ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА. 2023, №1

УДК 514:13
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_29

ГЕОМЕТРИЯ В ПОЛУЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Артикбаев Абдуллаазиз, д.ф.-м.н., профессор,
aartykbaev@mail.ru
Исмоилов Шерзодбек, PhD, ст. преподаватель,
sh.ismoilov@nuu.uz
Ташкентский государственный транспортный университет,
Ташкент, Узбекистан.

Аннотация. *Геометрия полуевклидовых пространств является интенсивно развывшейся частью неевклидовой геометрии. В работе изложены основные результаты полученные за последний тридцать лет, по геометрии трехмерных полуевклидовых пространств. Трехмерными полуевклидовыми пространствами являются изотропное и галилеева пространства. В конце работе приведены несколько нерешенных задачи в галилеевом и изотропном пространстве.*

Ключевые слова: *Изотропное пространство, Галлиева пространства, изотропная сфера, первая и вторая квадратичная форма.*

GEOMETRY IN SEMI-EUCLIDEAN SPACES

Artykbaev Abdullaaziz, Dr Sc, professor,
aartykbaev@mail.ru
Ismoilov Sherzodbek, teacher,
Sh.ismoilov@nuu.uz
Tashkent State Transport University,
Tashkent, Uzbekistan.

Abstract. *The geometry of semi-Euclidean spaces is an intensively developed part of non-Euclidean geometry. The paper presents the main results obtained over the past thirty years on the geometry of three-dimensional semi-Euclidean spaces. Three-dimensional semi-Euclidean spaces are isotropic and Galilean spaces. At the end of the paper, several unsolved problems in the Galilean and isotropic space are presented.*

Key words: *An isotropic space, Gallean space, isotropic sphere, first and second fundamental form.*

1. Введение. Вопросы геометрии “в целом” в плоском пространстве времени россмотрена в работе Д.Д. Соколова и А.Артикбаева [2].

Под плоском пространством-временны подразумеваются изучение движение на плоскости с учетом времени. Изучение геометрических образов с учетом времени порождает геометрию Миновского ${}^1R_n$, которая является пространством с неположительное определенной метрикой [7].

Так как точка на плоскости имеет две координаты, прибавляя к ним время получаем, трехмерную пространству. Следовательно, плоскость и время образует трехмерную пространству. Когда координаты плоскости и время рассматриваются раздельно появляется трехмерные полуевклидовы пространства. Таких пространств два изотропное пространство R_3^2, галилеева пространства R_3^1.

В этой статье мы приводим некоторые известные результаты по геометрии “в целом” поверхностей в пространствах R_3^1, R_3^2 и изложим некоторые переменные задачи.

Свойства поверхностей галилеева пространства R_3^1.

Дифференциальная геометрия поверхностей в галилеевом пространстве R_3^1 изучена в работе [2].

Пусть $Oxyz$ система координат в ${}^1R_3$, и $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ базис. Тогда рассматривается поверхности заданные. Специальной системе координатных линий, заданное векторным уравнением

$$r(u,v) = u\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z\vec{k} \,. \tag{1}$$

Вырожденная первая квадратичная форма этой поверхности имеет вид.

$$ds^2 = \begin{cases} ds_1^2 = du^2 \\ ds_1^2 = G(u,v)dv^2 \text{ при } u = const. \end{cases} \tag{2}$$

Плоскости $x = u = const$ называются особыми плоскостями пространства R_3^1.

Нормаль поверхности $\vec{n}$ – определяется как единичный вектор на особой плоскости перпендикулярной касательной плоскости. С помощью этой нормали определяется вторая квадратичная форма поверхности.

По аналогии евклидова пространства изучается кривизна кривой на поверхности и аналог нормальной кривизны. Определяются главные кривизны и полная кривизна поверхности как произведение нормальных кривизны поверхности.

