

ТЕХНИКА / TECHNIQUE

УДК 519.711.3

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1\(8\)_60](https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1(8)_60)

К ИЗУЧЕНИЮ синхронизации импульсного
ОСЦИЛЛЯТОРА ГУДВИНА–СМИТА ВНЕШНИМ
ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Сопуев Уланбек Адахимжанович

Ошский государственный университет

723500, ул. Алымбек Датка, 331, Ош, Кыргызстан,

ulansopuev@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0008-0621-9050>

Аннотация. Вводится отображение кольца для исследования синхронизации импульсного осциллятора Гудвина-Смита внешним периодическим воздействием. В качестве автоколебательной системы, подверженной внешнему периодическому возбуждению, рассматривается скалярное импульсное дифференциальное уравнение. Это уравнение хорошо описывает явление захвата колебаний модифицированного осциллятора Гудвина-Смита и поддается детальному бифуркационному анализу.

Ключевые слова: осциллятор Гудвина-Смита, импульсное дифференциальное уравнение, вынужденная синхронизация, языки Арнольда.

ON THE STUDY SYNCHRONIZATION OF A FORCED IMPULSIVE
GOODWIN–SMITH OSCILLATOR

Ulanbek Adakhimzhanovich Sopuev

Osh State University

Alymbek Datka St., 331, 723500, Osh, Kyrgyzstan

ulansopuev@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0008-0621-9050>

Abstract. In this paper we introduced a two-dimensional map to study the synchronization of a forced impulsive Goodwin–Smith oscillator. As a self-oscillatory system subjected to external periodic excitation, a scalar impulsive differential equation is considered. This equation adequately describes the phenomenon of oscillation locking in a modified Goodwin–Smith oscillator and allow us a detailed bifurcation analysis.

Keywords: Goodwin–Smith oscillator, impulsive differential equation, forced synchronization, Arnold tongues.

1. Введение

Рассмотрим систему импульсных дифференциальных уравнений [1]

$$\dot{x} = Ax + \xi(t). \quad (1)$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}^n$; A – постоянная гурвицева $n \times n$ матрица; n – мерная вектор-функция $\xi(t)$, равная нулевому вектору, если $t \neq t_k$, и в момент $t = t_k$ ее интеграл равен b_k , где $b_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+$ – множество неотрицательных целых чисел.

Решения уравнений (1) в интервалах $t_{k-1} < t < t_k$ и $t_k < t < t_{k+1}$ непрерывны и удовлетворяют

$$\dot{x} = Ax,$$

а при $t = t_k$ имеют разрыв $x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k$, $x(t_k^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_k \pm 0} x(t)$.

К системе уравнений (1) приводят многие задачи механики, электроники, теории управления и биологии [1]. В [2] была введена импульсная модель осциллятора Гудвина-Смита [3, 4] для изучения регуляции уровня тестостерона в мужском организме. В серии наших публикаций (см., например, [5–7]) исследовались регулярные и хаотические колебания, а в [8] – механизмы захвата автоколебаний внешним периодическим возбуждением в связи с анализом суточного ритма секреции гормонов, участвующих в выработке тестостерона.

Многие физиологические процессы в живых организмах подчиняются 24– часовому ритму, называемому циркадным ритмом, который является результатом адаптации организма к смене дня и ночи [9]. В отсутствии смены дня и ночи период циркадного ритма может отличаться от 24 часов. В нормальных условиях циркадный ритм захватывается колебаниями освещенности и температуры. Известно, что существуют биологические часы, задающие циркадный ритм, которые управляются периодической внешней силой [9].

Описание внешнего периодического воздействия на автоколебательную систему основано на построении отображения окружности или кольца [9].

В данной работе приведена методика получения отображения кольца для исследования вынужденной синхронизации модифицированного осциллятора Гудвина-Смита (см. также [10]). Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие бифуркационную структуру областей вынужденной синхронизации, сопоставление которых с результатами исследований [8] показывает их качественное совпадение.

2. Модель с непрерывным временем

Будем рассматривать действие внешнего периодического возбуждения на автоколебания скалярного осциллятора Гудвина-Смита [6]:

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad t_k \geq 0. \quad (2)$$

или

$$\dot{x} = \lambda x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \delta(t - t_k). \quad (3)$$

Здесь $b_k = F(z(t_k^-))$; $t_{k+1} = t_k + \Phi(z(t_k^-))$; $z(t_k^-) = M(A \cos(\omega t_k + \bar{x}_k)$; $\omega = 2\pi/T$

где M, T – амплитуда и период внешнего воздействия.

Функции Φ, F являются ограниченными и принимают положительные значения. В биологических приложениях Φ, F есть функции Хилла:

$$\Phi(z) = k_1 + k_2 \frac{(z/r)^p}{1 + (z/r)^p}, \quad F(z) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (z/r)^p} \quad (4)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4, r, p – параметры.

Как мы отмечали ранее, решение уравнения (2) или (3) кусочно-непрерывно с конечными разрывами в точках t_k .

