

МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

УДК 519.968

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1\(8\)_6](https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1(8)_6)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна

д.ф.-м.н., профессор.

Ошский технологический университет им. М.М. Адышева

ORCID 0000-0001-7706-0608, aijarkyn.osh@mail.ru

Туленбаева Рамина Аскербековна

Аспирант

Дыйканов Данияр Дыйканович

магистрант

Аннотация. Расширяются области применения метода дополнительного аргумента, разработанного известными учеными Кыргызской Республики. Если ранее данный метод применялся в прямых задачах, предусмотренных для уравнений в частных производных различного порядка, то в настоящее время рассматривается возможность применения и для обратных задач. В статье рассматривается обратная задача для уравнения в частных производных второго порядка. В частности, наряду с неизвестной функцией функция в начальном условии также рассматривается как неизвестная. Доказано существование и единственность решения поставленной обратной задачи.

Ключевые слова: Частная производная, обратная задача, дополнительный аргумент, метод, начальное условие, неизвестная функция, второй порядок.

APPLICATION OF THE ADDITIONAL ARGUMENT METHOD TO SOLVING AN INVERSE PROBLEM

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor.

Osh Technological University named after M.M. Adyshev. ORCID 0000-0001-7706-0608,

aijarkyn.osh@mail.ru

Tulenbaeva Ramina Askerbekovna

graduate student

Dyikanov Daniyar Dyikanovich

master's student

Abstract. The fields of application for the additional argument method, developed by renowned scientists of the Kyrgyz Republic, are expanding. While this method was previously applied to direct problems for partial differential equations of various orders, now its application to inverse problems is currently being explored. An inverse problem for a second-order partial differential equation is examined in this article. Specifically, along with the unknown function, the function in the initial condition is also treated as unknown. The existence and uniqueness of the solution to the formulated inverse problem are proven.

Keywords: Partial derivative, inverse problem, additional argument, method, initial condition, unknown function, second order.

Введение

В данной статье метод дополнительного аргумента распространен для нелинейного уравнения второго порядка относительно неизвестной функции вида:

$$b^2(t, x)u_{tt}(t, x) - a^2(t, x)u_{xx}(t, x) = c(t, x)u_t(t, x) + d(t, x)u_x(t, x) + f(t, x, u), \quad (1)$$

$$(t, x) \in G_2(T) = [0, T] \times R.$$

Опубликован ряд статей по применению МДА (метод дополнительного аргумента) к прямым задачам, начиная от уравнений первого порядка и заканчивая уравнениями в частных производных высших порядков. Среди них можно выделить статьи [1–5].

Применение же данного метода к уравнениям со степенной особенностью, в частности к обратным задачам, было рассмотрено в статье [6].

Уравнение (1) является дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа. Для исследования его решения мы используем МДА и для удобства приводим его к следующей операторной форме:

$$D[b(t, x), -a(t, x)]D[b(t, x), a(t, x)]u(t, x) = f(t, x, u), \quad (2)$$

где оператор: $D[w, v] = w \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$.

Рассмотрим данное уравнение гиперболического типа со следующими начальными условиями:

$$u(0, x) = \psi_0(x), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \psi_1(x). \quad (4)$$

Здесь функция $\psi_0(x)$ является заданной и непрерывно дифференцируемой до первого порядка, а функция $\psi_1(x)$ неизвестная функция.

Функции, заданные в уравнении, удовлетворяют следующим условиям:

$$a(t, x), b(t, x) \in \bar{C}^{(2)}(G_2(T)), \quad b(0, x) = 0, \quad c(t, x) = -D[b(t, x), -a(t, x)]b(t, x),$$

$$d(t, x) = -D[b(t, x), -a(t, x)]a(t, x),$$

$$f(t, x, u) \in \bar{C}^{(2)}(G_2(T) \times R) \cap LipL|_u, \quad L > 0 - const.$$

Здесь функции $\bar{C}^{(k)}(\Omega)$ и $Lip(N|_u, M|_v, \dots)$ классы функций определены в работах [1, 2]

Перед применением МДА рассмотрим следующие сопряженные интегральные уравнения, имеющие единственное решение:

$$p(s, t, x) = x + \int_s^t A(v, p(v, t, x)) dv, \quad (5)$$

$$q(s, t, x) = x - \int_s^t A(v, p(v, t, x)) dv, \quad (6)$$

$$A(t, x) = \frac{a(t, x)}{b(t, x)}, \quad b(t, x) \neq 0, \quad (s, t, x) \in Q_2(T) = \{(s, t, x) | 0 \leq s \leq t \leq T, x \in R\}.$$

Уравнения (5) и (6) обладают единственным решением, если для функции $A(t, x)$ существует ограниченная частная производная по x . В нашем случае это условие выполняется, и имеют следующие равенства:

$$p(s, s, x) = x, \quad q(s, s, x) = x.$$

С помощью дифференцирования из (5), (6) получаем:

$$D[b(t, x), -a(t, x)]p(s, t, x) = 0, \quad (7)$$

$$D[b(t, x), a(t, x)]q(s, t, x) = 0, \quad (8)$$

Теперь дважды последовательно применим МДА к поставленной задаче:

$$D[b(t, x), a(t, x)]u(t, x) = \varphi(p(0, t, x)) + \int_0^t \frac{1}{b(s, p(s, t, x))} f(s, p(s, t, x), u(s, p(s, t, x))) ds, \quad (9)$$

$$a(t, x)u_x(t, x)|_{t=0} = \varphi(x).$$

Применяя МДА еще раз, получаем:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \psi_0(q(0, t, x)) + \int_0^t \frac{1}{b(s, p(s, t, x))} \phi(p(0, s, q(s, t, x))) ds + \\ &= \int_0^t \frac{1}{b(s, q(s, t, x))} \int_0^s \frac{1}{b(v, p(v, t, x))} f(v, p(v, s, q(s, t, x)), u(v, p(v, s, q(s, t, x)))) dv ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегральное уравнение (10) имеет единственное решение.

