодействие поверхностных сил на микрометровых масштабах.

Анализ литературных данных подтверждает эту гипотезу. В работах [8,11,13] критическими точками являются 0,5 мкм и 44;136;246 мкм соответственно. Совместно с полученными данными, можно построить обобщающую таблицу иерархии сферы действия поверхностных сил (таблица 2).

Таблица 2. Дискретные уровни сферы действия поверхностных сил.

Характерный размер, ℓ_i , мкм	Среднее значение, ℓ , ср, мкм	Источник данных
0.02 – 0.03	0.025	[1-3]
0.4 – 0.6	0.5	[5-8]
6 – 12	9	Наши данные (рис.1-4)
96 – 110	103	Наши данные (рис.5,6)
800 – 1000	900	[рис.6]
~10000	10000	[13,15]

Таблица 2 обобщает данные из различных источников (включая собственное исследование) и демонстрирует *иерархическую, дискретную природу* дальнодействия поверхностных сил в конденсированных системах, из которого вытекает, что влияние поверхностных сил проявляется не монотонно, а на ряде четко выраженных, дискретных характерных размеров (L_k), охватывающих диапазон от нанометров до миллиметров. Экспериментально обнаружены точки перегиба при: Касторовое масло: 7, 20, 40, 96 мкм; Силиконовое масло: 9, 25, 45, 105 мкм. Отношение соседних масштабов дает $C=19.2\pm 2.3$ для касторового и $C=16.8\pm 1.9$ для силиконового масел. Таким образом, анализ среднего значения характерных размеров (L_{cp}) подтверждает применимость рекуррентной модели ($L_k=L_0 C^k (1)$) и соотношение $L_{(k+1)}/L_k$ между соседними уровнями близко к величине $C_{cp}=10-20$.

Дискретный, а не монотонный характер затухания поверхностных сил, охватывающий столь широкий диапазон масштабов, указывает на *кооперативный или синергетический механизм*.

Гипотеза, выдвинутая на основе этих данных, заключается в том, что поверхностное поле инициирует структурную перестройку в прилегающем слое (например, L_0). Этот упорядоченный слой действует как "эффективная поверхность" для следующего слоя ($L_1=L_0*C$) и этот процесс повторяется, создавая иерархию структурных уровней, что объясняет проявление поверхностных сил на масштабах, многократно превышающих классически предсказанные.

Анализ полученных данных поддерживает идею о *самоорганизации* в открытых неравновесных системах, где внешнее воздействие (поле поверхности) приводит к возникновению диссипативных структур на различных масштабах.

3. Результаты и их анализ

3.1. Экспериментальное доказательство дискретного дальнего действия

В диапазоне 1–10000 нм происходят качественные изменения в поведении вещества. Здесь материя природы проявляет двойственность: система уже обладает макроскопическими характеристиками, такими как упругость или электропроводность, но при этом всё ещё «помнит» о своём квантовом происхождении.

Свойства системы радикально меняются в зависимости от того, в какой части мезоскопического диапазона мы находимся. В мезоскопическом масштабе (1–10000 нм) ван-дер-ваальсовы силы проявляют *многоуровневую организацию* (таблица 3).

Таблица 3. Структурные уровни ван-дер-ваальсовых сил в мезоскопических системах

Уровень	Характерные явления	Доминирующий механизм	Примеры систем
<i>Молекулярный</i> (0.1–2 нм)	Квантовые точки, плазмонные резонансы	Парные дисперсионные взаимодействия	Полупроводниковые нанокристаллы
<i>Кластерный</i> (2–20 нм)	Коллективные спиновые режимы	Коллективная поляризация	Магнитные скирмионные решётки
<i>Ансамблевый</i> (20–200 нм)	Перколяционные переходы	Неаддитивное суммирование сил	Графеновые суперрешётки
<i>Интерфейсный</i> (200 нм–10 мкм)	Образование дислокационных петель и сетей	Кооперативная самоорганизация	Мезоскопические (кластерные) ансамбли
<i>Поверхностный</i> 20–500 мкм	Образование макросистем	Иерархическое структурообразование	Макроскопические системы

Данная таблица 3 описывает *иерархию уровней организации материи* в приповерхностных и граничных областях, где поверхность выступает как активный фактор, порождающий структуру.

Проводим анализ структурных уровней:

1. На молекулярном уровне доминирует поведение отдельных молекул, атомов или их малых групп. Свойства системы определяются квантово-механическими эффектами и индивидуальными квантовыми состояниями. На этом уровне создаются, например, «искусственные атомы» (квантовые точки).

2. На кластерном уровне группа молекул (кластер) начинает вести себя как новая сущность с коллективными свойствами, не сводимыми к простой сумме свойств отдельных частиц. Здесь формируются сложные магнитные или электрические структуры, такие как квазичастицы, перспективные для создания сверхплотной памяти.

3. На ансамблевом уровне происходит взаимодействие множества кластеров или наночастиц между собой. Ключевую роль играют статистические и перколяционные эффекты, что проявляется в особенностях проводимости в неупорядоченных средах и сложных топологических явлениях в двумерных материалах.

4. На интерфейсном уровне влияние поверхности или границы раздела фаз распространяется далеко в объём материала, создавая мезоскопические структуры. Здесь наблюдаются кластеризация зарядов, образование и эволюция мезоскопических кластеров. Примерами являются зёрна в наноструктурированных материалах, домены в сегнетоэлектриках или сети дислокаций в подложке микрочипа, которые определяют его надёжность.

5. На поверхностном уровне влияние интерфейса достигает макроскопического масштаба, формируя завершающий этап иерархической самоорганизации и демонстрирует масштабный инвариант, где макроскопические свойства системы определяются согласованным взаимодействием всех нижележащих уровней организации, от молекулярного до интерфейсного.

Изучение мезоскопических систем позволяет нам не просто наблюдать за природой, но и конструировать материалы с заданными свойствами. Анализ отношений соседних уровней (L_{k+1}/L_k) позволил выявить инвариант $C \approx 10-20$. Каждая ступень соответствует новому иерархическому уровню L_k . Коэффициент $C \approx 10-20$ выступает как множитель усиления радиуса корреляции. Благодаря этому «резонансу оболочек», поле поверхности транслируется на макроскопические расстояния, создавая единую когерентную систему «поверхность-жидкость».

Таким образом, точки перегиба на зависимостях поверхностного натяжения $\sigma(h)$ и краевого угла $\Theta(d)$ являются макроскопическим проявлением мезоскопических фазовых переходов между квантованными уровнями структуры, свойства граничной фазы(интерфейс) не являются аддитивной суммой свойств компонентов, а определяются резонансным взаимодействием иерархических оболочек («структурных матрешек») и механизм формирования СДПС сохраняет свою физическую природу при переходе от микроуровня (наноуровень) к макроуровень (геотектонические системы).

3.2. Термодинамическая природа иерархического инварианта

Обнаруженная дискретность указывает на кооперативный механизм, при котором упорядоченный на предыдущем уровне слой выступает в роли «эффективной поверхности» для следующего. Это процесс самоорганизации диссипативных структур [12,13], устойчивость которых определяется конкуренцией энтальпийного (энергия связи) и энтропийного факторов и модель, связывающая масштабный инвариант C с критическим числом молекул N_{cl} в мезоскопическом кластере, необходимом для устойчивости против тепловых флуктуаций: эксперимент показывает, что свойства меняются скачками на расстояниях L_k , которые соотносятся примерно как $L_{k+1}/L_k \approx C$, где C — константа ($\sim 10-20$). Это говорит о *масштабной инвариантности* процесса.

Расстояние от поверхности L связано с линейным размером кластера (группы молекул), который формируется на этом расстоянии. Если кластер является компактным (например, кубическим или сферическим), то его объём V пропорционален кубу линейного размера a : $V \propto a^3$. Объём кластера напрямую связан с числом молекул N_{cl} в нем и объемом, приходящимся на одну молекулу v_0 : $V = N_{cl} \cdot v_0$. Линейный размер устойчивого кластера a на иерархическом уровне k должен быть пропорционален характерному расстоянию L_k , на

котором этот кластер существует. Это центральный постулат модели: *размер строительного "блока" определяет масштаб всего уровня: $a \propto L_k$* . Таким образом,

1. $L_{k+1} \approx C \cdot L_k$ (из эксперимента);
2. $a \propto L_k$ (постулат);
3. $V \propto a^3 \propto (L_k)^3$ (геометрия);
4. $V = Ncl \cdot v_0$ (определение).

Следовательно, число молекул в кластере, устойчивом на уровне k , должно быть: $Ncl \propto V \propto (L_k)^3 \propto (C \cdot L_k)^3 \propto C^3$. Так как v_0 — константа для данной жидкости, мы приходим к выводу, что критическое число молекул должно быть пропорционально кубу масштабного инварианта: $Ncl \propto C^3$. Чтобы перейти от пропорциональности к равенству, вводится предположение, что коэффициент пропорциональности равен 1 (или учтен в самом определении C). Тогда:
$$Ncl = C^3 \quad (2)$$

При $C \approx 20$, $Ncl \approx 8000$. Этот критический ансамбль представляет собой минимальное количество молекул, способных коллективно поддерживать структурную память и транслировать порядок. Из полученных данных (рис.6) видно, что повышение температуры с 13.6°C до 33°C приводит к смещению точек перегиба в сторону меньших толщин (~ 2 мкм/град), что согласуется с увеличением роли дезорганизующего фактора $k_B T$, где k_B — постоянная Больцмана, T — температура.

При низких T (13.6°C) поле поверхности эффективнее подавляет энтропийный хаос, создавая длинные иерархические цепи (до 200 мкм). При высоких T (33°C) тепловое движение «размывает» дальние уровни иерархии, сокращая радиус действия сил, что подтверждает энтропийную природу явления.

Рост температуры требует увеличения Ncl для стабилизации кластера (увеличение C), но одновременно сокращает общее число устойчивых иерархических уровней k из-за усиления диссипации. Природа этих процессов определяется динамическим равновесием между организующим потенциалом поверхности (E_{surf}) и энергией тепловых флуктуаций $k_B T$. Стабильность каждого уровня иерархии описывается условием [12]:

$$\Delta G_{\text{struct}} = \Delta H - T \Delta S < 0 \quad (3)$$

Это означает, что выигрыш в энергии связи (отрицательное ΔH) должен превозмогать потерю энтропии (отрицательное ΔS , умноженное на T).

Предположим, что энтальпийный выигрыш (ΔH), и энтропийные потери (ΔS) при образовании кластера зависят от числа молекул в нём (Ncl):

1. Действительно, чем больше кластер, тем больше связей формируется, и тем больше энергетический выигрыш. Можно предположить, что этот выигрыш (энтальпийный член ΔH) пропорционален объему кластера, а значит, и числу молекул: $\Delta H \propto -Ncl$ (знак "минус" указывает на выигрыш в энергии);

2. При образовании упорядоченного кластера из хаотичной жидкости система теряет энтропию. Потеря энтропии (энтропийный член $-T \Delta S$) пропорциональна логарифму числа способов, которыми можно было бы организовать эти Ncl молекул, то есть логарифму размера кластера. Для макроскопического объекта это примерно: $-T \Delta S \propto +T \cdot \ln(Ncl)$ (знак "плюс" указывает на противодействие организации).

Подставим эти пропорции в формулу для ΔG :

$$\Delta G \propto [-A \cdot Ncl] + [B \cdot T \cdot \ln(Ncl)], \quad (4)$$

где A и B — некоторые коэффициенты пропорциональности.

Согласно модели, $Ncl = C^3$. Подставляя это в (4), получим:

$$\Delta G \propto [-A \cdot C^3] + B \cdot T \cdot \ln(C^3) = [-A \cdot C^3] + [3B \cdot T \cdot \ln(C)] \quad (5)$$

Для того чтобы описать не абсолютное значение ΔG , а *критическое условие устойчивости конкретного уровня иерархии*, выражение (5) преобразуют и упрощают: анализ размерностей и поведения системы показывает, что главную роль играет второй член, энтропийное слагаемое в уравнение (5), которое доминирует в условиях баланса. Энтальпийный член $(-A \cdot C^3)$ может быть инкорпорирован в константу. В результате получается формула, которая хорошо описывает экспериментальные данные:

$$\Delta G = -k_B T \cdot \ln(e \cdot C^3), \quad (6).$$

где ΔG — изменение свободной энергии Гиббса для процесса формирования устойчивого мезоскопического кластера, k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, e — основание натурального логарифма (число Эйлера: ~ 2.718), $\ln(e \cdot C^3) = 1 + 3 \ln C$ — логарифмический член отражает конкуренцию между энтальпийным (энергия связи) и энтропийным факторами.

Из формулы (6) видно, что повышение температуры системы приводит к росту энтропийного вклада, что обуславливает два конкурирующих процесса: увеличение число молекул в кластере (N_{cl}), необходимого для стабилизации кластера ведет к росту коэффициента C ; ускоренная диссипация поля приводит к уменьшению общего числа устойчивых уровней k .

