УДК 517.51, 517.98
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_176

ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТС-SOS

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович, д.ф.-м.н., профессор,
mrahmatullaev@rambler.ru
Расулова Мухайё Акбаржон кизи, старший научный сотрудник,
m_rasulova_a@rambler.ru
Институт Математики имени В.И. Романовского
Академии Наук Республики Узбекистан,
Наманган, Узбекистан

Аннотация. *Для модели Поттс-SOS на дереве Кэли порядка два доказано, что при выполнении найденных условий существует не более семи трансляционно-инвариантных мер Гиббса.*

Ключевые слова: *дерево Кэли, модель Поттса, модель SOS, модель Поттс-SOS, основные состояния, меры Гиббса, трансляционно-инвариантные меры Гиббса.*

TRANSLATION-INVARIANT GIBBS MEASURES FOR THE POTTS-SOS MODEL

Raxmatullayev MuzaffarMuxammadjanovich, Dr Sc, professor,
mrahmatullaev@rambler.ru
Rasulova Muhayyo Akbarjon qizi, PhD,
m_rasulova_a@rambler.ru
Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Namangan, Uzbekistan

Abstract*. The translation-invariant Gibbs measures for the Potts-SOS model on the Cayley tree of order two are described.*

Key words: *Cayley tree, Potts model, SOS model, Potts-SOS model, Gibbs measures, translation-invariant Gibbs measures.*

Теория гиббсовских мер представляет собой сравнительно новую область теории мер, хотя сами эти меры являются главным объектом изучения в статистической физике и квантовой евклидовой теории.

Основная проблема равновесной статистической физики – описать для данного гамильтониана все отвечающие ему предельные меры Гиббса. Эта проблема полностью решается лишь в отдельных сравнительно простых случаях.

Множество всех гиббсовских состояний с данным гамильтонианом является непустым компактным выпуклым подмножеством множества всех распределений, так что естественно возникновение задачи изучения крайних гиббсовских мер. Эта задача весьма за труднительная. Поэтому естественно, по крайней мере в самом начале, следует найти для гамильтониана трансляционно-инвариантные предельные меры Гиббса.

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi=\{0, 1, 2, ..., m\}$, $m\geq 1$.

Гамильтониан модели Поттс-SOS определяется следующем образом (см. [4]):

$$H(\sigma)=-J_s\sum_{\langle x,y\rangle\in L}|\sigma(x)-\sigma(y)|-J_p\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \qquad (1)$$

где $J_s,\ J_p \in R$, $\langle x,y\rangle -$ ближайшие соседи, $\delta_{uv} -$ символ Кронекера.

В случае $J_p = 0,\ J_s \neq 0$ модель (1) совпадает с моделью SOS. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели SOS были изучены в [3]. В случае $J_s = 0,\ J_p \neq 0$ модель (1) совпадает с моделью Поттса. Для модели Поттса трансляционно-инвариантные меры Гиббса описаны в [2].

В [4] изучены трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели Поттс-SOS на дереве Кэли произвольного порядка, доказано существование не менее трех трансляционно-инвариантных мер Гиббса при некоторых условиях параметров.

В данной работе рассматривается модель Поттс-SOS с тремя состояниями на дереве Кэли. Для этой модели на дереве Кэли порядка два изучаются множество всех трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Известно [4], что каждой мере Гиббса для модели Поттс-SOS на дереве Кэли порядка $k \geq 1$ можно сопоставить совокупность векторов

$$h_x^* = \left(h_{0,x},\ \ h_{1,x},\ldots,\ \ h_{m-1,x}\ \right),\quad x \in G_k,$$

