УДК 517. 928
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_44

О ПРИМЕНИИ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕШЕНИЙ К ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Байзаков Асан Байзакович, д.ф.-м.н., профессор
asan_baizakov@mail.ru
Джээнбаева Гулгаакы Абдыкааровна, к.ф.-м.н, научный сотрудник
baytemirova2007@mail.ru
Асанкулова Айпери Сатылгановна
koitawcity@mail.ru
Институт математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Исследовать разрешимость задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных можно провести методом преобразования решений.*

В настоящей работе изучена разрешимости и структура решений задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: *Задачи Коши, нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, классический метод характеристик, метод Галеркина, метод дополнительного аргумента, уравнения Вольтерра II рода.*

ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН КОШИ МАСЕЛЕЛЕРИНЕ ЧЫГАРЫЛЫШЫНА ТРАНСФОРМАЦИЯЛЫК МЕТОДДУН КОЛДОНУУ ЖӨНҮНДӨ

Байзаков Асан Байзакович, ф.-м.и.д., профессор
asan_baizakov@mail.ru
Джээнбаева Гулгаакы Абдыкааровна, ф.-м.и.к., илимий кызматкер
baytemirova2007@mail.ru
Асанкулова Айпери Сатылгановна
koitawcity@mail.ru
Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер Академиясы математика Институту
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Коши маселесинин жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер жана интегро-дифференциалдык жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн чечилүү жөндөмдүүлүгүн чечимди трансформациялоо ыкмасы менен изилдөөгө болот.*

Бул макалада биз сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселесинин чечилүү жөндөмдүүлүгүн жана структурасын изилдейбиз.

Ачкыч сөздөр: *Коши маселелери, сызыктуу эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер, мүнөздөмөлөрдүн классикалык ыкмасы, Галеркин методу, кошумча аргумент методу, экинчи түрдөгү Вольтерра теңдемелери.*

ON THE APPLICATION OF THE SOLUTION TRANSFORMATION METHOD TO THE CAUCHY PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES

Baizakov Asan Baizakovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
asan_baizakov@mail.ru
Dzheenbaeva Gulgaaki Abdykaarovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences
baytemirova2007@mail.ru
Asankulova Aiperi Satylganovna
koitawcity@mail.ru
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic

Abstract. *The solvability of the Cauchy problem for partial differential equations and integro-differential partial differential equations can be studied by the solution transformation method.*

In this paper, we study the solvability and structure of solutions to the Cauchy problem for nonlinear integro-differential partial differential equations

Key words: *Cauchy problems, nonlinear partial differential equations, classical method of characteristics, Galerkin method, additional argument method, Volterra equations of the second kind.*

Исследование разрешимости задачи Коши нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и нахождение структуры таких решений все еще остается актуальной задачей.

Разработано несколько разных методов для исследования разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Например, хорошо известны: классический метод характеристик, метод Галеркина, метод дополнительного аргумента. С помощью метода дополнительного аргумента также удается исследовать разрешимость и уравнения выше первого порядка.

Исследовать разрешимость задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производныхи и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных можно провести методом преобразования решений.

Академиком Иманалиевым М. и его учениками было заложено основы исследования разрешимости задачи Коши для некоторых классов дифференциальных уравнений в частных производных [1]. Сутью этого метода является преобразование решений исходной задачи Коши к нахождению решений эквивалентного ей интегрального уравнения Вольтерра II рода, к которой применим принцип сжатых отображений. Позднее этот способ сведения к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра II рода назван методом преобразования решений в теории дифференциальных и интегральных уравнений [2]. Примечательно то, что одновременно находиться и интегральное представление искомых решений задачи Коши нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных[3-4].