Уравнение (6) описывает движущую силу (сродство) процесса самоорганизации молекул в устойчивый мезоскопический кластер под влиянием поверхности и иерархическое структурообразование в приповерхностных слоях — это термодинамически выгодный процесс, управляемый балансом между энергией связи и энтропией, параметром которого является масштабный инвариант C .

3.3. Мезоскопическое квантование

Переход от уровня k к уровню $k+1$ обусловлен достижением критического объёма V_{crit} , необходимого для формирования устойчивого мезоскопического кластера. Связь масштабного инварианта C с числом молекул в кластере выражается формулой $N_{cl} = C^3$ (2). Переход от уровня L_k к уровню L_{k+1} носит дискретный характер и определяется достижением критического объёма самоорганизации V_{crit} .

Согласно предложенной модели, повышение температуры вынуждает систему увеличивать число молекул в кластере (N_{cl}) для сохранения его устойчивости, что приводит к увеличению «шага» иерархии C . Однако вследствие возросшей диссипации энергии общее число устойчивых уровней при этом сокращается.

Этот результат согласуется с теорией «структурных переходов» в пристенных слоях, описанной в современных работах по микрофлюидике [14], где подтверждается, что жидкость вблизи стенок ведёт себя как неньютоновская среда с квантованным профилем вязкости.

Для демонстрации «масштабного прорыва» проведено сопоставление экспериментальных данных с теоретической кривой, описываемой потенциалом в рамках теории Дерягина — Ландау — Фервея — Овербека (DLVO) [5,6], и установлены следующие принципиальные отличия: классическая кривая в рамках теории DLVO стремится к асимптотическому нулю уже на расстояниях 10^{-8} – 10^{-7} м (10–100 нм), в то время как экспериментальные результаты, полученные в настоящей работе и данные других авторов [8,9-11,14,15], демонстрируют сохранение значительного градиента свойств на

расстояниях до 2×10^{-4} м (200 мкм). Таким образом, зафиксировано расширение сферы влияния поверхности на три-четыре порядка.

Такое значительное расхождение объясняется тем, что классическая теория учитывает только прямые парные взаимодействия или их аддитивное суммирование. В нашей модели дальное действие обеспечивается механизмом структурной эстафеты: первый нанометровый слой, упорядоченный в соответствии с механизмами DLVO, сам выступает в роли «шаблона» (эффективной поверхности) для следующего мезоскопического слоя. Переход от уровня k к уровню $k+1$ объясняется достижением критического объёма V_{crit} , необходимого для формирования устойчивого мезоскопического кластера. Связь масштабного инварианта с числом молекул в кластере выражается формулой $N_{cl} = C^3$.

Заключение и выводы

1. Экспериментально доказано, что сфера действия поверхностных сил (СДПС) простирается на сотни микрометров (до 200 мкм), что на 3–4 порядка превышает предсказания классической теории DLVO [5,6]. Это указывает на то, что затухание поверхностного влияния происходит не за счёт монотонного ослабления парных межмолекулярных взаимодействий, а через *каскад дискретных фазовых переходов*. Таким образом, интерфейс функционирует как активный генератор структуры, последовательно организующий вещество вглубь объёма по механизму иерархической самоорганизации («структурной эстафеты»).

2. Обнаружено, что переходы между дискретными уровнями организации подчиняются масштабному инварианту с коэффициентом подобия $C \approx 10\text{--}20$. Этот коэффициент является термодинамическим параметром, связывающим макроскопические свойства с микроскопическими: он определяет критическое число молекул в кластере ($N_{cl} \approx C^3 \approx 8000$), необходимое для устойчивости против энтропийного хаоса [12]. Температурная зависимость положения точек бифуркации подтверждает, что баланс между энергией связи и энтропией является ключевым фактором, определяющим дальность и архитектуру возникающих диссипативных структур.

3. Установленный механизм иерархического квантования свойств в приповерхностных слоях имеет прямые практические последствия для современных технологий. В микро- и наноэлектронике это позволяет перейти от эмпирического подхода к целенаправленному созданию высококачественных интерфейсов (например, в p-n переходах) с атомарной гладкостью, чистотой и стабильностью, что критически важно для повышения производительности и надёжности приборов электроники. Принципы управления через параметр «С» также открывают перспективы для разработки новых смазочных материалов, систем доставки лекарств и прогнозирования геомеханических процессов [16].

Литература

1. Гиббс Дж. В. Термодинамические работы. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 492 с.
2. Ахматов А.С. Молекулярная физика граничного трения. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.
3. Адамсон А. Физическая химия поверхностей. – М.: Мир, 1979. – 568 с.
4. Джейкок М., Парфит Дж. Химия поверхностей раздела фаз. – М.: Мир, 1984. – 269 с.
5. Derjaguin B. V., Landau L. D. Theory of the stability of strongly charged lyophobic sols and of the adhesion of strongly charged particles in solutions of electrolytes // Acta Physico-Chimica Sinica. – 1941. – Vol. 14. – P. 633–662.

6. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. –М.:Наука, 1985.– 398 с.
7. Israelachvili J.N. Intermolecular and Surface Forces. – 3rd ed. – Academic Press, Elsevier, 2011.- 704 p.
8. Петрянов И.В., Розенблюм Н.Д. О краевых углах малых капель // Доклады АН СССР. – 1948. – Т. 61. – № 4. – С. 661–664.
9. Panin V.E., Slosman A.I., Antipina N.A. Mesoscopic structural levels of deformation of polycrystals // Physical Mesomechanics. – 2003. – Vol. 6. – No. 3. – P. 5–14.
10. Панин В. Е., Сергеев В. П., Панин А. В. Наноструктурирование поверхностных слоев конструкционных материалов и нанесение наноструктурных покрытий. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 254 с.
11. Панин В.Е. и др. Физическая мезомеханика материалов. Томск: Изд-во ТПУ, 2015.
12. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. – М.: Мир, 2002. – 461 с.
13. Nicolis G. und Prigogine I. Self-Organization in Nonequilibrium Systems. From Dissipative Structures to Order through Fluctuations. J. Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto 1977. 491 Seiten.
14. Bocquet L., Charlaix E. Nanofluidics, from whole tree to amino acids // Chemical Society Reviews. 2010.
15. Alts T. The Thermodynamics of Interfaces // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2015.
16. Mesomechanics: Emerging Homogenization Concepts for Multiscale Materials / Ed. by S. Schmauder. – Springer, 2011. – 350 p.

СООТНОШЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ФИЗИКИ В ГИПЕРПРОСТРАНСТВЕ ДВОЙНЫХ КВАТЕРНИОНОВ

Терехов Сергей Владимирович

д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, доцент

svlter@yandex.ru

ФГБНУ «Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина», ул. Розы

Люксембург, 72, Донецк, 283048, ДНР, Россия

<https://orcid.org/0000-0003-3037-7258>

Аннотация. Привлечение алгебраических методов для априорного моделирования природных явлений и процессов позволяет выявить общие закономерности физического мира. Построение охватывающих алгебр приводит к новым числовым системам, с помощью которых можно получить не только известные соотношения и уравнения, но и установить новые зависимости. Кроме того, такой подход открывает возможность обнаружения новых алгебр с уникальными свойствами, отображающими неизвестные характеристики материальных объектов. В данной работе построена алгебра, изоморфная алгебре комплексных кватернионов Гамильтона и алгебре матриц Паули, а также алгебра, произведение чисел которой содержат левые и правые тривиальные слагаемые. Получены обобщения условий Коши-Римана для двойных кватернионов и показано, что первое условие из них отвечает большому числу физических уравнений (локальные законы сохранения массы и заряда, условие калибровки Лоренца, уравнение диффузии Фика и другие). Второе условие гипераналитичности двойного кватерниона задает эволюцию векторного компонента гиперфункции. Установлены кватернионные выражения, представляющие при различных параметризациях формулы релятивистской и классической механики, в частности, получены формулы для преобразования Лоренца. Введение в рассмотрение угловых двойных кватернионов позволяет получить формулы для скаляра Лоренца и соотношений де Бройля для энергии и импульса волны. Поиск собственных кватернионов для оператора 4-градиента сводится к решению уравнений затухающих или нарастающих колебаний. Наличие в гиперпространстве кватернионов особого вида соответствует сохранению 4-потенциалов на субстанциональном уровне при их изменении в локальной области. В этом случае компоненты кватерниона удовлетворяют уравнениям теории Максвелла. Найдено выражение для субстанционального оператора; на примере поля Максвелла показано наличие субстанциональной гипераналитичности 4-потенциала при отсутствии его гипераналитичности на локальном уровне. Установлен вид 4-силы, действующей на заряженное тело.

Ключевые слова: комплексное число, охватывающая алгебра, двойной кватернион, гиперпространство, уравнения физики, специальная теория относительности, механика Ньютона, колебания, волны, поля.

RELATIONS AND EQUATIONS OF PHYSICS IN HYPERSPACE OF DOUBLE QUATERNIONS

Terekhov Sergey Vladimirovich

Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Associate Professor

svlter@yandex.ru

A.A. Galkin Donetsk Physics and Technology Institute, 72 Roza Lyuksemburg Street, Donetsk,
283048, DPR, Russia

<https://orcid.org/0000-0003-3037-7258>

Abstract: The use of algebraic methods for a priori modeling of natural phenomena and processes makes it possible to reveal general regularities of the physical world. The construction of covering algebras leads to new number systems that allow one to derive not only known relations and equations but also to establish new

dependencies. Moreover, this approach opens the possibility of discovering new algebras with unique properties reflecting unknown characteristics of material objects. In this work, an algebra is constructed that is isomorphic to the algebra of complex Hamilton quaternions and the algebra of Pauli matrices, as well as an algebra whose multiplication contains left and right trivial terms. Generalizations of the Cauchy–Riemann conditions for double quaternions are obtained, and it is shown that the first of these conditions corresponds to a wide class of physical equations (local conservation laws of mass and charge, the Lorenz gauge condition, Fick’s diffusion equation, and others). The second condition of hyperanalyticity of a double quaternion determines the evolution of the vector component of a hyperfunction. Quaternionic expressions representing formulas of relativistic and classical mechanics under various parameterizations are established; in particular, formulas for the Lorentz transformation are obtained. The introduction of angular double quaternions allows one to derive formulas for the Lorentz scalar and the de Broglie relations for the energy and momentum of a wave. The search for eigenquaternions of the four-gradient operator reduces to solving equations of damped or growing oscillations. The presence of special quaternions in hyperspace corresponds to the conservation of four-potentials at a substantial level under their variation in a local region. In this case, the components of the quaternion satisfy Maxwell’s equations. An expression for the substantial operator is obtained; using the Maxwell field as an example, the existence of substantial hyperanalyticity of the four-potential is demonstrated in the absence of local hyperanalyticity. The form of the four-force acting on a charged body is established.

Keywords: complex number, covering algebra, double quaternion, hyperspace, physical equations, special relativity, Newtonian mechanics, oscillations, waves, fields.

Введение. Комплексные числовые системы

Идентичность математических формулировок кинетических процессов (например, диффузии по Фику, теплопроводности по Фурье) и локальных законов сохранения (например, массы, заряда), а также другие математические построения указывают на возможность использования единой числовой системы для описания физических явлений и процессов.

Известно [1-3], что обобщением системы действительных чисел являются комплексные величины вида

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, 0, +1. \quad (1)$$

Комплексные ($i^2 = -1$), дуальные ($i^2 = 0$) и двойные ($i^2 = +1$) числа (1) и им комплексно-сопряженные выражения

$$z^+ = x - iy. \quad (2)$$

нашли приложение в физике и геометрии [1-12]. Применение функций комплексного переменного (ФКП) $f(z, z^+) = u(x, y) + iv(x, y)$, в общем случае зависящих от аргументов (1) и (2), базируется на использовании аналитических функций, удовлетворяющих условиям Коши-Римана

$$\partial u(x, y)/\partial x = \partial v(x, y)/\partial y, \quad \partial u(x, y)/\partial y = -\partial v(x, y)/\partial x. \quad (3)$$

Условия (3) обеспечивают независимость ФКП $f(z, z^+)$ от зеркального аргумента (2) ($df(z, z^+)/dz^+ = 0$ по Фютеру (Fueter R.) описывает плоское движение жидкости без источников и вихрей, см., например, [9]) и интеграла от ФКП от пути интегрирования, вычисление пределов проводят при пренебрежении порядком стремления x и y к пороговым значениям. Систему равенств (3) можно записать в сокращенном виде, если воспользоваться инфинитезимальным оператором Ли

$$\nabla_L = \partial/\partial x + i\partial/\partial y. \quad (4)$$

Тогда система равенств (3) с учетом (4) примет вид

$$\nabla_L f(z, z^+) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что в силу использования в (3)-(5) частных производных, указанные равенства выполняются на комплексной плоскости в любой точке и ее малой окрестности (локальный

уровень). Используя частное дифференцирование равенств системы (3), легко показать, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими, т.е. удовлетворяют уравнению

$$\Delta u(x, y) = \partial^2 u(x, y) / \partial x^2 + \partial^2 u(x, y) / \partial y^2 = 0, \quad (6)$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – оператор Лапласа.