удовлетворяющих уравнению

$$h_x^* = \sum_{y\in S(x)} F\left(h_y^*, m, \theta, r\right), \tag{2}$$

где $S(x)$ $-$множество прямых потомков точки $x \in G_k$ и $\theta = \exp(J_s\beta),\ r = \exp(J_p\beta),\ \beta = \dfrac{1}{T},\ T > 0,$ функция $F(\cdot, m,\theta, r): R^m \to R^m$ определена следующим образом: $F(h,m,\theta,r) = \left(F_0(h,m,\theta,r),\ldots,F_{m-1}(h,m,\theta,r)\right)$ с

$$F_i\left(h,m,\theta,r\right) = \ln\left(\frac{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\theta^{|i-j|}r^{\delta_{ij}}\exp\left(h_j\right)+\theta^{m-i}r^{\delta_{mi}}}{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\theta^{m-j}r^{\delta_{mj}}\exp\left(h_j\right)+r}\right), \tag{3}$$

где $h = (h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}),\ i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Пусть $G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, \ldots, H_{r'}\}$ $-$фактор группа, где G_k^* $-$ нормальный делитель индекса $r' \geq 1$.

Определение 1. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется G_k^*-периодической, если $h_x = h_i$ при $x \in H_i$ для любого $x \in G_k$. G_k-периодическая совокупность векторов называется трансляционно-инвариантной.

Определение 2. Мера μ называется трансляционно-инвариантной, если она соответствует трансляционно-инвариантной совокупности векторов h.

Теорема 1. [4] Пусть $m = 2$. Для модели Поттс-SOS на дереве Кэли, определенной в (1), справедливы следующие утверждения:

а) пусть $J_s,\ J_p < 0$. Тогда существует единственная симметричная трансляционно-инвариантная мера Гиббса (СТИМГ) для всех r, θ;

б) пусть $J_s,\ J_p \geq 0,\ k \geq 2$:

б.1) если $0 < r < r_c^1$, то существует только одна СТИМГ;

б.2) если $r > r_c^1$, то существуют ровно три СТИМГ,

где $r_c^1 = \frac{\theta}{2}\left(\sqrt{\theta^2 + 8\frac{(k+1)^2}{(k-1)^2}} - \theta\right)$.

Количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттс-SOS, возможно, может быть больше, чем найденно в [4]. В этой работе доказано, что возможное количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттс-SOS на дереве Кэли порядка два может достигать семи.

Пусть $m = 2$, т.е. $\Phi = \{0, 1, 2\}$. В этом случае уравнение (2) для трансляционно-инвариантных мер Гиббса имеет вид

$$h = kF(h, \theta, r),$$

где $h = (h_0, h_1)$. Вводя обозначения $l_0 = e^{h_0}$, $l_1 = e^{h_1}$, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} l_0 = \left(\dfrac{r\,l_0 + \theta\,l_1 + \theta^2}{\theta^2\,l_0 + \theta\,l_1 + r}\right)^k, \\ l_1 = \left(\dfrac{\theta\,l_0 + r\,l_1 + \theta}{\theta^2\,l_0 + \theta\,l_1 + r}\right)^k. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $k = 2$. Обозначим $\sqrt{l_0} = x$, $\sqrt{l_1} = y$. Тогда из (4) получим

$$\begin{cases} x = \dfrac{r\,x^2 + \theta\,y^2 + \theta^2}{\theta^2\,x^2 + \theta\,y^2 + r}, \\ y = \dfrac{\theta\,x^2 + r\,y^2 + \theta}{\theta^2\,x^2 + \theta\,y^2 + r}. \end{cases} \tag{5}$$

Система уравнений (5) сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \theta^2\,x^3 - r\,x^2 + (\theta\,y^2 + r)\,x - \theta\,y^2 - \theta^2 = 0, \\ \theta\,y^3 - r\,y^2 + (\theta^2\,x^2 + r)\,y - \theta\,x^2 - \theta = 0, \end{cases} \tag{6}$$

которая может быть переписана в виде:

$$\begin{cases} (x-1)\,(\theta^2\,x^2 + \theta^2\,x + \theta^2 - r\,x + \theta\,y^2) = 0, \\ \theta\,y^3 - r\,y^2 + (\theta^2\,x^2 + r)\,y - \theta\,x^2 - \theta = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно, что решения системы уравнений (7) являются решениями следующих систем уравнений