В настоящей работе изучена разрешимости и структура решений задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial L[u]}{\partial x} + (\alpha^2+1)L[u] + \int_0^t K(t,s,u(s,x))ds = f\left(t,x,u,u_t,u_x\right), \quad 0 \le s \le t \le T, \tag{1}$$

где $L[u] = u_{tt} + u, \;\; x \in R, \; \alpha \in R_+$ с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi\left(x\right), \quad u_t(0,x) = \psi(x). \tag{2}$$

Предположение А. Пусть

$f(t,x,u,u_t,u_x) \in \bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\times R\right) \cap Lip\left(L_1\big|_u\right), K(t,s,u) \in \bar{C}\left(R_+\times R_+\times R\right) \cap Lip\left(L_2\big|_u\right),$

$\varphi(x) \in \bar{C}^2\left(R\right), \psi(x) \in \bar{C}^2\left(R\right).$

Решение данной задачи Коши ищется в виде

$$u\left(t,x\right) = c\left(t,x\right) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)} \sin(x-s)\sin(t-\nu)Q\left(\nu,s\right)dsd\nu\ . \tag{3}$$

Мы будем следовать методу, предложенные в [1-2].

Далее, будем находить частные производные искомой функции из соотношения (3). Имеем

$$u_t\left(t,x\right) = c_t\left(t,x\right) + $$
$$+\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)} \sin(x-s)\cos(t-\nu)Q\left(\nu,s\right)dsd\nu.$$

Далее, имеем

$$u_{tt} = c_{tt} + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-s)} \sin(x-s) Q(t,s)\, ds - (u-c).$$

Отсюда

$$L[u] \equiv u_{tt} + u = c_{tt} + c + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-s)} \sin(x-s) Q(t,s)\, ds; \tag{4}$$

$$L[u] = L[c] + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-s)} \sin(x-s) Q(t,s)\, ds.$$

Кроме того

$$\frac{dL[u]}{dx} = \frac{dL[c]}{dx} - \alpha[L[u]-L[c]] + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-s)} \cos(x-s) Q(t,s)\, ds. \tag{5}$$

Из (5) находим производные по х

$$\frac{d^2L[u]}{dx^2} = \frac{dL[c]}{dx} - \alpha[\frac{dL[u]}{dx} - \frac{dL[c]}{dx}] - \alpha \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-s)} \cos(x-s) Q(t,s)\, ds -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-s)} \sin(x-s) Q(t,s)\, ds + Q(t,x).$$

Из последнего с учетом (4), (5) находим

$$\frac{d^2L[u]}{dx^2} + 2\alpha \frac{dL[u]}{dx} + (\alpha^2+1)L[u] = \frac{d^2L[c]}{dx^2} + 2\alpha \frac{dL[c]}{dx} + \tag{6}$$
$$+(\alpha^2+1)L[c] + Q(t,x).$$

Обозначим

$$H(t,x,c) = \frac{d^2L[c]}{dx^2} + 2\alpha \frac{dL[c]}{dx} + (\alpha^2+1)L[c].$$

Из (1) и (6) вытекает нелинейное интегральное уравнения Вольтерра второго рода относительно $Q(t,x)$ вида:

$$Q(t,x) = f(t,x,c(t,x) + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-s)} \sin(x-s)\sin(t-\nu) Q(\nu,s)\, ds d\nu,$$

$$c_t(t,x) + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-s)} \sin(x-s)\cos(t-\nu) Q(\nu,s)\, ds d\nu,$$

$$c_x(t,x) - \alpha[u-c] + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-s)} \cos(x-s)\sin(t-\nu) Q(\nu,s)\, ds d\nu) \tag{7}$$

$$+\int\limits_{0}^{t} K\left(t,\tau,c(t,x) + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-s)} \sin(x-s)\sin(\tau-\nu) Q(\nu,s)\, ds d\nu \right) d\tau +$$

$$+H(t,x,c) \equiv A[Q].$$

Для решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра (7) дополнительно, допустим некоторые обычные ограничения относительно функции $H(t,x,c)$:

При всех $\{t>0, x \in R\}$ функция $H(t,x,c)$ непрерывна и ограничена

$$\|H(t,x,c)\| \le M_0 = const.$$

Уравнение (7) будем решать с помощью топологическим методом, а именно, принципом сжатых отображений. Правую часть уравнения (7) рассмотрим как оператор A[Q], действующий на функцию $Q(t,x)$.

Определим множество

$Q=\left\{u(t,x): u(t,x)\in \bar{C}^{(2,2)}\left(\left[0,T\right]\cap R\right)\cap\|u\|\le h\right\}.$

Величины T , h определяются позже.