Обобщение комплексных чисел (1) получают с использованием принципа удвоения мнимых единиц (процедура Кэли-Диксона): вводится новая единица j ($j^2 = -1, 0, +1$), т.е. числа $x = x_1 + jx_2$ и $y = y_1 + jy_2$. Такой подход сопровождается составлением таблицы перемножения мнимых единиц, например, для комплексных кватернионов [3,9-12]

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (7)$$

Таким образом, кватернион в алгебраической форме

$$Q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3, \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, 0, +1 \quad (8)$$

или скалярно-векторном виде

$$Q = q_0 + \gamma \mathbf{q}, \quad \gamma^2 = -1, 0, +1. \quad (9)$$

Особый интерес представляет произведение векторных составляющих кватерниона

$$\gamma \mathbf{q} \gamma \mathbf{h} = \gamma^2 (\mathbf{q} \cdot \mathbf{h} - \gamma [\mathbf{q} \times \mathbf{h}]), \quad \gamma^2 = -1, 0, +1, \quad (10)$$

где $\mathbf{q} \cdot \mathbf{h} = \sum_{\alpha=1}^3 q_\alpha h_\alpha$ – скалярное, а $[\mathbf{q} \times \mathbf{h}] = i(q_2 h_3 - q_3 h_2) + j(q_3 h_1 - q_1 h_3) + k(q_1 h_2 - q_2 h_1)$ – векторное произведение.

Введение бесконечно малого оператора «тетра» (оператор 4-градиента)

$$\diamond = \partial / \partial q_0 + \gamma \partial / \partial \mathbf{q} = \partial / \partial q_0 + \gamma \nabla \quad (11)$$

(здесь $\nabla = i\partial / \partial q_1 + j\partial / \partial q_2 + k\partial / \partial q_3$ – оператор Гамильтона) позволяет записать условия гипераналитичности (аналог условий Коши-Римана (3)-(5) в гиперпространстве) кватернионной функции $F(Q, Q^+) = \varphi(q_0, \mathbf{q}) + \gamma \mathbf{A}(q_0, \mathbf{q})$ с учетом (7)-(11) в виде [13]

$$\diamond F = 0: \begin{cases} \partial \varphi / \partial q_0 + \text{div } \mathbf{A} = 0 \\ \partial \mathbf{A} / \partial q_0 + \text{grad } \varphi - \text{rot } \mathbf{A} = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

где $\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$, $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$, $\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}]$. В работах [13,14] приведены примеры применения развитого математического формализма к нахождению уравнений физической теории. В зависимости от физического содержания функций φ и $\mathbf{A}$ первое уравнение системы (12) может описывать диффузию Фика, теплопроводность Фурье, локальные законы сохранения массы и заряда, нормировку Лоренца в теории электромагнитного поля и тому подобные процессы. Второе уравнение системы (12) отображает разнонаправленность, например, соленоидального $\mathbf{K}_1 = -(\partial \mathbf{A} / \partial q_0 + \text{grad } \varphi)$ и вихревого $\mathbf{K}_2 = \text{rot } \mathbf{A}$ векторных полей.

Целью данной работы является нахождение естественного подхода к построению охватывающих алгебр для действительных чисел и отыскание соотношений и уравнений физики в гиперпространстве двойных кватернионов.

Построение охватывающих алгебр: обобщение множества действительных чисел

Рассмотрим комплексную плоскость и выберем на ней два базисных элемента 1 и i . По схеме [15] создадим из элементов вектор-столбец и ему комплексно-сопряженный объект

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \xi_1^+ \quad (13)$$

со скалярными произведениями ($\xi_1^T = (1 \ i)$, $\xi_2^T = (1 \ -i)$)

$$\begin{aligned} \xi_1^T \cdot \xi_1 = \xi_2^T \cdot \xi_2 = 1 + i^2 &= \begin{cases} 0, i^2 = -1, \\ 1, i^2 = 0, \\ 2, i^2 = +1, \end{cases} \\ \xi_1^T \cdot \xi_2 = \xi_2^T \cdot \xi_1 = 1 - i^2 &= \begin{cases} 2, i^2 = -1, \\ 1, i^2 = 0, \\ 0, i^2 = +1, \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Представим действительный вектор X через векторы (13) с учетом определений (1) и (2)

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z + z^+ \\ i(z - z^+) \end{pmatrix} = \frac{z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{z^+}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Из (15) видно, что векторы (13) являются на плоскости базисными векторами.

Вычислим внешние произведения векторов (13)

$$\begin{aligned} \xi_1 \otimes \xi_1^T &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & i^2 \end{pmatrix} = \mu_0 + i\mu_3, \quad \xi_1 \otimes \xi_2^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -i^2 \end{pmatrix} = \mu_2 + i\mu_1, \\ \xi_2 \otimes \xi_1^T &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -i^2 \end{pmatrix} = \mu_2 - i\mu_1, \quad \xi_2 \otimes \xi_2^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & i^2 \end{pmatrix} = \mu_0 - i\mu_3, \end{aligned} \quad (16)$$

здесь матрицы

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix}; \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix}; \mu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Для мнимых единиц

$$i^2 = -1: \nu_0 = \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \nu_1 = \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \nu_2 = \mu_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \nu_3 = \mu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17a)$$

единичной матрицей является μ_2 , а для

$$i^2 = +1: \mu_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \mu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \quad (17b)$$

матрица μ_0 . В (17b) матрица μ_1 является антисимметричной, так как $\mu_1 = -\mu_1^T$, а другие матрицы μ_0 , μ_2 и μ_3 – симметричными, для них выполняются равенства $\mu_0 = \mu_0^T$, $\mu_2 = \mu_2^T$ и $\mu_3 = \mu_3^T$.

Матрицы μ_α ($\alpha = 0,1,2,3$) образуют охватывающую алгебру гиперпространства и удовлетворяют соотношениям ($\det$ – детерминант матрицы):

$$\det \mu_0 = i^2, \det \mu_1 = 1, \det \mu_2 = -i^2, \det \mu_3 = -1; \mu_0^2 = \mu_2^2 = \mu_3^2 = E, \mu_1^2 = -E, \quad (18)$$

где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица. В таблице 1 представлены произведения матриц (17a) и (17b).

Таблица 1. Произведения базисных матриц для комплексных и двойных чисел

	$i^2 = -1$					$i^2 = +1$			
	v_0	v_1	v_2	v_3		μ_0	μ_1	μ_2	μ_3
v_0	1	v_1	v_2	v_3	μ_0	1	μ_1	μ_2	μ_3
v_1	v_1	-1	v_3	$-v_2$	μ_1	μ_1	-1	μ_3	$-\mu_2$
v_2	v_2	$-v_3$	1	$-v_1$	μ_2	μ_2	$-\mu_3$	1	$-\mu_1$
v_3	v_3	v_2	v_1	1	μ_3	μ_3	μ_2	μ_1	1

Заметим, что матрицы Паули σ_α ($\alpha = 0,1,2,3$) связаны с матрицами μ_α соотношениями $\sigma_0 = \mu_0$, $\sigma_1 = \mu_3$, $\sigma_2 = i_1 \mu_1$ ($i_1^2 = -1$), $\sigma_3 = \mu_2$. Представленная алгебра (176) также изоморфна алгебре комплексных кватернионов, если положить $e_0 = 1$, $e_1 = i = \mu_1$, $e_2 = j = -i_1 \mu_2$, $e_3 = k = i_1 \mu_3$ с выполнением правил (7) перемножения элементов.

Рассмотрим другой пример построения охватывающей алгебры, для чего представим разложение комплексного вектора Y с учетом определений (1) и (2)

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z + z^+ \\ z - z^+ \end{pmatrix} = \frac{z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{z^+}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Из (19) видно, что ортонормированные векторы

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

со скалярными произведениями ($\zeta_1^T = (1 \ 1)/\sqrt{2}$, $\zeta_2^T = (1 \ -1)/\sqrt{2}$)

$$\zeta_1^T \cdot \zeta_1 = \zeta_2^T \cdot \zeta_2 = 1, \quad \zeta_1^T \cdot \zeta_2 = \zeta_2^T \cdot \zeta_1 = 0.$$

являются на гиперплоскости действительными базисными векторами.

Вычислим внешние произведения векторов (19), т. е. построим новое гиперпространство

$$\begin{aligned} \zeta_1 \otimes \zeta_1^T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \eta_0, \quad \zeta_1 \otimes \zeta_2^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \eta_1, \\ \zeta_2 \otimes \zeta_1^T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \eta_2, \quad \zeta_2 \otimes \zeta_2^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \eta_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Вырожденные матрицы η_α ($\alpha = 0,1,2,3$) имеют нулевые детерминанты ($\det \eta_\alpha = 0$) и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \eta_0^2 &= \eta_0, \quad \eta_1^2 = \eta_2^2 = 0, \quad \eta_3^2 = \eta_3, \\ \eta_0 \eta_1 &= \eta_1, \quad \eta_1 \eta_0 = 0, \quad \eta_0 \eta_2 = 0, \quad \eta_2 \eta_0 = \eta_2, \quad \eta_0 \eta_3 = \eta_3 \eta_0 = 0, \\ \eta_2 \eta_1 &= \eta_3, \quad \eta_1 \eta_2 = \eta_0, \quad \eta_2 \eta_3 = 0, \quad \eta_3 \eta_2 = \eta_2, \quad \eta_3 \eta_1 = 0, \quad \eta_1 \eta_3 = \eta_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно (22) своеобразность матриц η_α ($\alpha = 0,1,2,3$) состоит в следующем: в произведении двух гиперкомплексных чисел компоненты с элементами η_0 и η_2 первого сомножителя обнуляют компоненты правой половины второго числа, а с элементами η_1 и η_3 — левой (см. таблицу 2).

Таблица 2. Произведения матриц η_α ($\alpha = 0,1,2,3$)

	$i^2 - \text{любое}$			
	η_0	η_1	η_2	η_3
η_0	η_0	η_1	0	0
η_1	0	0	η_0	η_1
η_2	η_2	η_3	0	0
η_3	0	0	η_2	η_3

гиперпространстве.

Таким образом, базисные векторы разложений действительного и комплексного векторов при вычислении внешних произведений порождают охватывающие алгебры нового гиперпространства. В силу того, что алгебра двойных гиперкомплексных чисел и функций позволяет априори получать физически значимые соотношения и уравнения, рассмотрим механические движения в

Уравнения специальной теории относительности и механики Ньютона в гиперпространстве двойных кватернионов

Разделим гиперпространство на малые области со средним линейным размером L , в которых любой сигнал распространяется со скоростью, не превышающей c . Положение точки в гиперпространстве характеризуется временем t и радиус-вектором $\mathbf{R}$ в выбранной системе координат. Введем в рассмотрение безразмерные время $\tau = ct/L$ и пространственную координату $\mathbf{r} = \mathbf{R}/L$. Тогда событие в гиперпространстве определяется двойным кватернионом

$$S = \tau + \gamma \mathbf{r}, \quad \gamma^2 = +1, \quad (23)$$

и его зеркальным аналогом

$$S^+ = \tau - \gamma \mathbf{r}. \quad (24)$$

Произведение величин (23) и (24) задает интервал между событиями s

$$|S|^2 = SS^+ = S^+S = \tau^2 - r^2 = \pm s^2 \quad (25)$$

1. Равномерное, прямолинейное и ускоренное движения

Описание гиперпространства двойных кватернионов будем проводить с применением векторной алгебры Гиббса. Для произвольных скоростей движения параметризация гиперпространства осуществляется с использованием интервала между событиями s . Для скоростей значительно меньших предельной скорости c параметризация пространства производится применением времени τ . Смена событий с учетом (25) в первом случае происходит со скоростью

$$V = dS/ds = 1/\sqrt{1-(v/c)^2} + \gamma \mathbf{v}/c\sqrt{1-(v/c)^2}, \quad |V|^2 = 1 \quad (26)$$

($\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ – скорость изменения радиус-вектора, $|\mathbf{v}| = v$), а во втором

$$V_0 = dS/d\tau = 1 + \gamma \mathbf{v}/c, \quad |V_0|^2 = 1 - (v/c)^2. \quad (27)$$

Из подвижной системы координат лабораторная система отсчета движется в противоположном направлении по отношению к перемещению подвижной системы. Поэтому вычислим величину S' , задающую при равномерном движении интервал между событиями в подвижной системе координат, как $S' = \tau' + \gamma \mathbf{r}' = SV^+$, где

$$\begin{cases} \tau' = (SV^+ + VS^+)/2 = (\tau - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)/\sqrt{1-(v/c)^2} \\ \mathbf{r}' = (SV^+ - VS^+)/2\gamma = \{\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau/c + [\mathbf{r} \times \mathbf{v}/c]\}/\sqrt{1-(v/c)^2} \end{cases} \quad (28)$$

Система уравнений (28) обобщает формулы Лоренца [16, с. 28] на случай произвольного равномерного движения при отсутствии инвариантности интервала. Прямолинейность

движения (сонаправленность и параллельность векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$) соответствует обращению в нуль векторного произведения $[\mathbf{r} \times \mathbf{v}/c] = 0$ и равенству интервалов ($|S|^2 = |S'|^2$) в лабораторной и подвижной системах координат. При малых скоростях движения $\sqrt{1-(v/c)^2} \approx 1$, а перемещение вдоль радиуса-вектора переводит (28) в преобразование Галилея.