Утверждение. Величины скачка b_k в точках разрыва $t = t_k$ определяются выражением

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

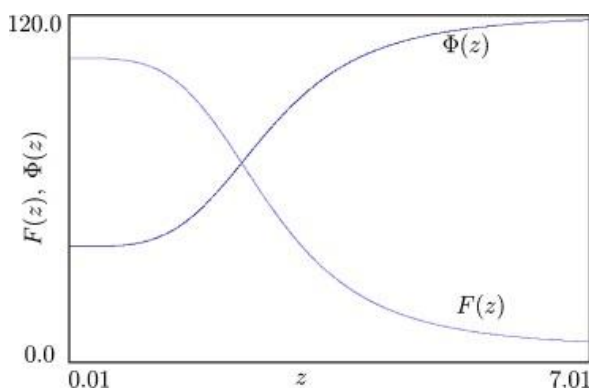


Рис. 1. Модуляционные характеристики $\Phi(z)$, $F(z)$: $\Phi(z)$ – частотная характеристика; $F(z)$ – амплитудная характеристика

Доказательство. В области $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ уравнение (3) записывается в форме

$$\dot{x} = \lambda x + b_k \delta(t - t_k). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) в промежутке $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ будем искать в виде

$$x(t) = x_-(t) + [x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k), \quad (6)$$

где $x_{\pm}(t)$ – непрерывные функции, определенные соответственно в областях $t_{k-1} < t < t_k$ и $t_k < t < t_{k+1}$ и удовлетворяющие уравнению $\dot{x} = \lambda x$.

Подставляя (6) в (5) и учитывая что $\eta'(t - t_k) = \delta(t - t_k)$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_-(t) + [\dot{x}_+(t) - \dot{x}_-(t)]\eta(t - t_k) + [x_+(t) - x_-(t)]\delta(t - t_k) = \\ = \lambda x(t) + \lambda [x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k) + b_k \delta(t - t_k). \end{aligned}$$

Поскольку $\dot{x}_{\pm}(t) = \lambda x_{\pm}(t)$, то

$$\{x(t_k^+) - x(t_k^-) - b_k\}\delta(t - t_k) = 0, \quad x(t_k^{\pm}) = \lim_{t \rightarrow t_k \pm 0} x_{\pm}(t).$$

Приравнявая к нулю выражение в фигурных скобках, найдем

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k$$

3. Отображение кольца

Уравнение (2) (или (3)) сводится к отображению кольца. Покажем это.

В пределах интервала $t_k < t < t_{k+1}$ уравнение (3) имеет вид $\dot{x} = \lambda x$, решение

которого $x(t) = e^{\lambda(t-t_k^+)} x(t_k^+)$, $x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k$.

Отсюда для момента времени $t = t_{k+1}^+$ получаем, что

$$x(t_{k+1}^-) = e^{\lambda(t_{k+1}^- - t_k^+)} (x(t_k^-) + b_k), \quad t_{k+1} - t_k = \Phi(z(t_k^-)).$$

Введем обозначения $x_k = x(t_k^-)$ и $\theta_k = \omega t_k$. Тогда окончательно отображение принимает вид

$$x_{k+1} = e^{\lambda\phi(x_k, \theta_k)} (x_k + F(x_k, \theta_k)), \quad \theta_{k+1} = \theta_k + \omega\phi(x_k, \theta_k) \bmod 2\pi. \quad (7)$$

Здесь Φ и F – функции Хилла (4) (см. рис. 1). Параметры (7): $\lambda = -0.1$; $k_1 = 40.0$; $75.0 < k_2 < 150.0$; $k_3 = 1.0$; $k_4 = 6.0$; $r = 2.7$; $p = 3$; $2.0 < M < 25.0$; $T = 1440$.

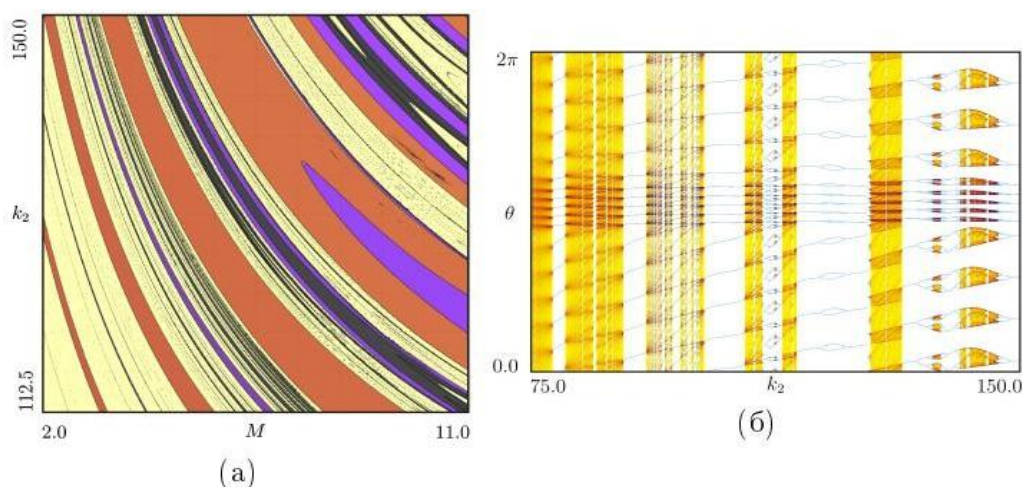


Рис. 2. (а) Двупараметрическая диаграмма. (б) Однопараметрическая бифуркационная диаграмма

4. Бифуркационный анализ

На рис. 2, (а) изображена двупараметрическая бифуркационная диаграмма отображения (7), рассчитанная численно на плоскости параметров (M, k_2) .