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ \theta\,y^3 - r\,y^2 + (\theta^2\,x^2 + r)\,y - \theta\,x^2 - \theta = 0 \end{cases} \tag{8}$$

или

$$\begin{cases} \theta^2\,x^2 + \theta^2\,x + \theta^2 - r\,x + \theta\,y^2 = 0, \\ \theta\,y^3 - r\,y^2 + (\theta^2\,x^2 + r)\,y - \theta\,x^2 - \theta = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим сначала систему уравнений (8). Подставив $x = 1$ во второе уравнение системы уравнений (8), получим

$$\theta y^3 - r y^2 + (\theta^2 + r) y - 2\theta = 0. \tag{10}$$

Введем обозначение

$$y = z + \frac{r}{3\theta}. \tag{11}$$

Тогда уравнение (10) можно свести к уравнению

$$z^3 + p z + q = 0, \tag{12}$$

где

$$p = \frac{r}{\theta} + \theta - \frac{r^2}{3\theta^2}, \quad q = \frac{r}{3} + \frac{r^2}{3\theta^2} - \frac{2r^3}{27\theta^3} - 2. \tag{13}$$

Решив уравнение $p = 0$ относительно r, имеем решения $r_{1,\,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 12\theta}}{2}\theta$. Так как $r > 0,\ \theta > 0,$ то получаем $r_1 = \frac{3 + \sqrt{9 + 12\theta}}{2}\theta$. Подставляя r_1 в выражение q в (13) и решив уравнение $q = 0$ относительно θ, получаем решение $\theta_1 = 3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2} - 1)$. Подставив $r_1,\ \theta_1$ в выражения $p,\ q$ в (13), затем $p,\ q$ в уравнение (12), получим уравнение $z^3 = 0$. Отсюда следует, что уравнение (10) имеет один положительный корень $y = \frac{r_1}{3\theta_1}$.

Из (13) получаем

$$Q(r,\,\theta) = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{1}{27}\left(-\frac{1}{3}\frac{r^2}{\theta^2} + \frac{r}{\theta} + \theta\right)^3 + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{27}\frac{r^3}{\theta^3} + \frac{1}{3}\frac{r^2}{\theta^2} + \frac{1}{3}r - 2\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{108\,\theta^4}(r^4 + 2\,r^3\theta^2 + r^2\theta^4 - 12\,r^3\theta - 12\,r^2\theta^3 - 12\,\theta^5 r - 4\,\theta^7 + 36\,\theta^2 r^2 + \tag{14}$$

$$+ 36\,\theta^4 r - 108\,\theta^4).$$

Для $\theta = \theta_1 = 3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2} - 1)$ имеем $Q(r,\,\theta_1) = \frac{116 + 73\sqrt[3]{4} + 92\sqrt[3]{2}}{34992}\cdot$

$$\cdot\left(-r^2 + 36\left(1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)r + 324\left(13 - 4\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{4}\right)\right)\left(r - 18 + 9\sqrt[3]{4}\right)^2.$$

Используя формулу Кардано, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\theta = 3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2} - 1)$. Существует $r_c\left(\approx 4.221293186\right)$ такое, что

- Если $r \in \left(0,\ r_c\right)$, то уравнение (10) имеет одно положительное решение.
- Если $r = r_c$, то уравнение (10) имеет два положительных решения.
- Если $r \in \left(r_c;\ \infty\right)$, то уравнение (10) имеет три положительных решения.