Обозначим:

$$g(t, x) = \psi_0(q(0, t, x)) + \int_0^t \frac{1}{b(s, p(s, t, x))} \varphi(p(0, s, q(s, t, x))) ds.$$

Тогда (10) можно записать в виде:

$$Au = g(t, x) + \int_0^t \frac{1}{b(s, q(s, t, x))} \int_0^s \frac{1}{b(v, p(v, t, x))} f(v, p(v, s, q(s, t, x)), u(v, p(v, s, q(s, t, x)))) dv ds.$$

Нам необходимо доказать, что оператор A является сжимающим.

Пусть $u_1(t, x), u_2(t, x) \in C(G_2(T))$.

Тогда

$$\begin{aligned} |Au_2 - Au_1| &= \left| \int_0^t \frac{1}{b(s, q(s, t, x))} \int_0^s \frac{1}{b(v, p(v, t, x))} f(v, p(v, s, q(s, t, x)), u_2(v, p(v, s, q(s, t, x)))) dv ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \frac{1}{b(s, q(s, t, x))} \int_0^s \frac{1}{b(v, p(v, t, x))} f(v, p(v, s, q(s, t, x)), u_1(v, p(v, s, q(s, t, x)))) dv ds \right| \leq \\ &\leq K^2 L \frac{t^2}{2} \max_{G_2(T)} |u_2(t, x) - u_1(t, x)|, \end{aligned}$$

$$\text{Здесь: } \left| \frac{1}{b(t, x)} \right| < K > 0 - \text{const.}$$

Число T выбирается чтобы удовлетворялось следующее неравенство:

$$L \frac{(KT)^2}{2} < 1.$$

В этом случае наш оператор будет сжимающим, следовательно, решение интегрального уравнения (10) существует и единственно. После этого мы определяем неизвестную функцию из начальных условий на основе найденного решения.

Рассмотрим конкретный пример

$$tu_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x) - \frac{1}{2}u_t(t, x), \quad (11)$$

Рассмотрим уравнение (11) с начальными условиями (2), (3). Согласно поставленному условию, функция $\psi_0(x) = x$ задана и непрерывно дифференцируема, а функция $\psi_1(x)$ неизвестна. Запишем (11) в операторной форме:

$$D[\sqrt{t}, -1]D[\sqrt{t}, 1]u(t, x) = f(t, x) \quad (12)$$

В наших случаях :

$$p(s, t, x) = x + \int_s^t \frac{1}{\sqrt{v}} dv = x + 2(\sqrt{t} - \sqrt{s}),$$

$$q(s, t, x) = x - \int_s^t \frac{1}{\sqrt{v}} dv = x - 2(\sqrt{t} - \sqrt{s}),$$

$$(s, t, x) \in Q_2(T).$$

Для этих функций действительно выполняются условия (7) и (8):

$$D[\sqrt{t}, -1]p(s, t, x) = 0,$$

$$D[\sqrt{t}, 1]q(s, t, x) = 0,$$

$$\text{и } p(s, s, x) = x, \quad q(s, s, x) = x.$$

Применяем МДА к уравнению (2):

$$D[\sqrt{t}, 1]u(t, x) = 1 + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} f(s, p(s, t, x)) ds$$

Отсюда получаем:

$$D[\sqrt{t}, 1]u(t, x) = 1 + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} f(s, x + 2\sqrt{t} - 2\sqrt{s}) ds$$

Еще раз применяя МДА к последнему уравнению, окончательно имеем:

$$u(t, x) = q(0, t, x) + 2\sqrt{t} + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{v}} f(v, q(s, t, x) + 2\sqrt{s} - 2\sqrt{v}) dv ds$$

Отсюда получаем:

$$u(t, x) = x + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{v}} f(v, x - 2\sqrt{t} + 4\sqrt{s} - 2\sqrt{v}) dv ds$$

Мы получили решение поставленной задачи. Теперь определим неизвестную функцию. Для этого используем равенство (11):

$$u_t(t, x) = 2f(t, x) - 2tu_{tt}(t, x) + 2u_{xx}(t, x).$$

$$u_t(0, x) = \psi_1(x) = 2f(0, x) + 2u_{xx}(0, x).$$

$$u_{xx}(t, x) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{v}} f_{xx}(v, x - 2\sqrt{t} + 4\sqrt{s} - 2\sqrt{v}) dv ds.$$

$$u_t(0, x) = \psi_1(x) = 2f(0, x).$$

В частном случае, если (11) имеет вид:

$$tu_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = x - \frac{1}{2}u_t(t, x),$$

и $\psi_0(x) = x$, то решение и функция в начальном условии определяются так:

$$u(t, x) = x + 2xt,$$

$$\psi_1(x) = 2x.$$

Заключение. Полученные в статье результаты могут быть обобщены для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Литературы

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
2. Иманалиев М.И. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1992. – Т. 323. – № 3. – С. 410–414.
3. Мамазияева Э.А. Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – Ош, 2014. – № 3. – С. 27–32.
4. Мамбетов Ж.И. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. – №5. – С. 87–90.
5. Садыкова Г. К. Исследование решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / Г.К. Садыкова // Известия ВУЗов Кыргызстана. 2019. – №11. – С.15-19.