В динамической системе (7) возможны три режима – периодический, квазипериодический и хаотический. Динамика отображения кольца эквивалентна динамике отображения окружности [9]. В первых двух случаях этим режимам в фазовом пространстве отображения (7) отвечает замкнутая инвариантная кривая. Характер движения на инвариантной кривой определяется числом вращения ω . Если оно рациональное число $\omega = p/q$, то на инвариантной кривой есть одна или несколько пар периодических орбит – устойчивые и седловые. Инвариантная кривая образована неустойчивыми многообразиями седловых периодических орбит. Заметим, что все периодические движения грубые и в этих ситуациях говорят, что имеет место резонанс (синхронизация) [11]. Областям синхронизации отвечают колебания, когда на периоде возникшего периодического движения укладываются p периодов автоколебаний и q периодов внешней силы. Если ω – иррациональное число, то

движение на инвариантной кривой квазипериодическое и в отличие от предыдущего случая предельным множеством является вся замкнутая инвариантная кривая [11].

Области вынужденной синхронизации (резонансов) имеют вид, показанный на рис 2, (а) (языки Арнольда [3]). На плоскости параметров (M, k_2) между резонансными языками (областями с периодической динамикой) расположены области с квазипериодическими колебаниями.

На рис. 2, (б) приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма для $M = 15.0$, показывающая переходы к синхронизации и выход из нее через седлоузловую бифуркацию. Как показано в [8], хаотизация колебаний в импульсном осцилляторе Гудвина-Смита происходит через классический сценарий Афраймовича-Шильникова [11].

5. Заключение

Приведена методика построения отображения кольца для исследования вынужденной синхронизации импульсного осциллятора Гудвина-Смита. В качестве автоколебательной системы, подверженной внешнему периодическому возбуждению, рассмотрено скалярное импульсное дифференциальное уравнение, которое хорошо описывает сложную динамику осциллятора Гудвина-Смита и поддается детальному бифуркационному анализу [6].

Представлены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие бифуркационную структуру областей синхронизации, сопоставление которых с результатами исследований [8] показало их качественное совпадение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific; 1989. 273 p.
2. Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A. Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback// Automatica. 2009. Vol. 45. No. 1. P. 78–85. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.06.016>
3. Goodwin B. Oscillatory behaviour in enzymatic control processes// Adv. in Enzyme Regulation, 1965). Vol. 3. P. 425–438. [https://doi.org/10.1016/0065-2571\(65\)90067-1](https://doi.org/10.1016/0065-2571(65)90067-1)
4. Smith W. R. Hypothalamic regulation of pituitary secretion of luteinizing hormoneii feedback control of gonadotropin secretion Bulletin of Mathematical Biology. 1980. Vol. 42(1). P. 57–78. <https://doi.org/10.1007/BF02462366>
5. Zhusubaliyev Zh. T., Churilov A., Medvedev A. Bifurcation phenomena in an impulsive model of non-basal testosterone regulation// Chaos. 2012. Vol. 22. No. 1. P. 013121. <https://doi.org/10.1063/1.3685519>
6. Zhusubaliyev Zh. T., Churilov A., Medvedev A. Complex dynamics and chaos

- in a scalar linear continuous system with impulsive feedback. Proc. of the 2012 American Control Conference, Montreal, Canada, 27–29 June, 2012. P. 2419–2424. DOI: 10.1109/ACC.2012.6314909
7. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Churilov A. N., Medvedev R. Multistability and hidden attractors in an impulsive Goodwin oscillator with time delay// Eur. Phys. J. Special Topics 2015. Vol. 224, P. 1519–1539. DOI: 10.1140/epjst/e2015–02477–8
8. Medvedev A., Proskurnikov A. V., Zhusubaliyev Zh.T. Mathematical modeling of endocrine regulation subject to circadian rhythm// Annual Reviews in Control . 2018. Vol.46. P. 148–164. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2018.08.002>
9. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: Universal Conception Nonlinear Science. Cambridge University Press, New York. 2001. 411 p.
10. Жусубалиев Ж. Т., Коломиец Е. А., Сопуев У. А., Цуканов Д. Ю., Иванова Е. Н., Цаньсин М., Цылун Н. Отображение кольца для изучения вынужденной синхронизации импульсного осциллятора Гудвина// Международная научная конференция по механике «10 Поляховские чтения», 23–27 сентября 2024, СПбГУ, Санкт-Петербург. С. 602-606.
11. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность// Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. / Е.А. Леонтович- Андропова. Горький: ГГУ. 1983. С. 3–6.