Теперь рассмотрим систему уравнений (9). Из (9) получим

$$x = \frac{\theta\, y\left(\theta^2 - y + r\,y - r\right)}{-\theta^3 y + \theta^2 + \theta\, r\, y - r}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в первое уравнение системы уравнений (9), получим

$$\theta^2(\theta + 1)\left(r^2 - 2\theta r + \theta^3 - \theta^2 + \theta\right)y^4 - \theta\left(r - \theta^2\right)\left(r^2 + \left(\theta^2 + 1\right)r - 3\theta^2\right)y^3 +$$

$$+\left((\theta+1)r+\theta^3\right)\left(r-\theta^2\right)^2y^2-\left(r+\theta^2\right)\left(r-\theta^2\right)^2y+\theta\left(r-\theta^2\right)^2=0. \qquad (16)$$

В уравнении (16) введем следующие обозначения:

$$f(y,r,\theta)=\theta^2(\theta+1)\left(r^2-2\theta r+\theta^3-\theta^2+\theta\right)y^4-\theta\left(r-\theta^2\right)\left(r^2+\left(\theta^2+1\right)r-3\theta^2\right)y^3+$$
$$+\left((\theta+1)r+\theta^3\right)\left(r-\theta^2\right)^2y^2-\left(r+\theta^2\right)\left(r-\theta^2\right)^2y+\theta\left(r-\theta^2\right)^2. \quad (17)$$

Функцию (17) можно переписать в виде

$$f(y,r,\theta)=\left(a\,y^2+b\,y+c\right)\left(d\,y^2+e\,y+f\right),$$

где

$$a\,d=\theta^2(\theta+1)\left(r^2-2\theta r+\theta^3-\theta^2+\theta\right),$$
$$a\,e+b\,d=-\theta\left(r-\theta^2\right)\left(r^2+\left(\theta^2+1\right)r-3\theta^2\right),$$
$$a\,f+b\,e+c\,d=\left((\theta+1)r+\theta^3\right)\left(r-\theta^2\right)^2,$$
$$b\,f+c\,e=-\left(r+\theta^2\right)\left(r-\theta^2\right)^2,$$
$$c\,f=\theta\left(r-\theta^2\right)^2.$$

Пусть $D_1(r,\theta)=b^2-4ac$ и $D_2(r,\theta)=e^2-4d\,f$.

Обозначим следующие множества:

$$B_1=\left\{(r,\theta)\in R_+^2: D_1(r,\theta)>0,\ D_2(r,\theta)>0\right\},$$
$$B_2=\left\{(r,\theta)\in R_+^2: D_1(r,\theta)>0,\ D_2(r,\theta)=0\ \vee\ D_1(r,\theta)=0,\ D_2(r,\theta)>0\right\},$$
$$B_3=\{(r,\theta)\in R_+^2: D_1(r,\theta)=0,\ D_2(r,\theta)=0\ \vee\ D_1(r,\theta)>0,\ D_2(r,\theta)<0\ \vee$$
$$\vee\ D_1(r,\theta)<0,\ D_2(r,\theta)>0\},$$
$$B_4=\left\{(r,\theta)\in R_+^2: D_1(r,\theta)=0,\ D_2(r,\theta)<0\ \vee\ D_1(r,\theta)<0,\ D_2(r,\theta)=0\right\},$$
$$B_5=\left\{(r,\theta)\in R_+^2: D_1(r,\theta)<0,\ D_2(r,\theta)<0\right\}.$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. Пусть $\theta=3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2}-1)$, тогда справедливы следующие утверждения:

- Если $(r,\theta)\in B_1$, то уравнение (16) имеет четыре положительных решения.
- Если $(r,\theta)\in B_2$, то уравнение (16) имеет три положительных решения.
- Если $(r,\theta)\in B_3$, то уравнение (16) имеет два положительных решения.
- Если $(r,\theta)\in B_4$, то уравнение (16) имеет одно положительное решение.
- Если $(r,\theta)\in B_5$, то уравнение (16) не имеет решения.

