

**КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ**

**ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ**

**ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН**

# **ЖАРЧЫСЫ**

**Математика. Физика. Техника**

*Илимий журнал*

**№1, 2022**



# **ВЕСТНИК**

**ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

*Научный журнал*

**BULLETIN**

Osh State University

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**  
**«ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.**  
**МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА»**

*Главный редактор:* **Сопуев Адахимжан Сопуевич** – доктор физ.-мат. наук, профессор, Ошский гос унив, asopuev@oshsu.kg, soruev@mail.ru, (Кыргызстан, г. Ош)

*Заместитель главного редактора:* **Ташполотов Ысламидин Ташполотович** – д-р физ.-мат. наук, проф., itashpolotov@mail.ru (Кыргызстан, г. Ош);

*Члены редакционной коллегии:* **Асанов Авыт Асанович** – д-р физ.-мат. наук, проф., avyt.asanov@manas.edu.kg (Кыргызстан, г. Бишкек); **Обозов Алайбек Джумабекович** – д-р техн. наук, проф., Obozov-a@mail.ru (Кыргызстан, г. Бишкек); **Маткаримов Таалайбек Ысманалиевич** – д-р техн. наук, проф., talai\_m@bk.ru (Кыргызстан, г. Бишкек); **Алыбаев Курманбек Сарманович** – д-р физ.-мат. наук, проф., alybaevkurmanbek@rambler.ru (Кыргызстан, г. Джалал-Абад); **Матиева Гулбадан Матиевна** – д-р физ.-мат. наук, проф., gulbadan\_57@mail.ru (Кыргызстан, г. Ош); **Турсунов Дилмурат Абдиллажанович** – д-р физ.-мат. наук, проф., dtursunov@oshsu.kg (Кыргызстан, г. Ош); **Кенжаев Идирисбек Гуламович** – д-р техн. наук, проф., kenjaevig@rambler.ru (Кыргызстан, г. Ош); **Тайиров Миталип Муратович**, д-р физ.-мат. наук, проф., (Кыргызстан, г. Кызыл-Кыя); **Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич** – д-р техн. наук, проф., zhanubai@gmail.com (Российская Федерация, ЮЗГУ, г. Курск); **Карманов Виталий Сергеевич** – к-т техн. наук, доцент, karmanov@corp.nstu.ru (Российская Федерация, г. Новосибирск); **Бердышев Абдумаулен Сулейманович** – д-р физ.-мат. наук, проф., berdyshev@mail.ru (Казахстан, г. Алматы); **Клычев Шавкат Исакович** – д-р техн. наук, проф., klichevsh@list.ru (Узбекистан, г. Ташкент); **Уринов Ахмаджон Кушакович** – д-р физ.-мат. наук, проф., urinovak@mail.ru (Узбекистан, г. Фергана); **Апаков Юсупжон Пулатович** – д-р физ.-мат. наук, проф., yusupjonarakov@gmail.com (Узбекистан, г. Наманган); **Бабаев Сайфулла** – к-т техн. наук, ст. науч. сотр., bsayfullo@internet.ru (Таджикстан, г. Исфара)

# СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

**Акматов А.А.** Сзыктуу эмес сингулярдуу козголгон маселени чечүүнүн кээ бир өзгөчөлүктөрү..... **4**

**Дадажанова Г.А., Абсатар кызы Айдана.** Сингулярдуу козголгон өзгөчө чекити бар биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин чечиминин асимптотикасын тургузуу ..... **9**

**Сопуев А., Нуранов А.Ш.** О краевых задачах для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка ..... **16**

**Токторбаев А.М.** Оптималдуу башкаруунун сингулярдык козголгон маселелери ..... **23**

**Токторбаев А.М., Пакал уулу Д.** О задаче Коши для вырождающихся уравнений реагирующей смеси газов..... **30**

**Турсунов Д.А., Зулпукаров А.З., Садиева А.С.** Бурулуу чекитине ээ болгон дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн коши маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы ..... **43**

**Халматов А.А., Камилова Т., Мамыталиева М.М.** Приближенно-асимптотическое решение сингулярно возмущенной первой краевой задачи для кольца ..... **51**

**Халматов А.А., Каландарова З., Каныбек кызы Гулнур.** Обратная задача об определении правой части дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка ..... **58**

## ФИЗИКА

**Калбекова М.Ж., Курбаналиев А.Ы.** Моделирование естественной конвекции в прямоугольной полости с учетом радиационного излучения в пакете openfoam..... **67**

**Ташполотов Ы., Маматов Э.У.** Химический состав базальтовых горных пород кызыл-кийского месторождения кыргызской республики ..... **81**

**Турганбаева А.Б., Курбаналиев А.Ы.** Расчет обтекания горы сулайман в пакете openfoam ..... **92**

## МАТЕМАТИКА

УДК 917.528

### СЫЗЫКТУУ ЭМЕС СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕНИ ЧЕЧУҮНҮН КЭЭ БИР ӨЗГӨЧӨЛҮКТӨРҮ

*Акматов Абдилазиз Алиевич,  
улук окутуучу,  
abdilaziz\_akmatov@mail.ru  
Ош мамлекеттик университети,  
Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.** Жумушта чыныгы сан огунда сингулярдык козголууга ээ болгон маселенин чечими дал келүүчү козголбогон маселенин чечимине умтулуусу көрсөтүлөт. Чечимди чыныгы окто баалоо мүмкүнчүлүгү сызыктуу эмес маселенин эсебинен келип чыгат. Туруктуу аралыктарды аныктоочу функциянын табиятына жараша сингулярдык козголгон сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеменин чечими изилденүүчү аралыктар өзгөрөт. Ал жерде туруктуулук шартынын узартылышын мүнөздөөчү аралык жана эки жактуу туруктуу аралыктар пайда болот. Ошону менен бирге баштапкы чекитти тандоо менен сызыктуу эмес сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечимин изилдөөчү туруктуу аралыктар жоюлуп кеткен учурда кездешет.*

***Ачык сөздөр:** сингулярдуу козголуу, кичине параметр, асимптотика, туруктуулук, чечим, баштапкы шарт, ажыралма.*

### НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ

*Акматов Абдилазиз Алиевич  
старший преподаватель,  
abdilaziz\_akmatov@mail.ru  
Ошский государственный университет,  
Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.** В работе показано, что решения сингулярно возмущенной задачи стремится в действительной области к решениям соответствующей невозмущенной задачи. Оценка в действительной области производится из-за нелинейности*

рассматриваемой задачи. В зависимости от природы функции, определяющей условия устойчивости, изменяются рассматриваемые области сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Здесь появятся области, выражающие затягивание потери устойчивости и двухсторонне устойчивости. А также в зависимости от выбора начальной точки исключается устойчивая область. В результате мы не получаем устойчивые области.

**Ключевые слова:** сингулярные возмущения, малый параметр, асимптотика, устойчивость, решения, начальные условия, разложения.

## SOME FEATURES OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR SINGULARLY PERTURBED PROBLEM

Akmatov Abdilaziz Alievich, senior lecturer,  
abdilaziz\_akmatov@mail.ru  
Osh State University,  
Osh, Kyrgyzstan

**Abstract.** The paper shows that the solution of the singularly perturbed problem tends in the real region to the solutions of the corresponding unperturbed problem. Estimation in the real region is performed due to the nonlinearity of the considered problem. Depending on the nature of the function that determines the stability conditions, the considered areas of singularly perturbed differential equations change. Here will be the areas expressing the tightening of the buckling and the two-sided stability. And also depending on the choice of the starting point, a stable region is excluded. As a result, we do not get a stable area.

**Keywords:** singular perturbations, small parameter, asymptotic, stability, solutions, initial, conditions, expansions

**Киришүү.** Жумушта  $a(t)$  функциясынын табиятына жараша келип чыгуучу туруктуулуктун узартылышы, эки жактуу туруктуу аралыктардын пайда болуусун өзгөчөлүк [1] катары кабыл алабыз. Чечим чыныгы сандар талаасында изилденет.

**Маселенин коюлушу.** Төмөнкү

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon x^2(t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad |x^0| = O(\varepsilon), \quad (2)$$

мында  $0 < \varepsilon < 1$  - кичине параметр,  $x(t, \varepsilon)$  - изделүүчү белгисиз функция.

Козголбогон

$$a(t)\xi(t) = 0, \quad (3)$$

теңдеменин чечими төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\xi(t) = 0. \quad (4)$$

(1)-(2) маселени эквиваленттүү интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t, \varepsilon) = x^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t a(s) ds\right) x^2(\tau, \varepsilon) d\tau. \quad (5)$$

(5) теңдемени удаалаш жакындашуу усулу менен чечебиз. Удаалаш жакындашууну төмөнкүчө аныктайбыз:

$$x_0(t, \varepsilon) \equiv 0,$$

$$x_m(t, \varepsilon) = x^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t a(s) ds\right) x_{m-1}^2(\tau, \varepsilon) d\tau, \quad (6)$$

мында  $m \in \mathbb{N}$ .

Өзгөчөлүктү көрсөтүү үчүн конкреттүү  $a(t) = t^3 - t + i(2t^2 - 1)$  функциясын алалы. Анда бул функциянын чыныгы бөлүгүнүн туруктуу, туруксуз жана туруктуулук шарттарынын бузулуу чекиттерин аныктоо максатында анын чыныгы бөлүгүн теңдеме катары чечип алалы:

$\operatorname{Re} a(t) = 0$  же  $t^3 - t = 0$  болуп, чечимдери  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 0$  жана  $t_3 = 1$ .

Туруктуу аралыктары  $t \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ , туруксуз аралыктары

$t \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$ , туруктуулуктан туруксуздукка өтүү чекити  $t_1 = -1$ ,

туруксуздуктан туруктуулукка өтүү чекити  $t_2 = 0$  болуп саналат.

(1)-(2) маселенин чечими изилденүүчү аралыктарды аныктоо максатында  $a(t)$  функциясынын интегралдайбыз:

$$F(t, t_0) = \int_{t_0}^t a(s) ds = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + i\left(\frac{2}{3}t^3 - t\right) - \left(\frac{t_0^4}{4} - \frac{t_0^2}{2}\right) - i\left(\frac{2}{3}t_0^3 - t_0\right).$$

Чыныгы бөлүгү бөлүп алсак, анда  $\operatorname{Re} F(t, t_0) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^4}{4} + \frac{t_0^2}{2}$  Теңдеме катары чечип

$t_1 = -t_0$ ,  $t_2 = -\sqrt{2-t_0^2}$ ,  $t_3 = \sqrt{2-t_0^2}$ ,  $t_4 = t_0$  алабыз.

1).  $t_0 = -\sqrt{2}$  болсун. Анда  $t \in [-\sqrt{2}; 0]$  жана  $t \in [0; \sqrt{2}]$  аралыктары туруктуу,  $t \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$  аралыктары туруксуз аралык болушат. Изилдөөнү  $t \in [-\sqrt{2}; 0]$  аралыгында жүргүзөлү:

$$x_1(t, \varepsilon) = x^0 \exp\left(\frac{t^4 - 2t^2 - t_0^4 + 2t_0^2}{4\varepsilon} + i\left(\frac{2}{3}t^3 - t - \frac{2}{3}t_0^3 + t_0\right)\right),$$

$$x_2(t, \varepsilon) = x_1(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{t^4 - 2t^2 - \tau^4 + 2\tau^2}{4\varepsilon} + i\left(\frac{2}{3}t^3 - t - \frac{2}{3}\tau^3 + \tau\right)\right)\right) x_1^2(\tau, \varepsilon) d\tau,$$

$$x_m(t, \varepsilon) = x_1(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{1}{4\varepsilon}(t^4 - 2t^2 - \tau^4 + 2\tau^2) + i\left(\frac{2}{3}t^3 - t - \frac{2}{3}\tau^3 + \tau\right)\right) x_{m-1}^2(\tau, \varepsilon) d\tau,$$

мында  $m \in N$ .

Баалоону жүргүзөлү

$$|x_1(t, \varepsilon)| \leq |x^0| \exp\left(\frac{t^4 - 2t^2}{4\varepsilon}\right) = O(\varepsilon),$$

$$|x_2(t, \varepsilon)| \leq |x^0| \exp\left(\frac{t^4 - 2t^2}{4\varepsilon}\right) + |x^0|^2 \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{t^4 - 2t^2 + \tau^4 - 2\tau^2}{4\varepsilon}\right) d\tau = O(\varepsilon).$$

Демек, каалагандай жакындашуу үчүн

$$|x_m(t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon + (C\varepsilon)^2 + \dots + (C\varepsilon)^m = C\varepsilon(1 + C\varepsilon + \dots + (C\varepsilon)^{m-1}) = C\varepsilon\alpha_m(\varepsilon),$$

мында  $\alpha_m(\varepsilon)$  туюнтмасы чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия болгондуктан

$t \in [-\sqrt{2}; \delta(\varepsilon)]$ ,  $(\delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0)$  аралыгында (1)-(2) маселенин чечими үчүн

$$|x(t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon, \quad (7)$$

$C - const$  баалоосу орун алат.

2).  $t_0 = \pm 1$  болсун. Анда (1)-(2) маселенин чечими изилденүүчү туруктуу аралык пайда болбойт. Тактап айтканда бардык сан огу туруксуз аралыкка айланат.

Себеби  $\operatorname{Re} F(t, t_0) = \frac{(t^2 - 1)^2}{4\varepsilon}$  функциясы сан огунда терс маани кабыл албайт.

3).  $t_0 = 0$  болсун. Бул учурда баштапкы чекит туруксуз аралыктан туруктуу аралыкка өткөн чекитте берилип жатат. Жыйынтыгында баштапкы чекиттин жайгашуу абалына карата эки жактан туруктуу болгон аралыктар келип чыгат. Ал аралыктардын ар биринде  $a(t)$  функциясы өзүнүн маанисин ондон терске өзгөртүп туруктуулуктун алмашуу шарты орун алат. Мында оң багытта жаткан аралыкта чечимди изилдейли. Анда кайрадан эле (5) теңдемени чечүүнү (6) барабардыкты колдонуп аткарабыз. Эсептөөдө (7) баалоо аналогиялуу түрдө орун алат.

Эгерде  $t_0 = 0$  чекитинен солго карай аныкталган аралык боюнча жүрсөк да (7) баалоо орун алат. Демек, жалпысынан эки жактуу туруктуу болгон аралыкты кошуп  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$  аралыгында (7) баалоо орун алат деп айтууга негиз бар.

4). Баштапкы чекит  $t_0 \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  аралыгында  $t_0 \neq \pm\sqrt{2}$ ,  $t_0 \neq \pm 1$  жана  $t_0 \neq 0$  чекиттеринен башка аралыктагы чекиттерде жатса, анда кадимдидей эле туруктуу аралыктар жашап ал аралыктар үчүн (7) баалоо орун аларын көрсөтүүгө болот.

5). Эгерде баштапкы чекит  $\sqrt{2-t_0^2}$  туютмасы жорума боло турган, тактап айтканда  $t_0 \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$  аралыктарында жатса анда (1)-(2) маселенин чечими каралуучу аралыкта  $a(t)$  функциясы бир канча жолу туруктуулук шартын алмаштырат. Бул учурда туруктуулуктун узартылышы орун алат. Баалоо (7) баалоого аналогия болуп, чыныгы сан огунда орун алат.

**Корутунду.** Каралуучу мисалдын изилдөөсүнө таянуу менен  $a(t)$  функциясына карата (1)-(2) маселенин чечими изилденүүчү ар түрдүү аралыктар келип чыгат деген жыйынтыкка келебиз. Ошону менен бирге чечим козголбогон (3) теңдеменин чечими (4) умтулары келип чыгат.

### Адабияттар

1. **Акматов, А. А.** Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае неоднократной смены устойчивости / Вестник ОшГУ. – Ош. – 2008. - №5. – С. 79-82.
2. **Alymkulov, K.** A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point [Text] / K. Alymkulov, A.A. Khalmatov // Mathematical Notes. - Moscow, 2012. - № 6. - Pp. 117-121.
3. **Alymkulov, K.** About new statement and about new method of Cauchy problem for singular perturbed differential equation of the type of Lighthill [Text] / K. Alymkulov, K.B. Matanova, A.A. Khalmatov // International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) - 2015. - Volume 3. - Pp. 54-64.



УДК 517.928

## СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН ӨЗГӨЧӨ ЧЕКТИ БАР БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫН ТУРГУЗУУ

Дадажанова Гуласал Алимжановна, окутуучу, 2019gda2015@gmail.com

Абсатар кызы Айдана, окутуучу, [absatarovamyrzaiym@gmail.com](mailto:absatarovamyrzaiym@gmail.com)

Б.Сыдыкова атындагы Кыргыз-Узбек эл аралык университети,  
Ош, Кыргызстан

**Аннотация.** Бул жумушта изилдөөнүн предмети болуп сингулярдуу козголгон бир тектүү эмес алсыз сызыктуу дифференциалдык теңдемелер эсептелинет. Изилдөөнүн максаты сингулярдуу козголгон бир тектүү эмес алсыз сызыктуу дифференциалдык теңдеме чечимин асимптотикасын тургузуу болуп эсептелинет. Чечимдин асимптотикасын тургузууда классикалык асимптотикалык усул – козголуулар усулунан пайдаланылды. Анын жардамында сызыктуу жана сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелердин, жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин чечимин тургузуу салыштырмалуу оңой. Макалада  $\epsilon y'(t, \epsilon) = -ty(t, \epsilon) + f(t)$ , теңдемеси каралып,  $\epsilon$  дун мааниси  $0 < \epsilon < 1$  болгон учурда дифференциалдык теңдеме алсыз сызыктуу кадимки дифференциалдык теңдеме болот. Теңдемеде кичине параметрден аналитикалык түрүндө көз каранды болгону үчүн, анын чечими да кичине параметр боюнча аналитикалык функция болот. Башкача айтканда калдык мүчөсү бар Тейлордун катарына ажырайт. Козголуу методунун классикалык теориясына Анри Пуанкаре чоң салым кошуп, алгычкы аныктаманы берген. Сингулярдуу козголгон теңдеменин чечимин асимптотикасын тургузуу колдонмо изилдөөлөрдө чоң мааниге ээ болуп, алар физика, техника, суюктуктар жана газдар механикасы көп изилденет.

**Ачкыч сөздөр:** сингулярдуу козголгон, алсыз козголгон, өзгөчө чекит, асимптотика.

## ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

Дадажанова Гуласал Алимжановна, преподаватель, 2019gda2015@gmail.com

Абсатар кызы Айдана, преподаватель, [absatarovamyrzaiym@gmail.com](mailto:absatarovamyrzaiym@gmail.com)

Кыргызского-Узбекского Международного университета

имени Б.Сыдыкова, Ош, Кыргызстан

**Аннотация.** Предметом исследования является сингулярно возмущенное однородное слабо линейное дифференциальное уравнение. Целью исследования является нахождение асимптотики решения сингулярно возмущенного однородного слабо линейного дифференциального уравнения. Для построения асимптотики был использован классический асимптотический метод – метод возмущений. На основе данного метода сравнительно легко можно определить приближенные решения как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений, зачастую и уравнений в частных производных. В статье рассматривается уравнение вида  $\varepsilon y'(t, \varepsilon) = -ty(t, \varepsilon) + f(t)$ , где при  $0 < \varepsilon < 1$  значения  $\varepsilon$  дифференциальное уравнение переходит в слабо линейное обыкновенное уравнение. Если уравнение зависящее от малого параметра аналитически, то и решение будет представлено через аналитические функции. Иначе говоря, разлагается в ряд Тейлора с остаточным членом. В развитие классической теории возмущений большой вклад внес Анри Пуанкаре, давший начальное определение. Построение асимптотики сингулярно возмущенного уравнения имеет прикладной характер, в таких отраслях науки как: физика, техника, течение жидкости и газа.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенный, слабо возмущенный, точка поворота.

## CONSTRUCTION OF THE ASYMPTOTICS OF A SINGULARLY PERTURBED FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SINGULAR POINT

Dadazhanova Gulasal Alimjanovna, teacher, 2019gda2015@gmail.com

Absatar kzy Aidana, teacher, [absatarovamyrzaiym@gmail.com](mailto:absatarovamyrzaiym@gmail.com)

Kyrgyz-Uzbek International University named after B. Sydykova,

Osh, Kyrgyzstan

**Abstract.** The subject of the article is a singularly perturbed homogeneous weakly linear differential equation. The purpose of the article is to find the asymptotics solving a singularly perturbed homogeneous weakly linear differential equation. To construct asymptotic, a classic asymptotic method was used - the perturbation method. Based on this method, the approximate solutions of both linear and nonlinear differential equations, and equations in private derivatives can be relatively easily. The article discusses the equation of

the form  $\varepsilon y'(t, \varepsilon) = -ty(t, \varepsilon) + f(t)$ , where  $0 < \varepsilon < 1$ , with the value of  $\varepsilon$ , the differential equation goes into a weakly linear ordinary equation. If the equation depends on the small parameter analytically, the solution will be presented through analytical functions. In other words, decomposes into a series of Taylor with a residual member. In the development of the classical perturbation theory, Henri Poincare, who gave an initial definition was made to the development of the classical perturbation theory. The construction of asymptotics of a singularly perturbed equation is applied, in such branches of science as: physics, technique, fluid flow and gas.

**Key words:** singularly perturbed, weakly indignant, turning point.

### 1. Алгач төмөнкү маселени карайбыз

$$\varepsilon y'(t, \varepsilon) = -ty(t, \varepsilon) + f(t), t \in R_+, \quad (1)$$

$$y(0, \varepsilon) = y^0, \quad (2)$$

мында  $f(t) \in C^\infty(R_+)$ ,  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ ,  $f_0 \neq 0$ ,  $y^0 - const$ .

$t=0$  болгондо асимптотикалык туруктуулук бузулат.

Козголбогон

$$-t\tilde{y}(t) + f(t) = 0$$

тендемнин чечими

$$\tilde{y}(t) = \frac{f(t)}{t}. \quad (3)$$

(3) чечим  $t=0$ , чекитинде чексизге айланат

(1)-(2) чечимин төмөнкүдөй издейбиз:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t) + \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k \pi_k(\tau), \tau = \frac{t}{\mu}, \mu^2 = \varepsilon. \quad (4)$$

(4) тү (1) ге койсок :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k'(t) + \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \pi_k'(\tau) = \\ & = -t \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t) - \tau \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \pi_k(\tau) + f(t). \end{aligned}$$

бул барабардыктын эки жагына  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k$ , ны кошобуз,  $h_k$  азырынча аныкталган эмес бир аз өзгөрткөндөн кийин төмөнкү тендемелерди алабыз

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v'(t) = -t \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t) + f(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k, \quad (5)$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \pi_k'(\tau) = -\tau \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \pi_k(\tau) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k. \quad (6)$$

(5) тен биз төмөнкүнү алабыз

$$-tv_0(t) + f(t) - h_0 = 0;$$

$$v'_{k-1}(t) = -tv_k(t) - h_k, \quad k \in N.$$

Мындан

$$v_0(t) = (f(t) - h_0)/t;$$

$$v_k(t) = -(v'_{k-1}(t) + h_k)/t, \quad k \in N.$$

Белгисиз коэффициенттер  $h_k, v_k(t), k = 0, 1, \dots$  функциялар жылма функциялар болгондой кылып тандап алабыз

$$h_0 = f_0, h_k = -v'_{k-1}(0), \quad k \in N.$$

Мындай тандасак

$$v_0(t) = (f(t) - f_0)/t \quad (7)$$

$$v_k(t) = -(v'_{k-1}(t) - v'_{k-1}(0))/t, \quad k \in N. \quad (8)$$

Мындай тандоодо бардык функциялар  $v_k(t), k = 0, 1, \dots$

үзгүлтүксүз, жылма функциялар болушат. Бул сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t)$$

(1)-(2) асимптотиканын регулярдуу бөлүгү болуп калат.

(6) дан

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} (\pi_k'(\tau) + \tau \pi_k(\tau)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{2k} h_k,$$

же

$$\pi_{2k-1}'(\tau) + \tau \pi_{2k-1}(\tau) = h_k,$$

$$\pi_{2k}'(\tau) + \tau \pi_{2k}(\tau) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(2) эске алсак, анда:

$$\frac{d\pi_0(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_0(\tau) = 0, \pi_0(0) = y^0 - v_0(0); \quad (9)$$

$$\frac{d\pi_{2k}(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_{2k}(\tau) = 0, \pi_{2k}(0) = -v_k(0), k = 1, 2, \dots; \quad (10)$$

$$\frac{d\pi_{2k-1}(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_{2k-1}(\tau) = h_k, \pi_{2k-1}(0) = 0. \quad (11)$$

Бул маселердин бир гана чечими бар :

$$\pi_0(\tau) = (y^0 - v_0(0))e^{-\tau^2/2}; \quad (12)$$

$$\pi_{2k}(\tau) = -v_k(0)e^{-\tau^2/2}, k = 1, 2, \dots; \quad (13)$$

$$\pi_{2k-1}(\tau) = h_k e^{-\tau^2/2} \int_0^\tau e^{s^2/2} ds, k = 0, 1, 2, \dots . \quad (14)$$

Демек биз (1)-(2) нин формалдуу чечимин (4) түрүндө тургуздук. (4) катардын асимптотикалык катар экендигин далилдеш үчүн, калдык үчүн

$$R_n(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon) - y_n(t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon R'_n(t, \varepsilon) = -tR_n(t, \varepsilon) - \varepsilon^{n+1}v'_{n+1}(t, \varepsilon), t > 0, \quad (15)$$

$$R_n(0, \varepsilon) = 0. \quad (16)$$

бул маселенин бир гана чечими болот

$$R_n(t, \varepsilon) = -\varepsilon^n e^{-t^2/(2\varepsilon)} \int_0^t v'_{n+1}(s, \varepsilon) e^{s^2/(2\varepsilon)} ds$$

жана анын баалосу

$$|R_n(t, \varepsilon)| \leq C_n \varepsilon^{n+1/2}$$

Демек, биз төмөнкүдөй теореманы далилдедик.

**Теорема.** (1) теңдеменин чечиминин асимптотикасы (4) катар түрүндө алынат.

Бул теореманы төмөнкү система

$$\varepsilon y'(t) = -A ty(t) + f(t),$$

мында

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \det A \neq 0$$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \in C^\infty(R_+)$$

үчүн дагын далилдесе болот.

Өзгөчө Лайтхилл түрүндөгү биринчи жана экинчи тартиптеги теңдемелери үчүн жалпыланган чекара усулу [1], кеңейтүү усулу [2] жана униформизациялоо усулдарын колдонсо болот.