Из уравнения (7) будем иметь $\|AQ\|\le M_1+M_0+KT_0$,

где $M_1\equiv\max f(t,x,u,u_t,u_x,),\ M_0\equiv\max\left\|H\left(t,x,c\right)\right\|, \mathrm{K}\equiv\max\mathrm{K}(t,\mathrm{s},x,u)$.

Если выберем T_0 и h так, чтобы

$$M_1+M_0+KT_0\le h,$$

то, оператор $AQ:Q\to Q$. Теперь оценим разность

$$\begin{aligned}
&\|A[Q_1(t,x)]-A[Q_2(t,x)]\|\le\Big\|f(t,x,c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q_1(\nu,s)\,ds\,d\nu,\\
&c_t(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q_1(\nu,s)\,ds\,d\nu,\\
&c_x(t,x)-\alpha[u-c]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)\sin(t-\nu)Q_1(\nu,s)\,ds\,d\nu)\\
&+\int_0^t K\left(t,\tau,c(t,x)+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q_1(\nu,s)\,ds\,d\nu\right)d\tau-\\
&-f(t,x,c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q_2(\nu,s)\,ds\,d\nu,\\
&c_t(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q_2(\nu,s)\,ds\,d\nu,\\
&c_x(t,x)-\alpha[u-c]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)\sin(t-\nu)Q_2(\nu,s)\,ds\,d\nu)\\
&+\int_0^t K\left(t,\tau,c(t,x)+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q_2(\nu,s)\,ds\,d\nu\right)d\tau\Big\|\le\\
&\le[\frac{3L_1}{\alpha}+\frac{L_2}{\alpha}]\left\|Q_1(\nu,s)-Q_2(\nu,s)\right\|.
\end{aligned}$$

Выберем $\alpha\in R_+$ так, что

$$\frac{3L_1+L_2}{\alpha}<1.$$

Отсюда следует, что нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода (7) имеет единственное непрерывное и ограниченное решение Q(t,x).

Исследуем теперь дифференциальные свойства решений начальной задачи (1)-(3).

При всех $\{t>0, x\in R\}$ из равенства (3) вытекает неравенство:

$$\|u(t,x)\| \le \|c(t,x)\| +$$
$$+\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)} |\sin(x-s)\sin(t-\nu)| \|Q(\nu,s)\| ds d\nu \le$$
$$\le C_0 + \frac{h}{\alpha} = h_1 = const.$$

При проведении вышеприведенной оценки было учтено, что $|\sin\alpha| \le 1, |\sin\beta| \le 1.$

Аналогичные оценки можно поучить и для всех производных, входящих в уравнение (1).

Итак, справедлива

Теорема. Пусть выполнены предположение А. Тогда интегро-дифференциальное уравнение в частных производных (1) с начальным условием (2) имеет единственное решение $u(t,x) \in \bar{C}^{(2,2)}([0,T]\times R)$.

Литература

1. Иманалиев, М.И. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, К. Какишов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С. 19-28.
2. Иманалиев, М.И., О разрешимости задачи Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / М.И. Иманалиев, А.Б. Байзаков // Поиск (научн. приложение международ. журнала «Высшая школа Казахстана»), Сер. ест.-техн.наук. – Алматы, 2009. – №1. – С. 209-213.
3. Байзаков, А.Б. Разрешимость и структура решений начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка[Текст] / А.Б. Байзаков, Г.А. Джээнбаева // Наука, новые технологии и инновации. – Бишкек, 2017. – №5. – С.100-104.
4. Байзаков, А.Б. О разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Б. Байзаков, Г.А. Джээнбаева, К.А. Айтбаев // Вестник Института математики НАН КР. - 2019.-№1.- С123-127.
5. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа[Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. // – Москва: Наука, 1972. – 544 с.
6. Коротков, В.В. Интегральные операторы[Текст] / В.В. Коротков // -Новосибирск: Наука, 1975. – 302с.
7. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения[Текст] / М.Л. Краснов // Москва: Наука, 1975. – 304 с.
8. Михлин, С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям[Текст] / С. Г. Михлин // Москва: Физматгиз, 1959. – 232 с.
9. Мюнтц, Г. М. Интегральные уравнения. Часть 1: Линейные уравнения Вольтерра[Текст] / Г. М. Мюнтц // Москва: ОНТИ, 1934. – 330 с.
10. Иманалиев, М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными[Текст] / М.И. Иманалиев // Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.