Оператор (11) по направлению скорости (27) равен

$$D = V_0 \diamond = (1 + \gamma \mathbf{v}/c)(\partial/\partial \tau + \gamma \nabla) = c^{-1} d/dt + \gamma d/d\mathbf{r} \quad (29)$$

Полные производные $d/dt = \partial/\partial \tau + \mathbf{v} \cdot \nabla$ и $d/d\mathbf{r} = \nabla + \{\mathbf{v} \partial/\partial \tau - [\mathbf{v} \times \nabla]\}/c$ определяют временные и пространственные изменения физической величины при движении со скоростью $\mathbf{v}$ от точки к точке гиперпространства (субстанциональный уровень).

Если материальный объект обладает мерой инерции (массой) m

$$M = m + \gamma \mathbf{J}_m/c, \quad |M|^2 = m^2 - (\mathbf{J}_m/c)^2 \quad (30)$$

(здесь $m = m/m_0$, m_0 – масса покоя, $\mathbf{J}_m$ – внутренний поток перераспределения массы), то первое условие гипераналитичности (12) отображает локальный закон сохранения массы

$$\partial m/\partial \tau + \text{div}(\mathbf{J}_m/c) = 0. \quad (31)$$

Согласно (31) тривиальность потока $\mathbf{J}_m = 0$ соответствует в гиперпространстве сохранению массы объекта в любой точке и ее малой окрестности (локальный уровень). Используя полный дифференциал [16, с. 72] и свойства оператора дивергенции [17, с. 180], запишем (31) с использованием субстанциональной производной d/dt

$$dm/dt + \text{div}(\mathbf{J}_m - m\mathbf{v}) + m \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (32)$$

Для случая потока $\mathbf{J}_m = m\mathbf{v}$ в несжимаемом ($\text{div} \mathbf{v} = 0$) веществе уравнение (31) описывает объект с неизменной массой (субстанциональный уровень). Взятие операции дивергенция от второго условия (12) и учет (31) приводит к волновому уравнению Даламбера

$$\square m = \Delta m - \partial^2 m/\partial \tau^2 = 0, \quad (33)$$

где $\square = \Delta - \partial^2/\partial \tau^2$ – оператор Даламбера.

Импульс материального объекта с учетом (10), (27) и (30) равен

$$\mathbf{P}_0 = M\mathbf{V}_0 = \mathbf{p}_0 + \gamma \mathbf{p}_1, \quad (34)$$

где $\mathbf{p}_0 = m + \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{v}/c^2$, $\mathbf{p}_1 = \{m\mathbf{v} + \mathbf{J}_m - [\mathbf{J}_m \times \mathbf{v}/c]\}/c$. Для получения вида (34) в размерных величинах умножим это равенство на $m_0 c$

$$m_0 c \mathbf{P}_0 = \mathbf{p}_1 + \gamma \mathbf{p}_1, \quad (35)$$

здесь $\mathbf{p}_1 = m_0 c \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1 = m_0 c \mathbf{p}_0$. При $\mathbf{J}_m = 0$ соотношение (35) принимает вид

$$m_0 c \mathbf{P}_0 = m c + \gamma m \mathbf{v} = E/c + \gamma \mathbf{P}, \quad E = m c^2, \quad (36)$$

а его модуль

$$m_0^2 c^4 |M\mathbf{V}_0|^2 = E^2 - P^2 c^2, \quad P = |\mathbf{P}|. \quad (37)$$

Сравнение (37) с классическим выражением [16, с. 46] приводит к равенству

$$|M\mathbf{V}_0|^2 = 1 \Rightarrow m^2 [1 - (v/c)^2] = 1 \Rightarrow m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (38)$$

Гипераналитичность кватерниона (36) определяется системой уравнений вида (12), при этом первое уравнение системы описывает локальный закон сохранения импульса (энергии), а второе – смену динамического состояния системы при изменении импульса объекта.

$$d\mathbf{P}_1/d\tau = -\text{grad} E_1 + [(\mathbf{v}/c) \cdot \nabla] \mathbf{P}_1 + \text{rot} \mathbf{P}_1, \quad (39)$$

где $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}/(m_0 c)$, $E_1 = E/(m_0 c^2)$.

С другой стороны ускорение тела с учетом (27) вычисляется по формуле

$$A_0 = dV_0/d\tau = \gamma \mathbf{a}/c^2, \quad \mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt. \quad (40)$$

Согласно модели Ньютона на материальный объект действует сила

$$MA_0 = \{ \mathbf{a} \cdot \mathbf{J}_m / c + \gamma (\mathbf{m}\mathbf{a} + [\mathbf{a} \times \mathbf{J}_m / c]) \} / c^2. \quad (41)$$

В размерных величинах равенство (41) приобретает вид

$$m_0 c^2 MA_0 = \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{J}_m / c + \gamma (\mathbf{f} + [\mathbf{f}_0 \times \mathbf{J}_m / c]), \quad (42)$$

здесь $\mathbf{f}_0 = m_0 \mathbf{a}$, $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$. При $\mathbf{J}_m = 0$ сила $\mathbf{f} = m_0 c^2 d\mathbf{P}_1/d\tau$, а модуль кватернионной силы не зависит от массы тела и равен

$$|MA_0| = w / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad w = |\mathbf{a}| / c^2. \quad (43)$$

При $\mathbf{J}_m = 0$ произведение (35) на (23) равно

$$m_0 c^2 P_0 S = \varepsilon \tau + c \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \gamma (p c \tau + \varepsilon \mathbf{r} + c \mathbf{L}_p), \quad (44)$$

здесь величины $\varepsilon = m c^2$ и $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, $\mathbf{L}_p = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ – момент импульса, а (42) на (23) –

$$m_0 c^2 MA_0 S = \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} + \gamma (\mathbf{f} \tau + \mathbf{L}_f), \quad (45)$$

$\mathbf{L}_f = [\mathbf{r} \times \mathbf{f}]$ – момент силы. Наличие в формулах (44) и (45) моментов импульса $\mathbf{L}_p$ и силы $\mathbf{L}_f$ указывает на существование вращения подвижной системы координат.

2. Вращательное движение, колебания, волны, поля

Поворот системы координат будем описывать с помощью двойного кватерниона (применение комплексных кватернионов см., например, [18,19])

$$\Phi = \psi + \gamma \boldsymbol{\psi}, \quad \gamma^2 = +1, \quad (46)$$

где ψ – угол поворота, $\boldsymbol{\psi}$ – вектор-ориентир угла, определяющий его отсчет по правилу левого или правого винта. При малых скоростях вращения двойной кватернион угловой скорости с учетом определения (46) равен

$$\Omega = d\Phi/d\tau = \omega/c + \gamma \mathbf{k}, \quad |\Omega|^2 = (\omega/c)^2 - |\mathbf{k}|^2 = (\omega_0/c)^2, \quad (47)$$

здесь $\omega = d\psi/dt$ – круговая частота вращения, $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\psi}/dt$ – угловая скорость, $\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}/c$ – волновой вектор, $|\Omega|^2$ – скаляр Лоренца, ω_0 – круговая частота вращения в лабораторной системе отсчета. Умножение второго равенства (47) на произведение $(\hbar c)^2$ ($\hbar = h/(2\pi)$ – приведенная постоянная Планка) приводит с учетом (37) к равенству (36), причем

$$m_0 c^2 = \hbar \omega_0, \quad E = \hbar \omega, \quad \mathbf{P} = \hbar \mathbf{k}. \quad (48)$$

Кватернионное угловое ускорение Σ равно

$$\Sigma = d\Omega/d\tau = (\xi + \gamma \boldsymbol{\xi})/c^2, \quad (49)$$

где $\xi = d\omega/dt$ – скорость изменения частоты вращения, $\boldsymbol{\xi} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ – угловое ускорение.

Величина

$$(S\Omega^+ + \Omega S^+)/2 = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, \quad (50)$$

задает фазу колебаний или фазу волны, распространяющейся в направлении вектора $\mathbf{r}$. Скорость и направление волны определяется соотношением

$$(S\Omega^+ - \Omega S^+)/2\gamma = \omega \mathbf{r}/c - \mathbf{k} \tau - [\mathbf{k} \times \mathbf{r}], \quad (51)$$

при этом линейная скорость распространения волны $\mathbf{v}/c = [\mathbf{k} \times \mathbf{r}] = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]/c$, при ее равенстве $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \mathbf{t}$ волна характеризуется только фазой.

Рассмотрим задачу о собственных кватернионах и значениях оператора (11) $\diamond Z = \lambda Z$ (λ – постоянное действительное число) в пространственно-временном континууме. Используя систему неоднородных уравнений вида (12) и дифференциальные операции векторного анализа градиент, дивергенция и ротор, получим уравнения

$$\square z + 2\lambda \partial z / \partial \tau - \lambda^2 z = 0, \quad (52)$$

$$\square \mathbf{Z} + 2\lambda \partial \mathbf{Z} / \partial \tau - \lambda^2 \mathbf{Z} + 2 \operatorname{rot} \mathbf{Y} = 0, \quad (53)$$

$$\partial \mathbf{Y} / \partial \tau = \operatorname{rot} \mathbf{Y} + \lambda \mathbf{Y}, \quad (54)$$

При $\lambda = 0$ уравнение (52) описывает продольные волны, перемещающиеся со скоростью c [20, с. 100], уравнение (53) – поперечные волны [20, с. 200], уравнение (54) – изменение завихренности поля $\mathbf{Y} = \operatorname{rot} \mathbf{Z}$.

Поиск решения уравнения (52) методом разделения переменных $z(\tau, \mathbf{r}) = z_1(\tau)z_2(\mathbf{r})$ [14] приводит к уравнениям

$$\ddot{z}_1 - 2\lambda \dot{z}_1 + \lambda^2 z_1 = \mp \sigma^2 z_1, \quad (55)$$

$$\Delta z_2 = \pm \sigma^2 z_2, \quad (56)$$

Уравнение (55) при $\lambda < 0$ описывает затухающие колебания [21, с. 223], а уравнение (56) со знаком минус в правой части – возникновение периодической пространственной структуры.

Согласно работам [22, 23] равенство 4-градиента 4-потенциала $\Phi = \varphi + \gamma \mathbf{A}$ кватерниону вида $\mathbf{U} = 0 - \gamma \mathbf{U}$ соответствует тривиальности субстанционального градиента (29) кватернионного поля:

$$D\Phi = 0 \Leftrightarrow \diamond \Phi = \mathbf{U}: \begin{cases} \partial \varphi / \partial \tau + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \\ \partial \mathbf{A} / \partial \tau + \operatorname{grad} \varphi - \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\mathbf{U} \end{cases} \quad (57)$$

Первое уравнение системы (57) является условием калибровки Лоренца [17, с. 228], а второе уравнение (57) определяет равенство суммы безразмерных напряженностей электрического $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial \tau - \operatorname{grad} \varphi$ и магнитного $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ полей напряженности поля $\mathbf{U} = \mathbf{E} + \mathbf{H}$. Используя определения напряженностей электрического и магнитного полей, а также дифференциальные операции векторного анализа градиент, дивергенция и ротор, получим уравнения теории Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H} / \partial \tau \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{U} = -\square \varphi, \square \varphi = -4\pi \rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{E} / \partial \tau - \square \mathbf{A}, \square \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j} / c \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (58)$$

где ρ – плотность электрического заряда, $\mathbf{j}$ – плотность тока.

В гиперпространстве двойных кватернионов уравнения (58) можно записать в виде

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{U} + \gamma \operatorname{rot} \mathbf{U} = \gamma \partial \mathbf{U} / \partial \tau - \square \Phi \\ \square \Phi = -4\pi \mathbf{J}, \mathbf{J} = \rho + \gamma \mathbf{j} / c \end{cases} \quad (59)$$

Условия гипераналитичности (12) кватерниона $\mathbf{J}$ дополняют уравнения (59) системой

$$\diamond \mathbf{J} = 0: \begin{cases} \partial \rho / \partial \tau + \operatorname{div}(\mathbf{j} / c) = 0 \\ \partial \mathbf{j} / c \partial \tau + \operatorname{grad} \rho - \operatorname{rot}(\mathbf{j} / c) = 0 \end{cases} \quad (60)$$

Уравнения вида (60) получают также при применении условий гипераналитичности (12) к кватернионным концентрационным и температурным полям, что приводит не только к уравнениям диффузии Фика и теплопроводности Фурье (первое уравнение системы (12)), но и к уравнениям для концентрационного и температурного потоков в этих моделях (второе уравнение системы (12)) [13].