### Корутунду

1. *Өзгөчө чекити бар сингулярдуу сызыктуу жана алсыз сызыктуу дифференциалдык теңдеменин асимптотикасы тургузулду.*
2. *Асимптотикалык катардын калдык мүчөсү бааланды.*

### Адабияттар

1. **Alymkulov, K.** A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point [Text] / K. Alymkulov, A.A. Khalmatov // Mathematical Notes. - Moscow, 2012. - № 6. - Pp. 117-121.
2. **Alymkulov, K.** About new statement and about new method of Cauchy problem for singular perturbed differential equation of the type of Lighthill [Text] / K. Alymkulov, K.B. Matanova, A.A. Khalmatov // International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) - 2015. - Volume 3. - Pp. 54-64.
3. **Tursunov, D. A.** Asymptotics of the Solution to the Boundary-Value Problems with Non Smooth Coefficient / D. A. Tursunov, M. O. Orozov, A. A. Halmatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, No. 6. – P. 1115-1122. – DOI 10.1134/S1995080220060177. – EDN AZKBTQ.
4. **Halmatov, A. A.** Construction of the asymptotics of the solution of a singularly perturbed nonlinear equation with a singular point / A. A. Halmatov, A. A. Baltabaeva, K. G Kanybek // Science. Education. Engineering. – 2021. – No. 3(72). – P. 34-40. – DOI 10.54834/16945220\_2021\_3\_34. – EDN LWIYNU.
5. **Halmatov, A. A.** Construction of the asymptotic of the solution of a singularly perturbed partial differential equation with a special Lin / A. A. Halmatov, N. Nishanbaeva, K. A

- Absatar // Science. Education. Engineering. – 2021. – No. 3(72). – P. 29-33. – DOI 10.54834/16945220\_2021\_3\_29. – EDN UHGWZY.
6. **Khalmatov, A. A.** Analysis of finding a solution to modular equations when the equation contains two or more modules / A. A. Khalmatov, G. A. Dadazhanova, K. A. Abbazova, N. Sayfiddin K // Science. Education. Engineering. – 2022. – No. 3(75). – P. 49-57. – DOI 10.54834/16945220\_2022\_3\_49. – EDN JQQTXH.
  7. **Khalmatov, A. A.** Spice of solutions to singularly perturbed equations / A. A. Khalmatov, K. A. Abbazova, G. Kanybek K, A. Baltabaev // Science. Education. Engineering. – 2022. – No. 3(75). – P. 57-63. – DOI 10.54834/16945220\_2022\_3\_57. – EDN QCRAZR.
  8. **Бабаев, Д. Б.** Санариптештирүү шартында техникалык жождордогу жалпы физика курсунун орду / Д. Б. Бабаев, Ш. К. Хаитов, А. А. Халматов // Alatau Academic Studies. – 2020. – No. 3. – P. 84-89. – DOI 10.17015/aas.2020.203.09. – EDN TEHYXP.

УДК 517.956.6

## О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

*Сопуев Адахимжан, д.ф.-м.н., профессор,  
sopuev@mail.ru*

*Нуранов Бактыбек Шермаматович, ст. преп.,  
nuranov2014@mail.ru*

*Ошский государственный университет,  
Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** Доказаны теоремы существования и единственности решений краевых задач для уравнения третьего порядка, когда смешанный параболо-гиперболический оператор с линией сопряжения  $x=0$  применяется к дифференциальному оператору первого порядка по  $y$ . Методом понижения порядка уравнения рассматриваемая задача сводится к краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка в прямоугольнике, разрешимость которого сводится к решению интегрального уравнения Вольтера второго рода с непрерывным ядром, имеющее единственное решение. После определения следа функции и её производной по  $x$  на линии изменения типа уравнений, решение задачи определяется как решение смешанной задачи для параболического уравнения при  $x>0$  и как решение задачи Гурса для гиперболического уравнения при  $x<0$ .

**Ключевые слова:** краевые задачи, линия сопряжения, условия склеивания, смешанный параболо-гиперболический оператор, методы Римана и интегральных уравнений.

## ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ АРАЛАШ ПАРАБОЛА–ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕ ЖӨНҮНДӨ

*Сопуев Адахимжан, профессор, ф.-м.и.д.,  
sopuev@mail.ru*

*Нуранов Бактыбек Шермаматович, улук окутуучу  
nuranov2014@mail.ru*

*Ош мамлекеттик университети, Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** Жалгашуу сызыгы  $x=0$  болгон аралаш параболо-гиперболалык оператор биринчи тартиптеги  $y$  боюнча алынган дифференциалдык операторго колдонулган учурдагы үчүнчү тартиптеги теңдеме үчүн чек аралык маселелердин



чечимдеринин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теоремалар далилденген. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү методу менен каралып жаткан маселе тик бурчтукта экинчи тартиптеги аралаш парабола-гиперболалык теңдеме үчүн чек аралык маселеге келтирилет, анын чечилиши үзгүлтүксүз ядролуу жалгыз чечимге ээ болгон экинчи түрдөгү Вольтердин интегралдык теңдемесин чыгарууга алып келинет. Теңдемелердин түрүнүн өзгөрүү сызыгында функциянын изи жана анын  $x$  ке карата туундусу аныкталгандан кийин маселенин чечими  $x > 0$  болгондо параболалык теңдеме үчүн аралаш маселенин чечими катары, ал эми  $x < 0$  болгондо гиперболалык теңдеме үчүн Гурстун маселесинин чечими катары аныкталат.

**Ачык сөздөр:** чек аралык маселелер, жалгааштыруу шарттары, аралаш парабола-гиперболалык операторлор, Риман жана интегралдык теңдемелер методдору.

## ON THE BOUNDARY PROBLEM FOR A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

Sopuev Adakhimzhan,  
Doctor of physical and mathematical sciences, professor,  
sopuev@mail.ru  
Nuranov Baktybek Shermamatovich, senior teacher,  
nuranov2014@mail.ru  
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

**Abstract.** Existence and uniqueness theorems for solutions to boundary value problems for a third-order equation are proved when a mixed parabolic-hyperbolic operator with a conjugation line is applied to a first-order differential operator in  $y$ . By lowering the order of the equation, the problem under consideration is reduced to a boundary value problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation of the second order in a rectangle, the solvability of which is reduced to solving a Voltaire integral equation of the second kind with a continuous kernel, which has a unique solution. After determining the trace of the function and its derivative with respect to  $x$  on the line of change in the type of equations, the solution of the problem is defined as the solution of the mixed problem for the parabolic equation for  $x > 0$  and as the solution of the Goursat problem for the hyperbolic equation for  $x < 0$ .

**Key words:** boundary value problems, conjugation line, gluing conditions, mixed parabolic-hyperbolic operator, Riemann methods and integral equations.

**1. Постановка задачи.** В прямоугольнике  $D = \{(x, y) : -\ell_1 < x < \ell, 0 < y < h\}$

$(\ell, \ell_1, h > 0)$  рассмотрим уравнение

$$L_1 L_2 u = 0, \tag{1}$$

$$\text{где } L_1 \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}, & x > 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c, & x < 0, \end{cases}, \quad L_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad c - \text{ заданная константа.}$$

Пусть  $D_1 = D \cap (x > 0)$ ,  $D_2 = D \cap (x < 0)$ , а  $C^{n+m}$  означает класс функций, имеющих непрерывные все производные  $\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}$  ( $r = 0, 1, \dots, n$ ;  $s = 0, 1, \dots, m$ ).

**Задача 1.** Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую следующие условия:

$$1) \quad u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{1+2}(D_2)];$$

$$2) \quad \text{является решением уравнения (1) при } x \neq 0;$$

$$3) \quad \text{удовлетворяет краевые условия}$$

$$u|_{x=\ell} = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u|_{y=0} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3)$$

$$u_y|_{y=0} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (4)$$

$$u|_{y=0} = \chi_1(x), \quad -\ell_1 \leq x \leq 0, \quad (5)$$

$$u_y|_{y=0} = \chi_2(x), \quad -\ell_1 \leq x \leq 0, \quad (6)$$

где  $\varphi_1(y), \psi_i(y), \chi_i(y)$  ( $i = 1, 2$ ) – заданные функции, причем

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) \in C^1[0, h], \quad \psi_1(x) \in C^1[0, \ell], \quad \chi_1(x) \in C^1[-\ell_1, 0], \\ \psi_2(x) \in C^1[0, \ell], \quad \chi_2(x) \in C^1[-\ell_1, 0], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) = \psi_1(\ell), \quad \varphi_1'(0) = \psi_2(\ell), \quad \psi_1(0) = \chi_1(0), \quad \psi_1'(0) = \chi_1'(0), \\ \psi_2(0) = \chi_2(0), \quad \psi_2'(0) = \chi_2'(0). \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что краевые задачи для уравнений смешанного второго, третьего и четвертого порядков изучены в работах [1 – 5]. Краевые задачи

для уравнения (1) с линией сопряжения  $y = 0$  изучены в работах [6, 7].

Из постановки задачи 1 вытекают следующие условия склеивания:

$$u(-0, y) = u(+0, y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y), 0 \leq y \leq h. \quad (9)$$

Введем новую функцию:

$$v(x, y) = u_y(x, y) \quad (10)$$

Тогда из уравнения (1) имеем

$$v_{xx} - v_y = 0, (x, y) \in D_1, \quad (11)$$

$$v_{xy} + cv = 0, (x, y) \in D_2, \quad (12)$$

Из условия склеивания (9) получим

$$\begin{aligned} v(-0, y) &= v(+0, y) = \tau(y), 0 \leq y \leq h, \\ v_x(-0, y) &= v_x(+0, y) = \nu(y), 0 \leq y \leq h, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\tau(y), \nu(y)$  – неизвестные функции, подлежащие определению.

**2. Соотношения, полученные из областей  $D_1$  и  $D_2$ .** Устремляя  $x$  к  $-0$  из уравнения (12) с учетом (13) имеем соотношение между  $\tau(y)$  и  $\nu(y)$ , полученное из области  $D_2$  в виде:

$$\nu'(y) + c\tau(y) = 0, 0 \leq y \leq h. \quad (14)$$

Известно, что решение первой краевой задачи для уравнения (11) в области  $D_1$  представимо в виде [8]:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_0^{\ell} G(x, y; \xi, 0) \psi_2(\xi) d\xi - \int_0^y G(x, y; 0, \eta) \nu(\eta) d\eta - \\ &- \int_0^y G_{\xi}(x, y; \ell, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $G(x, y; \xi, \eta)$  – функция Грина, представимая в виде

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \exp\left(-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) - \exp\left(-\frac{(x-\xi+4n\ell+2\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi+4n\ell+2\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) \right].$$

Не трудно заметить, что

$$G(0, y; 0, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} + g(y, \eta), \quad (16)$$

где

$$g(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \left[ \sum_{n=-\infty}^{-1} \exp\left(-\frac{4n^2\ell^2}{y-\eta}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{4n^2\ell^2}{y-\eta}\right) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\ell^2}{2(y-\eta)}\right).$$

Устремляя  $x \rightarrow +0$ , из (15) с учетом условий (13) и (16), имеем следующее соотношение, полученное из области  $D_1$ :

$$\tau(y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{v(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta - \int_0^y g(y, \eta) v(\eta) d\eta + \Phi_1(y), \quad (17)$$

где  $\Phi_1(y) = -\int_0^y G_\xi(0, y; \ell, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_0^\ell G(0, y; \xi, 0) \psi_2(\xi) d\xi$ .

### 3. Сведение задачи к решению интегрального уравнения.

Исключая из соотношений (14) и (17) функцию  $\tau(y)$ , имеем:

$$v'(y) = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{v(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + c \int_0^y g(y, \eta) v(\eta) d\eta - c \Phi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h. \quad (18)$$

Далее, интегрируя уравнение (18) по  $y$  в пределах от 0 до  $y$ ,

получим интегральное уравнение Вольтера второго рода

$$v(y) = \int_0^y K(y, \eta) v(\eta) d\eta + \Phi(y), \quad (19)$$

где  $K(x, \xi) = \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{y - \eta} + c \int_{\eta}^y g(t, \eta) d\eta$ ,  $\Phi(y) = \psi_2'(0) - c \int_0^y \Phi_1(t) dt$ .

Интегральное уравнение (19) с непрерывным ядром  $K(x, \xi)$  допускает единственное решение [9].

После определения  $v(y)$  из (19), найдем  $\tau(y)$  из соотношения (17). Таким образом, искомая функция  $u(x, y)$  в области  $D_1$  определяется по формуле (15), а в области  $D_2$  функцию  $u(x, y)$  определим как решение задачи Гурса для уравнения (12) [10].

**4. Построение решения задачи 1 в областях  $D_1$  и  $D_2$ .** После нахождения функции  $u(x, y)$  для определения решения задачи 1 придём к следующей задаче: найти в области  $D$  решение уравнения

$$u_y(x, y) = v(x, y),$$

удовлетворяющее краевое условие (3) и (5).

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(x, y) = \begin{cases} \psi_1(x) + \int_0^y v(x, \eta) d\eta, & (x, y) \in D_1, \\ \chi_1(x) + \int_0^y v(x, \eta) d\eta, & (x, y) \in D_2. \end{cases} \quad (20)$$

Из (20) не трудно проверить выполнение условия сопряжения (9).

Таким образом, доказана

**Теорема 1.** Если выполняются условия (5) и (9), тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Аналогично исследуется

**Задача 2.** Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющее всем условиям задачи 1, если вместо условия (2) берется условие

$$u_x|_{x=\ell} = \varphi(y), 0 \leq y \leq h.$$

### Литература

1. **Джураев, Т. Д.** Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
2. **Джураев, Т. Д.** Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
3. **Джураев, Т. Д.** К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
4. **Бобылёва, Л. А.** Об одной краевой задаче для уравнений смешанно-составного типа четвёртого порядка [Текст] / Л.А. Бобылёва, М.М. Смирнов // Известия Вузов, Математик. – 1972. – №5 (120). – С. 15 – 11.
5. **Смирнов, М. М.** Краевая задача со смещением для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка [Текст] / М.М. Смирнов // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11. №9. – С. 1678-1686.
6. **Сопуев, А.** Краевые задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Б.Ш. Нуранов // Вестник ОшГУ. – 2021. – Т. 3. – №1. – С. 93-101.
7. **Сопуев, А.** О краевых задачах для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с младшими членами [Текст] / А. Сопуев, Б.Ш. Нуранов // Вестник ОшГУ. – 2022. – №1. – С. 149-158.
8. **Полянин, А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
9. **Краснов, М. Л.** Интегральные уравнения. Введение в теорию [Текст] / М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
10. **Соболев, С. Л.** Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1966. – 444 с.

УДК 517.957

## ОПТИМАЛДУУ БАШКАРУУНУН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕЛЕРИ

*Токторбаев Айбек Мамадалиевич, ф.-м.и.к., доцент  
ain7@list.ru  
Ош мамлекеттик университети, Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.** Жумушта оптималдуу башкаруунун сингулярдуу козголууга ээ маселеси каралат. Ылдам жана жай өзгөрүүчү өзгөрмөлөрдүн оптималдуу башкаруудагы чектөөлөрү көрсөтүлөт. Чек аралык катмардагы жана регулярдык аймакта пайда болуучу башкаруунун өзгөчөлүктөрү каралат. Жыйынтыгында функционал түзүлөт жана ал максимум принцибине таянуу менен изилденет. Чек аралык катмар курама ажыралмалар усулуна негизделип изилденет. Маселени изилдөөнү тактоо максатында козголууга ээ болбогон маселени оптималдуу башкарууга изилдөө жараяны конкреттүү мисалды келтирүү менен каралат. Бул учурда Понтрягиндин максимум принцибин колдонуунун өзгөчөлүгү эске алынды. Аны сингулярдык маселеге колдонууда кандай шарттарда орун алары да көрсөтүлдү.*

***Ачык сөздөр:** Сингулярдуу козголуу, оптималдуу башкаруу, чек аралык катмар, ички жана сырткы чечим, курама ажыралмалар усулу, максимум принциби.*

## СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Токторбаев Айбек Мамадалиевич, к.ф.-м.н., доцент  
ain7@list.ru  
Ошский государственный университет,  
Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.** В работе рассматривается сингулярно возмущенная задача оптимального управления. Показаны оптимальные ограничения на управление, накладываемые на быстро и медленно меняющиеся переменные. Рассмотрены особенности оптимального управления в регулярной и граничной областях. В итоге составим функционал, и исследуем его на основе принципа максимума. Пограничный слой исследуется с помощью метода составного разложения. Для уточнения исследования на конкретном примере исследуется теория оптимального управления*

для невозмущенной задачи. Учтено применение особенностей принципа максимума Понтрягина к исследованию сингулярной задачи оптимального управления.

**Ключевые слова:** Сингулярные возмущения, оптимальное управление, пограничный слой, внешние и внутренние решения, метод составных разложений, принцип максимума.

## OF SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS OF THE OPTIMALMANAGEMENT

*Toktorbaev Aybek Mamadalievich*

*candidate of physical and mathematical sciences, docent*

*ain7@list.ru*

*Osh State University, Osh, Kyrgyzstan,*

**Abstract.** *The paper considers a singularly perturbed optimal control problem. Optimal control constraints imposed on rapidly and slowly varying variables are shown. The features of optimal control in regular and boundary domains are considered. As a result, we will compose a functional and study it based on the maximum principle. The boundary layer is studied using the composite decomposition method. To clarify the study on a specific example, the theory of optimal control for the unperturbed problem is investigated. The application of the features of the Pontryagin maximum principle to the study of a singular problem of optimal control is taken into account.*

**Keywords:** *Singular perturbations, optimal control, boundary layer, external and internal solutions, method of composite expansions, maximum principle.*

**Киришүү.** Оптималдуу башкаруу маселелеринде козголуунун кездешүүсү, математикалык моделде кичине параметрдин болуусу менен тыгыз байланышта. Мына ошол себептүү кээде оптималдуу башкаруу маселелеринде сингулярдуу козголууларды кездештирүүгө болот.

Сингулярдуу козголууга ээ болгон оптималдуу башкаруунун маселелери туунду алдында кичине параметр кармаган дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлөт. Козголбогон теңдеменин тартиби козголгон теңдеменин тартибинен төмөн болуусу негизги өзгөчөлүк катары бааланат. Козголбогон маселе, козголгон маселеге коюлган бардык шарттарды канаатандыра албайт.



Жумушта оптималдуу башкаруунун маселеси фиксирленген  $[0, T]$  аралыгында сызыктуу система үчүн каралат. Изилдөөнүн максаты катары кичине параметрдин каалаган даражасындагы тактыкта маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасын тургузуу болуп саналат.

**Маселенин коюлушу.** Бөлүкчө-үзгүлтүксүз башкаруулар классында ыкчам жана жай өзгөрүлмөлүү оптималдуу башкаруунун маселеси

$$\begin{aligned}x'(t, \varepsilon) &= a_{11}x(t, \varepsilon) + a_{12}y(t, \varepsilon) + b_1u(t), \\ \varepsilon y'(t, \varepsilon) &= a_{21}x(t, \varepsilon) + a_{22}y(t, \varepsilon) + b_2u(t),\end{aligned}\tag{1}$$

$$t \in [0, T], \quad \|u(t)\| \leq 1, \quad x(0, \varepsilon) = x^0, \quad y(0, \varepsilon) = y^0,$$

$$\sigma(x(T, \varepsilon)) \rightarrow \min_{\|u(t)\| \leq 1} \sigma(x(T, \varepsilon)) =: w(T, x^0, y^0, \varepsilon).$$

Мында  $0 < \varepsilon$  - кичине параметр; жай өзгөрүлмө  $x \in R^2$ , ал эми ыкчам өзгөрүлмө  $y \in R^2$ ,  $u(\cdot) \in R^2$ ,  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $i, j = 1, 2$  дал келүүчү ченемдеги турактуу чыныгы сан.

Чыныгы бөлүк

$$\operatorname{Re} a_{22} \leq -\lambda, \quad \lambda > 0\tag{2}$$

ал эми  $\sigma(x(t, \varepsilon))$  - чексиз дифференцирленүүчү күчтүү туюк кофиниттик функция. Тактап айтканда  $\forall x \in R^2, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1} \tau(\lambda x) = +\infty$ . Ушул эле шарттарда  $\sigma^*(x(t, \varepsilon))$  функциясы  $R^2$  чексиз дифференцирленүүчү, күчтүү туюк кофиниттик функция.

Белгилөөлөрдү кийирели

$$a_\varepsilon = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \frac{1}{\varepsilon} a_{21} & \frac{1}{\varepsilon} a_{22} \end{pmatrix}, \quad b_\varepsilon = \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{1}{\varepsilon} b_2 \end{pmatrix}.$$

Формалдуу  $\varepsilon = 0$  деп алуу менен козголбогон маселеге ээ болобуз:

$$x'_0(t, \varepsilon) = a_0 x_0(t, \varepsilon) + b_0 u, \quad t \in [0, T], \quad \|u(t)\| \leq 1, \quad x(0, \varepsilon) = x^0,$$

$$a_0 = a_{11} - a_{12} a_{22}^{-1} a_{21}, \quad b_0 = b_1 - a_{12} a_{22}^{-1} b_2,\tag{3}$$

$$\sigma(x_0(t, \varepsilon)) \rightarrow \inf_{\|u\| \leq 1} \sigma(x(t, \varepsilon)) = \omega_0(t, x_0).$$

Убакыттын  $t$  моментиндеги жетишүү көптүгү  $E_\varepsilon = E_\varepsilon(T, x^0, y^0)$  болсун. Ал эми бул көптүктүн таяныч функциясы  $\rho(\bullet, E)$ . Анда [2] негизинде

$$\omega_\varepsilon(t, x^0, y^0) = - \inf_{r_\varepsilon^x \in R^2} (\sigma^*(r_\varepsilon^x) + \rho(-r_\varepsilon^x; npE_\varepsilon)).$$

Мында  $npE_\varepsilon$  - (1) системанын жетишүү көптүгү  $E_\varepsilon$  проекциясы.

Козголбогон маселе үчүн аналогиялуу түрдө

$$\omega_0(t, x^0) = - \inf_{r_0 \in R^2} (\sigma^*(r_0) + \rho(-r_0; E_0)).$$

Бул жерде  $E_0 = E_0(T, x^0)$  - (3) системанын убакыттын  $T$  моментиндеги жетишүү көптүгү.  $E_0$ ,  $npE_\varepsilon$  көптүктөрүн жана алардын таяныч функциялары [2]

$$\rho(-r_\varepsilon^x, npE_\varepsilon) = \sup_{x_\varepsilon \in npE_\varepsilon} \langle x_\varepsilon, -r_\varepsilon^x \rangle = \rho\left(-\begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix}; E_\varepsilon\right).$$

Андан сырткары Коши барабардыгынын негизинде

$$E_\varepsilon(T, x^0, y^0) = \left\{ e^{a_\varepsilon t} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \int_0^T e^{a_\varepsilon(T-t)} B_\varepsilon u(t) dt : \|u(t)\| \leq 1 \right\},$$

мына ошондуктан таяныч функциясы

$$\rho\left(-\begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix}; E_\varepsilon\right) = - \left\langle e^{a_\varepsilon T} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \int_0^T \left\| B_\varepsilon^* e^{a_\varepsilon^* t} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix} \right\| dt.$$

Козголбогон маселенин таяныч функциясы

$$\rho(-r_0, E_0) = - \left\langle e^{a_0 T} x^0, r^0 \right\rangle + \int_0^T \left\| B_0^* e^{a_0^* t} r_0 \right\| dt.$$

Козголгон (1) системага максимум принцибин колдонсок, анда түйүндөш системага ээ болобуз.

$$\psi_\varepsilon' = -a_\varepsilon^* \psi_\varepsilon. \quad (4)$$

Мында  $\psi_\varepsilon = \begin{pmatrix} \psi_\varepsilon^x \\ \psi_\varepsilon^y \end{pmatrix}$ ,  $\psi_\varepsilon^x \in R^2$ ,  $\psi_\varepsilon^y \in R^2$ . Чек аралык шарттар

$$\begin{pmatrix} \psi_\varepsilon^x(T) \\ \psi_\varepsilon^y(T) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \sigma(x^{opt}(T, \varepsilon)) \\ \nabla_y \sigma(y^{opt}(T, \varepsilon)) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

ал эми оптималдуу башкаруу  $u_\varepsilon^{opt}(t)$

$$\langle \psi_\varepsilon(t), b_\varepsilon u_\varepsilon^{opt}(t) \rangle = \max_{\|g\| \leq 1} \langle \psi_\varepsilon(t), b_\varepsilon g \rangle. \quad (6)$$

Мында  $\nabla_x \sigma(\bullet)$ ,  $\nabla_y \sigma(\bullet)$  -  $\sigma(\bullet)$  - функциясынын тиешелүү өзгөрүлмөлөр боюнча алынган градиенти.

Түйүндөш система үчүн

$$\begin{pmatrix} \psi_\varepsilon^x(t) \\ \psi_\varepsilon^y(t) \end{pmatrix} = -e^{a_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_\varepsilon^* e^{a_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

болсо, оптималдуу башкаруу

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = - \frac{b_\varepsilon^* e^{a_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| b_\varepsilon^* e^{a_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}.$$

Белгилөөлөрдү кийирүү менен

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = \frac{U_\varepsilon^*(T-t)r_\varepsilon}{\|U_\varepsilon^*(T-t)r_\varepsilon\|},$$

мында  $U_\varepsilon(t) = z_\varepsilon^{11}(t)b_1 + \frac{1}{\varepsilon} z_\varepsilon^{12}(t)b_2$ ,  $e^{a_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} z_\varepsilon^{11}(t) & z_\varepsilon^{12}(t) \\ z_\varepsilon^{21}(t) & z_\varepsilon^{22}(t) \end{pmatrix}$ ,  $r_\varepsilon^x = r_\varepsilon$ .

Дал келүүчү оптималдуу траектория үчүн

$$\begin{pmatrix} x^{opt}(t, \varepsilon) \\ y^{opt}(t, \varepsilon) \end{pmatrix} = e^{a_\varepsilon t} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{a_\varepsilon(t-s)} b_\varepsilon u_\varepsilon^{opt}(s) ds.$$

Матрицалык экспонентанын асимптотикасын чек аралык катмарда изилдейли. Анда  $t \in [0, T]$  аралыгында

$$z_\varepsilon^{ij}(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left( z_k^{ij}(t) + \Pi_k z^{ij}(\tau) \right), \quad t \in [0, T], \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Алынган (7) барабардыкта ар бир кошулуучу [2] аныкталат.

## Баштапкы жакындашуулар

$$\begin{aligned} z_0^{11}(t) &= e^{a_0 t}, \quad z_0^{12}(t) = 0, \quad \Pi_0 z^{11}(\tau) \equiv 0, \quad \Pi_0 z^{12}(t) \equiv 0, \\ z_0^{21}(t) &= -a_{22}^{-1} a_{21} e^{a_0 t}, \quad z_0^{22}(t) \equiv 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Pi_0 z^{21}(\tau) = e^{a_{22} \tau} a_{22}^{-1} a_{21}, \quad \Pi_0 z^{22}(\tau) = e^{a_{22} \tau}.$$

Туруктуулуктун (2) шартын эске алуу менен (8) барабардыктан  $\exists C > 0 \quad \|e^{a_{22} \tau}\| \leq C \exp(-\alpha \tau)$ ,  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ , экендигин эске алсак, анда  $t \in [\mu, T]$

аралыгында ички чечим, ал эми калган  $t \in [0, \mu)$  аралыгы үчүн жалпы

учурда  $z_\varepsilon^{ij}(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (z_\varepsilon^{ij}(\varepsilon \tau) + \Pi_k z^{ij}(\tau))$  ажыралмасына ээ болобуз. Мында

$ij = 1, 2$ .

Жалпысынан алганда экспоненталык матрица [1] маселенин чечими изилденүүчү аймакты аныктайт. Чек аралык функциялар усулунун негизинде каралуучу аралыкта бир калыптагы чечим алынат.

Калган интеграл астындагы функциялардын асимптотикасын [2] аналогия түрүндө аныктап алууга болот.

Мисал катары рангы экиге барабар болуучу турактуу матрицаларды алалы. Анда  $a_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  деп алуу менен изилдеп көрүүгө болот.

**Корутунду.** Жумушта эң жөнөкөй оптималдуу башкаруунун сингулярдуу козголгон маселелери каралды. Анда (4)-(6) барабардыктары менен аныкталуучу максимум принцибине таянуу менен аныкталары келип чыгат. Чек аралык катмар чек аралык катмар функциясын [1] пайдалануу менен изилденди. Сингулярдуу козголгон мындай маселелери [2] менен чечилген. Белгилей кетчү нерсе оптималдуу башкаруунун бисингуляр маселеси толук кандуу изилдене элек. Мына ошол себептүү ал маселени изилдөөнүн алгачкы кадамы катары бул жумушту атоого болот.

## Адабияттар

1. **Васильева, А. Б.** Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных [Текст] / А.Б. Васильева // Журнал вычислительной математики и математической физики. - М. 1963.
2. **Парышева, Ю. В.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач оптимального управления [Текст] / Дисс. ...канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Екатеринбург. 2012. – С. 9-92.