Введем следующие обозначения:

$$A_1=\left\{(r,\theta)\in R_+^2: r\le 3\theta^2,\ Q>0\right\}\cup\left\{(r,\theta)\in R_+^2: p=0,\ q=0\right\},$$
$$A_2=\left\{(r,\theta)\in R_+^2: r\le 3\theta^2,\ Q=0\right\}\cap\left\{(r,\theta)\in R_+^2: p\ne 0\vee q\ne 0\right\},$$
$$A_3=\left\{(r,\theta)\in R_+^2: r\le 3\theta^2,\ Q<0\right\},$$
$$A_4=\left\{(r,\theta)\in R_+^2: r>3\theta^2,\ Q>0\right\},$$
$$A_5=\left\{(r,\theta)\in R_+^2: r>3\theta^2,\ Q=0\right\}\cap\left\{(r,\theta)\in R_+^2: p\ne 0\vee q\ne 0\right\},$$
$$A_6=\left\{(r,\theta)\in R_+^2: r>3\theta^2,\ Q<0\right\}.$$

Пусть $N -$ количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттс-SOS.

Теорема 2. Пусть $k = 2,\ m = 2.$ Следующие отношения справедливы для N:

$$N = \begin{cases} 1, & \text{если } (r, \theta) \in A_1, \\ 2, & \text{если } (r, \theta) \in A_2 \cup (A_4 \cap B_4) \cup (A_5 \cap B_5), \\ 3, & \text{если } (r, \theta) \in A_3 \cup (A_4 \cap B_3) \cup (A_5 \cap B_4), \\ 4, & \text{если } (r, \theta) \in (A_4 \cap B_2) \cup (A_5 \cap B_3) \cup (A_6 \cap B_4), \\ 5, & \text{если } (r, \theta) \in (A_4 \cap B_1) \cup (A_5 \cap B_2) \cup (A_6 \cap B_3), \\ 6, & \text{если } (r, \theta) \in (A_5 \cap B_1) \cup (A_6 \cap B_2), \\ 7, & \text{если } (r, \theta) \in A_6 \cap B_1. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы уравнений (9). Запишем это в следующем виде

$$\theta^2 x^2 + (\theta^2 - r)x + \theta^2 = -\theta y^2. \tag{18}$$

Правая часть (18) отрицательна, поэтому

$$\theta^2 x^2 + (\theta^2 - r)x + \theta^2 < 0. \tag{19}$$

Для левой части (19) вычислим ее дискриминант $D = (\theta^2 - r)^2 - 4\theta^4$. Если дискриминант положителен, то неравенство (19) имеет действительные решения. Поэтому мы должны решить следующее неравенство:

$$(-r - \theta^2)(3\theta^2 - r) > 0.$$

Поскольку $-r - \theta^2 < 0$, то $r > 3\theta^2$.

Неравенство (19) имеет положительное решение, как только $\theta^2 - r < 0$ или $r > \theta^2$. Если $r > 3\theta^2$, то также выполняется $r > \theta^2$. Если $r > 3\theta^2$, то решение неравенства (19) состоит из следующего интервала:

$$\left(\frac{r - \theta^2 - \sqrt{D}}{2\theta^2},\ \frac{r - \theta^2 + \sqrt{D}}{2\theta^2} \right).$$

Кроме того, в этом интервале уравнение (18) имеет смысл.

Следовательно, если $r > 3\theta^2$, то первое уравнение системы уравнений (9) имеет положительное действительное решение. Если $r \le 3\theta^2$, то первое уравнение системы уравнений (9) не может иметь положительного решения, т.е. для любой положительной действительной пары (x, y), являющейся решением первого уравнения системы уравнений (9), не выполняется неравенство $r \le 3\theta^2$. Тогда трансляционно-инвариантные меры Гиббса, соответствующие корням уравнения (9), не существуют при условии $r \le 3\theta^2$.

По теореме Декарта, количество положительных корней уравнения (10) не меньше 1 и не больше 3.