Формально основные понятие теория поверхностей определяются как в евклидовом пространстве, но геометрическое значение этих величин существенно отличаются от евклидова значение. Имеется существенное отличие в квалификации точек поверхности. В галилеевом пространстве на поверхности кроме эллиптических гиперболических параболических точек существует, названная автором “циклические” точки [14]. Доказана что существует поверхности все точки которого являются циклическими [13].

Основные отличие свойств поверхностей галилеева пространства R_3^1 от евклидова R_3 – связана с вырожденностью метрики пространства.

В галилеевом пространстве не выполняется знаменитая теорема Гауса, о том что полная кривизна поверхности выполни определяется через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности [2]. Тот чает полной кривизны поверхности которая не зависит от коэффициента первой квадратичной формы названа дефектом кривизны поверхности.

Длина кривой вычисляемое по формуле (2) не дает возможность определят кратчайшей на поверхности. Поэтому кратчайшая определятся как кривая имеющая минимальная вариации поворота [2]. Этот особенность затрудняет определят аналог изгибание поверхности в галилеевом пространстве.

С начала XXI века возросли интересе к изучению дифференциальную геометрию кривых и поверхностей в галилеевом пространстве R_3^1 [2].

Среды, которых особенно надо отметит работы Мухиддин Айдин [5][6] которые применяет к исследованию геометрии дробных производных функции.

Геометрия изотропного пространства.

Геометрией поверхностей изотропного пространства ещё в 1945-48- года занимался немецкий математик К.Штрубеккер [11]. После появление работы Д.Д.Соколова и А.Артикбаева [2] возобновился интерес к геометрию изотропного пространства. Хотя изотропное пространство галилеева пространства отличается заменой порядок метрики, геометрия поверхностей вполне отличны друг от друга [8].

Надо отметит, что изотропное пространство является самодвойственным пространством в смысли проективной геометрии [7].

Дифференциальная геометрия изотропного пространства строется по в изотропное пространстве нормаль поверхности единственный вектор коллинеарной оси Oz в координатной системе $Oxyz$. Основные характеристики поверхности тесно связана с ее проекцией на плоскости Oxy. Поэтому пространственная задача переходит к задаче на плоскости. Возникает проблема определят пространственные характеристики поверхности с помошью его проекции но плоскости. Решение этой проблемы в некоторых случаях удается с помощью двойственной поверхностью к данной [12][9] Существуют работы где для изучение теорию поверхности изотропного пространства применены метод наложного пространства [7]. Метод наложного пространствах заключается в том, что нареду изотропного пространства рассматривается евклидова пространства с той же системой координат.[7][10]. В этих методах в основном меняется нормаль поверхности. Но изменения нормали не влияет геометрическим характеристикам поверхности [8]. Последнее время появились множество работ связанных с многомерной геометрией изотропного пространства [15].

В изотропном пространстве можно определят некоторые новые характеристики поверхности.

Определение 3.3.1. Площадь (меру) $S(M')$ множества M' на метрической сфере изотропного пространства назовем внешней кривизной множества $M \in F$ и обозначим её $\omega_F(M) = S(M')$ [12].

Пусть $M \subset F -$ поверхность изотропного пространства и $M^* \subset F^* -$его двойственный образ, то есть множество соответствующее по двойственности относительно изотропной сферы.

Определение 3.3.2. Площадь (меру) множества $M^* \subset F^*$ назовем условной внешней кривизной множества $M \subset F$ и обозначим $\mu_F(M) = S(M^*)$. [12]

С помощью геометрии изотропного пространства некоторые задачи геометрии "в целом" легко решаются. Кроме того доказана, что задача восстановление поверхности по внешней кривизне, по гауссовой кривизне и по полной кривизне эквивалентны в изотропном пространстве.

Теорема 1. Задачи существования поверхности по полной кривизне, по внешней кривизне и по условной внешней кривизне в изотропном пространстве являются эквивалентными.