УДК 517.957

## О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ

*Токторбаев Айбек Мамадалиевич, к.ф.-м.н., доцент,  
atoktorbev@gmail.com*

*Пакал уулу Долонбек преподаватель,  
dolon96.99@gmail.com*

*Ошский государственный университет Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** В настоящей статье исследуется система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая одномерное течение реагирующей смеси газов в пористой среде. Рассматривается неограниченная область. Причем искомые функции в начальный момент времени стремятся к нулю, что приводит к вырождению уравнений. Рассмотрена задача Коши для уравнений, описывающих течение реагирующей смеси газов. В начальный момент времени все характеристики среды известны и имеют различные пределы на бесконечности. Исследуется система дифференциальных уравнений, описывающая одномерное нестационарное течение реагирующей смеси газов. Изучается задача Коши с вырождающимися начальными данными, соответствующими об одной задаче. Причем искомые функции в начальный момент времени имеют об одной задаче на бесконечности. Особенностью течений с конечной вязкостью является отсутствие в них ударных волн, т.е. кроме контактного, другого сильного разрыва быть не может. Доказывается существование обобщенного решения методом регуляризации.

**Ключевые слова:** скорость, плотность, температура, магнитное поле, электрическое поле, обобщенное решение, априорные оценки, существование, системы уравнений.

## РЕАКЦИЯ КЫЛУУЧУ ГАЗДАРДЫН АРАЛАШМАСЫНЫН КУБУЛГАН ТЕНДЕМЕЛЕР ҮЧҮН КОШИНИН МАСЕЛЕСИ ЖӨНҮНДӨ

*Токторбаев Айбек Мамадалиевич, ф.-м.и.к., доцент,  
atoktorbev@gmail.com*

*Пакал уулу Долонбек, окутуучу, dolon96.99@gmail.com  
Ош мамлекеттик университети, Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** Бул макалада биз сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер системасын изилдейбиз, алар реакцияга кирүүчү газ аралашмасынын бир өлчөмдүү агымын көзөнөктүү чөйрөдө сүрөттөйт. Чексиз аймак каралат. Мындан тышкары, каалаган функциялар убакыттын баштапкы моментинде нөлгө жакын болот, бул теңдемелердин бузулушуна алып келет. Реакциялашкан газ аралашмасынын агымын мүнөздөгөн теңдемелерге Коши маселеси каралат. Убакыттын баштапкы моментинде чөйрөнүн бардык мүнөздөмөлөрү белгилүү жана чексиздикте ар кандай чектерге ээ. Реакциялашкан газ аралашмасынын бир өлчөмдүү туруксуз агымын сүрөттөгөн дифференциалдык теңдемелердин системасы изилденген. Бир маселеге туура келген бузулган баштапкы маалыматтар менен Коши маселесин изилдейбиз. Болгондо да, убакыттын баштапкы моментинде каалаган функциялар чексиздикте болжол менен бир маселеге ээ. Чектүү илешкектүүлүктөгү агымдардын өзгөчөлүгү аларда сокку толкундарынын жоктугу, б.а. байланыштан башка эч кандай күчтүү ажырым болушу мүмкүн эмес. Жалпыланган чечимдин бар экендиги регуляризация ыкмасы менен далилденет.

**Ачкыч сөздөр:** ылдамдык, тыгыздык, температура, магнит талаасы, электр талаасы, жалпыланган чечим, априордук баалоо, бар болуу, теңдемелер системасы.

## ON THE CAUCHY PROBLEM FOR DEGENERATE EQUATIONS OF A REACTING GAS MIXTURE

*Toktorbaev Aibek Mamadalievich, candidate of physical sciences,  
associate professor, atoktorbev@gmail.com*

*Pakal uulu Dolonbek, teacher, dolon96.99@gmail.com*

*Osh State University, Osh, Kyrgyzstan*

**Abstract.** *In this article, a system of nonlinear differential equations describing the one-dimensional flow of a reacting mixture of gases in a porous medium is investigated. An unlimited domain is considered. Moreover, the desired functions tend to zero at the initial moment of time, which leads to the degeneracy of the equations. The Cauchy problem for the equations describing flow of a reacting mixture of gases is considered. At the initial time all medium characteristics are known and have various limits at infinity. A system of differential equations is investigated that describes a one-dimensional unsteady flow of a reacting gas mixture. We study the Cauchy problem with degenerate initial data corresponding to one problem. Moreover, the desired functions at the initial moment of time have about one problem at infinity. A feature of flows with finite viscosity is the absence of shock waves in them, i.e. except for the contact, there can be no other strong gap. The existence of a generalized solution is proved by the method of regularization.*

**Keywords:** velocity, density, temperature, magnetic field, electric field, generalized solution, a priori estimates, existence, systems of equations.

Система уравнений, описывающая течение реагирующей смеси газов с учетом пористости среды в массовых лагранжевых координатах, имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \chi \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial c}{\partial x} \right) - c g, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) - r \frac{\partial}{\partial x} (\rho \theta) - \beta(x) |u|^\alpha u,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \rho^{3/2} \theta \frac{\partial c}{\partial x} \right) - r \rho \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \delta c g,$$

здесь  $u, \theta, \rho, c$  – соответственно скорость, абсолютная температура, плотность и массовая концентрация компонент – искомые функции пространственной переменной  $x, x \in R = (-\infty; \infty)$  и времени  $t, t \in [0, T], 0 < T < \infty$ ;  $\mu, r, \lambda, \nu, \chi$  – положительные постоянные, которые в дальнейшем, для простоты, будем предполагать равными единице;  $\beta(x)$  – коэффициент проницаемости – непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x) dx \leq C; \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\beta(x))^{2/(2-3\alpha)} dx \leq C; \quad 0 \leq \alpha < 2/3.$$

В момент времени  $t = 0$  значения функций  $\rho, u, \theta, c$  предполагаются известными:

$$\rho|_{t=0} = \rho^0(x), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), \quad c|_{t=0} = c_0(x), \quad x \in R, \quad (2)$$



причем  $(\rho^0, u_0, \theta_0, c_0)$  - непрерывные,  $0 \leq c_0 \leq 1$ ,  $(\rho^0, \theta_0)$  - ограниченные, неотрицательные функции и имеют нулевые пределы на бесконечности:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho^0(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \theta_0(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} c_0(x) = 0. \quad (3)$$

**Определение.** Обобщенным решением задачи (1) - (3) называется совокупность функций  $(u, \rho, \theta, c)$ , обладающих свойствами

$$(u_x, \theta_x, c_x, \rho, \rho_x, \rho_t) \in L_\infty(0, T; L_2(R)),$$

$$(u_t, \theta_t, c_t, \sqrt{\rho^0} u_{xx}, \sqrt{\rho^0} \theta_{xx}, \sqrt{\rho^0} c_{xx}) \in L_2(\Pi),$$

и удовлетворяющих уравнениям (1) почти всюду в  $\Pi = R \times (0, T)$ .

**Теорема.** Пусть начальные данные (2) удовлетворяют условиям:

$$(\rho^0, u_0, \theta_0, c_0) \in W_2^1(R), \quad (c_0, \theta_0) \in L_1(R), \quad (\rho_x^0)^2 < C \rho^0(x), \quad x \in R,$$

$$\frac{\beta(x)}{\rho^0} \leq C \frac{\rho_x^0}{\rho^0} \in L_2(R), \quad \int_A^{Bx+1} \int_x (\rho_\xi^0)^2 d\xi dx < C \quad \forall A, B \in R, \quad A < B.$$

Функция  $g(\rho, c, \theta) = \rho \eta(c, \theta)$ , где  $\eta(c, \theta)$  предполагается непрерывной, неотрицательной в любой компактной области своих аргументов и удовлетворяющей условию Липшица по  $\theta^{1/2}$ . Тогда в полосе  $\Pi = R \times (0, T)$  с произвольной конечной высотой  $T$ ,  $0 < T < \infty$ , существует обобщенное решение задачи (1) - (3).

Доказательство сформулированной теоремы проведем методом регуляризации. Для этого вместо поставленной задачи будем рассматривать регуляризованную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \rho_\varepsilon^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} &= \chi \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_\varepsilon \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial x} \right) - c_\varepsilon g, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right) - r \frac{\partial}{\partial x} (\rho_\varepsilon \theta_\varepsilon) - \beta(x) |u_\varepsilon|^\alpha u_\varepsilon, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_\varepsilon \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_\varepsilon^{3/2} \theta_\varepsilon \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial x} \right) - r \rho_\varepsilon \theta_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \mu \rho_\varepsilon \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \delta c_\varepsilon g,$$

$$\rho_\varepsilon |_{t=0} = \rho_\varepsilon^0(x), \quad u_\varepsilon |_{t=0} = u_0(x), \quad \theta_\varepsilon |_{t=0} = \theta_0(x), \quad c_\varepsilon |_{t=0} = c_0(x) \quad (5)$$

$$0 < \varepsilon \leq \rho_\varepsilon^0(x) \leq M, \quad 0 \leq \theta_0(x) \leq M, \quad 0 \leq c_0(x) \leq 1,$$

где  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho_\varepsilon^0(x) = \varepsilon$ ,  $\rho_\varepsilon^0 = \rho^0 + \varepsilon$ , причем  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \rho_\varepsilon^0 - \rho^0 \right\|_{W_2^1(K)} = 0$ ,

здесь  $K$  - произвольный компакт в  $R$ . Для регуляризованной задачи теорема существования и единственности локального решения следует из [2, 3]. В дальнейшем индекс  $\varepsilon$  будем опускать. Наша цель заключается в нахождении равномерных по  $\varepsilon$  оценок и осуществлении предельного перехода по  $\varepsilon$ . Примем  $\delta = 1$ . В дальнейшем через  $C, N_i$  будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ .

Первое уравнение системы (4)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho$$

подставим во второе уравнение с последующим интегрированием по  $t$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \ln \rho(x, t) + r \int_0^t \rho(x, \tau) \theta(x, \tau) d\tau \right] = \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho^0(x) - u(x, t) + u_0(x) - \int_0^t \beta(x) |u|^\alpha u d\tau.$$

Вторичное интегрирование по  $x$  при фиксированном  $t$  от точки  $x_0$  до произвольного  $x$  и последующее потенцирование дает равенство:

$$\rho(x, t) \exp \left\{ r \int_0^t \rho(x, \tau) \theta(x, \tau) d\tau \right\} = \rho^0(x) Y(t, x_0) B(x, t) K^{-1}(x, t), \quad (6)$$

где

$$Y(t, x_0) = \frac{\rho(x_0, t)}{\rho^0(x_0)} \exp \left\{ r \int_0^t \rho(x_0, \tau) \theta(x_0, \tau) d\tau \right\},$$

$$B(x, t) = \exp \int_{x_0}^x [u_0(\xi) - u(\xi, t)] d\xi, \quad K(x, t) = \exp \int_0^t \int_0^x \beta(x) |u|^\alpha u d\xi d\tau.$$

В выборе точки  $x_0$  остался произвол. Обе части (6) умножим на  $r\theta(x, t)$  и проинтегрируем по  $t$ :

$$\exp\left\{r\int_0^t \rho(x,\tau)\theta(x,\tau)d\tau\right\} = 1 + r\rho^0(x)\int_0^t Y(\tau,x_0)B(x,\tau)K^{-1}(x,\tau)\theta(x,\tau)d\tau.$$

Возвращаясь к (6), находим

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \rho^0(x)Y(t,x_0)B(x,t)K^{-1}(x,t) \times \\ &\times \left[ 1 + r\rho^0(x)\int_0^t Y(t,x_0)B(x,\tau)K^{-1}(x,\tau)\theta(x,\tau)d\tau \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для вывода необходимых оценок разобьем ось  $R$  и соответственно полосу  $\Pi$  на конечные отрезки и прямоугольники, обладающие свойствами:

$$R = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \bar{\Omega}_N, \quad \Pi = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \bar{Q}_N, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$\Omega_N = \{x \mid A_N < x < A_{N+1}\}, \quad Q_N = \Omega_N \times (0, T), \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \sup_k |A_{k+1} - A_k| < \infty$$

Будем изучать соотношение между искомыми функциями на каждом  $Q_N$ . Воспользуемся произволом для точки  $x_0$ . В дальнейшем всюду будем предполагать, что точка  $x_0$  выбрана в соответствующей  $\Omega_N$ .

При выполнении условий теоремы справедливо неравенство

$$N_1^{-1} \leq B(x,t) \leq N_1 < \infty, \quad (x,t) \in Q_N. \quad (8)$$

Умножая третье уравнение системы (4) на  $u$  и складывая со вторым и четвертым, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + (\lambda - \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + (\chi - \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \\ &- r \frac{\partial}{\partial x} (\rho \theta u) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho^{3/2} \theta \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \beta(x) |u|^a u^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\omega(x,t) = \frac{1}{2} u^2(x,t) + \theta(x,t) + c(x,t)$ .

Из свойств решений для регуляризованной задачи вытекает неотрицательность  $\theta, c$ . Интегрируя последнее равенство по  $R$  и по  $t$ , имеем оценки:

$$\|u(t)\|^2 + \|\theta(t)\|_{1,R} + \|c(t)\|_{1,R} \leq N_2, \quad (10)$$

$$\int_0^T \int \beta(x) |u|^\alpha u^2 dx dt \leq N_3.$$

Отсюда и следует утверждение (8).

При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$N_2^{-1} \leq K(x,t) \leq N_2 < \infty, \quad (x,t) \in Q_N. \quad (11)$$

Применяя неравенство Гельдера, (10), условия для  $\beta(x)$ , получим

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int \beta(\xi) |u|^\alpha u(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| &\leq \int_0^t \int_{A_N}^{A_{N+1}} \beta(x) |u|^{\alpha+1} dx d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t \left( \int_{A_N}^{A_{N+1}} u^2 dx \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \left( \int_{A_N}^{A_{N+1}} \beta^{1-\alpha}(x) dx \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} + C \leq C. \end{aligned}$$

Отсюда следует двойное неравенство (11).

При выполнении условий теоремы для любых  $A, B \in R$ , где  $A < B$  справедливы оценки:

$$B - A - C_0 \sqrt{B - A} \leq \int_A^B \int \frac{\rho^0(\xi)}{\rho(\xi, t)} d\xi dx \leq B - A + C_0 \sqrt{B - A}. \quad (12)$$

Доказательство аналогично [4].

При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$N_3^{-1} \leq Y(t, x_0) \leq N_3 < \infty, \quad \forall (x_0, t) \in Q_N.$$

Доказательство вытекает из представления (7) и оценок (12).

Умножим второе уравнение системы (4) на  $c(x, t)$ . После интегрирования по  $x \in R$  и по  $t \in [0, T]$ , с учетом условий теоремы, заключаем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|c(t)\|^2 + \int_0^T \int (\rho c_x^2 + c^2 g) dx dt \leq N_4.$$

Пусть  $f(x, t)$  – непрерывная функция. Обозначим

$$M_f^N(t) = \max_{x \in \Omega_N} f(x,t), \quad \bar{M}_f(t) = \max_{x \in R} f(x,t), \quad m_f^N(t) = \min_{x \in \Omega_N} f(x,t), \quad \bar{m}_f(t) = \min_{x \in R} f(x,t)$$

При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$\bar{M}_{\rho^0/\rho}(t) \leq N_5, \quad M_{\rho^0/\rho}(t) \leq N_6 \left[ 1 + \int_0^t M_{\rho^0\theta}(\tau) d\tau \right]. \quad (13)$$

Доказательство (13) следует из представления (7).

Получим еще несколько вспомогательных соотношений для температуры. Положим

$$I_0^N(t) = \int_{\Omega_N} \rho^0(x) \theta_x^2(x,t) dx, \quad I_1^N(t) = \int_{\Omega_N} \rho(x,t) \theta_x^2(x,t) dx, \quad \bar{I}_1(t) = \int \rho(x,t) \theta_x^2(x,t) dx,$$

$$I_{01}^N(t) = \int_0^t I_0^N(\tau) d\tau, \quad I_{11}^N(t) = \int_0^t I_1^N(\tau) d\tau, \quad \bar{I}_{11}(t) = \int_0^t \bar{I}_1(\tau) d\tau,$$

где  $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Для удобства, в дальнейшем, индекс  $N$  будем опускать.

При выполнении условий теоремы имеют место неравенства

$$M_{\rho^0/\rho}(t) \leq C I_{11}^{1/2} + C, \quad M_{\rho^0\theta^2}(t) \leq \gamma I_1 + C_\gamma I_{11} + C, \quad (14)$$

где  $\gamma$  – произвольное положительное число.

Доказательство аналогично [4].

Из (14) следуют оценки:

$$\bar{M}_{\rho^0/\rho}(t) \leq C \bar{I}_{11}^{1/2} + C, \quad \bar{M}_{\rho^0\theta^2}(t) \leq \gamma \bar{I}_1 + C_\gamma \bar{I}_{11} + C. \quad (15)$$

Из второго уравнения системы (4) вытекает оценка:  $0 \leq c \leq 1$ .

Умножим второе уравнение системы (4) на  $c(x,t)$ . После интегрирования по  $x \in R$  и по  $t \in [0, T]$ , с учетом условий теоремы, заключаем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|c(t)\|^2 + \int_0^T \int (\rho c_x^2 + c^2 g) dx dt \leq N_7. \quad (16)$$

Умножим второе уравнение системы (4) на  $(\rho c_x)_x$  и проинтегрируем по  $R$ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho c_x^2 dx + \int (\rho c_x)_x^2 dx = -\frac{1}{2} \int \rho^2 c_x^2 u_x dx + \int c g(\rho c_x)_x dx = I_1 + I_2. \quad (17)$$

Используя интегрирование по частям, неравенства Юнга, вложения, липшицевость функции  $g(\rho, c, \theta)$  по  $\theta^{1/2}$  и (10), оценим интегралы в правой части (17). Полученное из (17) неравенство проинтегрируем по  $t$  и перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . В итоге выводим

$$\int \rho c_x^2 dx + \int_0^t \int (\rho c_x)_x^2 dx d\tau \leq N_8, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (18)$$

При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$M_{\rho^0 / \rho} \leq N_9, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (19)$$

Докажем (19). В виду оценок (15), достаточно получить ограниченность  $\bar{I}_{11}$ . Докажем это. Уравнение (9) умножим на  $\omega(x, t)$  и проинтегрируем по  $R$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|^2 + \mu \int \rho \omega_x^2 dx + (\lambda - \mu) \int \rho \theta_x \omega_x dx + \int \beta(x) |u|^\alpha u^2 \omega dx = \\ = r \int u \rho \theta \omega_x dx - \nu \int \rho^{3/2} \theta c_x \omega_x dx - (\chi - \mu) \int \rho c_x \omega_x dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Правая часть по неравенствам Юнга и Коши не превосходит величины

$$\varepsilon \int \rho \omega_x^2 dx + C_\varepsilon \left( \int \rho \theta^2 u^2 dx + \int \rho^2 \theta^2 c_x^2 dx + \int \rho c_x^2 dx + 1 \right),$$

где  $\varepsilon > 0$  - произвольное число. Рассуждая далее аналогично [2], по определению функции  $\omega(x, t)$  имеем при  $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$ :

$$(\mu - \varepsilon) \omega_x^2 + (\lambda - \mu) \theta_x \omega_x \geq (\lambda - 2\varepsilon) \theta_x^2 - 2 \left[ \frac{1}{4} \varepsilon^{-1} (\mu + \lambda)^2 + \lambda + 2\mu + 2\varepsilon \right] (u^2 u_x^2 + c_x^2)$$

Поэтому, взяв  $\varepsilon = \min \left( \frac{1}{8}, \frac{\lambda}{8} \right)$ , из (20) с учетом (13), (18) получим

$$\frac{d}{dt} \|\omega\|^2 + \frac{3\lambda}{2} \int \rho \theta_x^2 dx \leq C_1 \left( \int \rho \theta^2 u^2 dx + \int \rho u^2 u_x^2 dx + \int \rho^2 \theta^2 c_x^2 dx + 1 \right). \quad (21)$$

Если уравнение импульса системы (4) умножить на  $u^3(x, t)$  и проинтегрировать по  $R$ , то придем к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u\|_{4,R}^4 + 3 \int \rho u^2 u_x^2 dx + \int \beta(x) |u|^\alpha u^4 dx = \\ & = 3 \int \rho \theta u^2 u_x dx \leq \frac{3}{2} \int \rho u^2 u_x^2 dx + \frac{3}{2} \int \rho \theta^2 u^2 dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Умножая (22) на  $\frac{2}{3} C_1$  и складывая с (21), с учетом (10), (13)

закключаем

$$\frac{d}{dt} \left( \|\omega\|^2 + \alpha \|u\|_{4,R}^4 + \frac{3\lambda}{2} \bar{I}_{11} \right) \leq C_2 \bar{M}_{\rho^0 \theta^2} + C_3, \quad \alpha = \frac{1}{6} C_1.$$

С учетом (15) имеем неравенство:

$$\frac{d}{dt} \left( \|\omega\|^2 + \alpha \|u\|_{4,R}^4 \right) + \frac{3\lambda}{2} \bar{I}_1 \leq \gamma \bar{I}_1 + C_\gamma \bar{I}_{11} + C.$$

Выбирая  $\gamma$  достаточно малым и применяя неравенство Гронуолла, получим ограниченность функции  $\bar{I}_{11}$ , а следовательно, и оценку (19).

Используя полученные выше оценки, нетрудно получить оценки:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\theta(t)\|^2 + \int_0^T \|\sqrt{\rho} \theta_x\|^2 dt \leq N_{10}, \quad \int_0^T \left( \bar{M}_{\rho^0 \theta^2}(t) + \bar{M}_{\rho^0 \theta}(t) \right) dt \leq N_{11}.$$

$$\int_0^T \int \beta(x) |u|^\alpha u^4 dx dt \leq N_{12}.$$

Из третьего уравнения системы (4), после умножения на  $u(x,t)$ , интегрирования по  $(x,t)$  и некоторых преобразований выводятся оценки

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|^2 + \int_0^T \|\sqrt{\rho} u_x\|^2 dt + \int_0^T \int \beta(x) |u|^\alpha u^2 dx dt \leq N_{13}.$$

При выполнении условий теоремы справедливо неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\rho_x(t) \rho^{-1}(t)\| \leq N_{14}. \quad (23)$$

*Доказательство.* Дифференцируя (7) по  $x$ , имеем [2]:

$$\rho_x(x,t) / \rho(x,t) = A(x,t) +$$

$$+ \rho(x,t)B^{-1}(x,t)Y^{-1}(t,x_0) \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\rho^0(x)} \right) - \int_0^t B(x,\tau)Y(\tau,x_0) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} + \theta A \right) (x,\tau) d\tau \right\}$$

где  $A(x,t) = u_0(x) - u(x,t)$ .

Возьмем нормы в  $L_2(R)$  от обеих частей. С учетом условий теоремы, (13), (16), (18), (19), оценим правую часть. После некоторых преобразований выводим оценку (23).

С учетом (13), (16), (18), (19) из (17) и второго уравнения системы (4) вытекает

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|c_x(t)\|^2 + \int_0^T \left( \left\| \sqrt{\rho^0} c_{xx}(t) \right\|^2 + \|c_t(t)\|^2 \right) dt \leq N_{15}.$$

При выполнении условий теоремы справедливо неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_x(t)\|^2 + \int_0^T \left( \left\| \sqrt{\rho^0} u_{xx}(t) \right\|^2 + \|u_t(t)\|^2 \right) dt \leq N_{16}. \quad (24)$$

Запишем уравнение импульса в развернутом виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \theta - \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta(x) |u|^\alpha u$$

и, умножив на  $u_{xx}$ , проинтегрируем по  $R$ .

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 + \int \rho u_{xx}^2 dx = \int \left( \rho_x \theta u_{xx} + \rho \theta_x u_{xx} - \rho_x u_x u_{xx} - \beta(x) |u|^\alpha u u_{xx} \right) dx \quad (25)$$

Оценим интегралы в правой части (25), учитывая (13), (19):

$$I_1 = \int |\rho_x \theta u_{xx}| dx \leq \left( \int \frac{\rho_x^2}{\rho^2} dx \right)^{1/2} \left( \int \frac{\rho^0}{\rho} \rho^2 \theta^2 u_{xx}^2 dx \right)^{1/2} \leq \delta_1 \int \rho u_{xx}^2 dx + C_{\delta_1} \bar{M} \rho^0 \theta^2$$

$$I_2 = \int |\rho \theta_x u_{xx}| dx \leq \delta_2 \int \rho u_{xx}^2 dx + C_{\delta_2} \int \rho \theta_x^2 dx,$$

$$I_3 = \int |\rho_x u_x u_{xx}| dx \leq (\delta_3 + C_{\delta_4}) \int \rho u_{xx}^2 dx + C \int \rho u_x^2 dx,$$

$$I_4 = \int |\beta(x) |u|^\alpha u u_{xx}| dx \leq \left( \int \rho u_{xx}^2 dx \right)^{1/2} \left( \int \frac{\rho^0}{\rho} \frac{\beta(x)}{\rho^0} \beta(x) |u|^{2(\alpha+1)} dx \right)^{1/2} \leq$$



$$\leq \delta_5 \int \rho u_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} C_{\delta_5} \int \beta(x) |u|^\alpha u^4 dx + \frac{1}{2} C_{\delta_5} \left( \int |u|^2 dx \right)^{3\alpha/2} \left( \int (\beta(x))^{2/(2-3\alpha)} dx \right)^{(2-3\alpha)/2} \leq$$

$$\leq \delta_5 \int \rho u_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} C_{\delta_5} \int \beta(x) |u|^\alpha u^4 dx + C.$$

В итоге из (25) находим неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 + \int \rho u_{xx}^2 dx \leq$$

$$\leq (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + C\delta_4 + \delta_5) \int \rho u_{xx}^2 dx + C \left[ \int \rho u_x^2 dx + \int \rho \theta_x^2 dx + \bar{M}_{\rho^0 \theta^2} + 1 \right].$$

Выбирая  $\delta_i > 0 (i = \overline{1,4})$  из условия  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + C\delta_4 + \delta_5 < 1$  и интегрируя последнее неравенство по  $t$  с учетом полученных ранее оценок, заключаем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_x(t)\|^2 + \int_0^T \int \rho u_{xx}^2 dx dt \leq N_{17}.$$

Используя уравнение импульса, выводим утверждение (24).

Умножая уравнение теплопроводности системы (4) на  $\theta_{xx}$ , после некоторых преобразований можно получить оценку

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\theta_x\|^2 + \int_0^T \left( \|\sqrt{\rho^0} \theta_{xx}\|^2 + \|\theta_t\|^2 \right) dt \leq N_{18}.$$

Доказательство предельного перехода осуществляется так же как в пунктах [2, 4].

Теорема полностью доказана.

### Литература

1. **Бай Ши.** Магнитная газодинамика и динамика плазмы [Текст] / Ши Бай – М.: Мир, 1964. – 301 с.
2. **Антонцев, С. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей [Текст] / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов – Новосибирск : Наука, 1983. – 319 с.

3. **Есекеев, К. Б.** О задаче Коши для уравнений нестационарного течения реагирующей смеси газов [Текст] / К.Б. Есекеев, М.Ж. Есекеева, Д.А. Искендерова // Новосибирск: Наука, 1997. – № 7. – С.178–180.
4. **Смагулов, Ш. С.** Математические вопросы модели магнитной газовой динамики [Текст] / Ш.С. Смагулов, Д.А. Искендерова – Алматы : Гылым, 1997. – 166 с.