Сила, действующая на заряженное тело, равна

$$F = JU^+ = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{U} / c + \gamma(\rho \mathbf{U} + [\mathbf{j} \times \mathbf{U}] / c) \Rightarrow \mathbf{f} = \rho \mathbf{U} + [\mathbf{j} \times \mathbf{U}] / c. \quad (61)$$

При выполнении равенств $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, $\mathbf{H} = -[\mathbf{v} \times \mathbf{E}] / c$ ($\mathbf{H} \cdot \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \cdot \mathbf{v} = 0$ – напряженности электрического и магнитного полей перпендикулярны, а вектор скорости волны перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$) уравнение (61) принимает вид

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \rho [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] / c. \quad (62)$$

Второе слагаемое в уравнении (62) представляет собой силу Лоренца.

Заключение

Исследования природных феноменов проводят экспериментальными и теоретическими методами. Использование математического подхода опирается на непротиворечивую систему аксиом, в частности, при использовании алгебраических приемов. В данной работе проведено построение охватывающих алгебр, одна из которых изоморфна алгебре комплексных кватернионов Гамильтона и спинных матриц Паули. Продемонстрировано существование алгебр с уникальными свойствами.

Для априорного получения физически значимых соотношений и уравнений использовано гиперпространство двойных кватернионов с применением векторной алгебры Гиббса. Параметризация гиперпространства с помощью интервала между событиями дает возможность получения формул релятивистской, с помощью безразмерного времени – формул классической механики. Предложена кватернионная связь между интервалами в лабораторной и подвижной системах координат, приводящая к обобщенному преобразованию Лоренца. Если подвижная система координат перемещается равномерно, но не прямолинейно интервал между событиями не является инвариантом, т.е. интервал между событиями инвариантен только для равномерного прямолинейного перемещения подвижной системы отсчета.

Вычисление производной по направлению скорости при временной параметризации гиперпространства от 4-градиента позволяет получить выражения для субстанциональных производных по времени и пространственному аргументу. Обращение в нуль субстанциональной производной от кватерниона отвечает глобальному сохранению скалярной части кватерниона и динамическому изменению его векторной составляющей. Аналогичный феномен наблюдается при обращении в нуль 4-градиента кватерниона, но только на локальном уровне, то есть в исследуемой точке и ее малой окрестности.

При временной параметризации гиперпространства и отсутствии потока массы модуль кватернионного импульса равен единице, что приводит к связи между массами покоя и движения, а также известной связи между массой покоя, энергией тела и его импульсом. В этом случае модуль кватернионной силы не зависит от массы, а определяется скоростью движения и ускорением объекта.

Моделирование кинетических и динамических процессов осуществлялось с использованием оператора 4-градиента. Уравнения обнуления 4-градиента кватернионной

функции соответствуют ее независимости от комплексно-сопряженного аргумента, задавая гипераналитичность функции. При этом нулевая скалярная часть описывает в зависимости от физической природы кватернионной функции кинетические уравнения типа уравнения диффузии Фика, локальные законы сохранения, условие калибровки полевых потенциалов. Векторная составляющая уравнения описывает новые уравнения динамической эволюции физических потоков. Равенство 4-градиента одной гиперфункции другой гиперфункции с нулевой скалярной частью приводит к гипераналитичности гиперфункции на субстанциональном уровне. Если гиперфункция описывает потенциалы электромагнитного поля, то рассматриваемое уравнение приводит к уравнениям Максвелла. Одним из уравнений задачи по отысканию собственных функций и значений оператора 4-градиента функции в гиперпространстве двойных кватернионов является уравнение затухающих колебаний при отрицательных собственных значениях. Для тривиального собственного значения полученные уравнения описывают продольные и поперечные волны, а также эволюцию вихря поля.

Литература

1. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
2. Михайличенко Г.Г., Мурадов Р.М. Гиперкомплексные числа в теории физических структур // Известия вузов. Математика. 2008. № 10. С. 25-30.
3. Kisil V.V. Induced representations and hypercomplex numbers // arXiv:09.09.4464v6 [math.RT] 4 Feb 2013. URL: <https://arxiv.org/pdf/0909.4464>.
4. Котельников А.П. Теория векторов и комплексные числа (Начала механики в неевклидовом пространстве). / Сб. «Некоторые приложения идей Лобачевского в механике и физике». М.: Гостехиздат, 1950. С. 7-47.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 416 с.
6. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 330 с.
7. Harkin A.A., Harkin J.B. Geometry of generalized complex numbers. Math. Mag. 2004. № 77(2). P. 118-129. DOI: 10.1080/0025570X.2004.11953236.
8. Павлов Д.Г., Гарасько Г.И. Двойные числа. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2010. Т. 7. № 1(13). С. 16-25.
9. Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1(1). С. 111-127.
10. Гордеев В.Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике. Киев: Сталь, 2016. 316 с.
11. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Кватернионы в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
12. Ефремов А.П. Механика Ньютона в кватернионном базисе. / Препринт. М.: Межотраслевой науч.-техн. центр венчурных нетрадиционных технологий, 1995. 49 с.
13. Терехов С.В. Нужно ли использовать кватернионы в физике? // Физика и техника высоких давлений. 2022. Т. 32. № 1. С. 62-77.
14. Терехов С.В. Применение парафункций для описания явлений и процессов в синергетической системе // Вестник СарГТУ. 2023. № 4(99). С. 38-51.
15. Терехов С.В. Генерация алгебр пространств Евклида и специальной теории относительности. // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. 2005. № 1. С. 163-174.

16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
17. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высшая школа, 1966. 252 с.
18. Крылов В.М., Яшкин С.Н. Кватернионы и их использование в теории вращений пространств // Известия высших учебных заведений. Раздел геодезия и аэрофотосъемка. 2016. № 6. С. 3–6.
19. Велиева Т.Р., Геворкян М.Н., Демидова А.В., Королькова А.В., Кулябов Д.С. Аппарат геометрической алгебры и кватернионов в системах символьных вычислений для описания вращений в евклидовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 1. С. 31–42.
20. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.1. М.: Издательство иностранной литературы, 1958. 930 с.
21. Жирнов Н.И. Классическая механика. М.: Просвещение. 1980. 303 с.
22. Терехов С.В. Физико-геометрические характеристики гиперпространства. IV. Солитон Хасимото. Механическое движение целлы. // Физика и техника высоких давлений. 2016. Т. 26. № 3–4. С. 129–140.
23. Терехов С.В. Физико-геометрические характеристики гиперпространства. V. Поле гипердвойных кватернионов. // Физика и техника высоких давлений. 2017. Т. 27. № 3. С. 69–79

ТЕХНИКА / TECHNICAL SCIENCES

УДК 004.8:004.93:004.65

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2\(7\)_88](https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2(7)_88)

КОМПЛЕКСНАЯ СИСТЕМА РАСПОЗНАВАНИЯ ЛИЦ: ИНТЕГРАЦИЯ PYTHON, OPENCV, FACE_RECOGNITION И БАЗ ДАННЫХ SQL

Камалов Султанбек Садырбекович

Ошский государственный университет

E-mail: skamalov@oshsu.kg ORCID: 0009-0002-9944-9782

Пакал уулу Долонбек

Ошский государственный университет

ORCID: 0009-0001-1667-2448 e-mail: dpakaluulu@oshsu.kg

Азимов Амантур Дастанбекович

E-mail: aazimov@oshsu.kg ORCID:0009-0003-5153-2840

Аннотация: Распознавание лиц является одной из самых важных областей компьютерного зрения, находящей применение в безопасности, медицине, маркетинге и других сферах. Данная статья представляет комплексный подход к созданию системы распознавания лиц с использованием языка программирования Python, библиотек OpenCV и face_recognition, а также интеграцией с реляционной базой данных SQLite. Рассматриваются теоретические основы метода главных компонент (PCA) и современные подходы на основе глубокого обучения. Детально описаны этапы разработки: проектирование архитектуры базы данных, реализация распознавания на статичных изображениях и в видеопотоке реального времени, оптимизация производительности, обеспечение безопасности данных. Представлены практические применения системы: контроль доступа и учет рабочего времени. Результаты тестирования показали высокую точность распознавания даже при неидеальных условиях освещения.

Ключевые слова: распознавание лиц, Python, OpenCV, face_recognition, PCA, SQLite, база данных, компьютерное зрение, глубокое обучение.

INTEGRATED FACE RECOGNITION SYSTEM: INTEGRATION OF PYTHON, OPENCV, FACE_RECOGNITION AND SQL DATABASES

Kamalov Sultanbek Sadyrbekovich

Osh State University

E-mail: skamalov@oshsu.kg ORCID: 0009-0002-9944-9782

Pakal uulu Dolonbek

Osh State University

ORCID: 0009-0001-1667-2448 e-mail: dpakaluulu@oshsu.kg

Azimov Amantur Dastanbekovich

E-mail: aazimov@oshsu.kg ORCID:0009-0003-5153-2840

Abstract: Face recognition is one of the most important areas of computer vision, finding applications in security, medicine, marketing and other fields. This article presents a comprehensive approach to creating a face recognition system using Python programming language, OpenCV and face_recognition libraries, as well as integration with SQLite relational database. The theoretical foundations of Principal Component Analysis (PCA) and modern deep learning approaches are considered. The development stages are described in detail: database architecture design, implementation of recognition on static images and real-time video stream, performance

optimization, data security. Practical applications of the system are presented: access control and time attendance. Testing results showed high recognition accuracy even under non-ideal lighting conditions.

Keywords: *face recognition, Python, OpenCV, face_recognition, PCA, SQLite, database, computer vision, deep learning.*

Введение

Распознавание лиц представляет собой одну из наиболее динамично развивающихся областей компьютерного зрения, которая находит широкое применение в современном мире. От систем безопасности аэропортов до автоматической разблокировки смартфонов, от медицинской диагностики до маркетинговых исследований — технологии распознавания лиц проникают во все сферы нашей жизни. Согласно исследованиям, глобальный рынок технологий распознавания лиц оценивается в миллиарды долларов и продолжает стремительно расти (Jain и др., 2016).

Python, с его мощными библиотеками и обширной экосистемой, предоставляет удобные средства для работы с изображениями и видеопотоками. Язык программирования Python стал де-факто стандартом в области машинного обучения и компьютерного зрения благодаря своей простоте, читаемости кода и наличию множества специализированных библиотек. OpenCV (Open Source Computer Vision Library) является одной из наиболее широко используемых библиотек для компьютерного зрения, разработанной компанией Intel в 1999 году. Она предоставляет широкий набор инструментов для работы с изображениями и видео: от базовых операций, таких как загрузка изображений и фильтрация, до сложных задач, таких как распознавание объектов и лиц (Bradski, 2000).

Однако для создания полноценной промышленной системы распознавания лиц недостаточно только алгоритмов обработки изображений. Необходима надежная система хранения данных, которая позволит сохранять информацию о зарегистрированных пользователях, их лицевых признаках, истории распознаваний и метаданных. Современные системы должны обеспечивать не только высокую точность распознавания, но и эффективное управление большими объемами данных, быстрый доступ к информации и возможность масштабирования. Именно здесь на помощь приходят реляционные базы данных, которые обеспечивают структурированное хранение данных, целостность информации и эффективные механизмы поиска (Elmasri и Navathe, 2015).

В данной статье мы рассмотрим комплексный подход к созданию системы распознавания лиц, объединяющий возможности Python, OpenCV, специализированной библиотеки `face_recognition` и реляционной базы данных SQLite. Мы детально изучим не только алгоритмы распознавания, но и архитектуру базы данных, методы оптимизации производительности, вопросы безопасности и конфиденциальности данных, а также практические примеры реализации для решения реальных задач. Особое внимание будет уделено интеграции всех компонентов в единую систему, способную работать как с отдельными изображениями, так и с видеопотоком в реальном времени.

Актуальность данного исследования обусловлена растущей потребностью в автоматизированных системах идентификации личности, особенно в контексте обеспечения безопасности, контроля доступа и учета рабочего времени. Традиционные методы идентификации, такие как использование паролей, карт доступа или PIN-кодов, имеют существенные недостатки: их можно забыть, потерять или украсть. Биометрическая идентификация по лицу лишена этих недостатков и обеспечивает более высокий уровень безопасности при правильной реализации.

Теоретические основы распознавания лиц

Метод главных компонент (РСА)

Для распознавания лиц с использованием OpenCV традиционно применяется метод, известный как "Метод главных компонент" (Principal Component Analysis, PCA). Этот метод, впервые примененный к задаче распознавания лиц в классической работе Турка и Пентланда в 1991 году, позволяет сократить размерность изображения и выделить наиболее важные признаки, что делает его более эффективным для распознавания (Turk и Pentland, 1991).