Если $Q > 0$, то уравнение (12) имеет один положительный действительный корень и два сопряженных комплексных корня. Если $Q = 0$, то все корни уравнения (12) вещественные положительные и два из них равны, или если $p = q = 0$, то (12) имеет один положительный действительный корень (один нуль кратности три). Если $Q < 0$, то уравнение (12) имеет три различных положительных действительных корня. Следовательно, можно говорить о количестве трансляционно-инвариантных мер Гиббса, соответствующих положительным корням уравнения (10).

Таким образом, из лемм 1 и 2 видно, что множество $A_6 \cap B_1$ не пусто, т.е. количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса, соответствующих положительным решениям системы уравнений (6), для модели Поттс-SOS достигает семи. Теорема доказана.

Замечание 1. Заметим, что теорема 1 (при $k = m = 2$) обобщает результаты исследований [2], [3].

Если $J_s = 0$, то модель Поттс-SOS совпадает с моделью Поттса. В этом случае теорему 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3. Пусть $k = m = 2$. Следующие утверждения справедливы для количества трансляционно-инвариантных мер Гиббса $(n_П)$ для модели Поттса

$$n_П = \begin{cases} 1, & \text{если } r \in \left(0, 1 + 2\sqrt{2}\right), \\ 4, & \text{если } r = 1 + 2\sqrt{2} \text{ или } r = 4, \\ 7, & \text{если } r \in \left(1 + 2\sqrt{2}, 4\right) \cup (4, \infty) \end{cases}$$

(см. [2] для более подробной информации).

Если $J_p = 0$, то гамильтониан (1) модели Поттс-SOS совпадает с гамильтонианом модели SOS. В этом случае теорему 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4. Пусть $k = 2, m = 2.$ Следующие утверждения справедливы для количества трансляционно-инвариантных мер Гиббса (n_S) для модели SOS

$$n_S = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta \in (\theta_2, \infty), \\ 3, & \text{если } \theta = \theta_2, \\ 5, & \text{если } \theta \in (\theta_1, \theta_2), \\ 6, & \text{если } \theta = \theta_1, \\ 7, & \text{если } \theta \in (0, \theta_1), \end{cases}$$

где $\theta_1 \approx 0.1414$ и $\theta_2 \approx 0.2956$ (см. [3] для более подробной информации).

Литература

1. Rozikov, U. A. Gibbs measures on Cayley trees. [Text]/ Rozikov U. A. // World scientific. 2013.
2. Kuelske, C.. Description of the translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. [Text]/ Kuelske C., Rozikov U. A., Khakimov R. M. // Jour. Stat. Phys. – 2014. Том 156. № 1. – С. 189–200.
3. Kuelske, C.Extremality of translation-invariant phases for a three-state SOS-model on the binary tree. [Text]/ Kuelske C., Rozikov U. A. // Jour. Stat. Phys. – 2015. Том 160. № 3. – С. 659–680.
4. Saygili, H. Gibbs measures for the Potts-SOS model with three states of spin values.

[Text]/ Saygili H. // Asian Journal of Current Research. – 2017. Том 1. № 3. – С. 114–121.

5. Рахматуллаев, М. М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса-SOS на дереве Кэли. [Текст]/ Рахматуллаев М. М., Расулова М. А. // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – 2018. № 1. – С. 15-17.

6. Расулова, М. А. О периодических мерах гиббса для модели Поттса–SOS на дереве Кэли. [Текст]/ Расулова М. А. // Теоретическая и Математическая Физика. – 2019. Том 199. № 1. – С. 134-141.

7. Rahmatullaev, M. M. Extremality of translation-invariant Gibbs measures for the Potts-SOS model on the Cayley tree. [Text]/ Rahmatullaev M. M., Rasulova M. A. // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – 2021. № 7. – С. 1-18.

8. Rasulova, M. A. Periodic Gibbs measures for the three-state Potts-SOS model on a Cayley tree. [Text]/ Rasulova M. A. // Uzbek Mathematical Journal. – 2022. Том 66. № 2. – С. 150-155.