УДК 517.928.2

## БУРУЛУУ ЧЕКТИНЕ ЭЭ БОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫ ҮЧҮН КОШИ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

*Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, ф.-м.и.д., профессор,  
dtursunov@oshsu.kg*

*Ош мамлекеттик университети,*

*Зулпукаров Алтынбек Зулпукарович, ф.-м.и.к, доцент,  
Б.Сыдыков атындагы Кыргыз-Өзбек Эл аралык университети,*

*Садиева Акбермет Сайиповна, аспирант*

*Ош мамлекеттик университети,*

*Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** Макалада Волфранг Ричард Вазовдун (25.07.1909-11.09.1993) бир тектүү эмес теңдемеси үчүн баштапкы маселенин асимптотикалык чыгарылышын тургузуу маселеси каралган. В. Вазовдун бир тектүү эмес теңдемелер системасы сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелердин классына таандык. Изилденип жаткан маселенин өзгөчөлүктөрү: 1) баштапкы чекитте негизги матрицанын тескериси жашабайт; 2) кичине параметр туундуунун астында катышат; баштапкы чекиттен башка чекиттерде негизги матрица биринчи даражадагы эки элементардык бөлүүчүгө, ал эми баштапкы чекитте экинчи даражадагы бир элементардык бөлүүчүгө ээ. Мындан сырткары Вазовдун теңдемесинин спектри туруксуз болот. Коюлган маселенин бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы жалпыланган чектик функциялар методунун жардамында тургузулат.

**Ачык сөздөр:** туруксуз спектр, В. Вазовдун теңдемелер системасы, бурулуу чекити, сингулярдык козголгон Кошинин маселеси, кичине параметр, чектик функциялар.

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

*Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д.ф.-м.н., профессор,  
dtursunov@oshsu.kg*

*Ошский государственный университет,  
Зулпукаров Алтынбек Зулпукарович, к.ф.-м.н., доцент,  
Кыргызско-Узбекский Международный университет имени Б.Сыдыкова,  
Садиева Акбермет Сайитовна, аспирант  
Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** В статье рассматривается задача построения асимптотического решения начальной задачи для неоднородного уравнения Волфранга Ричарда Вазова (25.07.1909-11.09.1993). Неоднородная система уравнений В. Вазова относится к классу сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Особенности исследуемой задачи: 1) в начальной точке основная матрица необратима; 2) перед производной присутствует малый параметр; в точках, отличных от начальной точки, главная матрица имеет два элементарных делителя первой степени и один элементарный делитель второй степени в начальной точке. Кроме того, спектр уравнения Вазова неустойчива. Асимптотическое разложение поставленной задачи строится методом обобщенных пограничных функций.

**Ключевые слова:** неустойчивый спектр, система уравнений В.Вазова, точка поворота, сингулярно возмущенная задача Коши, малый параметр, пограничные функции.

## **ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A TURNING POINT**

*Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich,  
doctor of physical and mathematical sciences, professor,  
Osh state university,  
dtursunov@oshsu.kg  
Zulpukarov Altynbek Zulpukarovich,  
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,  
Kyrgyz-Uzbek International University named after B. Sydykov,  
Sadieva Akbermet Sayipovna, postgraduate student  
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan*

**Abstract.** The article deals with the problem of constructing an asymptotic solution of the initial problem for the inhomogeneous Wolfgang Richard Wasow (25.07.1909-11.09.1993) equation. The inhomogeneous system of equations of V. Vazov belongs to the class of singularly perturbed ordinary differential equations. Features of the problem under study: 1) at the initial point, the main matrix is irreversible; 2) there is a small

parameter before the derivative; at points other than the starting point, the main matrix has two elementary divisors of the first degree and one elementary divisor of the second degree at the starting point. In addition, the spectrum of the Vazov equation is unstable. The asymptotic expansion of the formulated problem is constructed by the method of generalized boundary functions.

**Keywords:** unstable spectrum, V. Vazov's system of equations, turning point, singularly perturbed Cauchy problem, small parameter, boundary functions.

**Маселенин коюлушу.** Сингулярдык козголгон, бир тектүү эмес, сызыктуу, биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн Кошинин маселесин изилдейбиз:

$$\begin{cases} \varepsilon y'(x) = z(x) + f_1(x), \\ \varepsilon z'(x) = -x \cdot y(x) + f_2(x), \end{cases} \quad x \in (0,1], \quad (1)$$

$$y(0) = y^0, \quad z(0) = z^0, \quad (2)$$

мында  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $f_1, f_2 \in C^\infty[0,1]$ ,  $y^0, z^0 - \text{const}$ ,  $y(x), z(x)$  белгисиз функциялар.

Эгерде төмөнкүдөй белгилөө кийирип алсак:

$$W(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x & 0 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix},$$

анда (1)-(2) маселе төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varepsilon W'(x) = A(x)W(x) + F(x), \quad x \in (0,1], \quad W(0) = W^0. \quad (3)$$

Белгилеп кетүү керек,  $\varepsilon W'(x) = A(x)W(x)$  бир тектүү система Вазовдун [1]-[5] эмгектеринде  $x \neq 0$  болгон учурда изилденген. Себеби  $x \neq 0$  болгондо  $A(x)$  матрицасы биринчи даражадагы эки элементардык бөлүүчүгө, ал эми  $x=0$  болгондо экинчи даражадагы бир элементардык бөлүүчүгө ээ. Ошондой болсо дагы  $\lambda^2 - x$  эки мүчөсү каалаган  $x$  тер үчүн турактуу сандан айрымаланган жалгыз инварианттык көбөйтүүчү болот [1, 182-бет].

Биз  $x \in [0,1]$  кесиндиде (1)-(2) маселенин чыгарылышынын кичине параметр нөлгө умтулгандагы бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузабыз.

**Маселенин чыгарылышы.** Алгач тышкы чыгарылышты тургузабыз, анткени ал бизге ички чыгарылышты тургузууда кандай өзгөртүп түзүү керектигин аныктап берет. Кичине параметр методун колдонуп, тышкы чыгарылышты төмөнкү катарлар көрүнүштө издейбиз [6]:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \\ z(x) &= z_0(x) + \varepsilon z_1(x) + \varepsilon^2 z_2(x) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

ушул (4)- катарларды (1)- системага коюуп  $y_i(x)$  жана  $z_i(x)$  лерди аныктап, закон ченемдүүлүктү таап алабыз:

$$\begin{cases} \varepsilon (y'_0(x) + \varepsilon y'_1(x) + \varepsilon^2 y'_2(x) + \dots) = z_0(x) + \varepsilon z_1(x) + \varepsilon^2 z_2(x) + \dots + f_1(x) \\ \varepsilon (z'_0(x) + \varepsilon z'_1(x) + \varepsilon^2 z'_2(x) + \dots) = -x \cdot (y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots) + f_2(x) \end{cases}$$

мындан, кичине параметр методунун негизги маңызы боюнча, кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарлайбыз:

$$\begin{aligned} z_0(x) + f_1(x) = 0 &\Rightarrow z_0(x) = -f_1(x); & -xy_0(x) + f_2(x) = 0 &\Rightarrow y_0(x) = x^{-1}f_2(x); \\ z_k(x) = y'_{k-1}(x), k \in N; & & y_k(x) = -x^{-1}z'_{k-1}(x), k \in N. \end{aligned}$$

Аныкталган белгисиз  $y_i(x)$  жана  $z_i(x)$  функциялардын өзгөчөлүктөрүн көрсөтүп жазабыз:

$$z_1(x) = y'_0(x) = x^{-2}\tilde{z}_1(x), \quad y_1(x) = -x^{-1}z'_0(x) = x^{-1}\tilde{y}_1(x),$$

$$z_2(x) = y'_1(x) = x^{-2}\tilde{z}_2(x), \quad y_2(x) = -x^{-1}z'_1(x) = x^{-4}\tilde{y}_2(x),$$

$$z_{2k}(x) = y'_{2k-1}(x) = x^{-2-3(k-1)}\tilde{z}_{2k}(x), \quad y_{2k}(x) = -x^{-1}z'_{2k-1}(x) = x^{-1-3k}\tilde{y}_{2k}(x), k \in N,$$

$$z_{2k+1}(x) = y'_{2k}(x) = x^{-2-3k}\tilde{z}_{2k+1}(x), \quad y_{2k+1}(x) = -x^{-1}z'_{2k}(x) = x^{-1-3k}\tilde{y}_{2k+1}(x), k \in N.$$

Табылган  $y_i(x)$  жана  $z_i(x)$  функциялардын өзгөчөлүктөрүн эске алуу менен (4)- катарга алып барып коебуз:

$$\begin{aligned}
y(x) &= x^{-1}f_2(x) + \varepsilon x^{-1}\tilde{y}_1(x) + \varepsilon^2 x^{-4}\tilde{y}_2(x) + \varepsilon^3 x^{-4}\tilde{y}_3(x) + \dots + \\
&\quad + (\varepsilon^2 x^{-3})^k x^{-1}(\tilde{y}_{2k}(x) + \varepsilon\tilde{y}_{2k+1}(x)) + \dots \\
z(x) &= -f_1(x) + \varepsilon x^{-2}\tilde{z}_1(x) + \varepsilon^2 x^{-2}\tilde{z}_2(x) + \varepsilon^3 x^{-5}\tilde{z}_3(x) + \varepsilon^4 x^{-5}\tilde{z}_4(x) + \dots + \\
&\quad + \varepsilon x^{-2}(\varepsilon^2 x^{-3})^k (\tilde{z}_{2k+1}(x) + \varepsilon\tilde{z}_{2k+2}(x)) + \dots
\end{aligned}$$

Тургузулган тышкы чыгарылыш баштапкы шартты канааттандырбайт жана баштапкы чекиттин чеке белинде асимптотикалык мүнөзүн жоготот. Бирок тышкы чыгарылыштан биз ички чыгарылыш кандай өзгөрүлмө боюнча ажыралышы керек деген маалыматты алабыз:

$$\varepsilon^2 x^{-3} = \|x = \mu^2 t, \quad \mu^3 = \varepsilon\| = \mu^6 (\mu^2 t)^{-3} = t^{-3}.$$

(1)-(2)- маселенин бир калыптагы толук асимптотикалык ажыралмасын жалпыланган чектик функциялар методун колдонуп тургузабыз [7], [8].

Асимптотикалык чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(x) + \frac{1}{\mu^2} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi_j(t); \quad z(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_j(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j(t), \quad (5)$$

мында  $y_j(x)$  жана  $z_j(x)$  – жылма тышкы чыгарылыштын мүчөлөрү;

$\pi_j(t)$  жана  $w_j(t)$  – чектик функциялар,  $t = \frac{x}{\mu^2}$ ,  $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$ .

(5)- катарларды (1)- тендемеге алып барып коюуп төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{cases}
\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} y'_j(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi'_j(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_j(x) + f_1(x) \\
\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} z'_j(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w'_j(t) = -t \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi_j(t) - x \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(x) + f_2(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k
\end{cases} \quad (6)$$

(5)- катарларды (2)- баштапкы шартта алып барып коюуп төмөнкү катыштарды алабыз:

$$\begin{aligned}
\pi_{3k}(0) &= \pi_{3k+1}(0) = 0, k = 0, 1, \dots; \\
\pi_2(0) &= y^0 - y_0(0), \pi_{3k+2}(0) = -y_k(0), k = 1, 2, \dots; \\
w_{3k}(0) &= w_{3k+2}(0) = 0, k = 0, 1, \dots; \\
w_1(0) &= z^0 - z_0(0), w_{3k+1}(0) = -z_k(0), k = 1, 2, \dots
\end{aligned} \quad (7)$$

(6)- системадан жылма тышкы чыгарылыштын мүчөлөрүн аныктап алабыз:

$$\begin{aligned}
z_0(x) &= -f_1(x), & y_0(x) &= \frac{f_2(x) - h_0}{x} = \tilde{y}_0(x), & h_0 &= f_2(0); \\
z_1(x) &= \tilde{y}'_0(x), & y_1(x) &= -\frac{z'_0(x) + h_1}{x} = \tilde{y}_1(x), & h_1 &= -z'_0(0); \\
z_k(x) &= \tilde{y}'_{k-1}(x), & k &\in N, \\
y_k(x) &= -\frac{z'_{k-1}(x) + h_k}{x} = \tilde{y}_k(x), & h_k &= -z'_{k-1}(0), & k &\in N;
\end{aligned} \tag{8}$$

Эми чектик функцияларды тургузууга киришебиз. (6)- системадан төмөнкү системаны бөлүп алабыз:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi'_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j(t), \\ \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w'_j(t) = -t \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi_j(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k \end{cases} \tag{9}$$

мындан (7)- баштапкы шарттарды эске алып, төмөнкү системаларды алабыз:

$$\begin{cases} \pi'_{3k}(t) = w_{3k}(t), & t \in [0, \mu^{-2}], & \pi_{3k}(0) = 0, \\ w'_{3k}(t) = -t\pi_{3k}(t) + h_k, & & w_{3k}(0) = 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \pi'_{3k+1}(t) = w_{3k+1}(t), & t \in [0, \mu^{-2}], & \pi_{3k+1}(0) = 0 \\ w'_{3k+1}(t) = -t\pi_{3k+1}(t), & & w_1(0) = z^0 - z_0(0), w_{3k+1}(0) = -z_k(0); \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \pi'_{3k+2}(t) = w_{3k+2}(t), & t \in [0, \mu^{-2}], & \pi_2(0) = y^0 - y_0(0), \pi_{3k+2}(0) = -y_k(0), \\ w'_{3k+2}(t) = -t\pi_{3k+2}(t), & & w_{3k+2}(0) = 0; \end{cases} \tag{12}$$

(10), (11) жана (12)- Кошинин маселелеринин системаларынын чыгарылыштарынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөөчү лемманы келтиребиз.

**Лемма.** Төмөнкү баштапкы маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз:

$$\begin{cases} v'(t) = u(t), & t \in [0, \mu^{-2}], & v(0) = \alpha, \\ u'(t) = -tv(t) + h, & & u(0) = \beta, & \alpha, \beta, h = const. \end{cases}$$

**Далилдөө.** Системанын биринчи теңдемесинен туунду алабыз:

$$v'(t) = u(t) \Rightarrow v''(t) = u'(t),$$

акыркы барабардыкты системанын экинчи теңдемесине коюуп жана баштапкы шарттарды эске алып, төмөнкү маселени алабыз:



$$v''(t) = -tv(t) + h, v(0) = \alpha, v'(0) = \beta.$$

Бизге белгилүү болгондой [6],  $v''(t) = -tv(t) + h$  бир тектүү эмес тендеменин жалпы чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$v(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) + h\psi(t), \quad \psi(t) = \frac{\pi}{3} \int_{\infty}^t (v_2(t)v_1(\tau) - v_2(\tau)v_1(t)) d\tau,$$

мында  $v_1(t) = \sqrt{t} J_{1/3}(2t^{3/2}/3)$ ,  $v_2(t) = \sqrt{t} Y_{1/3}(2t^{3/2}/3)$ .

Бул эки функциянын негизги касиеттерин белгилеп кетебиз:

$$v_{1,2}(t) = O(t^{-1/4}), t \rightarrow \infty; v_1(0) = 0, v_1'(0) \neq 0; v_2(0) \neq 0, v_2'(0) = 0.$$

Бул касиеттерди эске алып жалпы чыгарылыштагы эрктүү турактуулардын маанилерин аныктап алабыз:

$$\begin{cases} c_2 v_2(0) = \alpha - h\psi(0) \\ c_1 v_1'(0) = \beta - h\psi'(0) \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{\alpha - h\psi(0)}{v_2(0)}; \quad c_1 = \frac{\beta - h\psi'(0)}{v_1'(0)};$$

Демек,

$$v(t) = \frac{\beta - h\psi'(0)}{v_1'(0)} v_1(t) + \frac{\alpha - h\psi(0)}{v_2(0)} v_2(t) + h\psi(t),$$

$$u(t) = v'(t) = \frac{\beta - h\psi'(0)}{v_1'(0)} v_1'(t) + \frac{\alpha - h\psi(0)}{v_2(0)} v_2'(t) + h\psi'(t).$$

Ушул лемманын негизинде (10), (11) жана (12)- системалардын чыгарылыштарынын жашашы жана жалгыздыгы келип чыгат жана бул чыгарылыштар чек аралык катмардын ичинде гана маанилүү болуп чек аралык катмардын сыртында кичине параметр нөлгө умтулганда маанилүү болбой калат. Ошондуктан бул функцияларды чектик функциялар деп аташат:

$$\pi_{3k}(t) = -\frac{h_k \psi'(0)}{v_1'(0)} v_1(t) - \frac{h_k \psi(0)}{v_2(0)} v_2(t) + h_k \psi(t),$$

$$w_{3k}(t) = -\frac{h_k \psi'(0)}{v_1'(0)} v_1'(t) - \frac{h_k \psi(0)}{v_2(0)} v_2'(t) + h_k \psi'(t);$$

$$\pi_{3k+1}(t) = \frac{w_{3k+1}(0)}{v_1'(0)} v_1(t), \quad w_{3k+1}(t) = \frac{w_{3k+1}(0)}{v_1'(0)} v_1'(t), \quad (13)$$

$$\pi_{3k+2}(t) = \frac{\pi_{3k+2}(0)}{v_2(0)} v_2(t), \quad w_{3k+2}(t) = \frac{\pi_{3k+2}(0)}{v_2(0)} v_2'(t),$$

Натыйжада биз төмөнкү теореманы далилдедик

**Теорема.** (1)-(2) - Коши маселесинин чыгарылышы үчүн кичине параметр нөлгө умтулганда,  $x \in [0,1]$  кесиндиде төмөнкү формалдуу асимптотикалык ажыралма орун алат:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(x) + \frac{1}{\mu^2} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi_j(t); \quad z(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_j(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j(t),$$

мында  $y_j(x)$  жана  $z_j(x)$  функциялар (8)де,  $\pi_j(t)$  жана  $w_j(t)$  лар (13)тө аныкталган.

#### Адабияттар

1. *Wasow W.* Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publishers, New York. 1965.
2. *Wasow W.* On boundary layer problems in the theory of ordinary differential equations, Mathematics Research Center, University of Wisconsin–Madison, Technical Summary Report, 2244. 1981.
3. *Wasow W.* A turning point problem for a system of two linear differential equations, /. Math. Phys., 38 A960), 257—278.
4. *Wasow W.* Turning point problems for systems of linear equations, I. The formal theory, Comm. Pure Appl. Math., 14 A961), 657–673.
5. *Wasow W.* Turning point problems for systems of linear differential equations, II. The analytic theory, Comm. Pure Appl. Math., 15 A962), 173–187.
6. *Турсунов Д.А.,* Кожобеков К.Г., Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота, Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 156, ВИНТИ РАН, М., 2018, 84–88; J. Math. Sci. (N. Y.), 254:6 (2021), 788–792.
7. *Турсунов Д.А.,* Кожобеков К.Г. Асимптотическое решение задачи Неймана с нерегулярной особой точкой. Дифференциальные уравнения, геометрия и топология, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 201, ВИНТИ РАН, М., 2021, 98–102.
8. *Кожобеков К.Г.* Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 29:3 (2019), 332–340.

УДК 517.928

**ПРИБЛИЖЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ  
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ КОЛЬЦА**

*Халматов Анвар Авазович, к.ф.-м.н., [haa83@mail.ru](mailto:haa83@mail.ru)*

*Камилова Тургунной Хамидуллаевна, магистрант,  
[kamilovaturgunoy6@gmail.com](mailto:kamilovaturgunoy6@gmail.com)*

*Мамыталиева Нархан Мамыталиевна, магистрант  
Кыргызского-Узбекского Международного университета  
имени Б.Сыдыкова, Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** В данной работе рассматривается неоднородная первая краевая задача, т.е. задача Дирихле в кольце для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными содержащий малый параметр перед лапласианом. Потенциал уравнения является гладкой функцией в кольце. Нас интересует влияние малого параметра на решение задачи Дирихле в кольце, при стремлении малого параметра к нулю справа. Для построения приближенно-асимптотического решения применяем метод Вишика-Люстерника, так называемый метод погранслоя. Следует отметить, что первоначальные идеи обоснования техники асимптотического интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных принадлежит Гольденвайзеру. Гольденвайзер представил свою идею при анализе уравнения теории оболочек. Если погранслоем в теории упругости называют краевым эффектом, то в физике высоких энергий называют скейлингом, а в теории управления это жесткие системы. В результате нами построено равномерное асимптотическое разложение решения первой краевой задачи в кольце по малому параметру до второго порядка точности. Указана скорость сходимости остаточного члена к нулю при малых значениях малого параметра.

**Ключевые слова:** сингулярное возмущение, первая краевая задача, уравнение эллиптического типа, метод Вишика-Люстерника, лапласиан, потенциал.

**АЛКАК ҮЧҮН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН БИРИНЧИ ЧЕКТИК  
МАСЕЛЕНИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН-АСИМПТОТИКАЛЫК  
ЧЫГАРЫЛЫШЫ**

*Халматов Анвар Авазович, ф.-м.и.к., [haa83@mail.ru](mailto:haa83@mail.ru)*

*Камилова Тургуной Хамидуллаевна, магистрант,  
[kamilovaturgunoy6@gmail.com](mailto:kamilovaturgunoy6@gmail.com)*

*Мамыталиева Нархан Мамыталиевна, магистрант  
Б.Сыдыков атындагы Кыргыз-Өзбек эл аралык университети,  
Ош, Кыргызстан.*

**Аннотация.** Бул макалада биз бир тектүү эмес биринчи чектик маселени карайбыз, б.а. алкакта сызыктуу, бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү лапласианынын астында кичи параметрди кармаган эллиптикалык типтеги теңдеме үчүн Дирихленин маселеси. Теңдеменин потенциалы алкакта жылма функция. Бизди кичинекей параметрдин алкакта Дирихле маселесинин чыгарылышына тийгизген таасири кызыктырат, анткени кичинекей параметр оң тараптан нөлгө умтулат. Болжолдуу асимптотикалык чыгарылышты тургузуу үчүн Вишик-Люстерник ыкмасын колдонобуз. Натыйжада биз кичинекей параметрге карата экинчи тартиптеги тактыкта алкактагы биринчи чектик маселенин чыгарылышынын биркалыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургуздук. Кичинекей параметрдин кичине маанилери үчүн калдык мүчөнүн нөлгө умтулуу ылдамдыгы көрсөтүлгөн.

**Ачык сөздөр:** сингулярдык козголуу, биринчи чектик маселе, эллиптикалык типтеги теңдеме, Вишик-Люстерник методу, Лапласиан, потенциал.

## **APPROXIMATE-ASYMPTOTIC SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBATED FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A RING**

*Khalmatov Anvar Avazovich*

*Candidate of physical and mathematical sciences*

*[haa83@mail.ru](mailto:haa83@mail.ru)*

*Kamilova Turgunoy Khamidullaevna., masters student,*

*[kamilovaturgunoy6@gmail.com](mailto:kamilovaturgunoy6@gmail.com)*

*Mamytaliyeva Narkhan Mamytaliyeva, masters student,*

*Kyrgyz-Uzbek International University named after B.Sydykova,*

*Osh, Kyrgyzstan.*

**Abstract.** In this paper, we consider an inhomogeneous first boundary value problem, i.e. the Dirichlet problem in rings for a linear inhomogeneous second-order elliptic equation with two independent variables containing a small parameter in front of the Laplacian. The potential of the equation is a smooth function in the annulus. We are interested in the

*influence of a small parameter on the solution of the Dirichlet problem in a ring, as the small parameter tends to zero from the right. To construct an approximately asymptotic solution, we use the Vishik-Lyusternik method. As a result, we have constructed a uniform asymptotic expansion of the solution of the first boundary value problem in a ring in a small parameter up to the second order of accuracy in a small parameter. The rate of convergence of the remainder term to zero for small values of the small parameter is indicated.*

**Key words:** *singular perturbation, first boundary value problem, elliptic type equation, Vishik-Lyusternik method, Laplacian, potential.*

**Введение.** Как известно, математические модели стационарных процессов характеризуются отдельными дифференциальными уравнениями эллиптического типа. Например, уравнения Лапласа и Пуассона характеризуют различные стационарные физические поля, стационарный аналог известного уравнения Шредингера в квантовой механике и уравнения Гельмгольца также выражаются уравнениями эллиптического типа, уравнение эллиптического типа, являющееся стационарным аналогом системы уравнений Навье-Стокса, характеризует любое течение. Ряд ученых проводили исследования дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярным возмущением [1]-[6]. Класс сингулярно возмущенных задач с точным решением очень узок, почти отсутствует. Поэтому построение асимптотики решения подобных задач на сегодняшний день является актуальным.

**Постановка задачи.** Исследуем задачу Дирихле

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right) - p(x, y)u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$u(x, y) = \psi(x, y), (x, y) \in D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = a^2, 0 < a = const\}, \quad (2)$$

$$u(x, y) = \psi_2(x, y), (x, y) \in D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = b^2, 0 < a < b = const < \infty\}, \quad (3)$$

где  $0 < \varepsilon$  – малый параметр ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ),  $0 < p_0 < p(x, y)$ ,  $f(x, y)$  – известные, достаточно гладкие функций в замкнутой области  $\bar{D}$ ,

$D = \{(x, y) | 0 < a^2 < x^2 + y^2 < b^2 < \infty, 0 < a, b = const\}$  – кольцо.

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение решения задачи (1)-(3), когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Уравнение (1) является сингулярно возмущенной [5]. Попробуем построить равномерное приближение решения задачи (1)-(3) при стремлении малого параметра к нулю. Для решения поставленной задачи применяем метод Вишика-Люстерника [5].

Приближенное решение будем искать в виде:

$$u(x, y) = v(x, y) + w^a(\tau, \varphi) + w^b(\eta, \varphi) + R(x, y), \quad (4)$$

где

$$v(x, y) = v_0(x, y) + \varepsilon v_1(x, y),$$

$$w^a(\tau, \varphi) = w_0^a(\tau, \varphi) + \mu w_1^a(\tau, \varphi) + \mu^2 w_2^a(\tau, \varphi),$$

$$w^b(\eta, \varphi) = w_0^b(\eta, \varphi) + \mu w_1^b(\eta, \varphi) + \mu^2 w_2^b(\eta, \varphi),$$

$$\tau = (\rho - a) / \mu, \quad \eta = (b - \rho) / \mu, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

$R(x, y)$  – остаточный член.