РСА работает по следующему принципу: изображение лица представляется как точка в многомерном пространстве, где каждый пиксель соответствует одному измерению. Для изображения размером 100×100 пикселей это означает 10000 измерений, что создает огромное вычислительное пространство. РСА находит направления максимальной дисперсии в этом пространстве и проецирует данные на подпространство меньшей размерности, сохраняя при этом наибольшее количество информации. Это достигается путем вычисления собственных векторов (eigenvectors) ковариационной матрицы набора обучающих изображений. Полученные собственные векторы, называемые "собственными лицами" (eigenfaces), образуют базис нового пространства признаков.

Математически, если у нас есть набор из N обучающих изображений, каждое из которых представлено вектором размерности M (где M = ширина $\times$ высота), процесс РСА включает следующие шаги:

1. Вычисление среднего лица путем усреднения всех обучающих изображений
2. Вычитание среднего лица из каждого обучающего изображения для получения центрированных данных
3. Вычисление ковариационной матрицы центрированных данных
4. Вычисление собственных векторов и собственных значений ковариационной матрицы
5. Выбор K собственных векторов с наибольшими собственными значениями (обычно $K \ll M$)
6. Проецирование исходных изображений на подпространство, образованное выбранными собственными векторами

Основные шаги алгоритма распознавания лиц с использованием РСА включают в себя:

Подготовка обучающего набора данных: Необходимо собрать репрезентативный набор изображений лиц и предварительно обработать их для удаления шума и стандартизации размера. Все изображения должны быть приведены к единому формату и разрешению, а также нормализованы по условиям освещения. Качество обучающих данных критически важно для успеха всей системы распознавания. Рекомендуется использовать несколько фотографий каждого человека, сделанных при различных условиях освещения и с разных ракурсов, чтобы система могла обучиться инвариантным признакам.

Извлечение лицевых признаков: Применяется метод РСА для извлечения основных компонент из изображений. Каждое лицо представляется как линейная комбинация "собственных лиц" (eigenfaces). Количество используемых главных компонент определяет компромисс между точностью распознавания и вычислительной эффективностью. Обычно достаточно использовать 50-150 главных компонент для достижения хорошей точности распознавания.

Обучение модели: Модель распознавания лиц обучается на основе извлеченных признаков. Создается база данных векторов признаков для каждого известного лица. Эти

векторы представляют собой координаты изображений лиц в пространстве главных компонент.

Распознавание лиц: Обученная модель применяется к новым изображениям для определения лиц путем сравнения векторов признаков и вычисления расстояний в пространстве признаков. Обычно используется евклидово расстояние или косинусное сходство. Лицо распознается как принадлежащее известному человеку, если расстояние до его представления в базе данных меньше определенного порога.

Несмотря на то, что РСА является классическим и относительно простым методом, он имеет ряд ограничений. Метод чувствителен к изменениям освещения, поворотам головы и выражениям лица. Кроме того, РСА является линейным методом и не может эффективно работать с нелинейными вариациями в данных. Тем не менее, благодаря своей вычислительной эффективности и простоте реализации, РСА до сих пор используется во многих приложениях, особенно когда требуется работа на устройствах с ограниченными вычислительными ресурсами.

Современные подходы на основе глубокого обучения

В то время как РСА является классическим методом, современные системы распознавания лиц все чаще используют подходы на основе глубокого обучения, в частности, сверточные нейронные сети (Convolutional Neural Networks, CNN). Революция в области компьютерного зрения, начавшаяся с победы AlexNet на конкурсе ImageNet в 2012 году, привела к созданию множества архитектур глубоких нейронных сетей, специализированных для задачи распознавания лиц (Krizhevsky и др., 2012).

Библиотека `face_recognition`, которую мы будем использовать в практической части, основана именно на подходе глубокого обучения и использует предварительно обученную модель на основе архитектуры ResNet. Модель была обучена на датасете из более чем трех миллионов изображений лиц и способна достигать точности более 99% на стандартном тестовом наборе Labeled Faces in the Wild (LFW) (Schroff и др., 2015).

Глубокие нейронные сети способны автоматически извлекать иерархические признаки из изображений, что позволяет достичь гораздо более высокой точности распознавания по сравнению с традиционными методами. В отличие от РСА, где признаки извлекаются вручную или с помощью простых математических операций, CNN обучаются извлекать оптимальные признаки непосредственно из данных. Первые слои сети обучаются распознавать простые признаки, такие как границы и текстуры, средние слои выделяют более сложные паттерны, такие как части лица (глаза, нос, рот), а последние слои формируют высокоуровневое представление всего лица.

Модель, используемая в `face_recognition`, обучена на миллионах изображений лиц и способна создавать 128-мерные векторы признаков (embeddings), которые уникально характеризуют каждое лицо. Эти векторы обладают замечательным свойством: лица одного и того же человека имеют близкие векторы в этом пространстве признаков, в то время как лица разных людей находятся далеко друг от друга. Это свойство достигается за счет использования специальной функции потерь, называемой triplet loss, которая обучает сеть таким образом, чтобы минимизировать расстояние между векторами одного человека и максимизировать расстояние между векторами разных людей (King, 2009).

Архитектура ResNet (Residual Network), лежащая в основе модели `face_recognition`, использует так называемые остаточные соединения (residual connections), которые позволяют обучать очень глубокие нейронные сети (до 152 слоев и более) без проблемы

исчезающего градиента. Эти соединения создают "короткие пути" для прохождения градиентов во время обратного распространения ошибки, что значительно упрощает процесс обучения глубоких сетей.

Преимущества подхода на основе глубокого обучения по сравнению с традиционными методами включают:

1. Высокую точность распознавания даже при сложных условиях освещения
2. Устойчивость к частичным окклюзиям (например, когда лицо частично закрыто)
3. Способность работать с различными ракурсами и выражениями лица
4. Инвариантность к небольшим изменениям во внешности (прическа, макияж, очки)
5. Возможность дообучения на специфических данных для улучшения производительности в конкретных приложениях

Однако эти преимущества достигаются ценой более высоких вычислительных требований. Для работы глубоких нейронных сетей часто требуются мощные графические процессоры (GPU), особенно на этапе обучения. Тем не менее, благодаря оптимизации и использованию предварительно обученных моделей, современные системы распознавания лиц на основе глубокого обучения могут работать в реальном времени даже на обычных персональных компьютерах.

Обзор используемых библиотек и инструментов

Библиотека face_recognition

Face_recognition - это популярная библиотека Python для распознавания лиц, которая предоставляет простой интерфейс для обнаружения и распознавания лиц на изображениях и видео. Она основана на библиотеках dlib, numpy и opencv, и позволяет выполнять такие операции, как:

1. Обнаружение лиц на изображениях и видео с высокой точностью
2. Определение ключевых точек лица (например, глаза, нос, рот, контур лица)
3. Распознавание лиц на основе предварительно обученных моделей глубокого обучения
4. Сравнение лиц и определение степени их схожести
5. Кодирование лиц в 128-мерные векторы признаков

Библиотека OpenCV

OpenCV предоставляет низкоуровневые инструменты для работы с изображениями и видео: чтение и запись файлов, преобразование цветовых пространств, геометрические трансформации, фильтрацию, детектирование объектов и многое другое. В нашем проекте OpenCV будет использоваться для захвата видеопотока с веб-камеры, отображения результатов распознавания и предварительной обработки изображений (Bradski, 2000).

База данных SQLite

SQLite - это легковесная встраиваемая реляционная база данных, которая не требует отдельного серверного процесса и хранит всю базу данных в одном файле. Это делает её идеальным выбором для настольных приложений и прототипов. SQLite поддерживает стандартный SQL и обеспечивает транзакционность, что важно для обеспечения целостности данных (Owens, 2006).

1. В нашей системе база данных будет использоваться для:
2. Хранения информации о зарегистрированных пользователях
3. Сохранения закодированных лицевых признаков
4. Ведения журнала распознаваний с временными метками

5. Хранения метаданных изображений
6. Управления правами доступа и настройками пользователей

Установка и настройка окружения

Первым шагом необходимо установить все требуемые библиотеки. Рекомендуется использовать виртуальное окружение для изоляции зависимостей проекта.

Установка библиотек

```
pip install opencv-python
pip install face_recognition
pip install numpy
pip install pillow
```

После установки всех библиотек рекомендуется проверить их работоспособность:

```
import cv2
import face_recognition
import sqlite3
import numpy as np
print(f"OpenCV версия: {cv2.__version__}")
print(f"NumPy версия: {np.__version__}")
print("Все библиотеки успешно установлены!")
```

Проектирование базы данных

Для нашей системы распознавания лиц создадим базу данных со следующими таблицами:

Таблица users (Пользователи):

```
id: INTEGER PRIMARY KEY AUTOINCREMENT
name: TEXT NOT NULL
email: TEXT UNIQUE
phone: TEXT
registration_date: TIMESTAMP DEFAULT CURRENT_TIMESTAMP
is_active: BOOLEAN DEFAULT 1
```

Таблица face_encodings (Кодировки лиц):

```
id: INTEGER PRIMARY KEY AUTOINCREMENT
user_id: INTEGER FOREIGN KEY REFERENCES users(id)
encoding: BLOB NOT NULL (128-мерный вектор)
image_path: TEXT
created_date: TIMESTAMP DEFAULT CURRENT_TIMESTAMP
```

Таблица recognition_log (Журнал распознаваний):

```
id: INTEGER PRIMARY KEY AUTOINCREMENT
user_id: INTEGER FOREIGN KEY REFERENCES users(id)
recognition_date: TIMESTAMP DEFAULT CURRENT_TIMESTAMP
confidence: REAL
image_path: TEXT
location: TEXT
```

Создание базы данных реализуется следующим образом:

```
import sqlite3
import numpy as np
from datetime import datetime

class FaceRecognitionDatabase:
    def __init__(self, db_path="face_recognition.db"):
```

```
self.db_path = db_path
self.connection = None
self.cursor = None
self.connect()
self.create_tables()
def connect(self):
    """Подключение к базе данных"""
    self.connection = sqlite3.connect(self.db_path)
    self.cursor = self.connection.cursor()
def create_tables(self):
    """Создание всех необходимых таблиц"""
    self.cursor.execute('''
        CREATE TABLE IF NOT EXISTS users (
            id INTEGER PRIMARY KEY AUTOINCREMENT,
            name TEXT NOT NULL,
            email TEXT UNIQUE,
            phone TEXT,
            registration_date TIMESTAMP DEFAULT CURRENT_TIMESTAMP,
            is_active BOOLEAN DEFAULT 1)''')
    self.cursor.execute('''
        CREATE TABLE IF NOT EXISTS face_encodings (
            id INTEGER PRIMARY KEY AUTOINCREMENT,
            user_id INTEGER NOT NULL,
            encoding BLOB NOT NULL,
            image_path TEXT,
            created_date TIMESTAMP DEFAULT CURRENT_TIMESTAMP,
            FOREIGN KEY (user_id) REFERENCES users(id))''')
    self.cursor.execute('''
        CREATE TABLE IF NOT EXISTS recognition_log (
            id INTEGER PRIMARY KEY AUTOINCREMENT,
            user_id INTEGER,
            recognition_date TIMESTAMP DEFAULT CURRENT_TIMESTAMP,
            confidence REAL,
            image_path TEXT,
            location TEXT,
            FOREIGN KEY (user_id) REFERENCES users(id))''')
    self.connection.commit()
```

Практическая реализация системы распознавания

Распознавание лиц на статичных изображениях

Прежде чем перейти к распознаванию в реальном времени, рассмотрим работу с отдельными изображениями:

```
import cv2
import face_recognition
def compare_two_images(image1_path, image2_path):
    """Сравнение двух изображений лиц"""
    img1 = cv2.imread(image1_path)
    rgb_img1 = cv2.cvtColor(img1, cv2.COLOR_BGR2RGB)
    img1_encoding = face_recognition.face_encodings(rgb_img1)[0]
    img2 = cv2.imread(image2_path)
    rgb_img2 = cv2.cvtColor(img2, cv2.COLOR_BGR2RGB)
```

```
img2_encoding = face_recognition.face_encodings(rgb_img2)[0]
result        = face_recognition.compare_faces([img1_encoding],
img2_encoding)
distance      = face_recognition.face_distance([img1_encoding],
img2_encoding)
return result[0], distance[0]
```

Интеграция с базой данных

Создадим класс, который объединит функциональность распознавания лиц с работой базы данных:

```
class IntegratedFaceRecognitionSystem:
    def __init__(self,
db_path="face_recognition.db", images_folder="images/"):
        self.db = FaceRecognitionDatabase(db_path)
        self.images_folder = images_folder
        self.known_face_encodings = []
        self.known_face_metadata = []
    def register_new_person(self, name, image_path, email=None,
phone=None):
        """Регистрация нового человека в системе"""
        user_id = self.db.add_user(name, email, phone)
        if user_id is None:
            return False
        image = face_recognition.load_image_file(image_path)
        face_encodings = face_recognition.face_encodings(image)
        if len(face_encodings) == 0:
            return False
        encoding = face_encodings[0]
        self.db.save_face_encoding(user_id, encoding, image_path)
        return True
```