Доказательство. Пусть поверхность $F:\{z = f(x,y)\}$, существование которой доказывается теоремой, проектируется в область D на плоскости Oxy, причем край поверхности Γ проектируется в край области D. Обозначим через $M' \subset D$ проекцию множества $M \subset F$ на плоскость Oxy.

Для удобства введем обозначения: $p = f'_x$, $q = f_y{}'$, $r = f''_{xx}, t = f''_{xy}$ $s = f''_{yy}$.

Отсюда: $r = p'_x, \quad s = p'_y = q'_x, \quad t = q'_y$,

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Найдем формулу для вычисления внешней кривизны $\omega_F(M)$ поверхности

$$\omega_F(M)=\iint\limits_{M^*} d\alpha dz=\iint\limits_{M^*}\begin{vmatrix}\alpha'_x & z'_x\\ \alpha'_y & z'_y\end{vmatrix}dxdy .$$

Вычислим необходимые производные функций

$$\alpha'_x=\frac{\frac{p}{q}(qs+pr)-\frac{r}{q}(p^2+q^2)}{p^2+q^2},\ \alpha'_y=\frac{\frac{p}{q}(qt+ps)-\frac{s}{q}(p^2+q^2)}{p^2+q^2},$$

$$z'_x=-\frac{rp+sq}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\ z'_x=-\frac{sp+tq}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставляя найденные производные в равенство, получаем

$$\iint\limits_{M^*}\begin{vmatrix}\alpha'_x & z'_x\\ \alpha'_y & z'_y\end{vmatrix}dxdy=\iint\limits_{M'}\frac{-1}{q(p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}}\Big[\big(p(qs+pr)-r(p^2+q^2)\big)(sp+tq)-$$

$$-\big(p(qt+ps)-s(p^2+q^2)\big)(rp+sq)\Big]dxdy=$$

$$\iint\limits_{M'}\frac{-1}{q(p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}}\big[p^2qs^2+p^3sr+pq^2st+p^2qtr-p^3rs-pq^2rs-$$

$$-p^2qrt-q^3rt-p^2qrt-p^3sr-pq^2st-p^2qs^2+p^3sr+pq^2sr+p^2qs^2+q^3s^2\big]dxdy=$$

$$=\iint\limits_{M'}\frac{-1}{q(p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}}\big[-p^2qrt-q^3rt+p^2qs^2+q^3s^2\big]dxdy=$$

$$=\iint\limits_{M'}\frac{-1}{q(p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}}q(p^2+q^2)(s^2-rt)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{M'}\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy.$$

Следовательно, внешняя кривизна вычисляется по формуле

$$\omega_M(F)=\iint\limits_{M'}\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy .$$

Теперь найдем формулу для вычисления условной кривизны поверхности. Так как площадь поверхности в R_3^2 равна площади его проекции на плоскость Oxy, мы легко получим формулу для вычисления условной кривизны поверхности

$$\mu_F(M)=\iint\limits_{D'} d\tilde{x}d\tilde{y}=\iint\limits_{D}\begin{vmatrix}\tilde{x}'_x & \tilde{y}'_x\\ \tilde{x}'_y & \tilde{y}'_y\end{vmatrix}dxdy=\iint\limits_{D}(f''_{xx}f''_{yy}-f''^2_{xy})dxdy=\iint\limits_{D}(rt-s^2)dxdy.$$

В работе И.Я. Бакельмана [7] приведена связь между задачей существования поверхности по заданной внешней кривизне и решением дифференциального уравнения Монжа-Ампера. Если установить эту связь с вышеуказанными задачами в изотропном пространстве, то мы получим:

для полной и условной кривизны

$$rt-s^2=\varphi(x,y).$$

для внешней кривизны

$$rt - s^2 = \varphi(x, y)\left(p^2 + q^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Эти уравнения являются частными случаями уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, p, q)$, решенного в [7]. Теорема доказана.