Подставляя (4) в (1) имеем:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left( \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) - p(x, y)v(x, y) + \\ & + \varepsilon \left( \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 w^a}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\mu(a + \mu\tau)} \frac{\partial w^a}{\partial \tau} + \frac{1}{(a + \mu\tau)^2} \frac{\partial^2 w^a}{\partial \varphi^2} \right) + \\ & + \varepsilon \left( \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 w^b}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\mu(b - \mu\eta)} \frac{\partial w^b}{\partial \eta} + \frac{1}{(b - \mu\eta)^2} \frac{\partial^2 w^b}{\partial \varphi^2} \right) + \\ & + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 R(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R(x, y)}{\partial y^2} \right) - p(x, y)R(x, y) = f(x, y), \end{aligned}$$

Отсюда составим следующие уравнения

$$-p(x, y)v_0(x, y) + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 v_0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0(x, y)}{\partial y^2} - p(x, y)v_1(x, y) \right) = f(x, y), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_0^a}{\partial \tau^2} - p_0(\varphi)w_0^a + \mu \left( \frac{\partial^2 w_1^a}{\partial \tau^2} - p_0(\varphi)w_1^a + \frac{1}{a + \mu\tau} \frac{\partial w_0^a}{\partial \tau} \right) + \\ & + \mu^2 \left( \frac{\partial^2 w_2^a}{\partial \tau^2} - p_0(\varphi)w_2^a + \frac{1}{a + \mu\tau} \frac{\partial w_1^a}{\partial \tau} + \frac{1}{(a + \mu\tau)^2} \frac{\partial^2 w_0^a}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_0^b}{\partial \eta^2} - \tilde{p}_0(\varphi)w_0^b + \mu \left( \frac{\partial^2 w_1^b}{\partial \eta^2} - \tilde{p}_0(\varphi)w_1^b - \frac{1}{b - \mu\eta} \frac{\partial w_0^b}{\partial \eta} \right) + \\ & + \mu^2 \left( \frac{\partial^2 w_2^b}{\partial \eta^2} - \tilde{p}_0(\varphi)w_2^b - \frac{1}{b - \mu\eta} \frac{\partial w_1^b}{\partial \eta} + \frac{1}{(b - \mu\eta)^2} \frac{\partial^2 w_0^b}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left( \frac{\partial^2 R(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R(x, y)}{\partial y^2} \right) - p(x, y)R(x, y) = -\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial y^2} \right) - \\ & - \frac{\mu^3}{a + \mu\tau} \frac{\partial w_2^a}{\partial \varphi} - \frac{\mu^3}{(a + \mu\tau)^2} \frac{\partial^2 w_1^a}{\partial \varphi^2} - \frac{\mu^4}{(a + \mu\tau)^2} \frac{\partial^2 w_2^a}{\partial \varphi^2} + \\ & + \frac{\mu^3}{b - \mu\eta} \frac{\partial w_2^b}{\partial \varphi} - \frac{\mu^3}{(b - \mu\eta)^2} \frac{\partial^2 w_1^b}{\partial \varphi^2} - \frac{\mu^4}{(b - \mu\eta)^2} \frac{\partial^2 w_2^b}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Равенство (5) расщепляется на два уравнения:

$$-p(x, y)v_0(x, y) = f(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 v_0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0(x, y)}{\partial y^2} - p(x, y)v_1(x, y) = 0,$$

Из первого соотношения имеем:

$$-p(x, y)v_0(x, y) = f(x, y) \Rightarrow v_0(x, y) = -\frac{f(x, y)}{p(x, y)};$$

а из второго:

$$v_1(x, y) = -\frac{1}{p(x, y)} \left( \frac{\partial^2 v_0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0(x, y)}{\partial y^2} \right).$$

По условию задачи функции  $f(x, y)$  и  $p(x, y)$  достаточно гладкие и функция  $p(x, y)$  положительна во всей замкнутой области  $\bar{D}$ . Поэтому  $v_0(x, y)$  и  $v_1(x, y)$  тоже будут достаточно гладкими функциями.

Перейдем к равенству (6). Имеем:

$$\frac{\partial^2 w_0^a}{\partial \tau^2} - p_0(\varphi)w_0^a = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 w_1^a}{\partial \tau^2} - p_0(\varphi)w_1^a = -\frac{1}{a + \mu\tau} \frac{\partial w_0^a}{\partial \tau}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w_2^a}{\partial \tau^2} - p_0(\varphi)w_2^a = -\frac{1}{a + \mu\tau} \frac{\partial w_1^a}{\partial \tau} - \frac{1}{(a + \mu\tau)^2} \frac{\partial^2 w_0^a}{\partial \varphi^2}; \quad (11)$$

Подставляя соотношение (4) в граничные условия (2) и (3) имеем:

$$w^a(0, \varphi) = \psi_1(\varphi) - \tilde{v}(a, \varphi), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w^a(\tau, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]; \quad (12)$$

$$w^b(0, \varphi) = \psi_2(\varphi) - \tilde{v}(b, \varphi), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w^b(\tau, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]; \quad (13)$$

$$R(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = 0; \quad R(x, y)|_{x^2+y^2=b^2} = 0; \quad (14)$$

где  $v(x, y) = \tilde{v}(\rho, \varphi)$ .

Из соотношения (12) имеем:

$$w_0^a(0, \varphi) = \psi_1(\varphi) - \tilde{v}_0(a, \varphi), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_0^a(\tau, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]; \quad (15)$$

$$w_1^a(0, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_1^a(\tau, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]; \quad (16)$$

$$w_2^a(0, \varphi) = -\tilde{v}_1(a, \varphi), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_2^a(\tau, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (17)$$

Решения задач (9), (15); (10), (16) и (11), (17) существуют, единственны и экспоненциально малы вне пограничного слоя [5]:

$$w_0^a(\tau, \varphi) = (\psi_1(\varphi) - \tilde{v}(a, \varphi))e^{-\sqrt{p_0(\varphi)}\tau}, \quad w_i^a(\tau, \varphi) = O(e^{-\sqrt{p_0(\varphi)}\tau}), \quad \tau \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2.$$

Аналогично исследуется погранслоем в окрестности окружности  $x^2+y^2=b^2$ , т.е. уравнение (7) с краевым условием (13). В результате получим:

$$w_0^b(\eta, \varphi) = (\psi_2(\varphi) - \tilde{v}(b, \varphi))e^{-\sqrt{\tilde{p}_0(\varphi)}\eta},$$

$$w_i^b(\eta, \varphi) = O(e^{-\sqrt{\tilde{p}_0(\varphi)}\eta}), \quad \eta \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2.$$

Применяя свойство гладкости функций  $v_1(x, y)$ ,  $w_i^a(\tau, \varphi)$ ,  $w_i^b(\eta, \varphi)$ ,  $i=1, 2$  в соответствующих областях, уравнение (8) можно записать в виде:

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^2 R(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R(x, y)}{\partial y^2} \right) - p(x, y)R(x, y) = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (x, y) \in D, \quad (18)$$

Для оценки решения задачи (18), (14) применяя метод дифференциальных неравенств [5], получаем:

$$R(x, y) = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (x, y) \in \bar{D}.$$

Доказана

**Теорема.** Для решения первой краевой задачи (1)-(3) в замкнутой области  $\bar{D}$  при стремлении малого параметра  $\varepsilon$  к нулю справедливо следующее асимптотическое приближение:



$$\begin{aligned}
u(x, y) = & -\frac{f(x, y)}{p(x, y)} + \frac{1}{p(x, y)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{f(x, y)}{p(x, y)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{f(x, y)}{p(x, y)} \right) \right) + \\
& + (\psi_1(\varphi) - \tilde{v}(a, \varphi)) e^{-\sqrt{p_0(\varphi)}\tau} + \mu e^{-\sqrt{p_0(\varphi)}\tau} \tau \tilde{w}_1^a(\tau, \varphi) + \mu^2 e^{-\sqrt{p_0(\varphi)}\tau} \tau \tilde{w}_2^a(\tau, \varphi) + \\
& + (\psi_2(\varphi) - \tilde{v}(b, \varphi)) e^{-\sqrt{\tilde{p}_0(\varphi)}\eta} + \mu e^{-\sqrt{\tilde{p}_0(\varphi)}\eta} \eta \tilde{w}_1^b(\eta, \varphi) + \mu^2 e^{-\sqrt{\tilde{p}_0(\varphi)}\eta} \eta \tilde{w}_2^b(\eta, \varphi) + \\
& + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

## Литература

1. **Бутузов, В. Ф.** Асимптотика и устойчивость решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехкратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. матем. –2017. – Т. 81. – Вып. 3. – С. 21–44.
2. **Зайцев, А. Б.** О принципе максимума для решений эллиптических уравнений второго порядка // Изв. вузов. Матем. –2020. – № 8. – С. 11–17.
3. **Tursunov D. A., Orozov M.O., Khalmatov A.A.** Asymptotics of the Solution to the Boundary-Value Problems with Non Smooth Coefficient // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 6. –P. 1115-1122.
4. **Khalmatov, A. A.** Analysis of finding a solution to modular equations when the equation contains two or more modules / A. A. Khalmatov, G. A. Dadazhanova, K. A. Abbazova, N. Sayfiddin K // Science. Education. Engineering. – 2022. – No. 3(75). – P. 49-57. – DOI 10.54834/16945220\_2022\_3\_49. – EDN JQQTXH.
5. **Khalmatov, A. A.** Spice of solutions to singularly perturbed equations / A. A. Khalmatov, K. A. Abbazova, G. Kanybek K, A. Baltabaev // Science. Education. Engineering. – 2022. – No. 3(75). – P. 57-63. – DOI 10.54834/16945220\_2022\_3\_57. – EDN QCRAZR.
6. **Halmatov, A. A.** Construction of the asymptotics of the solution of a singularly perturbed nonlinear equation with a singular point / A. A. Halmatov, A. A. Baltabaeva, K. G Kanybek // Science. Education. Engineering. – 2021. – No. 3(72). – P. 34-40. – DOI 10.54834/16945220\_2021\_3\_34. – EDN LWIYNU.
7. **Halmatov, A. A.** Construction of the asymptotic of the solution of a singularly perturbed partial differential equation with a special Lin / A. A. Halmatov, N. Nishanbaeva, K. A Absatar // Science. Education. Engineering. – 2021. – No. 3(72). – P. 29-33. – DOI 10.54834/16945220\_2021\_3\_29. – EDN UHGWZY.

УДК 517.956

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРАВОЙ ЧАСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

*Халматов Анвар Авазович, к.ф.-м.н., доцент, haa83@mail.ru*  
*Каландарова Зилола, магистрант, zkalandarova\_mag@gmail.com*  
*Кыргызско-Узбекского Международного университета*  
*имена Б.Сыдыкова,*  
*Каныбек кызы Гулнур, магистрант, kanybekkyzyg@gmail.com*  
*Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** Предметом исследования является неоднородное, линейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с двумя независимыми переменными. Целью исследования является нахождение решения удовлетворяющих как начальным, так и однородным краевым условиям первого рода. Интегральные, интегро-дифференциальные уравнения можно встретить во всех областях науки, например уравнение переноса, возникающее в процессах замедления нейтронов, играющее большую роль в современной физике. Мы знаем, что колебания тонкой проволоки можно выразить отдельными дифференциальными уравнениями второго порядка. Если вместо проволоки рассматривать тонкую сплошную балку (тонкий молоток), то процесс ее колебаний выражается дифференциальными уравнениями четвертого порядка. Такие проблемы возникают при проектировании тяжелой техники. Для построения решения была применена формула Дирихле для двойного интеграла, вследствие которого получаются интегральные уравнения Вольтерра с тремя неизвестными. Формула Дирихле была использована для решения задачи Абеля. В заключении была доказана основная теорема о существовании решения обратной задачи, удовлетворяющих выше указанным условиям.

**Ключевые слова.** Сингулярно возмущенный, слабо возмущенный, точка поворота.

## ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕНИН ОҢ ЖАГЫН АНЫКТОО ЖӨНҮНДӨГҮ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕ

*Халматов Анвар Авазович, ф.-м.и.к., доцент, haa83@mail.ru*  
*Каландарова Зилола, магистрант, zkalandarova\_mag@gmail.com*

*Б.Сыдыков атындагы Кыргыз-Өзбек эл аралык университети,  
Каныбек кызы Гулнур, магистрант, kanybekkyzyg@gmail.com  
Ош мамлекеттик университети, Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** Изилдөөнүн предмети болуп бир тектүү эмес сызыктуу жекече туундулуу эки көз карандысыз өзгөрмөлүү төртүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеме болуп саналат. Изилдөөнүн максаты биринчи түрдөгү баштапкы жана бир тектүү чек ара шарттарын канааттандырган чечимди табуу болуп саналат. Интегралдык, интегродифференциалдык теңдемелерди илимдин бардык тармактарында кездештирүүгө болот, мисалы, азыркы физикада маанилүү роль ойногон нейтрондордун жайлоо процесстеринде пайда болгон өткөрүп берүү теңдемеси катары. Биз ичке зымдын термелүүсүн өзүнчө экинчи даражадагы дифференциалдык теңдемелер менен туюнтса болорун билебиз. Эгерде зымдын ордуна ичке катуу нурду (ичке балка) карасак, анда анын термелүү процесси төртүнчү даражадагы дифференциалдык теңдемелер менен туюнтулат. Мындай көйгөйлөр оор техниканы долбоорлоодо келип чыгат. Чечимди куруу үчүн кош интеграл үчүн Дирихле формуласы колдонулуп, анын натыйжасында үч белгисиз Вольтерра интегралдык теңдемелери алынган. Абел маселесин чечүү үчүн Дирихле формуласы колдонулган. Жыйынтыктап айтканда, тескери маселенин жогорудагы шарттарды канааттандырган чечиминин бар экендиги жөнүндө негизги теорема далилденди.

**Ачкыч сөздөр:** сингулярдуу козголгон, алсыз козголгон, өзгөчө чекит, асимптотика.

## **INVERSE PROBLEM OF FINDING THE RIGHT-HAND SIDE OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN FOURTH-ORDER**

*Khalmatov Anvar Avazovich, haa83@mail.ru  
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,  
Kalandarova Zilola, masters student, zkalandarova\_mag@gmail.com  
Kyrgyz-Uzbek international university named after B. Sydykova,  
Kanybek kyzy Gulnur, masters student, kanybekkyzyg@gmail.com  
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan*

**Abstract.** The subject of the research is an inhomogeneous, linear fourth-order partial differential equation with two independent variables. The aim of the research is to find a solution that satisfies both the initial and homogeneous boundary conditions of the first kind. Integral, integro-differential equations can be found in all areas of science, for example, the transfer equation that arises in the processes of slowing down neutrons, which plays an important role in modern physics. We know that the oscillations of a thin wire can be

expressed by separate second-order differential equations. If, instead of a wire, we consider a thin solid beam (thin hammer), then the process of its oscillations is expressed by fourth-order differential equations. Such problems arise in the design of heavy equipment. To construct a solution, the Dirichlet formula for the double integral was applied, as a result of which the Volterra integral equations with three unknowns are obtained. The Dirichlet formula was used to solve the Abel problem. In conclusion, the main theorem was proved on the existence of a solution to the inverse problem that satisfies the above conditions.

**Key words.** Singularly perturbed, weakly indignant, turning point.

**Введение.** Теория обратных задач – бурно развивающееся направление современной математической физики и ее прикладных областей. В.Гейзенберг, один из основоположников квантовой механики, в своей книге «Физика и философия» высказал мнение, что основное уравнение материи, рассматриваемое как математическая модель всей материи, представляет собой сложную систему интегральных уравнений.

В целом обратные задачи играют важную роль в процессе познания явлений природы, аппарат интегральных уравнений широко используется в физике, механике, теории управления и прикладной математике.

**Постановка задачи.** Исследуем обратную задачу

$$\frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + a_2(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + a_3(t, x) u(t, x) = \varphi(t) f(t, x) + F(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \quad (1)$$

$$u(0, x) = \psi_1(x), \quad u_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(t, x_0) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 \in (0, 1), \quad (4)$$

где  $0 < T$ ,  $0 < a_1$ ,  $x_0$  – известные постоянные числа,  $a_2(t, x)$ ,  $a_3(t, x)$ ,

$f(t, x)$ ,  $F(t, x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $g(t)$  – известные функций,

$a_2, a_3, f, F \in C(\Omega)$ ,  $\psi_1, \psi_2 \in C^2[0, 1]$ ,  $g \in C^2[0, T]$ ,  $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$ ,  $g(0) = \psi_1(x_0)$ ,

$g'(0) = \psi_2(x_0)$ ; а  $\varphi(t)$  и  $u(t, x)$  – неизвестные (искомые) функций,

$\Omega = \{(t, x) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ .

Как нам известно, (1) – неоднородное, линейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с двумя независимыми переменными; (2) – начальные условия; (3) – однородные краевые условия первого рода;

(4) – дополнительная информация, т.е. след искомой функций  $u(t, x)$  на отрезке  $x = x_0, t \in [0, T]$ .

Требуется найти функций  $u \in C^{2,2}(\bar{\Omega})$  и  $\varphi \in C[0, T]$  удовлетворяющие уравнению (1) и условиям (2)-(4).

**Основной результат.** Для начала введем обозначение

$$v(t, x) = u_{tt}(t, x), \quad (5)$$

где  $v(t, x)$  – новая неизвестная функция.

Дважды интегрируя равенство (5) по переменной  $t$  от 0 до  $t$  и учитывая условие (2), имеем:

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^\tau v(s, x) ds d\tau + \psi_2(x)t + \psi_1(x).$$

Если применять формулу Дирихле для двухкратного интеграла

$$\int_0^t \int_0^\tau v(s, x) ds d\tau = \int_0^t \int_s^t v(s, x) d\tau ds = \int_0^t v(s, x) ds \int_s^t d\tau = \int_0^t (t-s)v(s, x) ds,$$

то последнее равенство можно записать в виде:

$$u(t, x) = \int_0^t (t-s)v(s, x) ds + \psi_2(x)t + \psi_1(x). \quad (6)$$

Дифференцируя равенство (6) по переменной  $x$  имеем:

$$u_x = \int_0^t (t-s)v_x(s, x) ds + \psi_2'(x)t + \psi_1'(x), \quad (7)$$

$$u_{xx} = \int_0^t (t-s)v_{xx}(s, x) ds + \psi_2''(x)t + \psi_1''(x). \quad (8)$$

Учитывая равенств (5)-(8), уравнение (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
& v_{xx}(t, x) - v(t, x) - a_1^2 \left( \int_0^t (t-s)v_{xx}(s, x) ds + \psi''_2(x)t + \psi''_1(x) \right) + \\
& + a_2(t, x) \left( \int_0^t (t-s)v_x(s, x) ds + \psi'_2(x)t + \psi'_1(x) \right) + \\
& + a_3(t, x) \left( \int_0^t (t-s)v(s, x) ds + \psi_2(x)t + \psi_1(x) \right) = \varphi(t)f(t, x) + F(t, x).
\end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = a_1^2 \int_0^t (t-s) \frac{\partial^2 v(s, x)}{\partial x^2} ds + \Phi. \quad (9)$$

где

$$\Phi \equiv -a_2(t, x) \int_0^t (t-s) \frac{\partial v(s, x)}{\partial x} ds - a_3(t, x) \int_0^t (t-s)v(s, x) ds + \varphi(t)f(t, x) + v(t, x) + F_1(t, x)$$

$$\begin{aligned}
F_1(t, x) = & a_1^2 (\psi''_2(x)t + \psi''_1(x)) - a_2(t, x) (\psi'_2(x)t + \psi'_1(x)) - \\
& - a_3(t, x) (\psi_2(x)t + \psi_1(x)) - F(t, x).
\end{aligned}$$

**1-лемма.** Функция  $R(t, s) = a_1 sh(a_1(t-s))$ ,  $(t, s) \in \Omega$  является

резольвентой ядра  $K(t, s) = a_1^2(t-s)$ .

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно доказать справедливости равенства

$$R(t, s) = \int_s^t K(t, \tau) R(\tau, s) d\tau + K(t, s), \quad (t, s) \in \Omega.$$

Перепишем правую часть последнего равенства:

$$\begin{aligned}
& \int_s^t K(t, \tau) R(\tau, s) d\tau + K(t, s) = \int_s^t a_1^2(t-\tau) a_1 sh(a_1(\tau-s)) d\tau + a_1^2(t-s) = \\
& = -a_1^2(t-s) ch(0) + a_1 sh(a_1(\tau-s)) \Big|_{\tau=s}^{\tau=t} + a_1^2(t-s) = a_1 sh(a_1(t-s)) = R(t, s).
\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Применяя лемму 1 для равенства (9) имеем:

$$\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = \int_0^t R(t, \tau) \Phi d\tau + \Phi$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} - v(t, x) = & - \int_0^t R(t, \tau) \left( a_2(\tau, x) \int_0^\tau (\tau - s) v_x(s, x) ds + a_3(\tau, x) \int_0^\tau (\tau - s) v(s, x) ds + \right. \\ & \left. + \varphi(\tau) f(\tau, x) - v(\tau, x) \right) d\tau - \\ & - a_2(t, x) \int_0^t (t - s) v_x(s, x) ds - a_3(t, x) \int_0^t (t - s) v(s, x) ds - \varphi(t) f(t, x) + F_2(t, x), \quad (10) \end{aligned}$$

где  $R(t, s) = a_1 sh(a_1(t - s))$ ,  $(t, s) \in \Omega$ ,  $F_2(t, x) = \int_0^t R(t, \tau) F_1(\tau, x) d\tau + F_1(t, x)$ .

Из краевого условия (3) и обозначения (5) имеем:

$$v(t, 0) = v(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11)$$

**Лемма 2.** Решение краевой задачи

$$y''(x) - y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

представимо в виде:

$$y(x) = \frac{1}{sh1} \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} sh(x-1)sh(\xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ sh(x)sh(\xi-1), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$

Применяя лемму 2 к задаче (10)-(11) имеем:

$$\begin{aligned} v(t, x) = & \int_0^1 G(x, \xi) \left( \int_0^t R(t, \tau) \left( a_2(\tau, \xi) \int_0^\tau (\tau - s) v_\xi(s, \xi) ds + a_3(\tau, \xi) \int_0^\tau (\tau - s) v(s, \xi) ds + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varphi(\tau) f(\tau, x) - v(\tau, x) \right) d\tau + a_2(t, \xi) \int_0^t (t - s) v_\xi(s, \xi) ds + \right. \\ & \left. + a_3(t, \xi) \int_0^t (t - s) v(s, \xi) ds + \varphi(t) f(t, \xi) + F_2(t, \xi) \right) d\xi. \quad (12) \end{aligned}$$

Равенство (12) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
v(t, x) = & \int_0^1 G(x, \xi) \left( \int_0^t R(t, \tau) a_2(\tau, \xi) \int_0^\tau (\tau - s) v_\xi(s, \xi) ds d\tau + \right. \\
& \int_0^t R(t, \tau) a_3(\tau, \xi) \int_0^\tau (\tau - s) v(s, \xi) ds d\tau + \int_0^t R(t, \tau) \varphi(\tau) f(\tau, x) d\tau - \int_0^t R(t, \tau) v(\tau, x) d\tau + \\
& \left. + a_2(t, \xi) \int_0^t (t - s) v_\xi(s, \xi) ds + a_3(t, \xi) \int_0^t (t - \tau) v(\tau, \xi) d\tau + \varphi(t) f(t, \xi) + F_2(t, \xi) \right) d\xi,
\end{aligned}$$

применяя здесь формулу Дирихле, получаем:

$$\begin{aligned}
v(t, x) = & \int_0^1 G(x, \xi) \left( \int_0^t \int_\tau^t R(t, \tau) a_2(\tau, \xi) (\tau - s) d\tau v_\xi(s, \xi) ds + \right. \\
& \int_0^t \int_\tau^t R(t, \tau) a_3(\tau, \xi) (\tau - s) d\tau v(s, \xi) ds - \int_0^t R(t, \tau) v(\tau, \xi) d\tau + a_2(t, \xi) \int_0^t (t - s) v_\xi(s, \xi) ds + \\
& \left. + a_3(t, \xi) \int_0^t (t - \tau) v(\tau, \xi) d\tau + \varphi(t) f(t, \xi) + F_2(t, \xi) \right) d\xi. \tag{13}
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
K_1(t, x, \xi, s) &= G(x, \xi) a_2(t, \xi) (t - s) + \int_\tau^t R(t, \tau) a_2(\tau, \xi) (\tau - s) d\tau, \\
K_2(t, x, \xi, s) &= G(x, \xi) \left( a_3(t, \xi) (t - s) - \int_s^t R(t, \tau) a_2(\tau, \xi) (\tau - s) d\tau \right), \\
m(t, x) &= \int_0^1 G(x, \xi) f(t, \xi) d\xi, \quad F_3(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) F_2(t, \xi) d\xi,
\end{aligned}$$

тогда (13) примет вид:

$$\begin{aligned}
v(t, x) = & \int_0^t \int_0^1 \left( K_1(t, x, \xi, s) v_\xi(s, \xi) + K_2(t, x, \xi, s) v(s, \xi) \right) d\xi ds + m(t, x) \varphi(t) + \\
& + \int_0^t R(t, s) m(s, x) \varphi(s) ds + F_3(t, x). \tag{14}
\end{aligned}$$

При  $x=x_0$  из равенства (14) имеем:

$$\begin{aligned}
v(t, x_0) = & \int_0^t \int_0^1 \left( K_1(t, x_0, \xi, s) v_\xi(s, \xi) + K_2(t, x_0, \xi, s) v(s, \xi) \right) d\xi ds + m(t, x_0) \varphi(t) + \\
& + \int_0^t R(t, s) m(s, x_0) \varphi(s) ds + F_3(t, x_0),
\end{aligned}$$

ИЛИ



$$\begin{aligned}
& m(t, x_0)\varphi(t) + \int_0^t R(t, s)m(s, x_0)\varphi(s)ds = \\
& = g''(t) - \int_0^t \int_0^1 (K_1(t, x_0, \xi, s)v_\xi(s, \xi) + K_2(t, x_0, \xi, s)v(s, \xi))d\xi ds - F_3(t, x_0).
\end{aligned} \tag{15}$$

Дифференцируя равенство (14) по переменной  $x$  имеем:

$$\begin{aligned}
v_x(t, x) = & \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{\partial K_1(t, x, \xi, s)}{\partial x} v_\xi(s, \xi) + \frac{\partial K_2(t, x, \xi, s)}{\partial x} v(s, \xi) \right) d\xi ds + \\
& + m_x(t, x)\varphi(t) + \int_0^t R(t, s)m_x(s, x)\varphi(s)ds + \frac{\partial F_3(t, x)}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{16}$$

В результате мы получили три линейные интегральные уравнения Вольтерра (14), (15) и (16) с тремя неизвестными:  $\varphi(t)$ ,  $v(t, x)$ ,  $v_x(t, x)$ .

**Теорема.** Пусть выполняется неравенство

$$m(t, x_0) = \int_0^1 G(x_0, \xi) f(t, \xi) d\xi \neq 0, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{17}$$

Тогда решение системы (14), (15), (16) в пространстве  $C^{2,2}(\Omega) \times C[0, T]$  существует и единственно.

Действительно, запишем эти уравнения в виде:

$$\begin{cases} v(t, x) = A_1[v, v_x, \varphi] + m(t, x)\varphi(t) + F_3(t, x), \\ \varphi(t) = A_2[v, v_x, \varphi] + \frac{g''(t) - F_3(t, x_0)}{m(t, x_0)}, \\ v_x(t, x) = A_3[v, v_x, \varphi] + m_x(t, x)\varphi(t) + \frac{\partial F_3(t, x)}{\partial x}. \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\text{где } A_1[v, v_x, \varphi] \equiv & \int_0^t \int_0^1 K_2(t, x, \xi, s)v(s, \xi) d\xi ds + \int_0^t \int_0^1 K_1(t, x, \xi, s)v_\xi(s, \xi) d\xi ds + \\
& + \int_0^t R(t, s)m(s, x)\varphi(s)ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2[v, v_x, \varphi] &\equiv -\frac{1}{m(t, x_0)} \int_0^t \int_0^1 K_2(t, x_0, \xi, s) v(s, \xi) d\xi ds - \frac{1}{m(t, x_0)} \int_0^t \int_0^1 K_1(t, x_0, \xi, s) v_\xi(s, \xi) d\xi ds - \\
&-\frac{1}{m(t, x_0)} \int_0^t R(t, s) m(s, x_0) \varphi(s) ds, \\
A_3[v, v_x, \varphi] &\equiv \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial K_2(t, x, \xi, s)}{\partial x} v(s, \xi) d\xi ds + \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial K_1(t, x, \xi, s)}{\partial x} v_\xi(s, \xi) d\xi ds + \\
&+ \int_0^t R(t, s) m_x(s, x) \varphi(s) ds.
\end{aligned}$$

На основании теоремы [1], решение  $\varphi(t), v(t, x), v_x(t, x)$  системы (18) существует и единственно в пространстве  $C^{2,2}(\Omega) \times C[0, T]$ .

Таким образом нами доказана следующая теорема.

**Основная теорема.** Если выполняется неравенство (17), то решение  $u(t, x), \varphi(t)$  обратной задачи в пространстве  $C^{2,2}(\Omega) \times C[0, T]$  существует и единственно.