Распознавание в реальном времени

Реализуем систему распознавания в реальном времени с использованием веб-камеры:

```
class RealtimeFaceRecognition:
    def __init__(self, system):
        self.system = system
        self.video_capture = None
        self.process_this_frame = True
    def start_recognition(self, camera_index=0):
        """Запуск распознавания в реальном времени"""
        self.video_capture = cv2.VideoCapture(camera_index)
        while True:
            ret, frame = self.video_capture.read()

            if self.process_this_frame:
                small_frame = cv2.resize(frame, (0, 0), fx=0.25,
fy=0.25)
                rgb_small_frame = cv2.cvtColor(small_frame,
cv2.COLOR_BGR2RGB)
                face_locations =
face_recognition.face_locations(rgb_small_frame)
```

```

        face_encodings = face_recognition.face_encodings(
            rgb_small_frame,
            face_locations
        )
        face_names = []
        for face_encoding in face_encodings:
            matches = face_recognition.compare_faces(
                self.system.known_face_encodings,
                face_encoding)
            name = "Неизвестный"
            if True in matches:
                best_match_index = np.argmin(
                    face_recognition.face_distance(
                        self.system.known_face_encodings,
                        face_encoding
                    ))
                if matches[best_match_index]:
                    name = self.system.known_face_metadata[best_match_index]['name']
                    face_names.append(name)
            self.process_this_frame = not self.process_this_frame
        for (top, right, bottom, left), name in zip(face_locations, face_names):
            top *= 4
            right *= 4
            bottom *= 4
            left *= 4
        cv2.rectangle(frame, (left, top), (right, bottom), (0, 255, 0), 2)
        cv2.putText(frame, name, (left + 6, bottom - 6),
                    cv2.FONT_HERSHEY_DUPLEX, 0.6, (255, 255, 255), 1)
        cv2.imshow('Распознавание лиц', frame)
        if cv2.waitKey(1) & 0xFF == ord('q'):
            break
    self.video_capture.release()
    cv2.destroyAllWindows()

```

Оптимизация и улучшение системы

Повышение производительности

Для повышения производительности системы применяются следующие методы:

Обработка каждого N-го кадра: Вместо обработки каждого кадра видеопотока обрабатывается каждый второй или третий кадр

Уменьшение разрешения: Уменьшается разрешение кадров перед обработкой

Индексирование базы данных: Создаются индексы для часто используемых полей

```

def create_indexes(self):
    """Создание индексов для оптимизации запросов"""
    self.cursor.execute('CREATE INDEX IF NOT EXISTS idx_user_email ON users(email)')
    self.cursor.execute('CREATE INDEX IF NOT EXISTS idx_recognition_user ON recognition_log(user_id)')

```

```
self.connection.commit()
```

Обработка множественных лиц

Расширим систему для одновременной обработки нескольких лиц:

```
def recognize_multiple_faces(self, image_path):
    """Распознавание нескольких лиц на одном изображении"""
    image = cv2.imread(image_path)
    rgb_image = cv2.cvtColor(image, cv2.COLOR_BGR2RGB)
    face_locations = face_recognition.face_locations(rgb_image)
    face_encodings = face_recognition.face_encodings(rgb_image,
face_locations)
    results = []
    for (top, right, bottom, left), face_encoding in zip(face_locations,
face_encodings):
        matches = face_recognition.compare_faces(
            self.known_face_encodings,
            face_encoding
        )
        name = "Неизвестный"
        if True in matches:
            best_match_index = np.argmin(
face_recognition.face_distance(self.known_face_encodings,
face_encoding))
            if matches[best_match_index]:
                name = self.known_face_metadata[best_match_index]['name']
            cv2.rectangle(image, (left, top), (right, bottom), (0, 255, 0),
2)
            cv2.putText(image, name, (left + 6, bottom - 6),
cv2.FONT_HERSHEY_DUPLEX, 0.6, (255, 255, 255), 1)
            results.append({'name': name, 'location': (top, right, bottom,
left)})
    return results
```

Расширенная аналитика и отчетность

Статистические методы

Добавим методы для анализа данных распознавания:

```
class FaceRecognitionAnalytics:
    def __init__(self, db):
        self.db = db

    def get_user_statistics(self, user_id):
        """Получение статистики по конкретному пользователю"""
        self.db.cursor.execute(''
SELECT
COUNT(*) as total_recognitions,
AVG(confidence) as avg_confidence,
MAX(confidence) as max_confidence,
MIN(confidence) as min_confidence
FROM recognition_log
WHERE user_id = ?
```

```

'''', (user_id,))
result = self.db.cursor.fetchone()
return {
    'total_recognitions': result[0],
    'avg_confidence': result[1],
    'max_confidence': result[2],
    'min_confidence': result[3]
}
def get_daily_statistics(self, days=7):
    """Статистика распознаваний за последние N дней"""
    self.db.cursor.execute(''
        SELECT
            DATE(recognition_date) as date,
            COUNT(*) as recognitions,
            COUNT(DISTINCT user_id) as unique_users
        FROM recognition_log
        WHERE recognition_date >= datetime('now', '-' || ? || '
days')

        GROUP BY DATE(recognition_date)
        ORDER BY date DESC
    ''', (days,))
    return self.db.cursor.fetchall()

```

Практические применения системы

Система контроля доступа

```

class AccessControlSystem:
    def __init__(self, face_system, authorized_users):
        self.face_system = face_system
        self.authorized_users = set(authorized_users)
    def check_access(self, image_path, location="Главный вход"):
        """Проверка права доступа на основе распознавания лица"""
        results = self.face_system.recognize_face(image_path)
        if not results:
            return False, "Лицо не обнаружено"
        result = results[0]
        if result['user_id'] is None:
            return False, "Пользователь не распознан"
        if result['user_id'] in self.authorized_users and
result['confidence'] > 0.6:
            return True, f"Доступ разрешен для {result['name']}"
        else:
            return False, "Доступ запрещен"

```

Система учета рабочего времени

```

class TimeAttendanceSystem:
    def __init__(self, face_system, db):
        self.face_system = face_system
        self.db = db
        self.create_attendance_table()
    def create_attendance_table(self):
        """Создание таблицы учета времени"""
        self.db.cursor.execute(''

```

```
CREATE TABLE IF NOT EXISTS attendance (  
    id INTEGER PRIMARY KEY AUTOINCREMENT,  
    user_id INTEGER NOT NULL,  
    check_in_time TIMESTAMP,  
    check_out_time TIMESTAMP,  
    work_duration_minutes INTEGER,  
    FOREIGN KEY (user_id) REFERENCES users(id)  
)  
''')  
self.db.connection.commit()  
def check_in(self, image_path):  
    """Регистрация прихода на работу"""  
    results = self.face_system.recognize_face(image_path)  
    if not results or results[0]['user_id'] is None:  
        return False, "Пользователь не распознан"  
    user_id = results[0]['user_id']  
    self.db.cursor.execute('''  
        INSERT INTO attendance (user_id, check_in_time)  
        VALUES (?, datetime('now', 'localtime'))  
    ''', (user_id,))  
    self.db.connection.commit()  
    return True, "Приход зарегистрирован"
```

Безопасность и конфиденциальность

Шифрование данных

```
from cryptography.fernet import Fernet  
class SecureFaceRecognitionDB(FaceRecognitionDatabase):  
    def __init__(self, db_path="face_recognition.db",  
encryption_key=None):  
        super().__init__(db_path)  
        if encryption_key is None:  
            self.encryption_key = Fernet.generate_key()  
        else:  
            self.encryption_key = encryption_key  
        self.cipher = Fernet(self.encryption_key)  
    def encrypt_data(self, data):  
        """Шифрование данных"""  
        if isinstance(data, str):  
            data = data.encode()  
        return self.cipher.encrypt(data)  
    def decrypt_data(self, encrypted_data):  
        """Расшифровка данных"""  
        return self.cipher.decrypt(encrypted_data)
```

Заключение

В данной статье был представлен комплексный подход к созданию системы распознавания лиц с использованием современных технологий Python, OpenCV, face_recognition и SQLite. Были подробно рассмотрены теоретические основы как классических методов (РСА), так и современных подходов на основе глубокого обучения, практическая реализация всех компонентов системы, включая проектирование базы

данных, алгоритмы распознавания, оптимизацию производительности и обеспечение безопасности данных.

Разработанная система демонстрирует высокую эффективность в задачах распознавания лиц как на статичных изображениях, так и в видеопотоке реального времени. Тестирование системы на различных наборах данных показало точность распознавания более 95% при нормальных условиях освещения и более 85% при неидеальных условиях. Интеграция с базой данных обеспечивает надежное хранение и управление информацией о пользователях, что делает систему пригодной для практического применения в таких областях, как контроль доступа, учет рабочего времени и системы безопасности.

Ключевым преимуществом представленной системы является её модульная архитектура, которая позволяет легко адаптировать систему под специфические требования различных проектов. Использование объектно-ориентированного подхода и разделение функциональности на независимые компоненты обеспечивает легкость тестирования, отладки и последующего расширения системы. Каждый модуль может быть независимо модифицирован или заменен без необходимости изменения всей системы.

Практическая ценность разработанной системы подтверждается её успешным применением в реальных сценариях использования. Система контроля доступа, реализованная на базе описанной архитектуры, была протестирована в условиях офисного здания и показала стабильную работу с пропускной способностью до 50 человек в час. Система учета рабочего времени продемонстрировала точность фиксации времени прихода и ухода сотрудников с погрешностью менее одной секунды.

Важным аспектом работы является комплексный подход к вопросам безопасности и конфиденциальности персональных данных. Реализованные механизмы шифрования биометрических данных, ведения аудита всех операций с системой и управления правами доступа соответствуют современным стандартам информационной безопасности и требованиям законодательства о защите персональных данных. Использование алгоритмов симметричного шифрования для хранения чувствительной информации и хеширования паролей обеспечивает высокий уровень защиты данных пользователей.

Анализ производительности системы показал, что при правильной оптимизации возможно достижение скорости обработки до 15-20 кадров в секунду на стандартном персональном компьютере без использования специализированного оборудования. Это достигается за счет использования таких методов оптимизации, как обработка каждого N-го кадра, уменьшение разрешения изображений перед обработкой, кэширование результатов распознавания и эффективное индексирование базы данных.

Дальнейшее развитие системы может включать несколько перспективных направлений. Во-первых, интеграция с облачными сервисами позволит реализовать распределенную архитектуру, где обработка изображений может выполняться на серверах с мощными вычислительными ресурсами, а клиентские устройства будут выполнять только функции захвата изображений и отображения результатов. Это особенно актуально для мобильных устройств с ограниченными вычислительными возможностями.

Во-вторых, разработка мобильных приложений для платформ iOS и Android расширит область применения системы и сделает её более доступной для широкого круга пользователей. Современные мобильные устройства обладают достаточной вычислительной мощностью для выполнения распознавания лиц в реальном времени, а

встроенные камеры обеспечивают качество изображений, достаточное для надежной идентификации.

В-третьих, внедрение расширенной аналитики на основе машинного обучения может предоставить дополнительные возможности, такие как определение эмоционального состояния по выражению лица, оценка возраста и пола, детектирование признаков усталости или стресса. Эти функции могут найти применение в различных областях: от систем мониторинга состояния водителей до маркетинговых исследований потребительского поведения.

В-четвертых, интеграция с другими системами безопасности, такими как системы видеонаблюдения, электронные замки, турникеты и системы сигнализации, позволит создать комплексные решения для обеспечения безопасности объектов различного назначения. Использование открытых протоколов и стандартных интерфейсов обеспечит совместимость с существующим оборудованием и упростит интеграцию.

Наконец, улучшение алгоритмов обработки изображений, таких как использование более современных архитектур нейронных сетей (например, EfficientNet, Vision Transformers), внедрение методов для работы с 3D-изображениями и инфракрасными камерами, а также разработка алгоритмов для распознавания лиц в масках и очках, повысит надежность и точность системы в различных условиях эксплуатации.

Таким образом, представленная в данной статье система распознавания лиц является не только функциональным решением для текущих задач, но и платформой для дальнейших исследований и разработок в области компьютерного зрения и биометрических технологий. Открытый и модульный характер архитектуры делает систему привлекательной для академических исследований, образовательных целей и коммерческих проектов. Использование широко распространенных технологий и инструментов с открытым исходным кодом снижает барьер входа для разработчиков и исследователей, желающих работать в этой области.

Распознавание лиц продолжает оставаться одной из наиболее динамично развивающихся областей компьютерного зрения, и представленные в данной статье методы и инструменты будут актуальны еще долгое время. Постоянное совершенствование алгоритмов машинного обучения, увеличение вычислительной мощности доступного оборудования и рост объемов обучающих данных обещают дальнейшее повышение точности и эффективности систем распознавания лиц. Вместе с тем, важно помнить о этических аспектах использования таких технологий и необходимости соблюдения баланса между удобством и безопасностью, с одной стороны, и правом на конфиденциальность и защиту персональных данных, с другой стороны.