2. Некоторые задачи в галилеевом и изотропном пространстве.

1. Определить геодезическую на поверхностях галилеева и изотропного пространства.
2. Изучит свойства изометричных поверхностей в изотропном и галилеевом пространстве. Изометрия определяется в соответствие с вырожденной метрики.
3. Изучит свойства дефекта кривизны поверхности галилеева пространства.
4. Разъяснит геометрическую значению разницы полной кривизны поверхностей галиеева и изотропного пространства с полной кривизной евклидова пространства
5. Определит аналог уравнение Синус-Гардона на седловых поверхностей галилеевом и изотропном пространстве.

Литература

1. Artykbaev A. The dual surfaces of an isotropic space R_3^2 [Text] / A. Artykbaev, Sh. Ismoilov. – Bull. Inst. Math., 2021, Vol-4, Issue-4, pp. 1-8.
2. Артыкбаев А. Геометрия в целом в пространстве время[Текст] / А. Артыкбаев, Д.Д. Соколов. – Ташкент, Фан, 1991, 120-127 с.
3. Artykbaev A. Special mean and total curvature of a dual surface in isotropic spaces[Text] / A. Artykbaev, Sh. Ismoilov. – International electronic journal of geometry, 2022, volume 15, Issue 1, pp. 1–10.
4. Artykbaev A. Surface recovering by a give total and mean curvature in isotropic space [Text] / A. Artykbaev, Sh.Ismoilov. – Palestine Journal of Mathematics, 2022, vol-11(3), pp. 351-361.
5. Aydin M.E.Affine factorable surfaces in isotropic spaces[Text] / M.E. Aydin, A.E Kara, V. Ergüt. – TWMS J. Pure Appl. Math., 2020, Vol-11, N-1, pp.72-88.
6. Aydin M. E. Translation hypersurfaces with constant curvature in 4-dimensional isotropic space[Text] / M. E. Aydin, A.O. Ogrenmis. – International Journal of Maps in Mathematics, 2019, Vol-2, Issue 1, pp. 108-130.
7. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии[Текст]/ Б. А. Розенфельд, Москва Наука, 1969, 547 с.
8. Sachs H. Isotrop Geometri des Raumes[Text] / H.Sachs. – 1990 -300 c.
9. Lone M.S. Dual translation surfaces in the three dimensional simply isotropic space [Text] / M.S. Lone, M.K. Karacan. – Tamkang journal of mathematics, 2018, Volume 49, Number 1, 67-77.
10. Karacan M. K., Yoon D. W. and Bukcu B., Translation surfaces in the three-dimensional simply isotropic space [Text] / M. K. Karacan, D. W. Yoon, B. Bukcu – Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 2016, Vol-13(7).
11. Strubecker K. Differential geometrie des isotropen Raumes I,II III [Text] / K. Strubecker, – Math.Z. 1942, vol-47, 743-777; 1942, vol-48 369-427; 1943, vol-48 369-427.
12. Ismoilov Sh.Sh. Geometry of the Monge - Ampere equation in an isotropic space [Text] / Sh.Sh. Ismoilov, – Uzbek Mathematical Journal, 2022, vol-66, issue-2, pp. 66-77.

13. Ismoilov Sh.Sh. Cyclic surfaces in pseudo-euclidean space[Text] / Sh.Sh. Ismoilov, B.M. Sultanov., – India, International Journal of Statistics and Applied Mathematics. 2020. Volume 5, №1, pp. 28-31.

14. Султанов Б.М. Существование циклической поверхности по заданной функции полной кривизны[Текст] /Б.М. Султанов, – Вестник НУУ. 2017, №2\2, стр. 201- 204.

15. Исмоилов Ш.Ш. Свойства двойственной поверхности в многомерном изотропном пространстве[Текст]/ Ш.Ш. Исмоилов,— Tashkent, Physical and mathematical sciences, 2022. Volume 3. Issue 1. – P. 47-58