#### Литература

1. **Мамытов, А.О.** Разрешимость обратной начально-краевой задачи с известным значением на прямой [Текст] / А.О. Мамытов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13, - № 2. – С. 18–23.
2. **Кабанихин, С.И.** Обратные и некорректные задачи [Текст] / С.И. Кабанихин.- Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457 с.
3. **Лаврентьев, М. М.** Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. - М.: Наука, 1980. - 286 с.
4. **Khalmatov, A. A.** Spice of solutions to singularly perturbed equations / A. A. Khalmatov, K. A. Abbazova, G. Kanybek K, A. Baltabaev // Science. Education. Engineering. – 2022. – No. 3(75). – P. 57-63. – DOI 10.54834/16945220\_2022\_3\_57. – EDN QCRAZR.
5. **Halmatov, A. A.** Construction of the asymptotic of the solution of a singularly perturbed partial differential equation with a special Lin / A. A. Halmatov, N. Nishanbaeva, K. A Absatar // Science. Education. Engineering. – 2021. – No. 3(72). – P. 29-33. – DOI 10.54834/16945220\_2021\_3\_29. – EDN UHGWZY.
6. **Tursunov D.A., Orozov M.O., Khalmatov A.A.** Asymptotics of the Solution to the Boundary-Value Problems with Non Smooth Coefficient // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 6. –P. 1115-1122.

## ФИЗИКА

УДК 536.2.023

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ С УЧЕТОМ РАДИАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПАКЕТЕ OPENFOAM

*Калбекова Махбурат Жамшитбековна,  
преподаватель, mkalbekova@list.ru*

*Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич, д.ф.-м.н., доцент  
kurbanaliev@rambler.ru*

*Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.** Насущная проблема разработки альтернативных возобновляемых источников энергии, таких как солнечные батареи, задача обеспечения эффективных методов охлаждения структурных элементов современных компьютерных вычислительных систем, а также вопросы охлаждения ядерных реакторов определяют актуальность данной работы. Рассмотрена задача математического моделирования естественной конвекции в трехмерной модели помещения с источником отопления высотой 0.5 м, шириной 1 м и глубиной 1 м температура которого равна 500°K. Температуры пола, потолка и боковых стенок комнаты были равны 300 °K. Математическую основу моделирования составляют осредненные по Рейнольдсу трехмерные стационарные уравнений Навье-Стокса, дополненные соответствующими уравнениями. Стандартный решатель buoyantSimpleFoam открытого пакета OpenFOAM был использован для математического моделирования с учетом различных моделей радиационного излучения.*

***Ключевые слова:** Трехмерная модель комнаты, Естественная конвекция, Навье-Стокс, плавучесть, радиация, buoyantSimpleFoam, OpenFOAM.*

### ТИК БУРЧТУУ КӨНДӨЙДӨГҮ ТАБИГЫЙ КОНВЕКЦИЯНЫ РАДИАЦИЯЛЫК НУРЛАНУУНУ ЭСКЕ АЛУУ МЕНЕН OPENFOAM ПАКЕТИНДЕ МОДЕЛДӨӨ

*Калбекова Махбурат Жамшитбековна, преподаватель  
mkalbekova@list.ru*

**Аннотация.** Күн батареялары сыяктуу энергиянын альтернативалуу булактарын өнүктүрүүнүн актуалдуу маселеси, заманбап компьютердик эсептөө системаларынын структуралык элементтерин муздатуу үчүн эффективдүү методдорду камсыз кылуу маселеси, ошондой эле ядролук реакторлорду муздатуу маселелери бул иштин актуалдуулугун аныктайт. Температурасы 500К бийиктиги 0,5м, туурасы 1м жана тереңдиги 1м жылытуу булагы бар бөлмөнүн үч өлчөмдүү моделдинде табигый конвекцияны математикалык моделдөө маселеси каралат. Бөлмөнүн полунун, шыбынын жана каптал дубалдарынын температурасы 300К болгон. Моделдештирүүнүн математикалык негизин Рейнольдс боюнча орточо алынган үч өлчөмдүү стационардык Навье-Стокс теңдемелери түзөт, алар тиешелүү теңдемелер менен толукталган. OpenFOAM ачык булак пакетинин стандарттуу `buoyantSimpleFoam` чечүүчүсү ар кандай нурлануу моделдерин эске алуу менен математикалык моделдөө үчүн колдонулган.

**Ачкыч сөздөр:** үч өлчөмдүү бөлмөнүн модели, табигый конвекция, Навье Стокс, калкыма, радиация, `buoyantSimpleFoam`, `OpenFOAM`

## **SIMULATION OF NATURAL CONVECTION IN A RECTANGULAR CAVITY TAKING INTO ACCOUNT RADIATION HEAT TRANSFER IN THE OPENFOAM PACKAGE**

*Kalbekova Mahburat Zhamshitbekovna, teacher*

[mkalbekova@list.ru](mailto:mkalbekova@list.ru)

*Kurbanaliev Abdikerim Yrysaevich,*

*doctor of physical and mathematical sciences, dosent,*

[kurbanaliev@rambler.ru](mailto:kurbanaliev@rambler.ru)

*Osh State University, Osh, Kyrgyzstan*

**Abstract.** The urgent problem of developing alternative renewable energy sources such as solar panels, the task of providing effective methods for cooling the structural elements of modern computer computing systems, as well as the issues of cooling nuclear reactors determine the relevance of this work. The problem of mathematical modeling of natural convection in a three-dimensional model of a room with a heating source with a height of 0.5m, a width of 1m and a depth of 1m, the temperature of which is 500K, is considered approach. The temperatures of the floor, ceiling and side walls of the room were 300K. The mathematical basis of the modeling is the Reynolds-averaged three-dimensional stationary Navier-Stokes equations, supplemented by the corresponding equations. The

*standard buoyantSimpleFoam solver of the open source package OpenFOAM was used for mathematical modeling taking into account various radiation models.*

**Keywords:** *Three-dimensional model of a room, Natural convection, Navier-Stokes, buoyancy, radiation, buoyantSimpleFoam, OpenFOAM.*

**Введение.** В данное время, обеспечение оптимальной вентиляции различных сооружений, методы охлаждения элементов крупных вычислительных систем, безопасное функционирование действующих ядерных реакторов, создание эффективных солнечных тепловых приемников представляют собой актуальную научно-техническую задачу [1 - 5]. Определенные проблемы, которые возникают при проведении натурных экспериментальных методов наряду с развитием методов вычислительной гидродинамики с применением современных мощных вычислительных, сделали математическое моделирование таких научно-технических задач экономически целесообразным [6, 7].

В данной работе рассматривается математическое моделирование турбулентной естественной конвекции в прямоугольной модели комнаты, заполненной воздухом. Моделирование проведено с использованием решателя `buoyantSimpleFoam` различных версий открытого пакета OpenFOAM [8].

**Постановка задачи.** Рассматривается задача математического моделирования естественной стационарной конвекции в трёхмерной камере с прямоугольным поперечным сечением [9]. Высота модели комнаты равна  $H=2$ , длина  $W=10$  м, а ширина  $D=6$  м, а источник тепла имеет следующие размеры  $h=0.5$  м,  $w=1.0$  м и  $d=1.0$  м (см. рис. 1). Источник тепла расположен внутри параллелепипеда с координатами  $(0.5 \ 0.5 \ 0)$  и  $(1.5 \ 1.5 \ 0.5)$ .

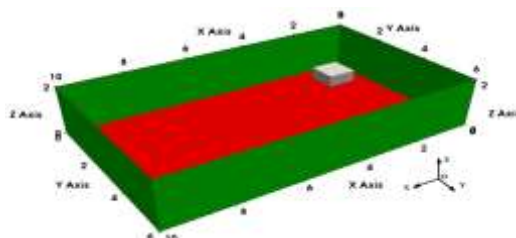


Рисунок 1. Геометрия рассматриваемой задачи и система координат.

Температура потолка и пола равны  $300^{\circ}\text{K}$ , а температура нагревателя, расположенного в верхнем правом углу модели, равна  $500^{\circ}\text{K}$ .

**Математическая модель.** Математическая модель рассматриваемой стационарной задачи основана на системе уравнений Навье-Стокса, в которую входят уравнения неразрывности, переноса импульса и энтальпии:

$$\nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\rho u u) = -\nabla p + \rho g + \nabla \cdot (2\mu_{eff} D(u)) - \nabla \left( \frac{2}{3} \mu_{eff} (\nabla \cdot u) \right) \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\rho u h) + \nabla \cdot (\rho u k) = \nabla \cdot (\alpha_{eff} \nabla h) + \rho u \cdot g \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $p$  — статическое давление,  $g$  — вектор гравитационного ускорения,  $\mu_{eff}$  — эффективная вязкость, равная сумме молекулярной и турбулентной вязкостей,  $h$  — энтальпия,  $k = 0.5|u|^2$  — кинетическая энергия на единицу массы, а  $D(u)$  — тензор скорости деформации определяется как

$$D(u) = 0.5(\nabla u + (\nabla u)^T)$$

Коэффициент эффективной температуропроводности  $\alpha_{eff}$  равен сумме коэффициентов ламинарной и турбулентной температуропроводностей:

$$\alpha_{eff} = \frac{\rho \nu_t}{Pr_t} + \frac{\mu}{Pr} = \frac{\rho \nu_t}{Pr_t} + \frac{\kappa}{C_p}$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $C_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $\nu_t$  — турбулентная кинематическая вязкость,  $Pr$  — число Прандтля,  $Pr_t$  — турбулентное число Прандтля

В пакете OpenFOAM, члены в уравнении (2), связанные с градиентом статического давления и вектором гравитационного ускорения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 -\nabla p + \rho g &= -\nabla(p_{rgh} + \rho g \cdot r) + \rho g \\
 &= -\nabla p_{rgh} - (g \cdot r)\nabla \rho - \rho g + \rho g \\
 &= -\nabla p_{rgh} - (g \cdot r)\nabla \rho
 \end{aligned}$$

где  $p_{rgh} = p - \rho g \cdot r$  – полное давление минус гидростатическое давление, а  $r$  – радиус вектор.

Для замыкания систем уравнений (1-3) была использована стандартная стандартная k-ε модель турбулентности [9, 11].

Моделирование радиационного переноса тепла производилось на основе двух моделей – P1 и fvDOM моделей излучения, имплементированных в пакет OpenFOAM [8].

**Численная модель.** Дискретизация расчетной области получена при помощи стандартной утилиты blockMesh открытого пакета OpenFOAM. Постоянная таким образом равномерная структурированная трёхмерная расчетная сетки приведена на рис. 2.

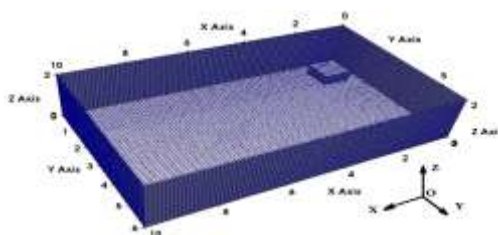


Рисунок 2. Расчетная сетка

Дискретизация основных уравнений (1-3) выполнена на основе метода контрольных объемов [9-11]. Используемые схемы дискретизации для каждого члена уравнений (1-3), связанного с градиентом, дивергенцией и лапласианом, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Схемы дискретизации.

Схема	gradSchemes	divSchemes	laplacianSchemes
Переменная			
Скорость, U	Gauss linear	bounded Gauss	Gauss linear

		upwind	corrected
Энтальпия, $h$	Gauss linear	bounded Gauss upwind	Gauss linear corrected
Скорость диссипации, $\epsilon$	Gauss linear	bounded Gauss upwind	Gauss linear corrected
Напряжения Рейнольдса, $R$	Gauss linear	bounded Gauss upwind	Gauss linear corrected

Использованные граничные условия для основных переменных приведены в табл. 2.

Таблица 2. Граничные условия для переменных.

Граница Переменная	Потолок	Пол	Боковые стенки	Нагреватель
Скорость, $U$	noSlip	noSlip	noSlip	noSlip
Температура, $T$	fixedValue, 300°K	fixedValue 300°K	fixedValue 300°K	fixedValue, 500°K
Давление, $p_{rgh}$	FixedFluxPressure, 101325	FixedFluxPressure 101325	FixedFluxPressure 101325	FixedFluxPressure 101325
Энергия турбулентности, $k$	kqRWallFunction; 0.1	kqRWallFunction ; 0.1	kqRWallFunction; 0.1	kqRWallFunction; n; 0.1
Скорость диссипации, $\epsilon$	epsilonWall Function 0.01	epsilonWall Function 0.01	epsilonWall Function 0.01	epsilonWall Function 0.01

Методы решения полученных в результате дискретизации основных уравнений приведены в табл. 3.

Таблица 3. Решатели уравнений для основных переменных

Переменная	Решатель	Точность
Давления	Метод сопряженных градиентов PCG с использованием предобуслователя DIC	$1e^{-6}$
$U, h, k, \epsilon$	PBiCGStab с использованием предобуслователя DILU	$1e^{-5}$



Для решения связанных через давление нелинейных уравнений применялся известный алгоритм SIMPLE [9-11] с коэффициентами нижней релаксации 0.2 для компонент скорости  $U$ , 0.2 для энтальпии  $h$  и 0.5 для кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости её диссипации  $\epsilon$ .

**Результаты численных расчетов.** В таблицах 4 - 6 приведены сведения о числах итераций (табл. 4), о времени расчета (табл. 5) и о времени на одну итерацию (табл. 6).

Таблица 4. Число итераций для различных версий пакета OpenFOAM

Версия пакета	OF6	OF7	OF8	OF9	OF10
Без учета радиации	1846	1846	1848	1848	1844
С учетом радиации, модель fvDOM	914	914	914	1109	1109
С учетом радиации, Модель P1	901	901	2346	852	849

Таблица 5. Время расчета для различных версий пакета OpenFOAM

Версия пакета	OF6	OF7	OF8	OF9	OF10
Без учета радиации	680.25	746	664.26	1085	773.044
С учетом радиации, модель fvDOM	856.34	946.27	1099	1151.49	948.514
С учетом радиации, Модель P1	409.7	445.04	1383	429.23	369.35

Среды использованных различных версий пакета OpenFOAM с двумя моделями радиационного теплопереноса P1 и fvDOM, самой экономичной, по затраченному на одну итерацию времени оказалась версия OF10, а версия OF8 в случае использования модели fvDOM дает высокое значение времени на одну итерацию 1.202 с (см. табл.6).

Таблица 6. Время на одну итерацию для различных версий пакета OpenFOAM в секундах

Версия пакета	OF6	OF7	OF8	OF9	OF10
Без учета радиации	0.368	0.404	0.359	0.057	0.419
С учетом радиации, модель fvDOM	0.937	1.035	1.202	1.038	0.855
С учетом радиации, Модель P1	0.455	0.494	0.590	0.504	0.435

В свою очередь согласно численным данным версии OF8, при отсутствии радиации, время на одну итерацию составляет наименьшую величину 0.359с, а при использовании модели P1 это время равно 1.202с, что составляют наибольшее значение по сравнению с остальными версиями OpenFOAM. Это время на 28.66% процентов больше времени на одну итерацию 8.855с при использовании версии OF8.

На рисунке 3 приведено распределение средней температуры на боковых стенках для двух моделей радиационного излучения P1 (рис. 3а) и fvDOM (рис. 3б).

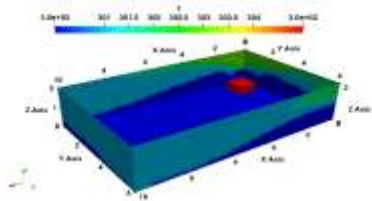


Рисунок 3.а - Распределение температуры без учета радиации

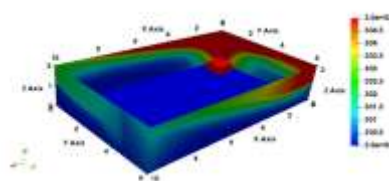


Рисунок 3.б - Распределение температуры для P1 модели радиации

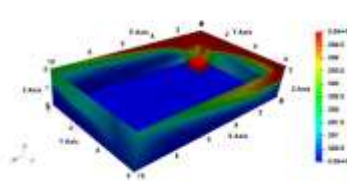


Рисунок 3.в - Распределение температуры для модели fvDOM модели радиации

Как видно из рисунка основное различие между двумя моделями имеет место в ближнем к нагревателю углу, что более четко видно на следующем рисунке 4аб, где представлено поле средней температуры в плоскости XOY при  $z=0.25$ м.

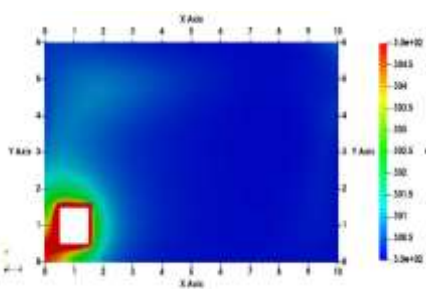


Рисунок 4.а - Распределение температуры для P1 модели радиации

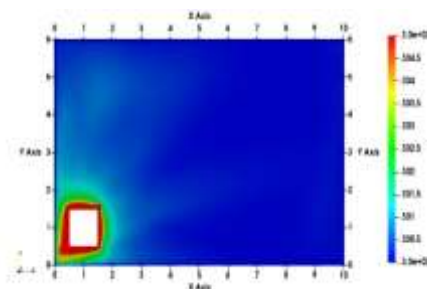


Рисунок 4.б - Распределение температуры для модели fvDOM модели радиации

Сказанное также видно из следующего рисунка 5аб, представляющий вертикальный профиль температуры вдоль линии, проходящей через точки с координатами (0.2 0.2 0) и (0.2 0.2 2).

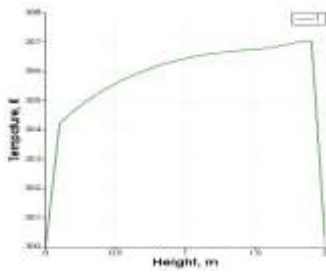


Рисунок 5а - Вертикальный профиль температуры для P1 модели радиации

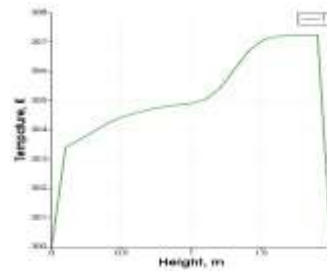


Рисунок 5б - Вертикальный профиль температуры для модели fvDOM модели радиации

Здесь виден горячий воздух, движущийся вверх, всего в нескольких сантиметрах от источника тепла температура падает с 500К почти до температуры окружающего воздуха или 300К. По этой причине использовалась шкала от 300 К до 320 К градусов. Распределения температуры и модуля скорости в плоскости  $y=0.75\text{м}$  сильно различаются при использовании различных моделей излучения, что видно на следующих рисунках 6-9.

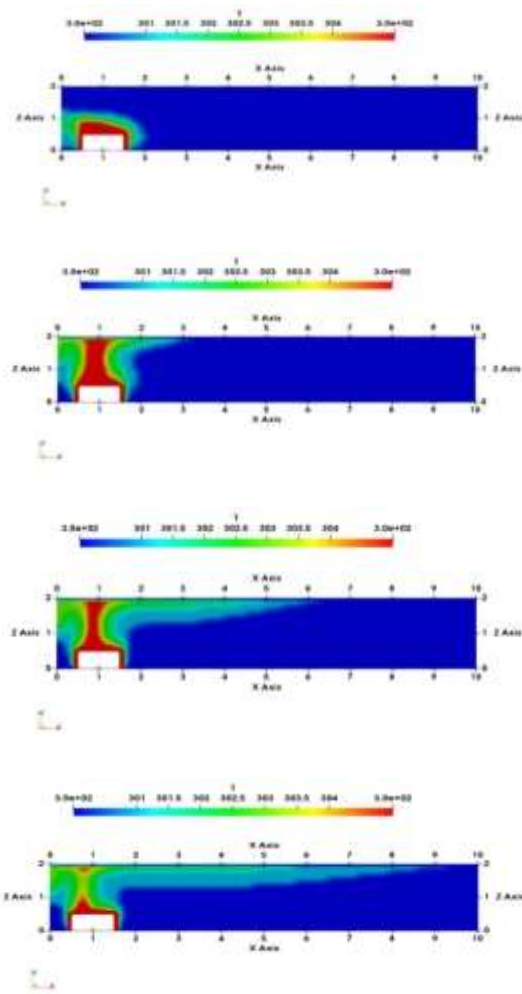


Рисунок 6 - Распределение средней

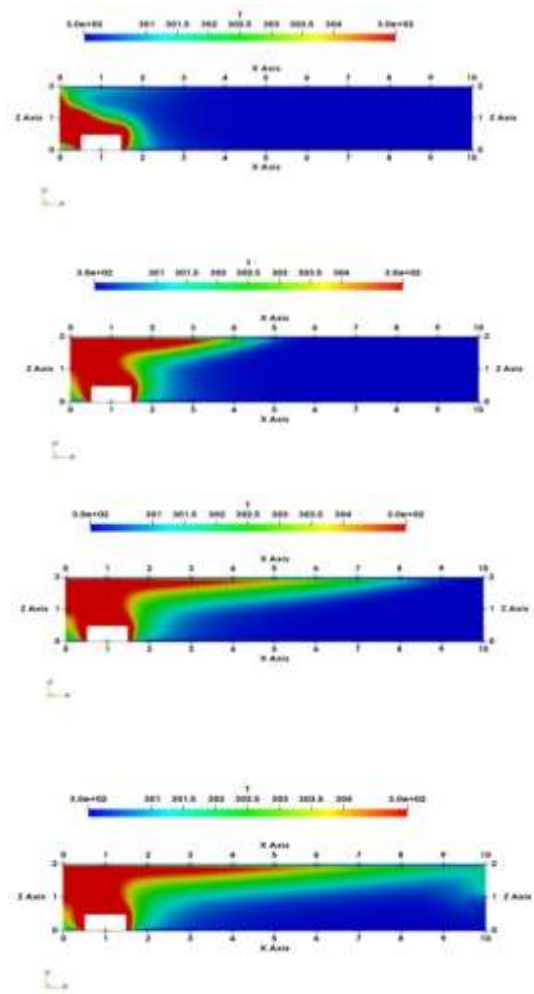


Рисунок 7 - Распределение средней

температуры без учета радиации

температуры с учетом радиации

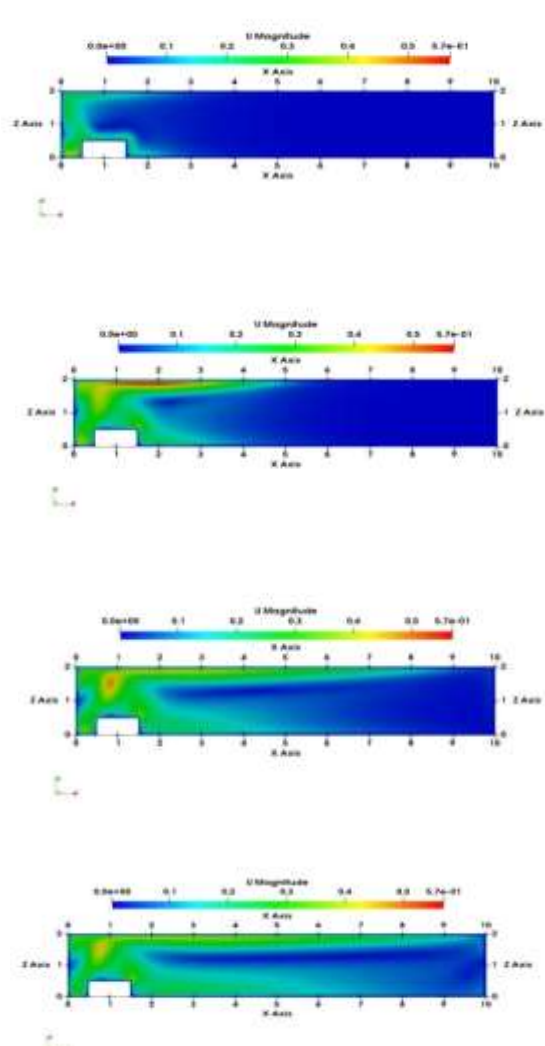
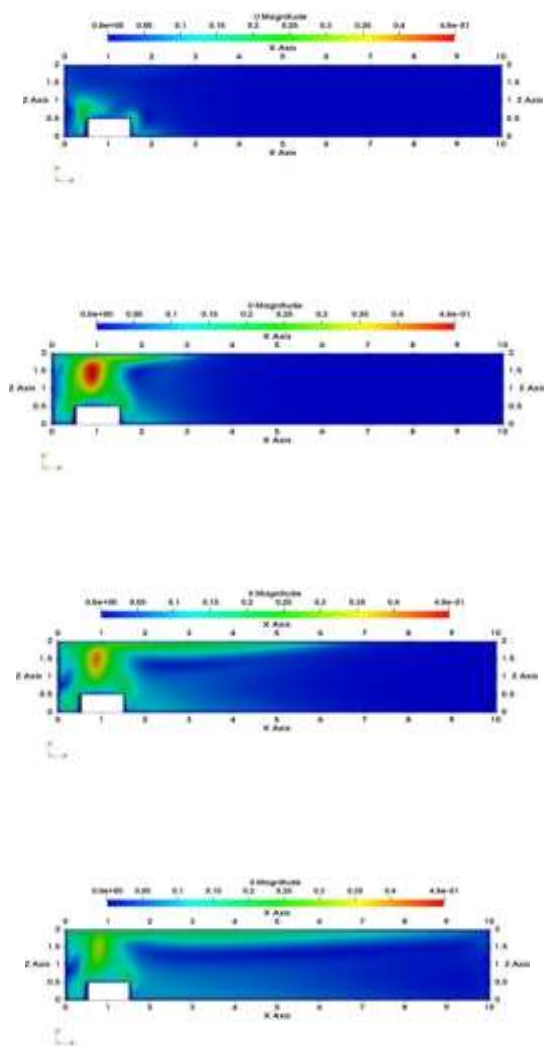


Рисунок 8 - Распределение модуля скорости с учетом без радиации

Рисунок 9 - Распределение модуля скорости с учетом радиации

В следующей табл. 7 приведены сведения о поля температуры в 4 рэперных точках P1,P2,P3 и P4 координаты которых равны ( 1.0 1.0 1.0), ( 9.0 1.0 1.0), ( 9.0 5.0 1.0), ( 1.0 5.0 1.0) соответственно.

Таблица 7. Численные данные о температуры в 4 рэперных точках

Точки		P1	P2	P3	P4
OF6	Без радиации	304.169	300.535	300.56	300.342
	FvDOM модель	308.544	300.52	300.263	301.308
	P1 модель	308.104	300.609	300.319	301.949
OF7	Без радиации	304.169	300.535	300.56	300.342

	FvDOM модель	308.544	300.52	300.263	301.308
	P1 модель	308.104	300.609	300.319	301.949
OF8	Без радиации	304.176	300.545	300.57	300.354
	FvDOM модель	308.548	300.53	300.273	301.317
	P1 модель	308.817	300.396	300.391	300.477
OF9	Без радиации	304.2	300.5	300.6	300.4
	FvDOM модель	308.429	299.97	300.049	299.859
	P1 модель	308.606	300.698	300.492	301.976
OF10	Без радиации	304.155	300.541	300.566	300.352
	FvDOM модель	308.427	299.968	300.047	299.858
	P1 модель	308.607	300.692	300.478	301.977

Из этой таблицы видно, что влияние радиационного переноса на поле температуры заметно около точки P1, где разница в температуре с учетом и без учета радиации составляет около 4К. Соответствующая разница температуры в точке P4 равна около 1К. Радиационный перенос тепла в дальних точках P2 и P3 практически не влияет на поле распределения температуры.

Характерной особенностью рассмотренного случая является то, что существенное повышение температуры в модели комнаты имеет место около нагревателя. Температура в остальной части комнаты практически не меняется.

Далее, рассмотрен случай когда подогрев комнаты осуществляется через пол, размер которого составляет  $10 \times 6$  м<sup>2</sup>. Температура пола была равна 325К.

В таком случае распределения полей температуры и скорости сильно отличаются от рассмотренного выше случая. Сказанное хорошо видно из следующих рисунков 11-12, где представлены поля температуры и модуля скорости в плоскости  $y=3$ м.