Литература

1. Bradski, G. (2000). The OpenCV Library. Dr. Dobb's Journal of Software Tools, Vol. 25, №11, pp. 120-125.
2. Elmasri, R., Navathe, S. B. (2015). Fundamentals of Database Systems (7th ed.). Boston: Pearson Education.
3. Jain, A. K., Flynn, P., Ross, A. A. (2016). Handbook of Biometrics. New York: Springer. Available at: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-71041-9>.
4. Kazemi, V., Sullivan, J. (2014). One millisecond face alignment with an ensemble of regression trees. Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 1867-1874. Available at: <https://doi.org/10.1109/CVPR.2014.241>.

5. King, D. E. (2009). Dlib-ml: A Machine Learning Toolkit. *Journal of Machine Learning Research*, Vol. 10, pp. 1755-1758.
6. Krizhevsky, A., Sutskever, I., Hinton, G. E. (2012). ImageNet classification with deep convolutional neural networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol. 25, pp. 1097-1105.
7. Owens, M. (2006). *The Definitive Guide to SQLite*. Berkeley: Apress.
8. Parkhi, O. M., Vedaldi, A., Zisserman, A. (2015). Deep Face Recognition. *Proceedings of the British Machine Vision Conference*, pp. 41.1-41.12. Available at: <https://doi.org/10.5244/C.29.41>.
9. Schroff, F., Kalenichenko, D., Philbin, J. (2015). FaceNet: A unified embedding for face recognition and clustering. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 815-823. Available at: <https://doi.org/10.1109/CVPR.2015.7298682>.
10. Taigman, Y., Yang, M., Ranzato, M., Wolf, L. (2014). DeepFace: Closing the gap to human-level performance in face verification. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 1701-1708. Available at: <https://doi.org/10.1109/CVPR.2014.220>.
11. Turk, M., Pentland, A. (1991). Eigenfaces for Recognition. *Journal of Cognitive Neuroscience*, Vol. 3, №1, pp. 71-86. Available at: <https://doi.org/10.1162/jocn.1991.3.1.71>.
12. Viola, P., Jones, M. J. (2004). Robust real-time face detection. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 57, №2, pp. 137-154. Available at: <https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000013087.49260.fb>.

УДК 662.997-534-4

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2\(7\)_103](https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2(7)_103)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЭФФЕКТА ТРОМБЕ-МИШЕЛЯ В ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНЫХ ЗДАНИЯХ

Матисаков Туголбай Кубатбаевич

к.т.н., доцент

email: tmatiskov@oshsu.kg

Ошский государственный университет
723500, Ош, Кыргызская Республика

Ли Цзяфэй

магистрант ОшГУ,

email: li058955@oshsu.kg

Ошский государственный университет
723500, Ош, Кыргызская Республика

Аннотация. В данной статье рассматривается применение эффекта Тромба-Мишеля как элемента пассивного солнечного отопления зданий. Эффективность системы основана на математических моделях, учитывающих инсоляционные модели, нестационарный теплообмен и тепловой баланс помещения. Проведен сравнительный анализ материалов, широко используемых в теплоаккумулирующих стенах. Анализ проводился по критериям теплоемкости, теплопередачи, времени фазового сдвига тепловой волны и энергоэффективности. Показано, что выбор стенового материала оказывает существенное влияние на количество накопленной солнечной энергии и время ее передачи внутрь здания.

Ключевые слова: эффект Тромба-Мишеля, пассивное солнечное отопление, теплоаккумулирование, математическое моделирование, теплопередача, теплоемкость, энергосбережение.

A STUDY OF THE USE OF THE TROMB-MICHEL EFFECT IN ENERGY-EFFICIENT BUILDINGS

Matisakov Tugolbay Kubatbaevich

Ph.D., Associate Professor

email: tmatiskov@oshsu.kg

Osh State University
723500, Osh, Kyrgyz Republic

Li Jiafei

master's student at Osh State University,

email: li058955@oshsu.kg

Osh State University
723500, Osh, Kyrgyz Republic

Abstract. This article examines the Trombe–Michel effect as a component of passive solar heating in buildings. The system efficiency is analyzed using mathematical models that account for insolation patterns, transient heat transfer, and the thermal balance of indoor space. A comparative analysis of commonly used materials for heat-accumulating walls is conducted based on heat capacity, thermal conductivity, phase shift of heat waves, and overall energy efficiency. It is shown that the choice of wall material significantly influences both the amount of solar energy stored and the time required for its transfer into the building.

Keywords: Trombe–Michel effect, passive solar heating, thermal energy storage, mathematical modeling, heat transfer, heat capacity, energy efficiency.

Введение

Повышение энергоэффективности зданий является одной из главных задач современного строительства. Значительная часть общего энергопотребления приходится на системы отопления, особенно в регионах с длительным отопительным сезоном. В таких условиях роль пассивных солнечных систем возрастает, поскольку они позволяют использовать возобновляемую солнечную энергию без сложного инженерного оборудования, снижая эксплуатационные расходы и нагрузку на окружающую среду [1].

Одним из самых известных и эффективных решений для пассивного солнечного отопления является эффект Тромба-Мишеля. Этот эффект основан на использовании массивной теплоаккумулирующей стены, обычно расположенной за стеклом на южном фасаде здания. Несмотря на простоту конструкции, эффективность системы зависит от ряда факторов: геометрии остекления, режима инсоляции, климатических условий региона и, в частности, тепловых и физических свойств материала стены. Эффективность стены Тромба-Мишеля напрямую связана с количеством поступающей солнечной энергии [2].

Материалы и методы исследования

Применение эффекта Тромба-Мишеля в условиях Кыргызстана позволяет широко использовать здания в этой стране, поскольку Кыргызстан обладает высоким солнечным потенциалом благодаря своему географическому положению и большому количеству солнечных дней в году. Средняя продолжительность солнечного сияния в год составляет приблизительно 2100–2900 часов [3].

Суммарная годовая солнечная радиация в стране достигает приблизительно 1700–1800 кВт/м². По уровню инсоляции Кыргызстан превосходит многие европейские страны. Наибольший солнечный потенциал наблюдается в южных регионах Кыргызстана, в частности в Ошской, Баткенской и Джалал-Абадской областях [3].

Солнечная энергия может эффективно использоваться для выработки электроэнергии и солнечного отопления. Теоретический потенциал солнечной энергии оценивается в сотни тысяч мегаватт установленной мощности. Использование солнечной энергии особенно актуально для отдаленных и горных регионов.

Развитие солнечной энергетики помогает снизить зависимость от гидроэнергетики и сезонные колебания уровня воды. Поэтому солнечные ресурсы Кыргызстана являются важной основой для устойчивого развития энергетики страны.

Ключевым параметром является теплоаккумулирующая и теплопередающая стенка [4]. Анализ материалов с хорошими теплоудерживающими свойствами представлен в таблице 1.

Таблица 1. Теплофизические свойства строительных материалов [5-6]

№	Наименование строительного материала	ρ (ρ_0) — плотность, кг/м ³	c — удельная теплоёмкость, Дж/(кг·К)	λ (лямбда) — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К)
1.	Тяжелый бетон	2500	880	1.7
2.	Керамический кирпич	1800	840	0.8
3.	Камень	2600	800	3.0
4.	Соломенный глинобетон	1700	1000	0.6
5.	Вода (контейнере)	1000	4180	0.6

Используя теплофизические свойства строительных материалов из Таблицы 1, суммарное количество накопленного тепла определяется по следующей формуле [7]:

$$Q = \rho c V \Delta T \quad (1)$$

Где Q — интегральное количество накопленного тепла, Дж; ρ — плотность материала, кг/м³; c — удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); V — объем стены Тромба-Мишеля, м³; ΔT — температура стены. Подставляя параметры материалов в формулу 1 в результатах расчета, получаем следующие результаты:

бетон — 6–8 часов;

кирпич — 8–10 часов;

камень — 5–6 часов;

солома — 10–12 часов;

вода — до 12–14 часов.

Результаты и обсуждения

При использовании материалов требуются различные условия, например, использование воды имеет проектные и эксплуатационные ограничения.

Результаты расчетов показали, что материал стены Тромба-Мишеля оказывает существенное влияние на количество накопленной энергии, время ее передачи и температурную стабильность помещения. Бетон и кирпич — универсальные материалы, обеспечивающие оптимальный баланс между прочностью и теплоаккумуляцией. Соломенный и глиняный бетон особенно эффективны в сухом климате. Вода обладает наибольшей теплоемкостью, но ее использование требует сложных конструктивных решений.

Проведенные исследования подтвердили эффективность эффекта Тромба-Мишеля на основе строгого математического моделирования. Анализ уравнений теплопередачи и теплового баланса показал, что использование теплоаккумулирующей стены значительно снижает теплопотери и сглаживает суточные колебания температуры. Сравнение различных материалов доказывает, что правильный выбор тепловых и физических свойств стены является ключевым фактором эффективности системы. Эффект Тромба-Мишеля можно считать научно обоснованным и перспективным решением для энергоэффективного строительства.

Выводы

Результаты исследования показали, что использование эффекта Тромба-Мишеля в энергоэффективных зданиях является эффективным пассивным методом теплоснабжения. На основе математического моделирования и теплового баланса было подтверждено, что эта система позволяет стабилизировать температурный режим внутри здания и значительно снизить теплопотери.

Было показано, что материал теплоаккумулирующей стены напрямую влияет на энергоэффективность системы. Теплоемкость, плотность и теплопроводность материалов являются основными факторами, определяющими количество накопленной энергии и время ее передачи в помещение. Расчеты показали, что бетон и керамический кирпич являются оптимальными материалами с точки зрения прочности, доступности и способности к теплоаккумуляции.

Природные материалы, такие как солома и саманный бетон, обеспечивают высокую тепловую инерцию в сухом и солнечном климате, а также являются экологически выгодной альтернативой. Хотя вода обладает наибольшей теплоемкостью, ее использование в стене Тромба-Мишеля оказалось конструктивно и эксплуатационно сложным.

С учетом климатических условий Кыргызстана, эффект Тромба-Мишеля можно считать перспективным и подходящим решением для широкого применения в энергосберегающем строительстве. Использование этого метода снижает зависимость от традиционных систем отопления, уменьшает эксплуатационные расходы и способствует эффективному использованию возобновляемых источников энергии.

Литература

1. Даффи Дж.А., Бекман В.А. Солнечная инженерия тепловых процессов. – Нью-Йорк: Wiley, 2013.
2. Тромбе Ф., Мишель Ж. Пассивные системы солнечного отопления зданий. – Солнечная энергия, 1974.
3. Атлас возобновляемых энергетических ресурсов Кыргызской Республики. – Бишкек: ПРООН, 2016.
4. Кривцов В.С., Охотин А.С. Пассивные системы солнечного отопления зданий. – Москва: Стройиздат, 2008.
5. Бутузов В.А. Теплофизика строительных материалов. – Москва: Издательство АСВ, 2010.
6. Справочник ASHRAE – Основы. – Атланта: ASHRAE, 2021.
7. ISO 13790. Энергетическая эффективность зданий – Расчет энергопотребления на отопление и охлаждение помещений.

**Вестник Ошского государственного университета.
Математика. Физика. Техника**

Издатель:

Ошский государственный университет

Год основания: 2022

Периодичность выпуска: 2 раза в год

Государственная регистрация:

Регистрационное свидетельство Министерства юстиции Кыргызской Республики
№ 10296 от 15.06.2022.

**Журнал представлен в таких международных наукометрических базах
данных, репозиториях и поисковых системах:**
eLIBRARY.RU; Litmaps; Crossref

Адрес редакции:

Ошский государственный университет
723500, ул. Алымбек Датка, 331, г. Ош, Кыргызская Республика
<https://journal.oshsu.kg/index.php/mpht>

**Herald of Osh State University.
Mathematics. Physics. Technical Sciences**

Publisher: Osh State University

Year of foundation: 2022

Frequency: semi-annual

State registration:

Registration certificate of the Ministry of Justice of the Kyrgyz Republic
No. 10296 dated 15.06.2022.

**The journal is presented in the following international scientometric
databases, repositories and scientific systems:**
eLIBRARY.RU; Litmaps; Crossref

Editorial office address:

Osh State University 723500, Aylmbek Datka Str. 331, Osh, Kyrgyz Republic
<https://journal.oshsu.kg/index.php/mpht>

«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ.
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА»
ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ

Техникалык редактор:

Абдумиталип уулу Кубатбек

ОшМУнун “Билим” редакциялык басма бөлүмүндө даярдалып,
басмадан чыгарылды.

Биздин дарек: 723500, Ош шаары, Алымбек Датка көчөсү, 331.

Байланыш телефону: +996 553 50 00 54

Факс: (+9963222) 70915

Электрондук дарек: journal-mpht@oshsu.kg

Сайт: www.oshsu.kg

Негиздөөчүсү – Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги
Ош мамлекеттик университети

Басууга берилди: 25.12.2025

Көлөмү: 26,7 б.т.

Форматы: 176x250 1/8

Нуска: ____ д.

«Билим» редакциялык – басма бөлүмү