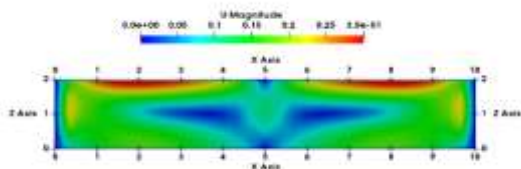


Рисунок 11 – Поле модуля скорости

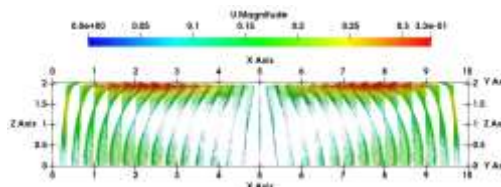


Рисунок 12 -Поле вектора скорости

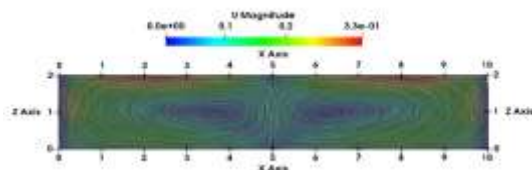


Рисунок 13-Изолинии модуля скорости

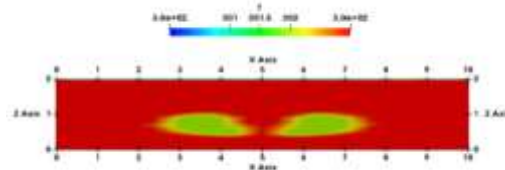


Рисунок 12 -Поле температуры

Сразу можно отметить образование двух симметричных, относительно линии  $x=5\text{м}$  вихрей, вращающихся в двух противоположных направления (см. рис. 12). Поток воздуха поднимается вверх около крайних стенок  $x=0$  и  $x=10\text{м}$  и затем двигаются около потолка на встречу друг к другу. После взаимного соударения около линии  $x=5\text{м}$  в центре комнаты поток идет вниз. По достижении пола комнаты поток воздуха разделяется на два вихря, которые направлены в противоположные стороны (см. рис. 13). В силу того, что почти весь объем воздуха комнаты вовлечен в конвективное движение, распределение температуры по комнате симметричное и равномерное, если не учесть небольшое уменьшение температуры в центрах двух симметричных вихрей (см. рис. 12). Таким образом, можно сказать, что процесс отопления комнаты через пол приводит к равномерному распределению температуры по всей комнате по сравнению с случаем, когда отопительная печка расположена в углу комнаты.

**Заключение.** Рассмотрена задача математического моделирования естественной конвекции в трехмерной модели помещения с источником отопления высотой 0.5 м, шириной 1 м и глубиной 1 м температура которого равна 500°K. Температуры пола, потолка и боковых стенок комнаты были равны 300 °K. Математическую основу моделирования составляют осредненные по Рейнольдсу трехмерные стационарные уравнений Навье-Стокса, дополненные соответствующими уравнениями. Стандартный решатель buoyantSimpleFoam открытого пакета OpenFOAM был использован для математического моделирования с учетом различных моделей радиационного излучения.

Расчеты показывают, что среды использованных различных версий пакета OpenFOAM с двумя моделями радиационного теплопереноса P1 и fvDOM, самой экономичной, по затраченному на одну итерацию времени оказалась версия OF10, а версия OF8 в случае использования модели fvDOM дает высокое значение времени на одну итерацию 1.202 с.

В свою очередь согласно численным данным версии OF8, при отсутствии радиации, время на одну итерацию составляет наименьшую величину 0.359с, а при использовании модели P1 это время равно 1.202с, что составляют наибольшие значение по сравнению с остальными версиями OpenFOAM. Это время на 28.66% процентов больше времени на одну итерацию 8.855с при использовании версии OF8.

При отоплении модели комнаты через пол, обнаружено образование двух симметричных относительно центра комнаты при  $x=5\text{м}$ , вращающихся в противоположные стороны вихрей в плоскости  $y=3$ . В силу того, что почти весь объем воздуха комнаты вовлечен в конвективное движение, распределение температуры по комнате симметричное и равномерное, если не учесть небольшое уменьшение температуры в центрах двух симметричных вихрей. Таким образом, можно сказать, что процесс отопления комнаты через пол приводит к равномерному распределению температуры по всей комнате по сравнению с случаем, когда отопительная печь расположена в углу комнаты.

## Литература

1. **Саркисов, А. А.** Основы теории и эксплуатации судовых ядерных реакторов / А. А. Саркисов, Л. Б. Гусев, Р. И. Калинин ; под общ. ред. акад. РАН А. А. Саркисова ; Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. - М. : Наука, 2008. - 397 с.
2. **Сотников, А.Г.** Автономные и специальные системы кондиционирования воздуха. Теория, оборудование, проектирование, испытание, эксплуатация. Издательство АТ Publishing. Санкт-Петербург, 2005 г. - 240 с.
3. **Шепелев И.А.** Аэродинамика воздушных потоков в помещении. М.; -Стройиздат, 1978 - 147 с.
4. **Лукутин Б.В.** Возобновляемые источники электроэнергии: учебное пособие / Б.В. Лукутин. - Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. - 187 с.

5. **Куликова Л.В.** Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии: учеб. пособие для вузов / Л. В. Куликова, Ю. А. Меновщиков. - Алт. Гос. Техн. Ун-т им. И. И. Ползунова. Новосибирский гос. Аграрный ун-т. - Барнаул: АлтГТУ, 2005. - 365с.
6. **Андерсон, Д.** Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж., Таннехилл, Р. Плетчер. Т. 2. - М.: Мир, 1990.-392 с.
7. **Роуч, П.** Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. –616с.
8. OpenFOAM7 User guide [Электронный ресурс] Режим доступа: <https://cfd.direct/openfoam/user-guide-v7/>. Дата обращения 15.07.2020.
9. **Ferziger, J.H.,** Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics / J.H. Ferziger, M. Peric Berlin: Springer Verlag, 2002. – 423 p.
10. **Патанкар, С.В.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с. англ. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152с.
11. **Versteeg H. K.,** Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics. Edinburg: Pearson Education Limited / H.K. Versteeg, W. Malalasekera. - 2007. - 517p.



УДК 552.31+676.014

## ХИМИЧЕСКИЙ СОСТАВ БАЗАЛЬТОВЫХ ГОРНЫХ ПОРОД КЫЗЫЛ-КИЙСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

*Ташполотов Ысламидин, д.ф.-м.н., профессор,  
itashpolotov@mail.ru,  
Маматов Элбек Умаржанович, amatov.elbek@list.ru,  
Ошский государственный университет  
Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** В работе рассмотрены химико - минералогический состав сырья, и микроскопическое строение кристаллов базальтовых пород Кызыл-Кийского месторождения КР. Удельный вес исследуемого базальта составляет 2,6 – 3,11 г/см<sup>3</sup>, твердость по шкале Мооса от 5–7 и температура плавления 1100 – 1450<sup>0</sup>С. Прочность на сжатие горной породы достигает величины 400 Мпа. Описано рельефное расположение местностей базальтовых горных пород. Определены силикатные и глиноземистые модули базальтовых пород Кызыл-Кийского месторождения с целью использования их в строительной и электротехнической отраслях КР. Установлено, что в базальте имеются ценные химические элементы: индий, титан и скандий и др.

**Ключевые слова:** Кристаллы базальтовых пород, каменная вата, фибра, цветовая гамма, базальтовое волокно, оксиды химических элементов, силикатные и глиноземистые модули, химические ценные компоненты.

## КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН КЫЗЫЛ-КЫЯ КЕНИНИН БАЗАЛЬТ ТОО ТЕКТЕРИНИН ХИМИЯЛЫК КУРАМЫ.

*Ташполотов Ысламидин, д.ф.-м.н., профессор,  
itashpolotov@mail.ru,  
Маматов Элбек Умаржанович, amatov.elbek@list.ru,  
Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** Макалада Кыргыз Республикасынын(КР) Кызыл-Кыя кенинин базальт тектеринин химиялык - минералогиялык курамы жана кристаллдарынын микроскопиялык түзүлүшү каралды. Изилденген базальттын салыштырма салмагы

2,6 – 3,11 г/см<sup>3</sup>, МОС шкаласы боюнча катуулугу 5-7 жана эрүү температурасы 1100-1450<sup>0</sup>С. Базальт тоо тектеринин кысылуу күчү 400 МПа чоңдугуна жетет. Бул макалада базальт тектеринин рельефтик жайгашуусу сүрөттөлгөн. Кызыл-Кыя кенинин базальт тектеринин силикат жана глинозем модулдары КРнын курулуш жана электротехникалык тармактарында пайдалануу максатында аныкталган. Ошондой эле изилденген базальт тектеринде баалуу химиялык элементтер бар экени аныкталды: индий, титан жана скандий ж. б.

**Ачкыч сөздөр:** базальт тектеринин кристаллдары, базальт буласы, химиялык элементтердин оксиддери, силикат жана глинозем модулдары, химиялык баалуу компоненттер.

## CHEMICAL COMPOSITION OF BASALT ROCKS OF THE KYZYL-KIY DEPOSIT OF THE KYRGYZ REPUBLIC

*Tashpolotov Yslamidin, doctor of physical and mathematical sciences,  
professor, itashpolotov@mail.ru*

*Mamatov Elbek Umarzhanovich, mamatov.elbek@list.ru  
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan*

**Abstract.** *The paper considers the chemical and mineralogical composition of raw materials, and the microscopic structure of crystals of basalt rocks of the Kyzyl-Kiy deposit of the Kyrgyz Republic. The specific gravity of the studied basalt is 2.6 – 3.11 g/cm<sup>3</sup>, the Mohs hardness is from 5-7 and the melting point is 1100 – 14500C. The compressive strength of the rock reaches a value of 400 MPa. The relief location of basalt rock localities is described. Silicate and alumina modules of basalt rocks of the Kyzyl-Kiy deposit have been determined for the purpose of using them in the construction and electrical industries of the Kyrgyz Republic. It has been established that there are valuable chemical elements in basalt: indium, titanium and scandium, etc.*

**Key words:** *Crystals of basalt rocks, rock wool, fiber, color scheme, basalt fiber, oxides of chemical elements, silicate and alumina modules, chemical valuable components.*

**Введение.** В последние годы перед наукой и технологией встал вопрос найти такие материалы, которые позволили бы решить проблемы сбережения энергии, снижение использование металла, и защита окружающей среды. К таким материалам можно отнести базальтовые горные породы и изделия из них.

Базальт – это камень вулканического происхождения образованная в виде базальтовых лав. Химическая минералогия базальта рассматривается как природный камень, относящийся к эффузивным породам камней

схожим с такими породами как габбро.

Базальт применяется в качестве строительного, облицовочного, защитного материала, а также в качестве сырья для каменного литья [1].

Добавление базальтовой фибры способствует к повышению прочностных качеств бетонных изделий в несколько раз [2]. Арматура из базальтопластика отличается высокой адгезией с бетоном, а также превосходит стальную арматуру по модулю упругости [3]. Например, применение 1 кг базальтопластиковой арматуры заменяет 9.6 кг металла [4].

Также применяют базальтовую породу для изготовления теплоизоляционного материала — каменной ваты, или базальтового волокна. Известно [5, 6], что волокна на основе базальтовых пород обладают высокими прочностными характеристиками, химической и термической стойкостью. Поэтому базальтовые непрерывные волокна обеспечивают требуемые характеристики и качество армирующих, и композиционных материалов для строительства, в том числе дорожного строительства.

#### **Микроскопическое исследование.**

В данной научной работе был использован цифровой USB-микроскоп DigiMicro с кратностью увеличения 500х, высококачественной цифровой камерой, изображение в которую попадает через несколько линз, с выводом изображения на компьютер или проектор. Камера имеет 2 мегапикселя разрешения, и максимальное 500 кратное увеличение обеспечивает четкое изображения даже наименьших деталей, что открывает широкую сферу применение микроскопа в обучении и исследовании.

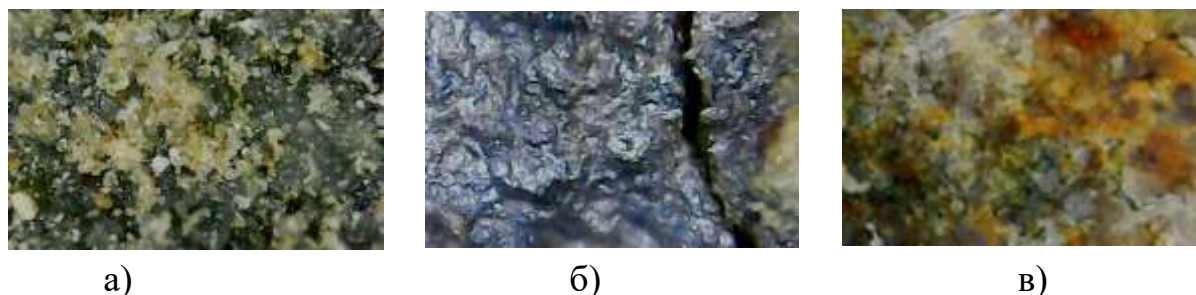


Рис 1. Микрофотографии поверхностей базальтовых горных пород Кызыл-Кийского месторождения КР, с кратностью увеличения 200х – 280х.

Под микроскопом были рассмотрены и изучены образцы базальтовых горных пород Кыргызской Республики месторождения Кызыл-Кия.

Минералогию базальтовых горных пород месторождения Кызыл-Кия можно рассматривать как эффузивным, похожим на габбро природного происхождения [1]. Цветовая гамма базальтовых горных пород довольно широка, но имеет отличительный черный, темный, темно-серый, и зеленовато-желтые оттенки.

Из Рис. 1. а, б, в можно заметить структуру базальтовых горных пород. Из данного рисунка видно, что структура базальта рассматривается как скрыто-кристаллическая (Рис. 1. а), тонкозернистая и порфировая, в некоторых случаях стекловатая



Рис. 2. Образцы базальтовых горных пород под микроскопом.

В порфировых местностях скрытокристаллической массы можно заметить зеленовато-жёлтые кристаллы оливина (Рис. 2). Текстура базальтовых горных пород пористая, массивная и плотная. Излом неровный, и шероховатый на ощупь.



а)

б)

в)

Рис. 3. Месторождения базальтовых горных пород в Кызыл-Кия, КР.

Согласно [7] удельный вес базальтовых горных пород Кызыл-Кия составляет 2,6 – 3,11 г/см<sup>3</sup>. Твердость по шкале Мооса от 5 – 7. Температура плавления 1100 – 1450<sup>0</sup>С. Прочность на сжатие горной породы достигает величины 400 Мпа.

Отличительными признаками базальта являются плотное, тонкозернистое строение, неровный излом, темная, большей частью черная окраска, большая плотность. Минеральный состав камня из разных месторождений может значительно отличаться друг от друга.

Для базальтовых пород характерна столбчатая отдельность, Рис. 3. а, б, в, Она, по-видимому, возникла вследствие неравномерного остывания породы в результате быстрого охлаждения лавы на поверхности земли.

В каждой из стран добывают разные виды базальтовых горных пород, которые используются в различных сферах нашей жизни. В Кыргызской Республике базальтовые месторождения встречаются во всех регионах страны и также занимают тысячи квадратных километров [8].

**Определение химического состава базальтовых пород.** Химический состав базальтовых горных пород подразделяется на несколько групп. Это сложные вещества (оксиды), и группы по таблице Менделеева. В настоящей работе химический состав базальта определена с помощью спектроскопического анализа, результаты которых приведены в нижеследующих таблицах.

Таблица 1. Сложные вещества (оксиды)

	Химический элемент, соединение	Название элемента	Процентное содержание базальта различных месторождений					
			Кызыл-Кия	Сулуу-Терек	Талды-Булак	Кашка-Суу	Украина, Берестовецкое	Грузия, Марнеульское
1	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Оксид алюминия	15	14.80	13.98	15.72	13.3	16.65
2	CaO	Оксид кальция	9	8.33	9.49	7.28	9.8	8.35
3	MgO	Оксид магния	5	6.33	5.32	5.14	6.41	6.0
4	Na <sub>2</sub> O	Оксид натрия	3	5.52	4.55	4.41	2.44	5,7
5	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Оксид железа	4	11.57	11.57	6.73	3.29	4.97
6	SiO <sub>2</sub>	Диоксид кремния	30	44	48.27	48.85	49.5	50.3

## Химический состав базальтовых пород различных месторождений.

В следующих таблицах приведены результаты химического анализа базальтовых горных пород Кызыл-Кийского месторождения, Кыргызской Республики. Таблицы подразделяются на несколько групп по элементам таблицы Менделеева.

Таблица 2. Щелочные металлы (1 группа по таблице Менделеева)

№	Химический элемент	Название элемента	Процентное содержание
1	Li	литий	$4 \cdot 10^{-3}$
2	CU	медь	$12 \cdot 10^{-3}$
3	Ag	серебро	$1 \cdot 10^{-1}$

Таблица 3. Щелочноземельные металлы (2 группа по таб. Менделеева)

№	Химический элемент	Название элемента	Процентное содержание
1	Be	бериллий	$2 \cdot 10^{-4}$
2	Sr	стронций	$3 \cdot 10^{-2}$
3	Ba	барий	$1,2 \cdot 10^{-2}$

Таблица 4. Элементы 3 группы таблицы Менделеева

№	Химический элемент	Название элемента	Процентное содержание
1	In	индий	$2 \cdot 10^{-2}$
2	Ga	галлий	$9 \cdot 10^{-3}$

Таблица 5. Элементы 4 группы таблицы Менделеева

№	Химический элемент	Название элемента	Процентное содержание
1	Ge	германий	$0,3 \cdot 10^{-3}$
2	Ti	титан	1,5
3	Zr	цирконий	$13,5 \cdot 10^{-3}$
4	Sn	олово	$2 \cdot 10^{-4}$
5	Pb	свинец	$0,7 \cdot 10^{-3}$

Таблица 6. Элементы 5 группы по таблицы Менделеева

№	Химический элемент	Название элемента	Процентное содержание
1	P	p-блок (фосфор)	$7 \cdot 10^{-2}$
2	Nb	ниобий	$1,2 \cdot 10^{-3}$
3	Sb	сурьма	$1-3 \cdot 10^{-3}$
4	V	ванадий	$3 \cdot 10^{-2}$

Таблица 7. Элементы 6 группы таблицы Менделеева

№	Химический элемент	Название элемента	Процентное содержание
1	Cr	хром	$4 \cdot 10^{-2}$
2	Mo	молибден	$3 \cdot 10^{-4}$

Таблица 8. Элементы 7 группы таблицы Менделеева

№	Химический элемент	Название элемента	Процентное содержание
1	Mn	марганец	$12 \cdot 10^{-2}$

Таблица 9. Элементы 8 группы таблицы Менделеева

№	Химический элемент	Название элемента	Процентное содержание
1	Ni	никель	$13,5 \cdot 10^{-3}$
2	Co	кобальт	$10,5 \cdot 10^{-3}$

Таблица 10. Редкоземельный химический элемент

№	Химический элемент	Название элемента	Процентное содержание
1	Sc	скандий	$1,2 \cdot 10^{-3}$

Из полученных данных, представленной в таблице 1 видно, что химический состав базальтовых пород Кызыл-Кии заметно отличается по процентным содержаниям оксидов железа и диоксида кремния [8, 9, 10], по сравнению базальтовых пород других месторождений в Кыргызской

Республике (Кызыл-Кия, Сулуу-Терек, Талды-Булак, Кашка-Суу), а также в республиках Узбекистан, Украина и Грузия.

Из таблицы 1 видно, что процентное содержание диоксида кремния в базальтовых горных породах составляет от 30% до 50.3%. Такое содержание диоксида кремния в базальте может объяснить его чрезвычайную устойчивость к воздействию любых агрессивных сред.

Содержание оксида железа в составе различных базальтовых горных пород, колеблется от 4% до 11.57%. Исходя из этих данных, можно утверждать, что оксид железа влияет на прочность и твёрдость базальтовых пород, и на изделия из них.

На основе изучения литературных данных, рассмотрим влияния процентного содержания оксидов ( $SiO_2$ ,  $Fe_2O_3$ ,  $Al_2O_3$ ) на механические характеристики базальтовых пород, на основе определения силикатного (SM) и глиноземного модуля (TM).

Согласно [14] SM и TM определяются следующим образом:

1. Силикатный модуль (SM)

$$SM = \frac{SiO_2}{Al_2O_3 + Fe_2O_3}$$

Значения силикатного модуля, пригодных для цементной промышленности обычно находится в пределах 1.9 – 3.2. Наиболее благоприятные значения силикатного модуля расположены в интервале 2.2 – 2.6. С ростом силикатного модуля ухудшается способность смеси к обжигу при снижении содержания жидкой фазы. Кроме того, рост силикатного модуля является причиной замедления схватывания и твердения готовой базальтовой смеси. При уменьшении силикатного модуля возрастает содержание жидкой фазы; это обуславливает хорошую обжигаемость смеси.

Значение силикатного модуля базальтовых горных пород месторождения Кызыл-Кия в соответствии с таблицей 1:  $Al_2O_3 = 15$ ,  $Fe_2O_3 = 4$ ,  $SiO_2 = 30$ , тогда

$$SM = \frac{30}{15 + 4} = 1.57$$

Т.е. силикатный модуль базальтовых горных пород Кызыл-Кия составляет 1.57.

2. Глиноземистый модуль (TM).



Глиноземистый модуль (ТМ) характеризует смесь с помощью массового отношения глинозема к оксиду железа:

$$TM = \frac{Al_2O_3}{Fe_2O_3}$$

Обычно глиноземистый модуль находится в пределах 1.5 – 2.5. Известно, что высокий глиноземистый модуль при низком силикатном модуле ( $SM = 1.57$ ) приводит к получению смеси (раствора) при высокой температуре быстрохватывающегося расплава.

Значение глиноземистого модуля базальтовых горных пород Кызыл-Кия при  $Al_2O_3 = 15$ ,  $Fe_2O_3 = 4$  будет равно:

$$TM = \frac{15}{4} = 3.75$$

Глиноземистый модуль базальтовых горных пород Кызыл-Кия составляет 3.75

Полученные данные по силикатному и глиноземистому модулям для базальтовых пород Кызыл-Кийского месторождения позволяет предположить, что Кызыл-Кийские базальтовые породы можно использовать для создания различных промышленных изделий, пригодные в строительной, электротехнической и других отраслях народного хозяйства.

Наряду с оксидами в базальтовой породе имеются также ценные компоненты, такие как: индий, титан, скандий и др.

**1. In (индий)** – элемент третьей группы химических элементов Менделеева [13]. Относится к группе легких металлов. Мировое потребление индия быстро растет, и в 2005 году эта отметка достигла 850 тонн. Индий применяется в разных отраслях науки и технологии, но важной областью применения является техника высокого вакуума, где он используется при герметизации космических аппаратов и мощных ускорителей элементарных частиц.

Из таблицы 4 видно, что индий имеют также и в горных породах базальта месторождения Кызыл-Кия, Кыргызской Республики. Процентное содержание индия в базальтовых горных породах Кызыл-Кии составляет в объеме  $2 \cdot 10^{-2}$  %.

**2. Ti (титан)** – титан отличается высокой прочностью, и коррозионной стойкостью, при сравнительно небольшой массе, что делает его использование незаменимым, где требуются хорошие механические

свойства изделия с учетом их массы [13]. Титан находится на 10-м месте по распространённости в природе. Содержание титана в земной коре составляет 0,57 % по массе. Больше всего титан встречается в основных породах так называемой «базальтовой оболочки» (0,9%), меньше в породах «гранитной оболочки» (0,23%). Подтверждением тому может послужить данные из Таблицы 5, где указано процентное содержание титана в базальтовых горных породах Кызыл-Кии составляет 1.5%.

**3. Sc (скандий)** - химический элемент 3-й группы системы химических элементов Менделеев. Лёгкий, редкоземельный металл серебристого цвета с характерным жёлтым отливом. Среднее содержание скандия в земной коре — 10 г/т [11, 12]. Последние пять лет цены на металлический скандий на мировом рынке колеблются от 12 до 20 тыс. долларов за один кг. Главным по объёму применением скандия является - везде, где требуется высокопрочные материалы. Например, предел прочности на разрыв у чистого скандия около 400 Мпа (40 кг/мм), у титана, например, 250—350 Мпа.

Скандий используется для получения сверхтвёрдых материалов. Так, например, легирование карбида титана карбидом скандия весьма резко поднимает микротвёрдость (в 2 раза), что делает этот новый материал четвёртым по твёрдости после алмаза. А процентное содержание скандия в базальтовых горных породах Кызыл-Кии составляет  $1,2 \cdot 10^{-3} \%$ .

**Заключение.** Таким образом, исследованные базальтовые породы Кызыл-Кийского месторождения могут быть использованы в различных отраслях народного хозяйства (строительной, электротехнической и др.) для получения различных материалов и изделий на его основе, благодаря отличительному химическому его составу. Вместе с тем ценные компоненты, имеющиеся в базальтовой породе, можно получить для использования их в качестве наполнителя при изготовлении композитных материалов с различными эксплуатационными свойствами.

### Литература

1. Габбро-базальтовое сырьё для производства минерального волокна. [Текст] / Под ред. Э.А. Раскиной, А.Н. Земцова // Промышленность строительных материалов. – 2003. – Сер. 6. – Вып. 1-2. – 123 с.

2. **Деревянко, В.Н.** Стойкость базальтового волокна в различных средах. [Текст] / В.Н. Деревянко, Л.В. Саламаха, Е.Г. Кушнир, Е.С. Щудро и др. «Технология и материалы».
3. **Маркин, В.Б.** Применение базальтовых волокон для создания соединений «металл-композит». *Металлургия и материаловедение* / В. Б. Маркин, С. А. Милованов, 2018, №2, С. 135-139.
4. **Рабинович, Ф.Н.** О свойствах цементного камня, армированного ориентированными волокнами // *Бетон и железобетон*, 1976, №10, С. 20 – 23.
5. **Кнотько, А.В.** К вопросу о коррозионной стойкости теплоизоляционных материалов на основе базальтовых волокон. *Кровельные и изоляционные материалы* / А.В. Кнотько, В.И. Путляев, А.В. Гаршев, Е.А. Пустовгар, 2007, №6, С. 52-55.
6. **Кнотько, А.В.** Химические процессы при термообработке базальтового волокна. *Коррозия: материалы, защита* / А. В. Кнотько, А. В. Гаршев, И. Б. Давыдова, В. И. Путляев, В. К. Иванов, Ю. Д. Третьяков, 2007, №3, С. 37-42.
7. Интернет-ресурс. Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Столбчатая\\_отдельность](https://ru.wikipedia.org/wiki/Столбчатая_отдельность)
8. **Атырова, Р.С.** Разработка технологии керамических материалов и изделий с использованием местного базальта [Текст]: канд. техн. наук. 01.04.07/ Р.С. Атырова. - Ош, 2015. – 142 с.
9. **Сопубеков, Н.А.** Экспериментально-теоретические основы получения композитов на основе алевролита [Текст]: канд. техн. наук. 01.04.07/ Н.А Сопубеков. – Бишкек, 2015. – 145 с.
10. **Ахмадиева, А.А.** Мубараков, Р. Г. — Текст: электронный // *Физика. Технологии. Инновации: сборник статей VIII Международной молодежной научной конференции* (Екатеринбург, 17–21 мая 2021 г.). — Екатеринбург: УрФУ, 2021. — С. 365-373.
11. Интернет-ресурс. Режим доступа: <https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/102/770.htm>
12. Интернет-ресурс. Режим доступа: <https://hij.ru/read/6358/>
13. Интернет-ресурс. Режим доступа: <http://www.himsnabspb.ru/article/ps/in/>
14. **Дуда, В.** Цемент / Пер. с нем. Е.Ш. Фельдмана; под ред. Б. Э. Юдовича. – М.: Стройиздат, 1981. – 464 с.

УДК 532.546

## РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ГОРЫ СУЛАЙМАН В ПАКЕТЕ OPENFOAM

*Турганбаева Акпари Балтабаевна, старший преподаватель,*

*mir\_ayka@mail.ru*

*Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич, д.ф.-м.н, доцент,*

*kurbanaliev@rambler.ru*

*Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** Точное и надежное моделирование ветрового потока современными средствами вычислительной гидродинамики над природным сложным рельефом важно для широкого спектра применений, включая перенос и рассеивание загрязняющих веществ, оценку ресурсов энергии ветра. Актуальной проблемой является обеспечение комфортных условий проживания населения в городской местности, где определяющими источниками вредных примесей являются автомобильные выхлопные газы и выбросы от отопительных систем построенных без учета розы ветров. Впервые проведено математическое моделирование обтекания естественного препятствия Сулайман гора, г. Ош, Кыргызстан в пакете открытого кода OpenFOAM7. Вычислены концентрации пассивной примеси в 3 реперных точках, расположенных в разных сторонах горы Сулайман.

**Ключевые слова:** моделирование ветрового потока, Навье-Стокс, холму, Сулайман гора, OpenFOAM.

## OPENFOAM ПАКЕТИНДЕ СУЛАЙМАН ТООСУНУН АЙЛАНАСЫНДАГЫ АГЫМДЫ МОДЕЛДЕШТИРҮҮ

*Турганбаева Акпари Балтабаевна, улук окутуучу, mir\_ayka@mail.ru*

*Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич, ф.-м.и.д., доцент, kurbanaliev@rambler.ru*

*Ош мамлекеттик университети, Ош, Кыргызстан*

**Аннотация.** Заманбап CFD инструменттерин колдонуу менен табигый татаал рельефте шамалдын агымын так жана ишенимдүү моделдөө булгоочу заттарды ташуу жана дисперсиялоо, ошондой эле шамалдын энергетикалык ресурстарын баалоо

үчүн абдан маанилүү. Автоунаалардан чыккан газдар жана шамалдын көтөрүлүшүн эске албаганда курулган жылытуу тутумдарынан чыккан эмиссиялар зыяндуу аралашмалардын аныктоочу булактары болуп саналган шаарларда калктын ыңгайлуу жашоо шарттарын камсыз кылуу актуалдуу маселе болуп саналат. Биринчи жолу OpenFAOM7 ачык булак пакетинде Сулайман тоосу, Ош, Кыргызстан табигый тоскоолдуктун айланасындагы агымдын математикалык моделдөө жүргүзүлдү. Пассивдүү аралашмалардын концентрациясы Сулайман тоосунун ар кайсы тарабында жайгашкан 3 эталондук пунктта эсептелген.

**Ачык сөздөр:** Шамалдын агымын моделдөө, Навье-Стокс, дөңсөө, Сулайман тоосу, OpenFOAM.

## MODELING OF THE FLOW OVER THE SULAIMAN MOUNTAIN IN THE FRAME OF THE OPENFOAM PACKAGE

*Turganbaeva Akpari Baltabaevna, senior lecturer*

*mir\_ayka@mail.ru*

*Kurbanaliev Abdikerim Yrysbaevich,,*

*doctor of physical and mathematical sciences, dosent, kurbanaliev@rambler.ru*

*Osh State University, Osh, Kyrgyzstan*

**Abstract.** *Accurate and reliable modeling of the wind flow over natural complex terrain using modern CFD tools is important for a wide range of applications, including the transport and dispersion of pollutants and the assessment of wind energy resources. An urgent problem is to ensure comfortable living conditions for the population in urban areas, where the determining sources of harmful impurities are automobile exhaust gases and emissions from heating systems built without taking into account the wind rose. For the first time, mathematical modeling of the flow around a natural obstacle, Sulaiman Mountain, Osh, Kyrgyzstan, was carried out in the OpenFAOM7 open source package. The concentrations of passive impurities were calculated at 3 reference points located on different sides of Sulaiman Mountain.*

**Key words:** *Wind flow modeling, Navier-Stokes, hillside, Sulaiman mountain, OpenFOAM.*

**Введение.** В последние годы наблюдается растущий интерес к применению вычислительной гидродинамики для моделирования сложных микрометеорологических процессов, таких как воздушный поток в городских районах, над сложной топографией или областью с существенными температурными градиентами [1, 4]. Среди нескольких факторов, которые способствовали такому интересу к данной тематике

можно подчеркнуть применение методов вычислительной гидродинамики в актуальных областях, таких как возобновляемые источники энергии, рассеивание загрязняющих веществ с учетом изучения и систем естественной вентиляции. В общем, данная проблема может быть описана в терминах взаимодействия в пределах атмосферной границы и внутри слоя, между воздушным потоком и объектом, которые определяют сложную геометрию поверхности обтекания.

Для того чтобы спроизвести адекватное моделирование процесса обтекания препятствия со сложной поверхностью, включающий в себя несколько физических процессов, взаимодействующих друг с другом и имеющих сложную геометрию, необходимо использовать вычислительные инструменты, способные включать эти процессы и сложные расчетные сетки [5, 6].

В этой работе, учитывая большую универсальность пакета, был выбран открытый код OpenFOAM [7]. Рассматриваемое естественное препятствие Сулайман гора расположена в центре г. Ош, Кыргызстан ( $40^{\circ}31'46''$  с. ш.  $72^{\circ}47'00''$  в. д.). Сулайман гора представляет собой пятиглавый известковый останец, вытянутый с запада на восток. Длина более 1140 метров, ширина — 560 метров.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача исследования влияния различных схем дискретизации конвективного члена в уравнении переноса пассивной примеси на сходимость итерационного процесса на примере горы Сулайман, г. Ош (смотрите рисунок 1).

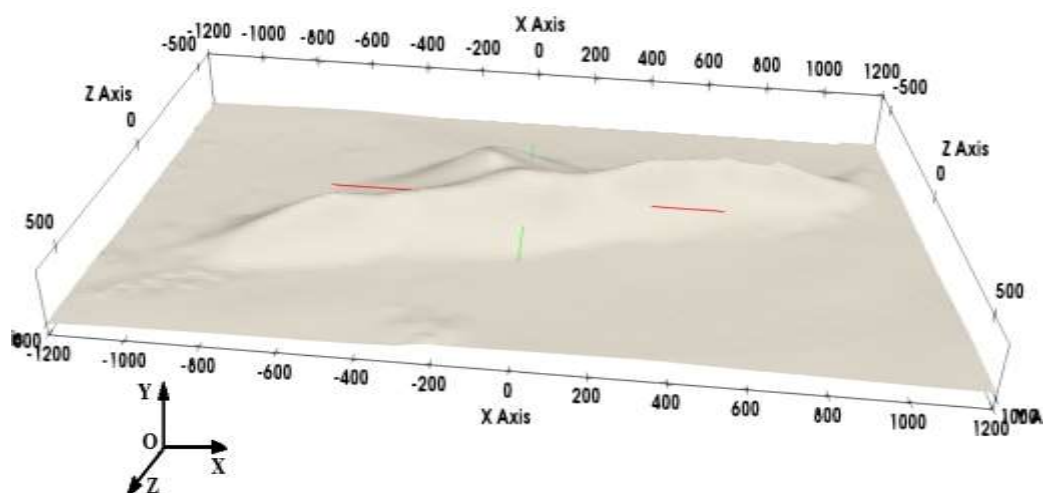


Рисунок 1 – Расчетная область и принятая система координат

Воздушный поток входит в расчетную область слева со скоростью 10 м/с. Вектор входной скорости направлен вдоль оси  $Ox$ .

Математическое моделирование рассматриваемых задач основано на уравнениях неразрывности, переноса количества движения и пассивной примеси которые вместе образуют усреднённых по Рейнольдсу систему уравнений Навье-Стокса. Эта система для несжимаемого течения при отсутствии массовых сил имеет следующий вид [8]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{u}_i) = 0; \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{\rho u'_i u'_j}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_{eff} \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

где  $\bar{u}_i$  – компоненты средней скорости,  $\rho$  – плотность,  $c$  – концентрация пассивной примеси,  $\bar{p}$  – среднее давление,  $\overline{\tau_{ij}} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$  – тензор вязких напряжений, связанный с молекулярной вязкостью  $\mu$ ,  $\overline{\rho u'_i u'_j}$  – напряжения Рейнольдса, требующие моделирования,  $\alpha_{eff}$  – эффективный коэффициент диффузии, учитывающий эффекты как молекулярного, так и турбулентного переноса вещества. При наличии внешних сил эти уравнения необходимо дополнить соответствующими членами.

Учет турбулентных пульсаций на гидродинамику течения базировался на двухпараметрических моделях турбулентности.

Сведения о граничных условиях, методах дискретизации и решения систем линейных алгебраических уравнений приведены в следующей табл. 1 и табл. 2.

Таблица 1 – Используемые граничные условия

Переменная	U	$\omega$	k	$\varepsilon$
Граница				
inlet	type fixedValue; value uniform (10 0 0);	type fixedValue; value uniform 39.61;	type fixedValue; value uniform 0.375;	type fixedValue; value uniform 14.855;
outlet	type zeroGradient;	type zeroGradient	type zeroGradient	type zeroGradient
top	type	type	type	type

	noSlip;	omegaWallFunction; value uniform 39.61;	kqRWallFunction; value uniform 0.375;	epsilonWallFunction; value uniform 14.855;
side1	type noSlip;	type omegaWallFunction; value uniform 39.61;	type kqRWallFunction; value uniform 0.375;	type epsilonWallFunction; value uniform 14.855;
side2	type noSlip;	type omegaWallFunction; value uniform 39.61;	type kqRWallFunction; value uniform 0.375;	type epsilonWallFunction; value uniform 14.855;
Sulaiman	type noSlip;	type omegaWallFunction; value uniform 39.61;	type kqRWallFunction; value uniform 0.375;	type epsilonWallFunction; value uniform 14.855;

Для давления на выходе из расчетной области задано нулевое фиксированное значение (условие Дирихле), а на всех остальных границах – нулевой градиент (условие Неймана).

Таблица 2 – Используемые схемы дискретизации

Слагаемое	Схема	Порядок схемы
Градиент	Gauss linear	Второй
Конвекция Скорость k, ε, ω T	Gauss linear upwind grad(U) Gauss upwind Gauss upwind	Второй Первый Первый
Лапласиан	Gauss linear corrected	Второй

Таблица 3 – Решатели уравнений для основных переменных

Переменная	Решатель	Точность
Давления	метод сопряженных градиентов GAMG с использованием сглаживателя GaussSeidel	$1e^{-3}$



U, k, $\varepsilon$ , $\omega$ , T	smoothSolver с использованием сглаживателя GaussSeidel	$1e^{-3}$
------------------------------------	---	-----------

Граничное условие для концентрации пассивной примеси T задается в виде линейного источника со значением  $T=1$  (условие Дирихле) а на выходе задано условие Неймана– нулевой продольный градиент (zeroGradient). А на всех остальных границах расчетной области задано условие  $T=0$ .

**Результаты расчетов и обсуждение.** На следующих рисунках приведены поля компонент (рисунок 2а,б) и модулю скорости (рисунок 2г), давления (рисунок 3) и концентрации пассивной примеси (рисунок 4) в плоскости  $z = -200$ м. Направление воздушного ветра – слева направо

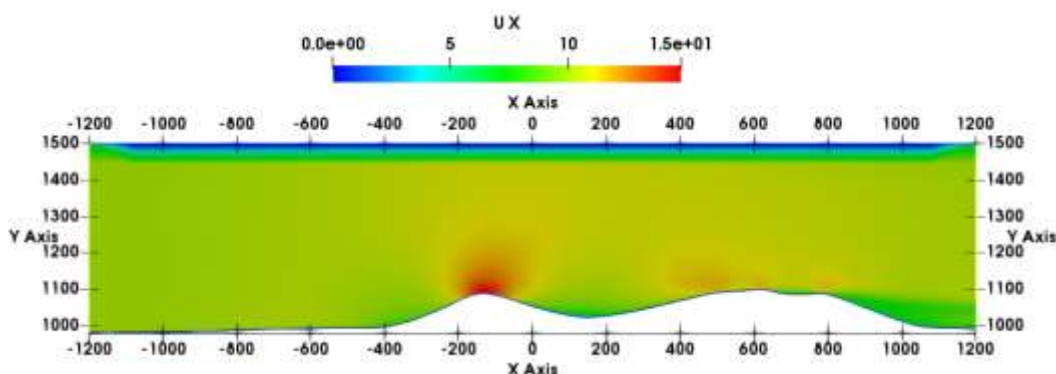


Рисунок 2а – Поле скорости Ux

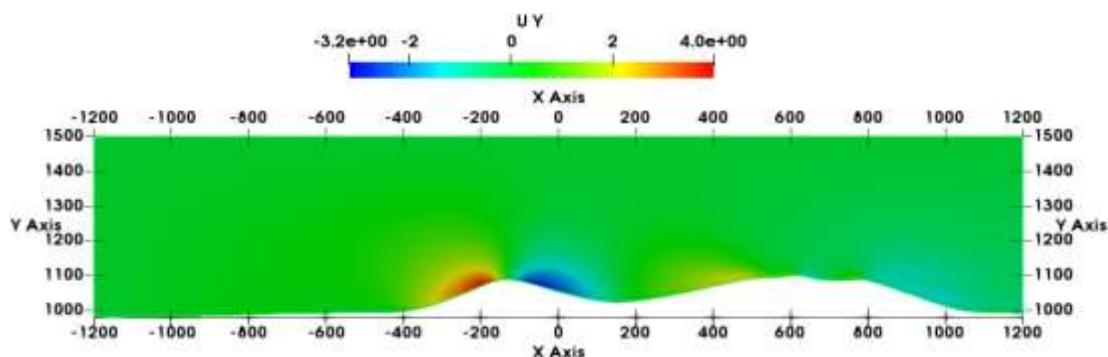


Рисунок 2б – Поле скорости Uy

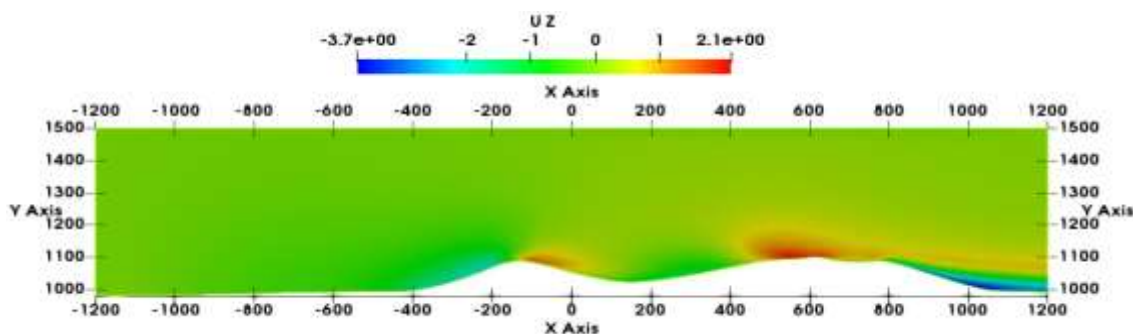


Рисунок 2в – Поле скорости Uz

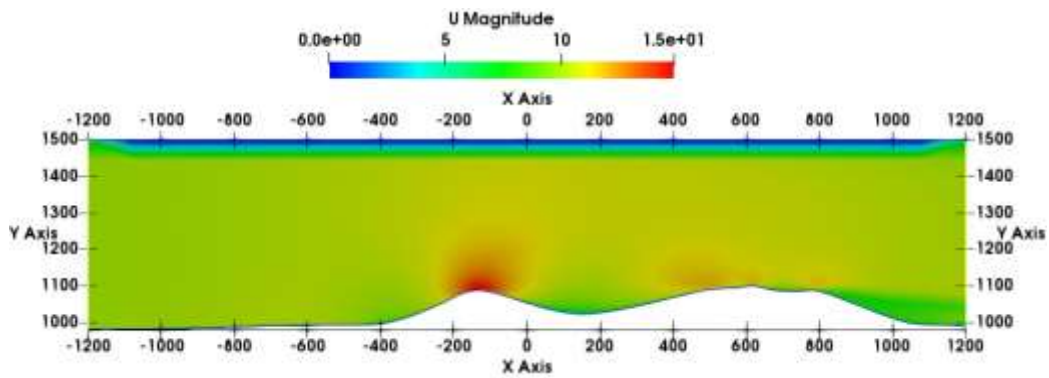


Рисунок 2г – Поле модуля скорости U

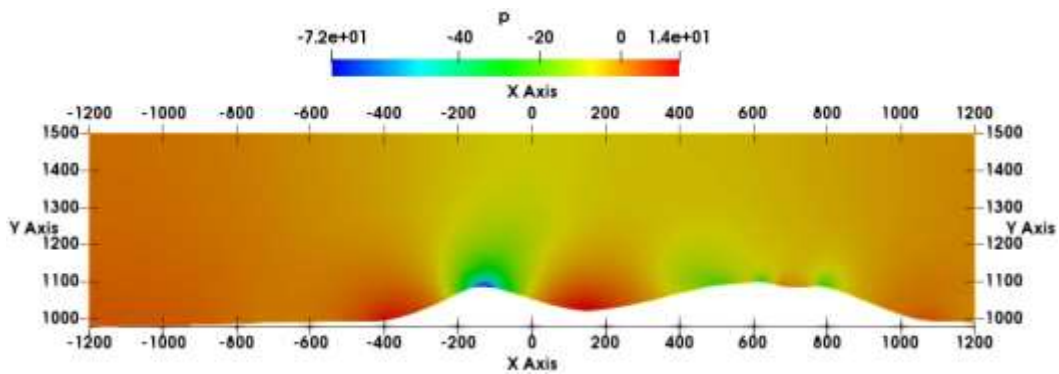


Рисунок 3 – Поле давления

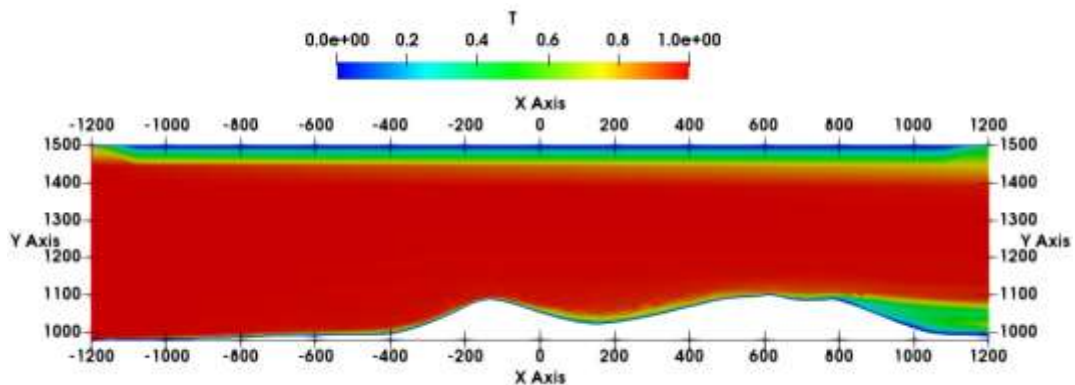


Рисунок 4 – Поле концентрации пассивной примеси

По мере приближения потока воздуха к первому холму имеет место повышения давления ( $x \approx -400$ м, смотрите рисунок 3). Далее по мере приближения к первому холму поток ускоряется, модуль скорости достигает своего максимального значения 11.4 м/с что видно на рисунке 5.

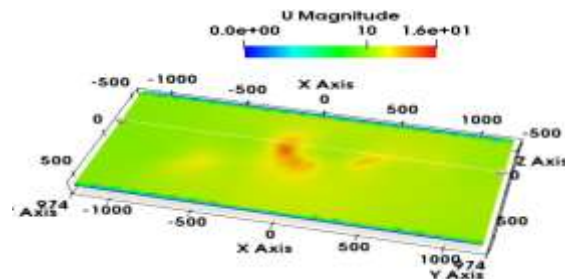


Рисунок 5 – Поле модуля скорости в плоскости  $y=1131.4$ мм

Ускорение потока воздуха в плоскости на высоте  $y=1131.4\text{мм}$  показано на следующем рисунке 6.

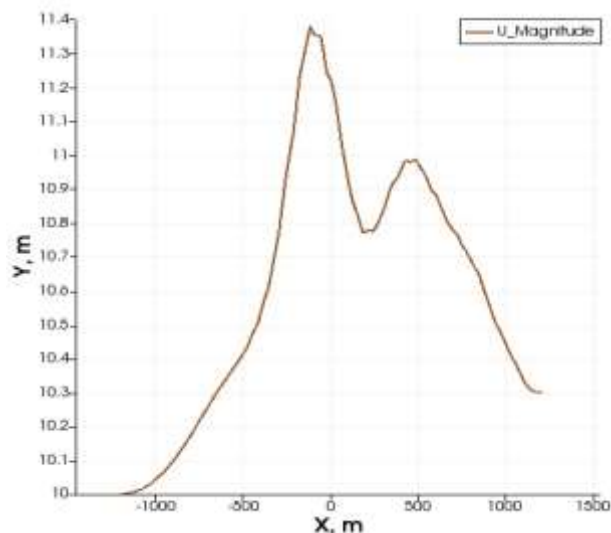


Рисунок 6 – Ускорение потока в плоскости  $z=-200\text{м}$

Далее в табл. 4 приведены результаты исследования влияния схемы дискретизации конвективного члена в уравнении переноса пассивной примеси (2). Концентрации пассивной примеси выбраны в трёх точках P1(-265 1058.57 -50), P2(550 1025.63 0) и P3(120 1005.68 -280) (рисунок 7).

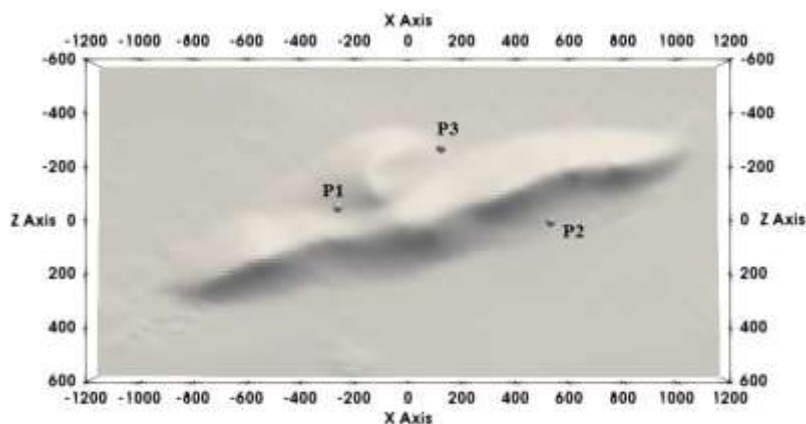


Рисунок 7 – Расположение реперных точек

Таблица 4 – Концентрации пассивной примеси в реперных точках

Точки	P1	P2	P3
<b>Центрированные схемы</b>			
linear	0.5322	0.01684	0.06456
midPoint	0.4491	0.02818	0.06286
<b>Схемы против потока</b>			

QUICK	0.4516	0.005418	0.05886
filteredLinare2	0.5165	0.01193	0.06092
linearUpwind	0.3626	0.313	0.06895
Upwind	0.6137	0.4438	0.1823
<b>TVD схемы</b>			
limitedCubic	0.4931	0.05008	0.0713
limitedLinear1	0.5375	0.06958	0.08088
Minmod	0.5591	0.09488	0.09302
MUSCL01	0.4364	0.05804	0.06153
SuperBee	0.403	0.006198	0.04272
vanLeer	0.4913	0.04048	0.07086
limitedVanLeer	0.4913	0.04048	0.07086
<b>NVD схемы</b>			
Gamma0	0.5011	0.0352	0.07188
Gamma0.5	0.5317	0.02615	0.07218
Gamma1	0.5571	0.03365	0.08224
SFCD	0.5654	0.04027	0.08548

Результаты исследования эффекта дискретизации конвективного члена в уравнении переноса пассивной примеси показывают, что не существует четкой численной схемы, которая в целом дает наилучшие результаты. Обнаружено, что vanLeer и limitedVanLeer дает совершенно одинаковые значения концентрации пассивной примеси в трёх реперных точках.

Расчеты показывают, что из трех реперных точек концентрация пассивной примеси в точках P2 и P3 примерно на порядок меньше значений концентрации в точке P1. Поэтому, можно утверждать, что степень экологической комфортности в точках P2 и P3 на порядок выше, чем в точке P1.

**Заключение.** Впервые проведено математическое моделирование обтекания естественного препятствия Сулайман гора, г. Ош, Кыргызстан в пакете открытого кода OpenFAOM7. Вычислены концентрации пассивной

примеси в 3 реперных точках, расположенных в разных сторонах горы Сулайман. Результаты исследования эффекта дискретизации конвективного члена в уравнении переноса пассивной примеси показывают, что не существует четкой численной схемы, которая в целом дает наилучшие результаты. Обнаружено, что *vanLeer* и *limitedVanLeer* дает совершенно одинаковые значения концентрации пассивной примеси в трёх реперных точках.

Расчеты показывают, что из трех реперных точек концентрация пассивной примеси в точках P2 и P3 примерно на порядок меньше значений концентрации в точке P1. Поэтому, можно утверждать, что степень экологической комфортности в точках P2 и P3 на порядок выше, чем в точке P1.

### Литература

1. **Yoshihide Tominaga**, Akashi Mochida, Ryuichiro Yoshie, Hiroto Kataoka, Tsuyoshi Nozu, Masaru Yoshikawa, Taichi Shirasawa. AIJ guidelines for practical applications of CFD to pedestrian wind environment around buildings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. Volume 96, Issues 10–11, October–November 2008, Pages 1749-1761.
2. **Mary C. Bautista**1, Louis Dufresne, and Christian Masson. Hybrid turbulence models for atmospheric flow. A proper comparison with RANS model. *Web of Conferences* 5, 03001, 2015.
3. **Yi Han** et al. Large eddy simulation for atmospheric boundary layer flow over flat and complex terrains. *Journal of Physics: Conference Series*, 753 032044, 2016
4. **Курбацкий, А.Ф.** Различие в турбулентной диффузии между активным и пассивным скалярами в термически устойчивой стратифицированной среде, ТБТ, 2004, том 42, выпуск 1, 83–90.
5. **Paraggio F.**, G.Crasto. RANS Simulations of Askervein hill with OpenFOAM. Conference Paper. Third Symposium on OpenFOAM® in Wind Energy, Milan 15-17 June 2015.  
[https://www.academia.edu/25192173/RANS\\_Simulations\\_of\\_Askervein\\_hill\\_with\\_Open\\_FOAM](https://www.academia.edu/25192173/RANS_Simulations_of_Askervein_hill_with_Open_FOAM).
6. **Carlos Peralta**, H. Nugusse, S. P. Kokilavani, Bernhard Stoevesandt. Validation of the simpleFoam (RANS) solver for the atmospheric boundary layer in complex terrain. *ITM Web of Conferences* · January 2014.
7. OpenFOAM v7 User Guide. <https://doc.cfd.direct/openfoam/user-guide-v7/>
8. **Ferziger J. H.**, Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer Verlag, 2002. —423p.

**«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ»  
ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ**

*Корректор:*

*Салиева А.А.*

*Техникалык редактор:*

*Убайдилаева Ж.А.*

ОшМУнун “Билим” редакциялык басма бөлүмүндө даярдалып,  
басмадан чыгарылды.

Биздин дарегибиз: 723500, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331.

Байланыш телефондору: (+9963222) 72273

Факс: (+9963222) 70915

Электрондук дарегибиз: [journal-@oshsu.kg](mailto:journal-@oshsu.kg)

Сайт: [www.oshsu.kg](http://www.oshsu.kg)

**Негиздөөчүсү** – Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим  
министрлиги  
Ош мамлекеттик университети

Басууга берилди: 20.12.2022

Көлөмү: 26,7 б.т.

Буюртма: \_\_\_\_\_

Форматы: 176x250 1/8

Нуска: 200 д.

---

*«Билим» редакциялык – басма бөлүмү*